

# **Kompressible, viskoelastische Werkstoffe:**

**Experimente, Modellierung und FE-Umsetzung**

**Dissertation**

zur Erlangung des Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)**

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät III

Chemie, Pharmazie, Bio- und Werkstoffwissenschaften  
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Nadine Koprowski-Theiß**

Saarbrücken

2011

Tag des Kolloquiums: 11.03.2011

Dekan:	Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels
Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels
	Prof. Dr.-Ing. Alexander Lion
Vorsitz:	Prof. Dr.-Ing. Markus Stommel
Akad. Mitarbeiter:	Dr.-Ing. Joachim Schmitt

## Zusammenfassung

Poröse bzw. aufgeschäumte Gummimaterialien werden vor allem als Dichtwerkstoffe benutzt. Diese Anwendung erfordert unter anderem genaue Kenntnisse über ihr volumetrisches Verhalten. Außerdem müssen die bei allen Gummimaterialien auftretenden Effekte, wie der Mullins-Effekt, der Payne-Effekt, Thixotropie und auch die Viskoelastizität unter Zug- und Druckbeanspruchungen untersucht werden.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung dieser Materialien unter Einbeziehung der genannten Effekte. Zu diesem Zweck werden experimentelle Untersuchungen für verschiedene Beanspruchungsarten (Zug, Druck, Kompression) sowie unterschiedliche Prozessführungen durchgeführt (z. B. monotone und zyklische Versuche, Versuche mit Haltezeiten, Versuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten).

Auf Grundlage dieser Datenbasis wird ein kontinuumsmechanisches Materialmodell der kompressiblen nichtlinearen Viskoelastizität für finite Deformationen entwickelt, identifiziert und in ein geeignetes Finite Elemente Programm implementiert. Da aufgeschäumtes Gummi ein Zweiphasenmaterial ist, wird die Mehrphasenkontinuumsmechanik zur Modellierung herangezogen.

Abschließend wird das Modell mit realen Bauteilen validiert und die Modellierung des Payne-Effektes untersucht.



## **Abstract**

Porous or rather cellular rubber is mainly used as sealing material. This utilisation demands amongst others the exact knowledge of their volumetric characteristics. In addition all resulting effects of rubber materials, like the Mullins-Effect, the Payne-Effect, the Thixotropy and the viscoelasticity, need to be analysed under points of tensile stress and compressive effects.

This dissertation deals with the modelling of these materials including the earlier named effects. For this aim experimental analyses are executed for different loads (tension, pressure, hydrostatic compression) and various process management (e.g. monotone and cyclic tests, tests with holding times, tests with different velocities).

With this data base a continuum mechanically model of the compressible non-linear viscoelasticity for finite deformation will be developed, identified and implemented in an adequate finite element program. Cellular rubber is a two-phase-material, so that the multiphase continuum mechanics will be consulted to model.

Finally the model will be validated with real compounds and the modelling of the Payne-Effect analysed.



---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Forschung</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>11</b>
3.1	Theorie Poröser Medien . . . . .	11
3.2	Konzept der Volumenanteile . . . . .	13
3.3	Kinematik . . . . .	15
3.4	Bilanzgleichungen . . . . .	24
3.5	Materialtheorie . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Versuchsstände und Experimente</b>	<b>41</b>
4.1	Untersuchungsmethode . . . . .	41
4.2	Probenmaterial und Prüfkörper . . . . .	42
4.3	Versuchsaufbau und Durchführung der uniaxialen Experimente	45

---

4.3.1	Prüfmaschine und Messsysteme . . . . .	45
4.3.2	Uniaxiale Zugversuche . . . . .	46
4.3.3	Uniaxiale Druckversuche . . . . .	63
4.4	Hydrostatische Druckexperimente . . . . .	68
4.4.1	Prüfmaschine und Messsysteme . . . . .	68
4.4.2	Mullins-Effekt . . . . .	73
4.4.3	Grundelastizität . . . . .	75
4.4.4	Viskoelastizität . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Materialmodellierung</b>	<b>83</b>
5.1	Hyperelastisches Teilmaterialmodell . . . . .	83
5.2	Viskoelastisches Teilmaterialmodell . . . . .	86
<b>6</b>	<b>Parameteridentifikation und Simulation</b>	<b>91</b>
6.1	Identifikation und Simulation der Grundelastizität . . . . .	93
6.2	Identifikation und Simulation der Viskoelastizität . . . . .	95
6.3	Validierung der Parameter mit uniaxialen Druckversuchen . . .	102
6.4	Identifikation und Simulation des Vollmaterials . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Numerische Umsetzung mit der FE Methode</b>	<b>111</b>
7.1	Numerische Umsetzung . . . . .	111
7.2	Simulation eines Dichtungsprofils aus Moosgummi . . . . .	116



---

7.3	Simulation eines Verbundbauteils aus Voll- und Moosgummi . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Modellierung des Payne-Effekts</b>	<b>123</b>
8.1	Payne-Effekt . . . . .	123
8.2	Simuliertes Randwertproblem . . . . .	125
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>129</b>
9.1	Darstellung der erzielten Ergebnisse . . . . .	129
9.2	Ausblick auf künftige Arbeiten . . . . .	130
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>132</b>



# 1

---

## Einleitung

---

Der im Zentrum dieser Dissertation stehende Werkstoff „Gummi“ gehört zu der wesentlich umfassenderen Gruppe der Elastomere, deren Materialeigenschaften meist durch den Zusatz aktiver Füllstoffe -wie beispielsweise Silica oder Ruß- den Erfordernissen angepasst werden. Üblicherweise wird vulkanisierter Kautschuk als Gummi bezeichnet.

Gummiwerkstoffe zeichnen sich durch eine stark ausgeprägte nichtlineare Elastizität aus. Aufgrund der hohen Anzahl von unterschiedlichen Kautschuken und Füllstoffen kann eine enorme Vielfalt von Eigenschaften erreicht werden. Bedingt durch die Tatsache, dass ihr typischer Schubmodul meist etwa drei Zehnerpotenzen kleiner ist als ihr typischer Kompressionsmodul, verhalten sich Gummiwerkstoffe in guter Näherung inkompressibel. Sie können in vielen Fällen reversible Dehnungen bis zu einigen 100 % ertragen. Aufgrund ihrer Mikrostruktur, die aus chemisch miteinander vernetzten Polymermolekülen besteht, weisen sie auch inelastische Effekte auf, die sich in Form von Relaxations- oder Kriecheneigenschaften bzw. Geschwindigkeitsabhängigkeit und Hysterese sowie dem Mullins- und dem Payne-Effekt zeigen.

Seit Erfindung der Kautschukvulkanisation haben sich Gummiwerkstoffe ste-

tig weiterentwickelt und sind heute für viele Anwendungen unentbehrlich. Diese umfassen unter anderem Motor- und Fahrwerkklagerungen im Automobilbau, Lagerungen von Rotorblättern bei Hubschraubern sowie Dichtungen, Riemen oder Reifen für verschiedenste Anwendungen.

Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten aufgeschäumten Gummiwerkstoffe werden häufig als Dichtwerkstoffe genutzt, die nicht als näherungsweise inkompressibel behandelt werden dürfen, sondern eine hohe Strukturkompressibilität aufweisen. Aufgrund der großen Vielfalt der Grundwerkstoffe sowie des aufwändigen Herstellungsprozesses ist die Entwicklung neuer Mischungen oder auch die genaue Auslegung der geometrischen Struktur von Dichtungen meist mit hohen Kosten verbunden.

Aus diesem Grund ist beispielsweise die numerische Simulation des Zuschlagens einer Autotür, die mit einer Moosgummidichtung gegenüber der Karosserie abgedichtet ist, von besonderem Interesse. Einerseits geht es darum, Aussagen über die Dichtigkeit sowie die Haltbarkeit der Dichtung zu treffen. Andererseits deformiert sich aber auch die auf die Dichtung gepresste, geschlossene Fahrzeugtür und verändert die Oberflächenkontour des Fahrzeugs. Diese Effekte müssen insbesondere beim Design bzw. dem Rohbau der Türen mit berücksichtigt werden.

Neben geeigneten Methoden zur Lösung des jeweiligen Randwertproblems werden kontinuumsmechanische Materialmodelle benötigt, welche die für die jeweilige Anwendung relevanten Materialeigenschaften mit hinreichender Genauigkeit darstellen. Bei dem genannten Beispiel sind Kenntnisse der Strukturkompressibilität, der Relaxationseigenschaften oder auch des statischen und dynamischen Materialverhaltens von großer Bedeutung. Da kommerzielle Finite Elemente Programme heutzutage so weit entwickelt sind, dass selbst komplizierte Randwertprobleme direkt berechnet werden können, liegt das Augenmerk der vorliegenden Arbeit auf der Entwicklung eines kontinuumsmechanischen Materialmodells.

## **Inhalt der Arbeit**

Poröse bzw. aufgeschäumte Gummimaterialien werden vor allem als Dichtwerkstoffe benutzt. Diese Anwendung erfordert unter anderem genaue Kenntnisse über ihr volumetrisches Verhalten. Außerdem müssen die bei allen Gum-

---

mimaterialien auftretenden Effekte wie der Mullins-Effekt, der Payne-Effekt, Thixotropie und auch die Viskoelastizität unter Zug- und Druckbeanspruchungen untersucht und in das zu entwickelnde Materialmodell einbezogen werden. Dies ist Gegenstand dieser Arbeit. Als Modellmaterial wird ein von der Firma *Saargummi International GmbH* zur Verfügung gestelltes Elastomer genutzt. Dieses liegt sowohl in aufgeschäumter Form als auch als Vollmaterial vor. In der vorliegenden Dissertation müssen zunächst umfassende experimentelle Untersuchungen für verschiedene Beanspruchungsarten (Zug, Druck, Kompression) sowie unterschiedliche Prozessführungen durchgeführt werden (z. B. monotone und zyklische Versuche, Versuche mit Haltezeiten, Versuche mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten). Auf Grundlage dieser Datenbasis wird ein kontinuumsmechanisches Materialmodell der kompressiblen nichtlinearen Viskoelastizität für finite Deformationen entwickelt, identifiziert und in ein geeignetes Finite Elemente Programm implementiert. Da aufgeschäumtes Gummi ein Zweiphasenmaterial ist, wird die Mehrphasenkontinuumsmechanik zur Modellierung herangezogen.

## **Ziele und Gliederung der Arbeit**

Nach der Einleitung sowie einem umfassenden Überblick über den aktuellen Stand der Forschung werden die benötigten kontinuumsmechanischen Grundlagen auf Basis der Mehrphasentheorie bereitgestellt. Neben den Grundgleichungen der Mechanik werden auch die in der Thermodynamik verwendeten Bilanzgleichungen eingeführt. Dieses Gerüst bildet die Basis für das darauf folgende Kapitel mit dem Titel „Materialtheorie“, auf dessen Grundlage das spätere Materialmodell entwickelt wird. Auch die Viskoelastizitätstheorie wird in diesem Kapitel an den jeweiligen Stellen erläutert. In dem Kapitel „Experimente und Versuchsstände“ werden die Versuchsstände für die uniaxialen sowie die hydrostatischen Experimente detailliert erläutert. Zudem werden die verschiedenen Messdatensätze aus den jeweiligen Experimenten interpretiert und bereitgestellt. In den folgenden Kapiteln wird ein auf den Experimenten basierendes Materialmodell der nichtlinearen Viskoelastizität für kompressible Stoffe unter finiten Deformationen entwickelt, dessen Materialparameter durch geeignete Optimierungsverfahren identifiziert werden. Auch die Diskussion der Simulationsergebnisse ist hier zu finden. Die Kapitel 7 und 8 befassen sich dann mit den Anwendungen des formulierten Materialgesetzes. In Kapitel 7 wird die Finite Elemente Implementierung des erhaltenen Modells in ein kommerzielles Simulationstool erläutert. An-

schließlich wird das Modell an realen Verbundbauteilen getestet. Das letzte Kapitel beschäftigt sich mit dem bei gefüllten Gummiwerkstoffen unter dynamischen Belastungen auftretenden Payne-Effekt. Dieser wird zunächst in seinen wesentlichen Zügen erläutert. Darauf aufbauend wird das entwickelte Materialmodell auf seine Aussagefähigkeit hinsichtlich des Payne-Effekts untersucht.

Zusammenfassend ergeben sich folgende Ziele:

- Charakterisierung eines porösen Gummiwerkstoffs unter komplexen Zug- und Druckbeanspruchungsprozessen
- Formulierung eines konsistenten thermomechanischen Materialmodells zur Beschreibung der experimentell beobachteten Eigenschaften
- Identifikation der Materialparameter
- Implementierung des Materialmodells in ein kommerzielles Finite Elemente Programm
- Modellierung des Payne-Effekts

# 2

---

## Stand der Forschung

---

Moosgummi ist ein gemischtzelliges, aufgeschäumtes Gummiprodukt, welches über eine geschlossene Außenhaut verfügt. Es wird besonders im Automobilbau bei der Herstellung von Türdichtprofilen und Schläuchen verwendet, ist aber auch im Bereich von elektronischen Bauteilen und Büromaschinen zu finden. Da solche Bauteile hohen mechanischen und thermischen Anforderungen genügen müssen, wird dem Moosgummi als zelligem Vulkanisat in der Forschung ein besonderes Augenmerk geschenkt.

In der Arbeit von Vroomen et al. [144] ist ein Überblick über die Verwendung von Moosgummi als Dichtung im Automobilbau gegeben. Es werden u. a. die Kriterien Dichte, Zellstruktur sowie Blasenbildung in Bezug auf das Leistungsverhalten einer Moosgummidichtung analysiert, wobei auch die Probleme der Reproduzierbarkeit experimenteller Daten angesprochen werden, die in der Kontrollierbarkeit des Herstellungsprozesses begründet liegen. Eine empirisch gestützte Kernaussage dieser Arbeit ist, dass im Kleinmaßstab durchgeführte Versuche bei der Entwicklung von Moosgummi überhaupt keine Korrelation mit der Praxis haben. Deshalb ist es notwendig, Experimente im Halbmaßstab durchzuführen, um die charakteristischen Polymereigenschaften bewerten zu können. In diesem Fall sind die gewonnenen Daten für das Halbzeug im Sinne eines einfachen Bauteils und nicht für das Ma-

terial als solches relevant. Aus kontinuumsmechanischer Sicht muss gesagt werden, dass die Qualität der Beschreibung eines Materials vom verwendeten Modell abhängt. Hier setzt das angestrebte Moosgummi-Modell an, auf das im nächsten Abschnitt näher eingegangen wird.

Der komplizierteste Abschnitt des Herstellungsprozesses von Moosgummi ist im Zusammenspiel von Aufschäumprozess und Vulkanisation zu suchen. Um ein möglichst homogenes, isotropes Moosgummi zu erstellen, ist die Steuerung dieser parallel ablaufenden Prozesse von enormer Bedeutung. Deshalb gibt es eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit dieser Problematik beschäftigen, insbesondere in der Arbeitsgruppe von Professor Haberstroh. Hierin wird sowohl die temperaturabhängige Vernetzung von EPDM<sup>1</sup>-Moosgummi modelliert [49] als auch das Expansionsverhalten chemisch geschäumter Kautschukmischungen untersucht [50]. Ebenso wird die Extrusion von physikalisch geschäumten Kautschukprofilen experimentell betrachtet [51]. Außerhalb dieser Arbeitsgruppe existieren zur Modellierung und Optimierung des Herstellungsprozesses noch eine Vielzahl anderer Veröffentlichungen, z. B. die Arbeiten von Dick [30] und Fuchs [44] oder die Arbeit von Sombatsompop [132], die sich mit der Auswirkung des Vernetzungsprozesses auf Dichte und Aufschäumverhalten von geschäumten Gummivulkanisaten beschäftigt. Es wird durch diese Arbeiten deutlich, dass dem Herstellungsprozess ein eigenes Forschungsfeld gewidmet werden muss und dass an dieser Stelle nicht auf die mechanischen Eigenschaften des fertigen Moosgummiprofils in Bezug auf die Ermittlung von Materialkennwerten eingegangen werden kann.

Von experimenteller Seite gibt es eine gewisse Anzahl von Standardversuchen, die zur Bestimmung der Materialparameter des kompressiblen Moosgummis dienen, wie zum Beispiel der uniaxiale Zugversuch mit Querdehnungsmessung, der Druckversuch zur Ermittlung des Druckverformungsrestes, der einfache Scherversuch sowie der Kompressionsversuch, mit dem bei Ermittlung des Kompressionspunktes auf die Porosität des Materials zurückgeschlossen werden kann.

In der Arbeit von Meguriya et al. [102] wird ein zu diesem Zeitpunkt neuartig hergestellter Silikonkautschuk-Moosgummi experimentell hinsichtlich seiner Wärmeleitfähigkeit, Alterung und seines Druckverformungsrestes untersucht.

Ein wichtiger Effekt, der in dieser Arbeit auch untersucht werden soll, ist der sogenannte Mullins-Effekt. Dieser Effekt tritt bei rußgefüllten Elastomeren

---

<sup>1</sup>Ethylen-Propylen-Dien-Kautschuk



---

auf. In der Vielzahl von vorliegenden Arbeiten über den Mullins-Effekt existieren zwei unterschiedliche Definitionen. Bei Mullins [109] teilt sich der Effekt in einen irreversiblen und einen reversiblen Anteil auf. Bei dem ersten Belastungszyklus kommt es zum irreversiblen Aufbrechen von Bindungen zwischen Füllern und Polymermatrix. Der Heilungsprozess dieser Bindungen kann ohne äußere Energiezufuhr nicht stattfinden. Der reversible Anteil des Effektes beschreibt eine langsame Entfestigung in den darauf folgenden Zyklen, die nach einer entsprechenden Ruhezeit wieder vollständig verschwindet.

Bei der zweiten Definition, wie sie von Büche [24] verwendet wird, beschreibt der Mullins-Effekt nur den irreversiblen Anteil der Entfestigung und der reversible Anteil wird über die Viskoelastizität erklärt. In dieser Arbeit wird die zweite Definition, wie auch von Büche, verwendet.

Zudem spielt auch das Verhalten bei moderaten Dehnraten für rußgefüllte Elastomere eine sehr wichtige Rolle. Bei dynamischen Belastungen weisen rußgefüllte Elastomere amplitudenabhängige Entfestigungseffekte auf. Dies wird häufig als Payne-Effekt bezeichnet. Bei diesem Effekt handelt es sich um einen thixotropen Effekt. Der Begriff Thixotropie stammt ursprünglich aus der Rheologie und beschreibt den Auf- und Abbau der Mikrostruktur [6] auf unterschiedlichen Zeitskalen. Dadurch weisen thixotrope Materialien eine Abhängigkeit der Viskosität von der Deformationsgeschichte auf. Im Zusammenhang mit dem Payne-Effekt müssen vor allem die Arbeiten von Payne [112, 113], Haupt [60], Lion [91, 94, 95, 96, 97] und weitere Arbeiten [35, 65, 81, 143] genannt werden. Dieser Effekt ist im Gegensatz zum Mullins-Effekt reversibel.

Schon in der Mitte des letzten Jahrhunderts haben sich Wissenschaftler mit der Modellierung der Hyperelastizität von gummiartigen Materialien bei finiten Deformationen beschäftigt. An dieser Stelle müssen die Arbeiten von Treloar [133, 134, 135, 136] genannt werden.

Veröffentlichungen auf dem Gebiet der Modellierung kompressibler Materialien, insbesondere kompressibler Schäume und gummiartiger Materialien, beinhalten die experimentellen Arbeiten als einen Teilabschnitt, der direkt an die Modellierung und Parameteridentifikation gekoppelt ist. Von der Modellierungsseite her müssen das Gent-Thomas-Modell [45] und das Blatz-Ko-Modell [14] als erste Modelle genannt werden, die in der Lage sind, das Verhalten von zellulären Schäumen abzubilden. Das für kleine Deformationen gültige hyperelastische Gent-Thomas-Modell ist mikromechanisch aus einem Netzwerk dünner Fäden motiviert und berücksichtigt somit a priori eine Konstitutivgleichung zur Beschreibung des Deformationsverhaltens

von offenzelligen Schäumen. Die Materialparameter des Modells werden dabei über uniaxiale Zug- und Druckversuche im Bereich kleiner Verformungen bzw. endlicher Kompression validiert, siehe Gent [45]. Das für finite Deformationen gültige isotrope, hyperelastische Blatz-Ko-Modell wird ohne Berücksichtigung der Mikromechanik über einen spezifizierten Ansatz der freien Energiefunktion beschrieben. Hierbei wird ein volumetrischer Erweiterungsterm in Form der dritten Invarianten des Deformationsgradienten eingeführt. Die Materialparameter der aus der Verzerrungsenergiefunktion resultierenden Spannungs-Dehnungsantwort werden anhand von uniaxialen und biaxialen Zugversuchen sowie über den einfachen Scherversuch bestimmt [14].

Beatty [8] zeigt, dass sich das Gent-Thomas-Modell aus dem finiten Blatz-Ko-Modell durch konsistente Linearisierung ableiten lässt. Des Weiteren gibt es eine Vielzahl von Arbeiten, die sich allgemein mit der Beschreibung kompressiblen Materialverhaltens befassen, wie z. B. Diehl [34], Moreau [107] und Görke et al. [48]. All diesen Arbeiten ist gemein, dass sie kompressibles Materialverhalten entweder über ein inkompressibles Materialgesetz mit kompressiblem Erweiterungsterm oder aber über die Einbeziehung der Volumendehnung in die Verzerrungsenergiefunktion selbst in Form der dritten Invarianten beschreiben. Für ein poröses Material mit inkompressibler Festkörperphase ist diese Beschreibung allerdings für den Bereich um den Kompressionspunkt unzureichend und führt somit zu unphysikalischen Ergebnissen. Dieses Problem wird von Ehlers & Eipper [39] an einem Zwei-Phasen-Modell diskutiert und es wird ein neues Elastizitätsgesetz auf der Basis der Theorie Poröser Medien (TPM) entwickelt und numerisch umgesetzt, welches in der Lage ist, das hyperelastische, kompressible Materialverhalten auch am Kompressionspunkt adäquat beschreiben zu können. Eine weitere Arbeit, die elastomere, kompressible Schäume unter Berücksichtigung der Mikrostruktur untersucht stammt von Kinney et al. [75]. Darin werden große Deformationen der Proben im Rahmen von Kompressionstests untersucht, wobei auf der Modellierungsseite auf die Arbeit von Gibson & Ashby [46] verwiesen wird, die ihrerseits für kleine Deformationen gilt und den Einfluss der Dichteänderung auf den effektiven Modul des Materials in Form einer Konstitutivgleichung beschreibt.

Damit wird deutlich, dass Moosgummi auf Grund der porösen Mikrostruktur als Mehrphasenmaterial betrachtet werden kann. Als theoretischer Rahmen bietet sich daher die TPM an, um die Eigenschaften von Moosgummi zu modellieren.

Angefangen mit den Arbeiten von Bowen [20, 21, 22], Mow et al. [108], de Boer [16, 17, 18], Ehlers [37, 38, 39, 40] und Diebels [31, 32] haben sich ei-

---

nige Forschergruppen entwickelt, die sich mit dieser Theorie beschäftigen. Aus Übersichtlichkeitsgründen sollen hier nur die für diese Arbeit relevanten Arbeiten, und zwar die Dissertationen von Eipper [42] und Markert [101], berücksichtigt werden. In der Arbeit von Eipper geht es u. a. um das schon weiter oben erwähnte Elastizitätsgesetz für ein Mehrphasenmodell mit materiell inkompressibler Festkörperphase. Die Arbeit von Markert beschäftigt sich mit der Viskoelastizität in porösen Medien und deren Anwendung auf offenporige polymere Schäume. Von besonderem Interesse sind die experimentell ermittelten Maßstabeffekte an Schaumklötzen in dynamischen Versuchen, deren Ursache im Ausströmprozess der Gasphase zu suchen ist und bei denen der Übergang vom Zug- in den Druckbereich stetig beschrieben wird.

Ein weiterer wichtiger Diskussionspunkt bezüglich der Modellierung von Moosgummi wird in der Arbeit von Görke et al. [48] angesprochen. Dabei geht es um die ausgeprägte Bimodularität des Werkstoffes, d. h. um unterschiedliches Materialverhalten unter Zug- und Druckbeanspruchungen. Ausgehend von der freien Energiefunktion werden unterschiedliche Materialmodelle für die beiden angesprochenen Bereiche gewählt und somit auch Materialparameter abhängig vom Zug- oder Druckbereich ermittelt. Aus kontinuumsmechanischer Sicht sollte das Materialmodell jedoch so gut sein, dass eine solche Unterscheidung nicht vonnöten ist.

Alle bis hier präsentierten Arbeiten zielen weitgehend auf den hyperelastischen Bereich des jeweiligen Werkstoffes ab. Zeitabhängige Effekte, wie z. B. die Viskosität, werden u. a. in den Arbeiten von Chacko & Sivakumar [25] und Shen et al. [129] berücksichtigt. Während sich die Arbeit von Shen et al. [129] vorwiegend mit der Modellierung eines kompressiblen Schaumes unter zyklischer Belastung beschäftigt, wird bei Chacko & Sivakumar [25] ein Verfahren zur Modellierung von Kriechprozessen in geschäumten Gummimaterialien vorgestellt, welches in der Lage ist, experimentell ermittelte Kurven sehr gut abzubilden. Mahnkopf [100] und Ehlers [41] haben sich besonders mit der Modellierung des plastischen bzw. viskoelastischen Verhaltens kompressibler Werkstoffe befasst.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass es eine Vielzahl von Arbeiten gibt, die sich mit der thermomechanischen Modellierung gummielastischer, quasi-inkompressibler Materialien beschäftigen. Eine vollständige Aufzählung aller erschienenen Arbeiten auf diesem Forschungsgebiet kann aufgrund der Vielzahl der Veröffentlichungen nicht erfolgen. Es sollen jedoch einige Autoren mit ihren erschienenen Arbeiten namentlich erwähnt werden, welche in be-

sonderem Maße auf dem Gebiet der Materialmodellierung ausgewiesen sind, wie z. B. Coleman et al. [27, 28], Chadwick [26], Alts [4], Haupt [60, 61, 62], Miehe et al. [47, 103, 104, 105, 106], Keck [74], Reese [117], Reese & Govindjee [118, 119], Reese & Wriggers [120], Lion [87, 88, 89, 92], Sedlan [126], Amin [5], Laiarinandrasana [84], Boyce et al. [10, 23], Besdo [11, 12], Ihlemann [72] und andere. Trotz dieser Vielfalt gibt es aber nur wenige Arbeiten, die auf das Material Moosgummi als zelliges Vulkanisat hin ausgerichtet sind. Dies betrifft sowohl den Teilaspekt der Modellierung als auch den Teilaspekt der experimentellen Untersuchung der mechanischen Eigenschaften.

Neben den makroskopischen Kontinuumsmodellen existieren zur Beschreibung der Eigenschaften polymerer Werkstoffe auch mikromechanische Zugänge auf der Basis von Ansätzen der statistischen Mechanik, die für dieses Projekt jedoch nicht relevant sind, aber dennoch genannt werden müssen. Dies sind u. a. die Arbeiten von Reese [117], Reese & Wriggers [121], Lulei [98], Miehe [47, 104, 105] und der Übersichts-Artikel von Boyce & Arruda [23]. Da in der vorliegenden Arbeit auf ein makroskopisches Modell zur Beschreibung von Moosgummi abgezielt wird, soll nicht näher auf die Arbeiten eingegangen werden, die sich mit der mikromechanischen Untersuchung geschäumter Materialien befassen wie z. B. Gibson & Ashby [46], Askar [2] und die Arbeiten von Hohe [66] bzw. Hohe & Becker [9, 67, 68, 69] sowie Diebels & Steeb [33].

Um die Materialparameter der entwickelten Modelle aus experimentellen Versuchsdaten bestimmen zu können, stehen unterschiedliche Optimierungsverfahren zur Verfügung, vgl. z. B. Mahnken [99], Bartholdt [7], Scheday [124], Rechenberg [115] und Schwefel [125]. Eine spezielle Anwendung numerischer sowie experimenteller Untersuchungen und die Parameteridentifikation für gummielastische Werkstoffe ist u. a. von Hartmann [52, 53, 58] publiziert worden.

mater

# 3

---

## Kontinuumsmechanische Grundlagen

---

Mit Hilfe der Kontinuumsmechanik können Aussagen über das Verhalten materieller Körper bei thermischer und mechanischer Beanspruchung getroffen werden. Die dazu benötigten Hilfsmittel sind die Kinematik, die Bilanzgleichungen und die Materialtheorie. Im folgenden Kapitel sollen die Grundlagen der Kontinuumsmechanik vermittelt werden. Zudem sollen die benötigten Größen eingeführt und erläutert werden. Da das untersuchte Material aus zwei Phasen besteht, werden zu Anfang dieses Kapitels die Theorie Poröser Medien kurz erläutert und die kontinuumsmechanischen Grundlagen auf Basis der Mehrphasentheorie eingeführt.

### 3.1 Theorie Poröser Medien

Festkörper-Gas-Probleme stellen in der Mechanik eine Schwierigkeit dar. Solche Probleme können auf unterschiedliche Arten gelöst werden. Zum einen kann jedes Material mit Hilfe der Einphasentheorien eigenständig beschrieben werden, was sehr aufwändig ist (Oberflächenkopplung). Andererseits kann

die Mischung homogenisiert und das Problem als verschmiertes Mehrphasenkontinuum gelöst werden. Beide Möglichkeiten haben Vor- und Nachteile. Die erste Methode beschreibt die Teilkörper als Einphasenmaterial mit Hilfe bekannter Konstitutivgleichungen (Abb. 3.1).

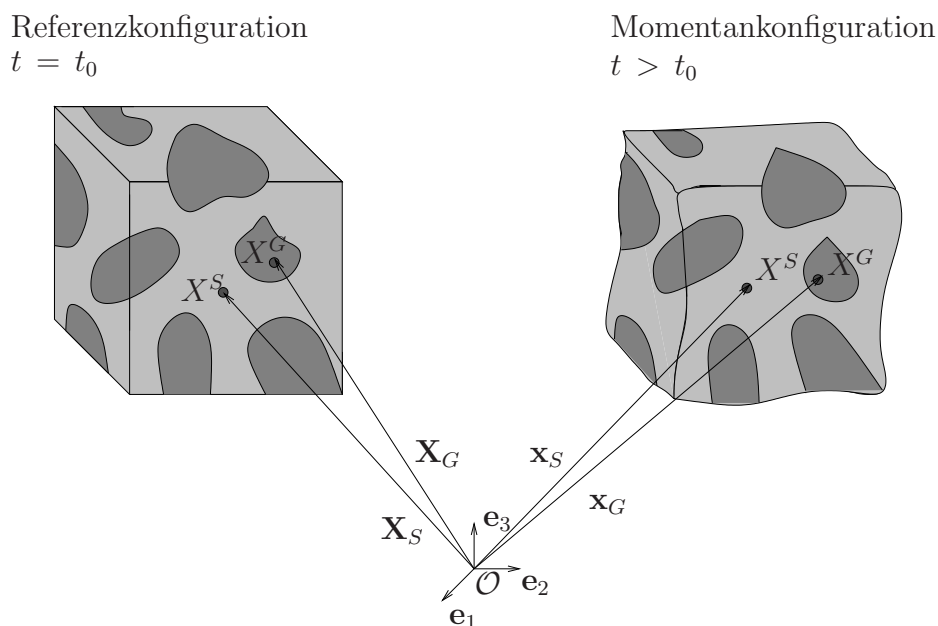


Abbildung 3.1: Festkörper-Gas-Problem mit individuellen Bewegungsfunktionen, Ehlers [37]

Die Formulierung der notwendigen Übergangs- und Kontaktbedingungen ist aufgrund der in der Regel unbekannt inneren Porenstruktur und der unbekannt Geometrie der Einzelkörper häufig unmöglich. Daher wird ein Mischungsansatz gewählt, der nicht die einzelnen Teilkörper beschreibt, sondern die jeweiligen physikalischen Eigenschaften der Körper im Mittel wiedergibt. Um repräsentative Aussagen treffen zu können muss vorausgesetzt werden, dass der betrachtete Bereich groß genug ist, um eine statistische Aussage zuzulassen, zusätzlich müssen die lokalen Strukturen fein genug sein, um eine solche Modellbildung zu gestatten.

Durch diese Durchschnittsbildung erhält man ein Kontinuum mit statistisch verteilten, unvermischbaren Konstituierenden (Abb. 3.2). Diese Vorstellung ist die Grundlage der Mischungstheorie, die in Arbeiten von Truesdell [137] und Truesdell & Topin [139], eingeführt wurde. In dieser Theorie ist allerdings kein volumetrisches Maß der Konstituierenden in der Mischung enthalten, so dass bei porösen Medien zusätzlich auf das Konzept der Volumenanteile

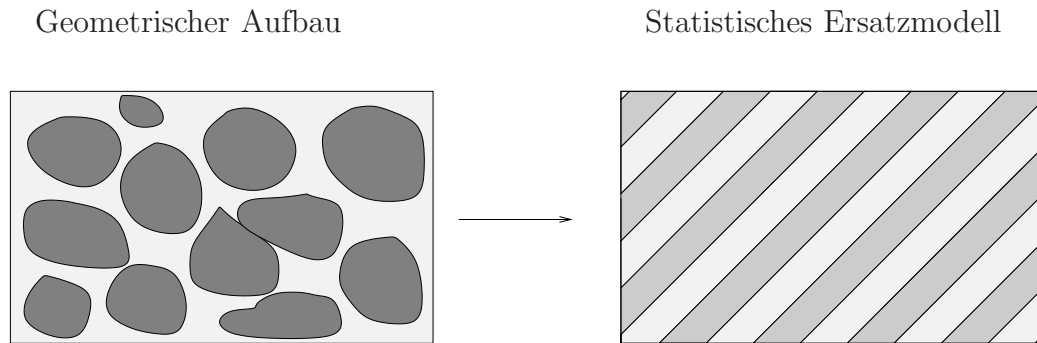


Abbildung 3.2: Gasgesättigter granularer Festkörper

zurückgegriffen wird. Hierzu sei auf die Arbeit von Bowen [21] verwiesen. Die Theorie Poröser Medien setzt sich zusammen aus der Mischungstheorie und aus dem Konzept der Volumenanteile. Diese Theorie soll im Folgenden erläutert werden. Hierbei wird Bezug auf die Arbeiten von Ehlers [37, 38] und Diebels [32] genommen.

## 3.2 Konzept der Volumenanteile

In der Theorie Poröser Medien (TPM) wird davon ausgegangen, dass alle  $k$  Teilkörper (poröser Feststoff und  $k - 1$  Poreninhaltsstoffe) statistisch im Kontrollraum, dem REV (Repräsentatives Elementarvolumen), verteilt sind. Dies führt bei der Durchschnittsbildung zu einem statistischen Ersatzmodell der Mischung  $\varphi$  mit superponierten und interagierenden Konstituierenden  $\varphi^\alpha$

$$\varphi = \sum_{\alpha=1}^k \varphi^\alpha. \quad (3.1)$$

Damit setzt sich das Volumen  $V$  des Körpers  $\mathcal{B}$  zusammen aus der Summe der Partialvolumen  $V^\alpha$  der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  in  $\mathcal{B}$

$$V = \int_{\mathcal{B}} dv = \sum_{\alpha=1}^k V^\alpha \quad \text{mit} \quad V^\alpha = \int_{\mathcal{B}} dv^\alpha = \int_{\mathcal{B}} n^\alpha dv. \quad (3.2)$$

Der hier genannte Volumenanteil  $n^\alpha$  ist somit definiert als der lokale Quotient des Volumenelements  $dv^\alpha$  von  $\varphi^\alpha$ , bezogen auf das Volumenelement  $dv$  von  $\varphi$

$$n^\alpha = \frac{dv^\alpha}{dv}. \quad (3.3)$$

Mit dieser Gleichung gilt die Sättigungsbeziehung

$$\sum_{\alpha=1}^k n^\alpha = 1. \quad (3.4)$$

Basierend auf der Definition von  $n^\alpha$  werden noch zwei unterschiedliche Dichtefunktionen für die Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  benötigt. Die effektive Dichte

$$\rho^{\alpha R} = \frac{dm^\alpha}{dv^\alpha}, \quad (3.5)$$

die das lokale Massenelement  $dm^\alpha$  auf das lokale Volumenelement  $dv^\alpha$  bezieht, und die Partialdichte

$$\rho^\alpha = \frac{dm^\alpha}{dv}, \quad (3.6)$$

die dasselbe lokale Massenelement auf das Volumenelement der Mischung  $dv$  bezieht. Mit diesen Definitionen ergibt sich, dass die Dichtefunktionen über die Volumenanteile gekoppelt sind

$$dm^\alpha = \left\{ \begin{array}{l} \rho^{\alpha R} dv^\alpha \\ \rho^\alpha dv \end{array} \right\} \rightarrow \rho^\alpha = n^\alpha \rho^{\alpha R}. \quad (3.7)$$



Auf dieser Basis sollen nun die zur Beschreibung eines Mehrphasenkontinuums notwendige Theorie zu den Gebieten Kinematik, Bilanzgleichungen und Materialtheorie eingeführt werden.

### 3.3 Kinematik

In der Kontinuumsmechanik wird vorausgesetzt, dass die Materie im Körper kontinuierlich verteilt ist. Der Körper besteht also aus unendlich vielen, materiellen Punkten, die seine physikalischen Eigenschaften tragen. Die Kinematik beschäftigt sich mit der Beschreibung der Bewegung und der Deformation solcher Körper. Um diese Bewegung explizit beschreiben zu können, werden sogenannte Konfigurationen eingeführt. Innerhalb der TPM werden superponierte Kontinua mit inneren Wechselwirkungen und individuellen Bewegungszuständen beschrieben. Man geht hierbei davon aus, dass zu jeder Zeit  $t$  jeder Raumpunkt  $\mathbf{x}$  der aktuellen Konfiguration gleichzeitig von materiellen Punkten  $X^\alpha$  aller Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  eingenommen wird, die aus unterschiedlichen Referenzlagen  $\mathbf{X}_\alpha$  zur Zeit  $t_0$  stammen (Abb. 3.3). Jede Konstituierende besitzt eine ein-eindeutige Bewegungsfunktion

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t), \quad (3.8)$$

somit kann sich zur Zeit  $t$  an jedem Raumpunkt  $\mathbf{x}$  nur ein materieller Punkt  $X^\alpha$  von  $\varphi^\alpha$  befinden. Da eine ein-eindeutige Bewegung gefordert ist, müssen inverse Bewegungsfunktionen  $\chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t)$  im Zusammenhang mit nicht-singulären Jacobi-Determinanten  $J_\alpha$  existieren:

$$\mathbf{X}_\alpha = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad J_\alpha = \det \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_\alpha} \neq 0. \quad (3.9)$$

Aus Gleichung (3.8) folgt, dass jeder Konstituierenden ein eigenes Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld zugeordnet ist.

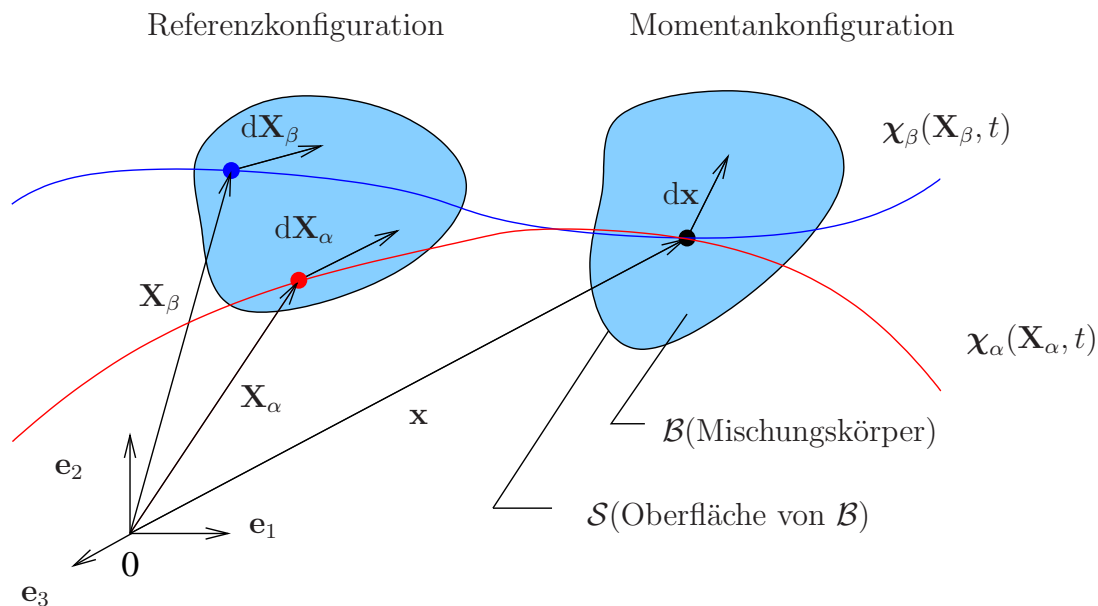


Abbildung 3.3: Referenzkonfiguration und Bewegung (vgl. Diebels [32])

Daraus folgt die Lagrangesche Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t) &= \frac{\partial \chi_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t)}{\partial t} = \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t), \\ \mathbf{x}''_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t) &= \frac{\partial^2 \chi_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t)}{\partial t^2} = \mathbf{a}_{\alpha}(\mathbf{X}_{\alpha}, t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

und mit der inversen Bewegungsfunktion die Eulersche Darstellung

$$\mathbf{x}'_{\alpha} = \mathbf{x}'_{\alpha}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}''_{\alpha} = \mathbf{x}''_{\alpha}(\mathbf{x}, t). \quad (3.11)$$

In diesen Darstellungen sind die materiellen Zeitableitungen bezüglich der Bewegung der Konstituierenden  $\varphi^{\alpha}$  mit  $(\cdot)'_{\alpha}$  gekennzeichnet. Die Mischungsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\rho} \sum_{\alpha=1}^k \rho^{\alpha} \mathbf{x}'_{\alpha} \quad \text{mit} \quad \rho = \sum_{\alpha=1}^k \rho^{\alpha} \quad (3.12)$$

und gibt mit der Mischungsdichte  $\rho$  die lokale Schwerpunkts-*geschwindigkeit* des Gesamtkörpers wieder.

Die materielle Zeitableitung einer hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion  $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{x}, t)$ , die mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{x}'_\alpha$  der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  gebildet wird, lautet dann:

$$(\mathbf{\Gamma})'_\alpha = \frac{d_\alpha}{dt} \mathbf{\Gamma} = \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{x}'_\alpha. \quad (3.13)$$

Bezüglich der Schwerpunktsbewegung erhält man

$$\dot{\mathbf{\Gamma}} = \frac{d}{dt} \mathbf{\Gamma} = \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{\Gamma} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.14)$$

Bei gekoppelten Festkörper-Gas-Problemen wird häufig die Festkörperbewegung in der Lagrangeschen Darstellung mit Hilfe des Verschiebungsvektors

$$\mathbf{u}_S = \mathbf{x} - \mathbf{X}_S \quad (3.15)$$

und die Gasbewegung in einer modifizierten Eulerschen Darstellung relativ zum sich deformierenden Festkörper mit Hilfe der Sicker-*geschwindigkeit*

$$\mathbf{w}_G = \mathbf{x}'_G - \mathbf{x}'_S \quad (3.16)$$

angegeben. Mit den Gleichungen (3.8) und (3.9) ergeben sich der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}_\alpha$  und der inverse Deformationsgradient  $\mathbf{F}_\alpha^{-1}$  zu

$$\mathbf{F}_\alpha = \text{GRAD}_\alpha \mathbf{x}, \quad \mathbf{F}_\alpha^{-1} = \text{grad } \mathbf{X}_\alpha. \quad (3.17)$$

Das Symbol  $\text{GRAD}_\alpha$  steht hier für die partielle Ableitung nach dem Ortsvektor  $\mathbf{X}_\alpha$  der Referenzlage von  $\varphi^\alpha$ . Der Deformationsgradient bildet ein materielles Linienelement  $d\mathbf{X}_\alpha$  der Referenzkonfiguration (RK) auf ein Linienelement  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration (MK) ab

$$\mathbf{F}_\alpha \cdot d\mathbf{X}_\alpha = d\mathbf{x}. \quad (3.18)$$

Dies lässt sich auch für Flächen- und Volumenelemente herleiten und man

erhält

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= (\det \mathbf{F}_\alpha) \mathbf{F}_\alpha^{-T} \cdot d\mathbf{A}_\alpha, \\ dv &= (\det \mathbf{F}_\alpha) dV_\alpha, \end{aligned} \quad (3.19)$$

worin  $J_\alpha = \det \mathbf{F}_\alpha$  die Jacobi-Determinante der Phase  $\varphi^\alpha$  darstellt.

Der Deformationsgradient eignet sich allerdings nicht zur Beschreibung der Verzerrung eines materiellen Körpers, da er neben der Deformation auch eine Drehung beinhaltet. Aus diesem Grund wird er polar in einen eigentlich orthogonalen Tensor  $\mathbf{R}_\alpha$  und einen symmetrisch positiv definiten Tensor zerlegt

$$\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \cdot \mathbf{U}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha \cdot \mathbf{R}_\alpha. \quad (3.20)$$

Durch diese Zerlegung erhält man die Strecktensoren  $\mathbf{U}_\alpha$  und  $\mathbf{V}_\alpha$ . Gemäß der Position in der polaren Zerlegung heißen  $\mathbf{U}_\alpha$  rechter Cauchyscher Strecktensor und  $\mathbf{V}_\alpha$  linker Cauchyscher Strecktensor. Damit gelingt es Verzerrungsmaße zu definieren, die keine lokale Drehung beinhalten. Auf dieser Basis erhält man als Maß der Referenzkonfiguration den rechten Cauchy-Green-Deformationstensor der Phase  $\varphi^\alpha$

$$\mathbf{C}_\alpha := \mathbf{F}_\alpha^T \cdot \mathbf{F}_\alpha = \mathbf{U}_\alpha^2 \quad (3.21)$$

und als Maß der Momentankonfiguration den linken Cauchy-Green-Deformationstensor der gleichen Phase

$$\mathbf{B}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^T = \mathbf{V}_\alpha^2. \quad (3.22)$$

Diese Deformationstensoren nehmen im undefor mierten Zustand den Wert des Einheitstensors  $\mathbf{I}$  an, was zur Einführung der Verzerrungstensoren führt. Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor ist definiert als

$$\mathbf{E}_\alpha := \frac{1}{2} (\mathbf{C}_\alpha - \mathbf{I}) \quad (3.23)$$

und bezieht sich auf die Referenzkonfiguration. Im Gegensatz dazu bezieht sich der Euler-Almansi-Tensor auf die Momentankonfiguration und ist defi-

niert als

$$\mathbf{A}_\alpha := \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}_\alpha^{-1}). \quad (3.24)$$

Die linearisierte Variante der Verzerrungstensoren entspricht der Ingenieursverzerrung. Auch hier gibt es einen Tensor, der sich auf die Referenzkonfiguration sowie einen weiteren, der sich auf die Momentankonfiguration bezieht. Beide finiten Verzerrungstensoren lassen sich ineinander transformieren. Der Transport einer tensoriellen Größe der Referenzkonfiguration in eine Größe der Momentankonfiguration wird hierbei als Vorwärtstransport („push forward“) bezeichnet, der Transport einer Größe der Momentankonfiguration zurück in die Referenzkonfiguration als Rückwärtstransport („pull back“)

$$\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \cdot \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha \quad (\text{„pull back“}), \quad (3.25)$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{-T} \cdot \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^{-1} \quad (\text{„push forward“}).$$

Zuletzt sollen noch die Geschwindigkeitsgradienten eingeführt werden. Hier sind der materielle Geschwindigkeitsgradient

$$(\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha = \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial \mathbf{X}_\alpha} = \text{GRAD}_\alpha \mathbf{v}_\alpha \quad (3.26)$$

und der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L}_\alpha = (\mathbf{F}_\alpha)'_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^{-1} \quad (3.27)$$

von Bedeutung. Üblicherweise wird der räumliche Geschwindigkeitsgradient additiv in einen symmetrischen und einen schiefssymmetrischen Tensor aufgespalten

$$\mathbf{L}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha + \mathbf{W}_\alpha \quad \text{mit} \quad \mathbf{D}_\alpha = \mathbf{D}_\alpha^T \quad \text{und} \quad \mathbf{W}_\alpha = -\mathbf{W}_\alpha^T. \quad (3.28)$$

Dabei heißen  $\mathbf{D}_\alpha$  Deformationsgeschwindigkeitstensor und  $\mathbf{W}_\alpha$  Wirbeltensor von  $\varphi^\alpha$ . Bildet man weiterhin die materielle Zeitableitung des Green-Lagrangischen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}_\alpha$ , so findet man folgenden Zusammen-

hang

$$\mathbf{D}_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^{-T} \cdot (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^{-1}, \quad (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha = \mathbf{F}_\alpha^T \cdot \mathbf{D}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha. \quad (3.29)$$

### Multiplikativer Split des Deformationsgradienten

Im weiteren Verlauf der Arbeit soll ein hochporöses Elastomer untersucht werden. Aus diesem Grund bietet es sich an, bei der Materialmodellierung einen volumetrisch-isochoren Split des Deformationsgradienten vorzunehmen.

Die volumetrisch-isochore Zerlegung ermöglicht es Volumen- und Gestaltsänderungen eines Probenkörpers disjunkt zu betrachten. Ausgangspunkt der volumetrisch-isochoren Zerlegung ist die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten einer Phase  $\varphi^\alpha$  in die Volumendeformation  $\bar{\mathbf{F}}_\alpha$  und die Gestaltsänderung  $\hat{\mathbf{F}}_\alpha$

$$\mathbf{F}_\alpha = \bar{\mathbf{F}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{F}}_\alpha. \quad (3.30)$$

Nach Gleichung (3.19) gilt  $dv = J_\alpha dV_\alpha$  und die Information über die Volumendehnung steckt somit in der Jacobi-Determinante  $J_\alpha = \det \mathbf{F}_\alpha$ . Die Forderung, dass die Volumendeformation nur den volumetrischen Anteil der Deformation beinhaltet, führt zu einem nur auf der Diagonalen besetzten Tensor

$$\bar{\mathbf{F}}_\alpha = J_\alpha^{\frac{1}{3}} \mathbf{I}. \quad (3.31)$$

Der Gestaltsänderungsanteil (isochorer Anteil) der Deformation wird dadurch zu

$$\hat{\mathbf{F}}_\alpha = \bar{\mathbf{F}}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{F}_\alpha = J_\alpha^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_\alpha \quad (3.32)$$

bestimmt. Für die Formulierung der Materialgesetze wird der linke isochore Cauchy-Green-Deformationstensor benötigt. Diesen erhält man analog zu Gl.

(3.22), indem man den isochoren Deformationsgradienten verwendet

$$\hat{\mathbf{B}}_\alpha = \hat{\mathbf{F}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{F}}_\alpha^T = J_\alpha^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_\alpha \cdot J_\alpha^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F}_\alpha^T = J_\alpha^{-\frac{2}{3}} \mathbf{F}_\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^T = J_\alpha^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B}_\alpha. \quad (3.33)$$

In den dieser Arbeit zu Grunde liegenden Versuchen wird sowohl im Zug- als auch im Druckbereich viskoelastisches Verhalten beobachtet. Daher müssen sowohl der isochore als auch der volumetrische Anteil des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil aufgeteilt werden. Da dies für beide Anteile analog durchgeführt wird, soll es an dieser Stelle nur für den allgemeinen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_\alpha$  und nicht für den volumetrischen und den isochoren Anteil von  $\varphi^\alpha$  eingeführt werden. Für die Konstituierende  $\varphi^\beta$  wird diese Aufspaltung nicht vorgenommen (Abb. 3.4).

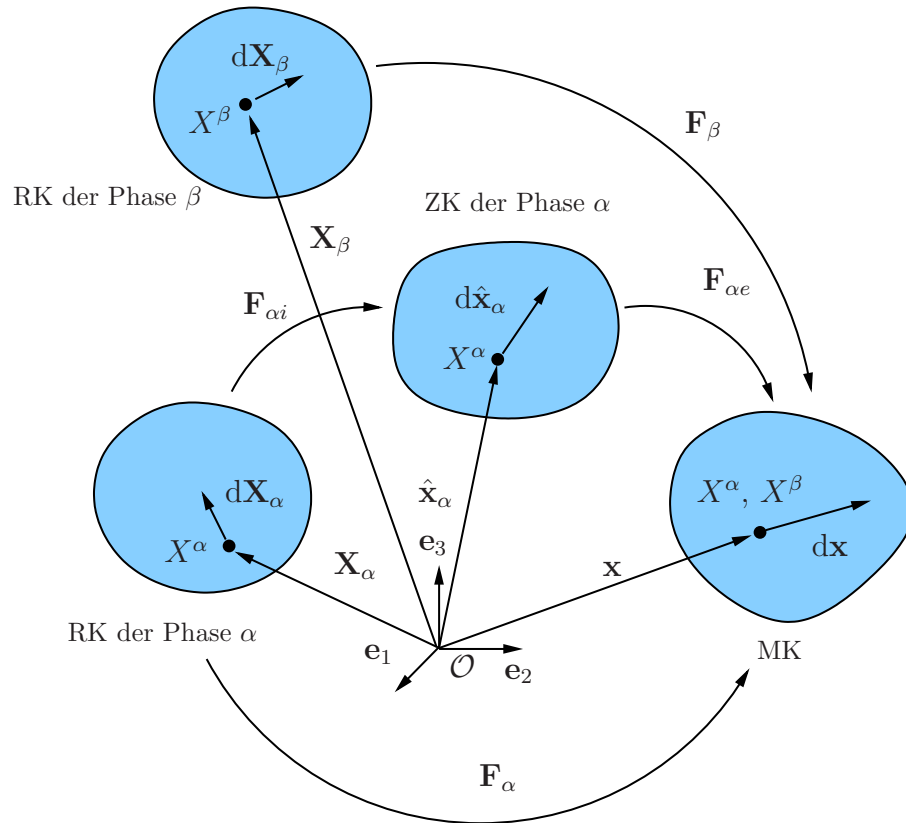


Abbildung 3.4: Einführung einer fiktiven Zwischenkonfiguration (ZK)

$\mathbf{F}_\alpha$  wird multiplikativ in einen elastischen Anteil  $\mathbf{F}_{\alpha e}$  und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{F}_{\alpha i}$  aufgespalten (vgl. Sidoroff [130]). Diese Aufspaltung wurde zuerst im Rahmen der finiten Plastizitätstheorie von Kröner [83] und Lee

[85, 86] vorgeschlagen. Damit wird eine fiktive Zwischenkonfiguration (ZK) eingeführt (siehe Abb. 3.4), die ihre eigenen Verzerrungstensoren beinhaltet. Zwischen den Konfigurationen bestehen wiederum die mathematischen Beziehungen „push forward“ bzw. „pull back“. Auf der Zwischenkonfiguration entsteht der Verzerrungstensor einer Phase  $\mathbf{\Gamma}_\alpha$ , der sich aus dem Vorwärtstransport des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}_\alpha$  mit dem inelastischen Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_{\alpha i}$ ,

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i}^{-T} \cdot \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1}, \quad (3.34)$$

oder aus dem Rücktransport des Almansischen Verzerrungstensors mit dem elastischen Anteil  $\mathbf{F}_{\alpha e}$ ,

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha e}^T \cdot \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{F}_{\alpha e}, \quad (3.35)$$

auf die Zwischenkonfiguration ergibt. Führt man die genannten Operationen aus, so lässt sich der Verzerrungstensor  $\mathbf{\Gamma}_\alpha$  der Zwischenkonfiguration aufspalten, in einen elastischen Anteil  $\mathbf{\Gamma}_{\alpha e}$  vom Green-Lagrange-Typ und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{\Gamma}_{\alpha i}$  vom Almansi-Typ

$$\mathbf{\Gamma}_\alpha = \mathbf{\Gamma}_{\alpha e} + \mathbf{\Gamma}_{\alpha i} \quad (3.36)$$

mit

$$\mathbf{\Gamma}_{\alpha e} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{\alpha e}^T \cdot \mathbf{F}_{\alpha e} - \mathbf{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{\Gamma}_{\alpha i} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_{\alpha i}^{-T} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1}). \quad (3.37)$$

Mit den Definitionen

$$\mathbf{C}_{\alpha e} := \mathbf{F}_{\alpha e}^T \cdot \mathbf{F}_{\alpha e} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}_{\alpha i}^{-1} := \mathbf{F}_{\alpha i}^{-T} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1} \quad (3.38)$$

werden der rechte elastische Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{C}_{\alpha e}$  bzw. der inverse linke inelastische Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}_{\alpha i}^{-1}$  als Deformationsmaße der Zwischenkonfiguration definiert. Analog erhält man auf der Referenzkonfiguration den rechten inelastischen Deformationstensor  $\mathbf{C}_{\alpha i}$  und



auf der Momentankonfiguration den linken elastischen Deformationstensor  $\mathbf{B}_{\alpha e}$

$$\mathbf{C}_{\alpha i} := \mathbf{F}_{\alpha i}^T \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}, \quad \mathbf{B}_{\alpha e} := \mathbf{F}_{\alpha e} \cdot \mathbf{F}_{\alpha e}^T. \quad (3.39)$$

Die Verwendung der einzelnen kontinuumsmechanischen Größen wird in den Kapiteln der Materialmodellierung näher erläutert. Im Weiteren wird analog mit den Raten der entsprechenden Verzerrungstensoren verfahren. Es ergibt sich die obere Lie-Ableitung  $(\mathbf{\Gamma}_{\alpha})_{\alpha}^{\Delta}$  bezüglich der Konstituierenden  $\varphi^{\alpha}$  des Verzerrungstensors  $\mathbf{\Gamma}_{\alpha}$  auf der Zwischenkonfiguration, indem man beispielsweise die materielle Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $(\mathbf{E}_{\alpha})'_{\alpha}$  auf die Zwischenkonfiguration transformiert

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma}_{\alpha})_{\alpha}^{\Delta} &= \mathbf{F}_{\alpha i}^{-T} \cdot (\mathbf{E}_{\alpha})'_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1} = \mathbf{F}_{\alpha i}^{-T} \cdot (\mathbf{F}_{\alpha i}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i})'_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1} \\ &= (\mathbf{\Gamma}_{\alpha})'_{\alpha} + \mathbf{L}_{\alpha i}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{\alpha} + \mathbf{\Gamma}_{\alpha} \cdot \mathbf{L}_{\alpha i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Hierin beschreibt der Tensor

$$\mathbf{L}_{\alpha i} = (\mathbf{F}_{\alpha i})'_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1} \quad (3.41)$$

den inelastischen Geschwindigkeitsgradienten. Man kann weiterhin zeigen, dass auch die obere Lie-Ableitung des Verzerrungstensors auf der Zwischenkonfiguration in eine elastische und eine inelastische Rate

$$(\mathbf{\Gamma}_{\alpha})_{\alpha}^{\Delta} = (\mathbf{\Gamma}_{\alpha e})_{\alpha}^{\Delta} + (\mathbf{\Gamma}_{\alpha i})_{\alpha}^{\Delta} \quad (3.42)$$

aufgespalten werden kann, wobei der inelastische Geschwindigkeitsanteil eine rein inelastische Größe ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Gamma}_{\alpha i})_{\alpha}^{\Delta} &= \mathbf{F}_{\alpha i}^{-T} \cdot (\mathbf{E}_{\alpha i})'_{\alpha} \cdot \mathbf{F}_{\alpha i}^{-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}_{\alpha i} + \mathbf{L}_{\alpha i}^T) \\ &= (\mathbf{\Gamma}_{\alpha i})'_{\alpha} + \mathbf{L}_{\alpha i}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{\alpha i} + \mathbf{\Gamma}_{\alpha i} \cdot \mathbf{L}_{\alpha i}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

während der elastische Geschwindigkeitsanteil sowohl aus elastischen als auch aus inelastischen Größen gebildet wird, vgl. u. a. Sedlan [126]

$$(\mathbf{\Gamma}_{\alpha e})_{\alpha}^{\Delta} = (\mathbf{\Gamma}_{\alpha e})'_{\alpha} + \mathbf{L}_{\alpha i}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{\alpha e} + \mathbf{\Gamma}_{\alpha e} \cdot \mathbf{L}_{\alpha i}. \quad (3.44)$$

Im Übrigen gelten die gleichen Transformationsvorschriften wie bei den Verzerrungstensoren.

Da alle weiteren Verzerrungsraten im Rahmen dieser Arbeit keine Verwendung finden, werden sie im Weiteren auch nicht aufgeführt. Details zu diesen Überlegungen finden sich z. B. in Haupt [59] und Altenbach & Altenbach [3].

### 3.4 Bilanzgleichungen

Die in der Kontinuumsmechanik verwendeten Bilanzen werden axiomatisch eingeführt. Da alle Bilanzgleichungen dieselbe Form haben, soll im Weiteren von einer Masterbilanz für den Mehrphasenkörper  $\varphi$  ausgegangen werden. Diese Masterbilanz bilanziert allgemein die zeitliche Änderung einer mit der Dichte  $\rho$  multiplizierten physikalischen Größe  $\psi$  mit dem Fluss  $\varphi$  dieser Größe über den Körper Rand  $\partial\mathcal{B}$ , einem Zufuhrterm  $\sigma$  und einem Produktionsterm  $\hat{\psi}$ . In Gleichungsform heißt dies

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \varphi(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{a} + \int_{\mathcal{B}} \sigma(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (3.45)$$

Unter Voraussetzung der Stetigkeit und stetigen Differenzierbarkeit der Felder gelangt man nach der Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) dv \quad (3.46)$$

und des Gaußschen Integralsatzes zu der lokalen Aussage für den materiellen Punkt

$$\rho \dot{\psi} = \operatorname{div} \varphi + \sigma + \hat{\psi}. \quad (3.47)$$

Die Grundlage der Bilanzgleichungen der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  basiert auf den Truesdellschen Prinzipien der Mischungstheorie [138]. Die dahinter stehende Idee ist, dass sich diese Bilanzgleichungen analog zu denen der Einphasenmaterialien mit zusätzlichen Termen für die Kopplungsmechanismen zwischen

den einzelnen Phasen  $\varphi^\alpha$  darstellen lassen. Dementsprechend gilt

$$\rho^\alpha (\psi^\alpha)'_\alpha = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}_\alpha + \sigma_\alpha + \hat{\psi}_\alpha. \quad (3.48)$$

Details finden sich u. a. in [32, 37].

Die Massenbilanz einer Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  lässt sich aus der Masterbilanz herleiten. Der Massenaustausch  $\hat{\rho}^\alpha$  wird hierbei vernachlässigt

$$(\rho^\alpha)'_\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \mathbf{x}'_\alpha = 0. \quad (3.49)$$

Darin beschreibt  $\rho^\alpha$  die Dichte der Momentankonfiguration der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$ . Daraus kann die Gleichung  $\rho^\alpha = \rho_0^\alpha J_\alpha^{-1}$  für den Transport der Dichte zwischen der Referenzkonfiguration  $\rho_0^\alpha$  und der Momentankonfiguration  $\rho^\alpha$  durch Integration hergeleitet werden.

Analog leitet man aus der Masterbilanz die klassische Impulsbilanz in räumlicher Darstellung her. Unter Berücksichtigung der Masterbilanz und nach einigen Rechenschritten erhält man die reduzierte Impulsbilanz einer Konstituierenden

$$\rho^\alpha \mathbf{x}''_\alpha = \operatorname{div} \mathbf{T}^\alpha + \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha + \hat{\mathbf{p}}^\alpha \quad (3.50)$$

mit der Fernwirkung  $\rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha$  und dem Impulsaustausch  $\hat{\mathbf{p}}^\alpha$ . Eine detaillierte Diskussion der Bilanzgleichungen unter Berücksichtigung der Austauschterme ist in der Arbeit von Diebels [32] nachzulesen.

Zur Verknüpfung des Spannungsvektors  $\mathbf{t}^\alpha$  mit dem Spannungstensor  $\mathbf{T}^\alpha$  benötigt man das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t}^\alpha = \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{n}. \quad (3.51)$$

Nach der physikalischen Interpretation ist der Cauchy-Spannungstensor ein Maß der aktuellen Konfiguration und bezieht somit die aktuelle Kraft auf das aktuelle Flächenelement. Formuliert man hingegen die Impulsbilanz in materieller Darstellung und führt einen Vergleich der Darstellungen der Impulsbilanzen in räumlicher und materieller Darstellung durch, so erhält man den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor

$$\mathbf{P}^\alpha = (\det \mathbf{F}_\alpha) \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^{-T}, \quad (3.52)$$

der die aktuelle Kraft auf das Flächenelement der Referenzkonfiguration bezieht. Die Spannungstensoren werden im weiteren Verlauf der Arbeit sukzessive an den entsprechenden Stellen eingeführt.

Die Auswertung der Drallbilanz führt mit der Vernachlässigung des Drallaustauschs auf die Beziehung

$$\mathbf{T}^\alpha = (\mathbf{T}^\alpha)^T, \quad (3.53)$$

die aussagt, dass der verwendete Cauchy-Spannungstensor symmetrisch ist. Diese Bedingung wird im Weiteren durch die Wahl entsprechender Konstitutivgesetze automatisch erfüllt.

Als Nächstes wird die Bilanz der inneren Energie eingeführt. Die allgemeine Energiebilanz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) besagt, dass sich die Energie eines materiellen Körpers durch die an ihm verrichtete mechanische und thermische Leistung ändert. Durch Separation der Bilanz der kinetischen Energie entsteht aus dem 1. Hauptsatz die Bilanz der inneren Energie<sup>1</sup>

$$\rho^\alpha (\varepsilon^\alpha)'_\alpha = \mathbf{T}^\alpha : \text{grad } \mathbf{x}'_\alpha - \text{div } \mathbf{q}^\alpha + \rho^\alpha r^\alpha. \quad (3.54)$$

Die in der Bilanz auftretenden Größen sind die Wärmeflussdichte  $\mathbf{q}^\alpha$  und die innere Strahlungswärme  $\rho^\alpha r^\alpha$ . Aufgrund der Symmetrie von  $\mathbf{T}^\alpha$  kann die spezifische Spannungsleistung auch durch die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}_\alpha$  dargestellt werden.

An dieser Stelle wird nach dem Konzept der dualen Variablen [59, 63] die spezifische Spannungsleistung eingeführt, die unabhängig von der Wahl der Konfiguration sein muss. So ergibt sich mit Bezug auf die Referenz- und Momentankonfiguration

$$\frac{1}{\rho_0^\alpha} \bar{\mathbf{T}}^\alpha : (\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha = \frac{1}{\rho^\alpha} \mathbf{T}^\alpha : \mathbf{D}_\alpha = \frac{1}{\rho^\alpha} \mathbf{T}^\alpha : \text{grad } \mathbf{x}'_\alpha. \quad (3.55)$$

Hierin beschreibt  $\bar{\mathbf{T}}^\alpha$  den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, der die konjugierte Spannung zur Deformationsgeschwindigkeit  $(\mathbf{E}_\alpha)'_\alpha$  ist und sich aus der

---

<sup>1</sup>Die in den Bilanzen vorkommenden physikalischen Terme sind spezifische Größen, der Ausdruck spezifisch wird aber im Weiteren weggelassen.

Rechenvorschrift

$$\bar{\mathbf{T}}^\alpha = (\det \mathbf{F}_\alpha) \mathbf{F}_\alpha^{-1} \cdot \mathbf{T}^\alpha \cdot \mathbf{F}_\alpha^{-T} \quad (3.56)$$

berechnen lässt.

Als letzte Gleichung bzw. Ungleichung wird die Bilanz der Entropie aufgestellt, die besagt, dass die Entropieproduktion  $\hat{\eta}$  in einem materiellen Körper nicht negativ sein darf. Mit der Wahl

$$\varphi_\eta^\alpha = -\frac{\mathbf{q}^\alpha}{\theta^\alpha} \quad (3.57)$$

für den Entropiefluss und

$$\sigma_\eta^\alpha = \frac{\rho^\alpha r^\alpha}{\theta^\alpha} \quad (3.58)$$

für die Entropiezufuhr erhält man

$$\rho^\alpha (\eta^\alpha)'_\alpha + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}^\alpha}{\theta^\alpha} \right) - \frac{\rho^\alpha r^\alpha}{\theta^\alpha} = \hat{\eta}^\alpha. \quad (3.59)$$

Dazu sind die Symbole  $(\eta^\alpha)'_\alpha$  für die Entropieänderung und  $\theta^\alpha$  für die absolute Temperatur der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  eingeführt worden. Schließlich ergibt sich die Energieproduktion als Summe der Partialproduktionen

$$\hat{\eta} = \sum_\alpha \hat{\eta}^\alpha. \quad (3.60)$$

Im späteren Verlauf der Arbeit soll diese Ungleichung in Form des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik

$$\hat{\eta} \geq 0 \quad (3.61)$$

näher untersucht werden.

Eine detaillierte Diskussion zum Konzept der Masterbilanz und der Ableitung der individuellen Bilanzen findet sich u. a. in [3, 32, 37, 138].

### 3.5 Materialtheorie

Die in den vorangegangenen Abschnitten formulierten kinematischen Beziehungen und Bilanzgleichungen sind allgemeingültig, d. h. sie gelten unabhängig von der Art des Materials. In der Materialtheorie sollen nun die Konstitutivgleichungen bestimmt werden, die den Zusammenhang zwischen der Deformation und den wirkenden Kräften darstellen. Die gesuchten Materialgesetze sind die Auswirkungsfunktionen

$$\mathcal{R} = \{ \Psi^\alpha, \eta^\alpha, \mathbf{T}^\alpha, \mathbf{q}^\alpha \}, \quad (3.62)$$

die als Funktionale der Bewegung  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)$  und der Temperatur  $\theta^\alpha$  gesucht werden. Anstelle der allgemeinen Funktionale werden in der Regel die konstitutiven Gleichungen als Funktionen von Ableitungen von  $\boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)$  und  $\theta^\alpha$  formuliert.

Dabei wird die freie Energie  $\Psi^\alpha$  in Form der Legendre-Transformation eingeführt

$$\Psi^\alpha = \varepsilon^\alpha - \theta^\alpha \eta^\alpha. \quad (3.63)$$

Diese Gleichung wird nach der Entropie  $\eta^\alpha$  aufgelöst, zeitlich bezüglich der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  abgeleitet und dann in die Entropiebilanz eingesetzt. Mit der inneren Energie (3.54), der Impulsbilanz (3.50) für quasi-statische Prozesse und unter Vernachlässigung der Fernwirkungskräfte ergibt sich aus (3.59) für isotherme Prozesse die Clausius-Planck-Ungleichung der Mischung

$$\sum_\alpha \mathbf{T}^\alpha : \mathbf{D}_\alpha - \sum_\alpha \rho^\alpha (\Psi^\alpha)'_\alpha = \sum_\alpha \hat{\eta}^\alpha \theta^\alpha \geq 0. \quad (3.64)$$

Dazu wurden die Partialbilanzen summiert und Bedingung (3.61) beachtet.

### Hyperelastizität

Nach der Wahl der Prozessvariablen der freien Energiefunktion und den freien Energiefunktionen selbst können mit der Auswertung der Clausius-Planck-Ungleichung die Konstitutivgleichungen bestimmt werden. Um die Prozessvariablen für das Festkörper-Gas-System im Fall der Hyperelastizität wählen zu können, wird an dieser Stelle die allgemeine Ebene der Konstituierenden  $\varphi^\alpha$  verlassen und die Gleichungen werden für eine Festkörper- und eine Gasphase basierend auf einem hybriden Modell vom Typ II [31, 36] hergeleitet. Das System besteht also aus einer inkompressiblen Festkörper- und einer kompressiblen Gasphase. Der linke Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}_S$  bestimmt darin das hyperelastische Verhalten des Festkörperskeletts. Hier stellt man sich ein poröses Festkörperskelett mit einer inkompressiblen Bulkphase vor. Das Skelett an sich ist allerdings strukturbedingt kompressibel. Der zur Modellierung genutzte Deformationsgradient  $\mathbf{F}_S$  des Festkörperskeletts ist gleich dem globalen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ . Da der Volumenanteil  $n^S$  direkt über die Determinante des Deformationsgradienten bestimmt werden kann und dieser über  $\mathbf{B}_S$  schon als Prozessvariable auftaucht, stellt  $n^S$  keine unabhängige Prozessvariable dar. Das elastische Verhalten der Gasphase wird mit Hilfe der effektiven Gasdichte  $\rho^{GR}$  beschrieben. An dieser Stelle soll zudem das Konzept der konstitutiven Trennung der Variablen angewendet werden. Das bedeutet, dass die Abhängigkeit der freien Energiefunktion des Festkörperskeletts von der effektiven Gasdichte vernachlässigt werden kann. Die freie Energiefunktion der Gasphase ist zudem unabhängig von der Festkörperdeformation, da das Gas im Gegensatz zum Festkörper nicht über eine Mikrostruktur verfügt. Das Gas füllt den ihm zur Verfügung stehenden Porenraum vollständig aus. Die Interaktion des Gases mit dem Porenraum des Festkörpers geschieht dabei über den Porendruck. Die freie Energie des vereinfachten, hybriden Modells lautet somit

$$\rho \Psi(\mathbf{B}_S, \rho^{GR}) = \rho^S \Psi^S(\mathbf{B}_S) + \rho^G \Psi^G(\rho^{GR}). \quad (3.65)$$

Die Clausius-Planck-Ungleichung (3.64) kann für das konkrete Festkörper-Gas-Problem im isothermen Fall geschrieben werden als

$$\mathbf{T}^G : \mathbf{D}_G + \mathbf{T}^S : \mathbf{D}_S - \rho^G (\Psi^G)'_G - \rho^S (\Psi^S)'_S \geq 0. \quad (3.66)$$

Bildet man nun die Ableitung der freien Energien, so erhält man nach An-

wendung der Kettenregel

$$(\Psi^S)'_S = \frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{B}_S} : (\mathbf{B}_S)'_S, \quad (\Psi^G)'_G = \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} (\rho^{GR})'_G. \quad (3.67)$$

Die hier benötigte Ableitung des linken Cauchy-Green-Deformationstensors des Festkörperskeletts bezüglich der Festkörperstruktur ergibt sich zu

$$(\mathbf{B}_S)'_S = \mathbf{L}_S \cdot \mathbf{B}_S + \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{L}_S^T. \quad (3.68)$$

Die Ableitung der effektiven Gasdichte bezüglich der Gasphase lässt sich ausgehend von der Massenbilanz und dem Zusammenhang (3.7) zu

$$(\rho^{GR})'_G = -\frac{1}{1-n^S} (\rho^G \mathbf{L}_G : \mathbf{I} + n^S \rho^{GR} \mathbf{L}_S : \mathbf{I}) \quad (3.69)$$

bestimmen. Dabei wird zusätzlich angenommen, dass die Konstituierenden sich in Phase bewegen. Da der Spannungstensor gemäß der Drallbilanz eine symmetrische Größe ist, kann die Spannungsleistung als Skalarprodukt der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}_\alpha$  und des Spannungstensors  $\mathbf{T}^\alpha$  dargestellt werden

$$\mathbf{L}_\alpha : \mathbf{T}^\alpha = \mathbf{D}_\alpha : \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{W}_\alpha : \mathbf{T}^\alpha = \mathbf{D}_\alpha : \mathbf{T}^\alpha, \quad (3.70)$$

da das Skalarprodukt eines symmetrischen und eines schief-symmetrischen Tensors Null ergibt. Mit diesen Zusammenhängen ergibt sich die Clausius-Planck-Ungleichung zu

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_S & : \left[ \mathbf{T}^S - \rho^S 2 \mathbf{B}_S \cdot \frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{B}_S} + (\rho^{GR})^2 n^S \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} \mathbf{I} \right] + \\ \mathbf{D}_G & : \left[ \mathbf{T}^G + (\rho^{GR})^2 n^G \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} \mathbf{I} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Diese Ungleichung soll nun nach der Argumentation von Coleman & Noll [28] ausgewertet werden. Im Rahmen des betrachteten thermodynamischen Prozesses liegen die Werte der Prozessvariablen fest, nicht jedoch deren Ab-



leitungen. Da der Zustand vollständig durch die Prozessvariablen bestimmt ist, kann der Prozess von außen so gesteuert werden, dass die Ableitungen der Prozessvariablen beliebige Werte annehmen. Dies entspricht zwar einem anderen Randwertproblem, aber auch das muss thermodynamisch zulässig sein. Aus dieser Überlegung folgt, dass die Terme, die in Kombination mit Ableitungen von Prozessvariablen auftreten, jeweils zu Null werden müssen. Andernfalls könnte in einem anderen Randwertproblem durch die Änderung des Vorzeichens dieser Ableitung bei ansonsten gleichen Werten der Prozessvariablen das Dissipationsprinzip verletzt werden.

Aus dieser Überlegung folgert man für die Spannungen von Festkörperskelett und Gas

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^S &= \rho^S 2 \mathbf{B}_S \cdot \frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{B}_S} - (\rho^{GR})^2 n^S \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}^G &= -(\rho^{GR})^2 n^G \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} \mathbf{I}.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Mit dem effektiven Gasdruck

$$p^{GR} = (\rho^{GR})^2 \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}},\tag{3.73}$$

der durch die Ableitung der freien Energien nach der effektiven Dichte bestimmt ist, lassen sich die zuvor hergeleiteten Größen wie folgt angeben:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^S &= 2 \mathbf{B}_S \cdot \frac{\rho^S \partial \Psi^S}{\partial \mathbf{B}_S} - n^S p^{GR} \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}^G &= -n^G p^{GR} \mathbf{I}.\end{aligned}\tag{3.74}$$

Die Gesamtspannung des Systems ergibt sich aus der Addition der beiden Spannungsanteile und unter Berücksichtigung der Sättigungsbeziehung (3.4)

zu

$$\mathbf{T} = -p^{GR} \mathbf{I} + 2 \mathbf{B}_S \cdot \frac{\rho^S \partial \Psi^S}{\partial \mathbf{B}_S}. \quad (3.75)$$

**Bemerkung:**

Die so ermittelte Spannung basiert auf der Zweiphasentheorie. Allerdings wurden auch Untersuchungen an der nicht-aufgeschäumten Struktur, also am Bulkmaterial selbst, durchgeführt. Die benötigte Spannung besteht hier nur aus dem Festkörperanteil und hat somit nur eine Prozessvariable  $\mathcal{S} = \{\mathbf{B}\}$ , wird jedoch analog entwickelt. Der weitere Unterschied besteht in der Annahme der Inkompressibilität. Das Bulkmaterial ist vollkommen inkompressibel und besitzt auch keine Strukturkompressibilität. Diese Inkompressibilitätsnebenbedingung wird über einen Lagrange-Parameter  $p$  gewährleistet, der die Volumenkonstanz für das Einphasenmaterial  $\det \mathbf{F} = J = 1$  garantiert. Damit ergibt sich die Spannung zu

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2 \mathbf{B} \cdot \frac{\rho \partial \Psi}{\partial \mathbf{B}}. \quad (3.76)$$

Die Ausdrücke (3.75) und (3.76) unterscheiden sich nur in der Interpretation des Druckterms.

Nach Bestimmung der Spannungsgleichung muss die freie Energiefunktion gewählt werden. Im Fall des Festkörperskeletts bietet es sich an, die freie Energiefunktion in Invarianten des linken bzw. rechten Cauchy-Green-Deformationstensors zu wählen, vgl. hierzu die Theorie isotroper Tensorfunktionen [15, 131, 145, 146]. Damit ist die Skalarwertigkeit der freien Energiefunktion und die damit verbundene Objektivität automatisch gewahrt. Alternativ kann man auch die freie Energiefunktion in Eigenwerten der entsprechenden verwendeten Tensoren formulieren. Da dieser Weg aber die Spektralzerlegung des jeweiligen Tensors nach sich zieht, soll im Weiteren darauf verzichtet werden. Die drei Hauptinvarianten eines symmetrischen Tensors ergeben sich bei der Aufstellung der charakteristischen Gleichung

$$\lambda^3 - \text{I}_{\mathbf{B}_S} \lambda^2 + \text{II}_{\mathbf{B}_S} \lambda - \text{III}_{\mathbf{B}_S} = 0, \quad (3.77)$$

die aus der Behandlung des Eigenwertproblems (hier z. B. für den linken

Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}_S$ )

$$(\mathbf{B}_S - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{B}_S - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.78)$$

entsteht. Die Hauptinvarianten sind durch

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mathbf{B}_S} &= \text{tr } \mathbf{B}_S = \mathbf{B}_S : \mathbf{I}, \\ \text{II}_{\mathbf{B}_S} &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{B}_S : \mathbf{I})^2 - \mathbf{B}_S^T : \mathbf{B}_S \right), \\ \text{III}_{\mathbf{B}_S} &= \det \mathbf{B}_S = (\det \mathbf{F}_S)^2 \end{aligned} \quad (3.79)$$

gegeben. Die drei Hauptinvarianten des linken und rechten Cauchy-Green-Deformationstensors sind gleich, da sich die Tensoren, wie im vorletzten Abschnitt gezeigt, durch Vorwärts- bzw. Rückwärtsrotation ineinander überführen lassen. Bei der Berechnung weiterer Invarianten oder zur mathematischen Behandlung von Tensoren höherer Potenz ist das Theorem von Cayley-Hamilton

$$\mathbf{B}_S \cdot \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{B}_S - \text{I}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{B}_S \cdot \mathbf{B}_S + \text{II}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{B}_S - \text{III}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{I} = 0 \quad (3.80)$$

von enormer Bedeutung. Es besagt, dass jeder Tensor seine charakteristische Gleichung erfüllt. Mit ihm kann man höhere Potenzen von Tensoren als Summe von Tensoren niedrigerer Potenz in Verbindung mit den Invarianten darstellen.

Im Fall des volumetrisch-isochoren Splits werden für die Formulierung der Materialgesetze die Invarianten des linken isochoren Cauchy-Green-Deformationstensor benötigt. Mit Hilfe der Definitionen für den linken Cauchy-Green-Deformationstensor erhält man

$$\begin{aligned} \text{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S} &= J_S^{-\frac{2}{3}} \text{I}_{\mathbf{B}_S}, \\ \text{II}_{\hat{\mathbf{B}}_S} &= J_S^{-\frac{4}{3}} \text{II}_{\mathbf{B}_S}, \\ \text{III}_{\hat{\mathbf{B}}_S} &= 1. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Mit der Wahl  $\Psi^S(\mathbf{B}_S) = \Psi^S(\text{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S}, \text{II}_{\hat{\mathbf{B}}_S}, \text{III}_{\hat{\mathbf{B}}_S})$  ergibt sich die materielle Ab-

leitung zu

$$\frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbf{B}_S} = \frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbb{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S}} \cdot \frac{d\mathbb{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S}}{d\mathbf{B}_S} + \frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbb{II}_{\hat{\mathbf{B}}_S}} \cdot \frac{d\mathbb{II}_{\hat{\mathbf{B}}_S}}{d\mathbf{B}_S} + \frac{\partial \Psi^S}{\partial \mathbb{III}_{\hat{\mathbf{B}}_S}} \cdot \frac{d\mathbb{III}_{\hat{\mathbf{B}}_S}}{d\mathbf{B}_S}. \quad (3.82)$$

Neben der Spezifikation der freien Energie benötigt man die Ableitungen der Invarianten nach  $\mathbf{B}_S$ . Sie ergeben sich wie folgt [59, 70]:

$$\frac{d\mathbb{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S}}{d\mathbf{B}_S} = J_S^{-\frac{2}{3}} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbb{I}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{B}_S^{-1} \right) \quad (3.83)$$

bzw.

$$\frac{d\mathbb{II}_{\hat{\mathbf{B}}_S}}{d\mathbf{B}_S} = -\frac{2}{3} J_S^{-\frac{4}{3}} \mathbf{B}_S^{-1} \mathbb{II}_{\mathbf{B}_S} + J_S^{-\frac{4}{3}} (\mathbb{I}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{I} - \mathbf{B}_S). \quad (3.84)$$

Mit  $J_S = \sqrt{\det \mathbf{B}_S}$  und  $\mathbb{III}_{\mathbf{B}_S} = J_S^2$  lässt sich folgender Zusammenhang bereitstellen:

$$\frac{dJ_S}{d\mathbf{B}_S} = \frac{1}{2} J_S \mathbf{B}_S^{-1}. \quad (3.85)$$

## Viskoelastizität

Da das genutzte Material viskoelastische Eigenschaften aufweist, wird an dieser Stelle auch die Materialtheorie der finiten Viskoelastizität eingeführt. Es wird nicht von Viskoplastizität ausgegangen, da keine permanenten Dehnungen im Material zurückbleiben. Details zur Modellierung der linearen und finiten Viskoplastizität mit statischer Hysterese findet man in den Arbeiten von Hartmann [54, 56].

Ausgangspunkt der kontinuumsmechanischen Überlegungen ist ein rheologisches Modell der linearen Viskoelastizitätstheorie (Abb. 3.5), bei dem ein Feder-element mit  $n$  Feder-Dämpferelementen (Maxwell-Elemente) parallel geschaltet wird. Während die einzelne Feder die Grundelastizität des Materials widerspiegelt, können die Maxwell-Elemente beliebig komplexes viskoelasti-

ches Materialverhalten abbilden. Im physikalischen Sinne approximieren die Maxwell-Elemente das kontinuierliche Relaxationsspektrum des viskoelastischen Materials an diskreten Stützstellen. Folglich kann ein noch so komplexes viskoelastisches Materialverhalten durch eine ausreichende Anzahl an Maxwell-Elementen wiedergegeben werden.

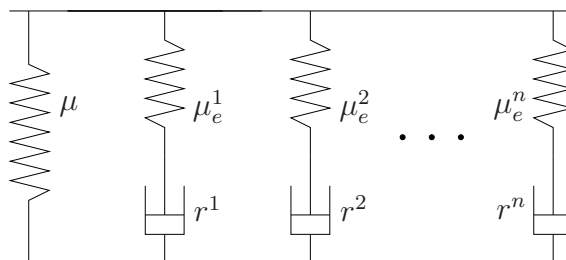


Abbildung 3.5: Rheologisches Modell der Viskoelastizität mit  $n$  Maxwell-Elementen (Ferry [43])

Um diesen Sachverhalt kontinuumsmechanisch im Rahmen einer finiten Theorie abzubilden, startet man mit der anfangs eingeführten multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradient  $\mathbf{F}_S$  der Festkörperphase  $\varphi^S$  für  $j = 1 \dots n$  Maxwell-Elemente in einen elastischen Anteil  $\mathbf{F}_{S_e}^j$  und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{F}_{S_i}^j$ .

Die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten wurde zuerst in der Kristallplastizität eingeführt [83, 85, 86], in der sie inkompatible Deformationszustände von plastischen Materialien beschreibt. Im Rahmen der Viskoelastizität wird diese Aufspaltung erstmals von Sidoroff [130] genutzt. Hier ist diese Annahme rein konstitutiv. Physikalisch kann man sich die Zwischenkonfiguration so vorstellen, dass die Federn in den einzelnen Maxwell-Elementen lokal entlastet werden.

So wird für jedes Maxwell-Element eine fiktive Zwischenkonfiguration eingeführt, in welcher der auf dieser Konfiguration definierte Deformationstensor  $\mathbf{\Gamma}_S$  in einen elastischen  $\mathbf{\Gamma}_{S_e}^j$  und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{\Gamma}_{S_i}^j$  zerfällt, vgl. Gl. (3.36). Somit kann die additive Aufspaltung der Deformation aus dem eindimensionalen rheologischen Modell direkt formal übertragen werden. Diese formale Übertragung des rheologischen Modells, die in der linearen Viskoelastizitätstheorie ohne Probleme funktioniert, versagt in einer finiten Theorie ohne Zwischenkonfiguration. Hier ist z. B. eine additive Aufspaltung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}_S$  auf der Referenzkonfiguration in elastische und inelastische Anteile nach der Transformation auf die Momentankonfiguration nicht mehr gegeben.

Somit ergeben sich Deformations- und Spannungsmaße in der Referenz-, Zwischen- und Momentankonfiguration. Die im weiteren Verlauf verwendeten Deformationstensoren sollen kurz aufgelistet werden.

Da im Weiteren die Spannungs-Deformationsbeziehungen mit Bezug auf die Momentankonfiguration beschrieben werden sollen, werden die dort operierenden Deformationstensoren zur Modellierung herangezogen.

Die inelastischen, rechten Cauchy-Green-Deformationstensoren  $\mathbf{C}_{Si}^j := \mathbf{F}_{Si}^{jT} \cdot \mathbf{F}_{Si}^j$  beschreiben die inelastische Deformation der Dämpfer in den Maxwell-Elementen mit Bezug auf die Referenzkonfiguration, die elastischen, linken Cauchy-Green-Deformationstensoren  $\mathbf{B}_{Se}^j := \mathbf{F}_{Se}^j \cdot \mathbf{F}_{Se}^{jT}$  beschreiben die Deformation der Federn in den Maxwell-Elementen, bezogen auf die Momentankonfiguration. Dabei besteht zwischen den Deformationstensoren  $\mathbf{C}_{Si}^j$  und  $\mathbf{B}_{Se}^j$  der Zusammenhang

$$\mathbf{B}_{Se}^j = \mathbf{F}_S \cdot (\mathbf{C}_{Si}^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}_S^T. \quad (3.86)$$

Die zweistufigen Tensoren  $\mathbf{C}_{Si}^j$  dienen in diesem Kontext als innere Variablen, deren Entwicklung über konstitutiv motivierte Evolutionsgleichungen beschrieben wird.

Die zur Materialmodellierung benötigten Konstitutivgleichungen müssen in einem thermomechanisch konsistenten Rahmen entwickelt werden. Dies erfolgt mit Hilfe der Entropiebilanz in Form der erweiterten Clausius-Planck-Ungleichung. Die bei der Hyperelastizität angegebenen Prozessvariablen werden hier um den elastischen Anteil des linken Cauchy-Green-Deformationstensors erweitert

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B}_S, \mathbf{B}_{Se}^j, \rho^{GR}\}. \quad (3.87)$$

Es ist anzunehmen, dass das viskoelastische Verhalten ausschließlich vom Bulkmaterial stammt. Dabei wird angenommen, dass sich das Porengas nicht relativ zum Festkörper bewegt. Eine experimentelle Begründung dieser Aussage erfolgt im nächsten Kapitel. Aus diesem Grund wird nur die freie Helmholtzsche Energiefunktion des Festkörperskeletts in einen Gleichgewichts-

teil  $\Psi_{\text{eq}}^S$  und in  $j = 1 \dots n$  Nichtgleichgewichtsanteile  $\Psi_{\text{neq}}^{Sj}$  aufgespalten

$$\Psi^S = \Psi_{\text{eq}}^S + \sum_{j=1}^n \Psi_{\text{neq}}^{Sj}. \quad (3.88)$$

An dieser Stelle soll das Konzept der Trennung der Variablen, das auch schon im vorherigen Kapitel genutzt wurde, für Festkörper- und Gasphase zum Einsatz kommen. Das hat zur Folge, dass die Prozessvariablen disjunkt voneinander bei der Entwicklung des 2. Hauptsatzes betrachtet werden können. Somit kann die freie Energiefunktion dargestellt werden als

$$\Psi = \Psi_{\text{eq}}^S(\mathbf{B}_S) + \Psi^G(\rho^{GR}) + \sum_{j=1}^n \Psi_{\text{neq}}^{jS}(\mathbf{B}_{S_e}^j). \quad (3.89)$$

Die Ableitungen davon ergeben sich dann zu

$$(\Psi^S)'_S = \frac{\partial \Psi_{\text{eq}}^S}{\partial \mathbf{B}_S} : (\mathbf{B}_S)'_S + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Psi_{\text{neq}}^{jS}}{\partial \mathbf{B}_{S_e}^j} : (\mathbf{B}_{S_e}^j)'_S \quad (3.90)$$

und

$$(\Psi^G)'_G = \frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} (\rho^{GR})'_G. \quad (3.91)$$

Mit (3.86) erhält man über die Anwendung der Produktregel der Differentiation den benötigten Zusammenhang zwischen der materiellen Zeitableitung des elastischen Deformationstensors  $\mathbf{B}_{S_e}^j$  und der räumlichen Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}_S$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_{S_e}^j)'_S &= \mathbf{L}_S \cdot \mathbf{B}_{S_e}^j + \mathbf{B}_{S_e}^j \cdot \mathbf{L}_S^T - \mathbf{F}_{S_e}^j \cdot (\mathbf{L}_{S_i}^j + (\mathbf{L}_{iS}^j)^T) \cdot (\mathbf{F}_{S_e}^j)^T \\ &= \mathbf{L}_S \cdot \mathbf{B}_{S_e}^j + \mathbf{B}_{S_e}^j \cdot \mathbf{L}_S^T - 2 \mathbf{F}_{S_e}^j \cdot ((\mathbf{\Gamma})_{S_i}^j)_S^\Delta \cdot (\mathbf{F}_{S_e}^j)^T. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Die Entropieungleichung ergibt sich mit den bei der Hyperelastizität vorgestellten Einschränkungen und mit dem Zusammenhang  $\rho^S = J_S \rho_0^S$  nach

einigen Rechenschritten zu

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{T} + p^{GR} \mathbf{I} - 2 J_S^{-1} \rho_0^S \mathbf{B}_S \cdot \frac{\partial \Psi_{eq}^S}{\partial \mathbf{B}_S} - \sum_{j=1}^n 2 J_S^{-1} \rho_0^S \mathbf{B}_{Se}^j \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} \right) : \mathbf{D}_S \\ & + \sum_{j=1}^n 2 J_S^{-1} \rho_0^S \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} : \mathbf{F}_{Se}^j \cdot ((\mathbf{\Gamma}_{Si}^j)_S^\Delta \cdot (\mathbf{F}_{Se}^j)^T) \geq 0, \end{aligned} \quad (3.93)$$

wobei  $\mathbf{T}$  die Summe aus Cauchy-Spannungen der Festkörperphase  $\mathbf{T}^S$  und der Gasphase  $\mathbf{T}^G$  darstellt. Nach Argumentation von Coleman & Noll ergibt sich daraus die Spannung der Mischung

$$\mathbf{T} = -p^{GR} \mathbf{I} + 2 J_S^{-1} \rho_0^S \mathbf{B}_S \cdot \frac{\partial \Psi_{eq}^S}{\partial \mathbf{B}_S} + \sum_{j=1}^n 2 J_S^{-1} \rho_0^S \mathbf{B}_{Se}^j \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j}. \quad (3.94)$$

Aus der Dissipationsrestungleichung

$$\sum_{j=1}^n 2 J_S^{-1} \rho_0^S \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} : \mathbf{F}_{Se}^j \cdot ((\mathbf{\Gamma}_{Si}^j)_S^\Delta \cdot (\mathbf{F}_{Se}^j)^T) \geq 0 \quad (3.95)$$

ergeben sich in Anlehnung an die Arbeiten von Sedlan [126] und Lion [92]  $n$  Evolutionsgleichungen für die inelastischen Deformationsraten. Dazu formt man die Restungleichung um zu

$$\sum_{j=1}^n 2 J_S^{-1} \rho_0^S (\mathbf{F}_{Se}^j)^T \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} \cdot \mathbf{F}_{Se}^j : ((\mathbf{\Gamma}_{Si}^j)_S^\Delta) \geq 0. \quad (3.96)$$

Die Dissipationsrestungleichung wird erfüllt, wenn beide vorkommenden Tensorterme koaxial zueinander sind. Dazu werden analog zu der Arbeit von Sedlan [126] skalare Proportionalitätskonstanten  $\eta^j \geq 0$  eingeführt, die ein Maß für die Viskosität des Materials sind. Dadurch ergeben sich die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen auf der Zwischenkonfiguration zu

$$((\mathbf{\Gamma}_{Si}^j)_S^\Delta) = \frac{1}{\eta^j} 2 J_S^{-1} \rho_0^S (\mathbf{F}_{Se}^j)^T \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} \cdot \mathbf{F}_{Se}^j. \quad (3.97)$$



Über die Rücktransformation auf die Referenzkonfiguration mit dem „pull back“ der inelastischen Deformationsgeschwindigkeit der Zwischenkonfiguration

$$(\mathbf{E}_{Si}^j)'_S = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{Si}^j)'_S = (\mathbf{F}_{Si}^j)^T \cdot ((\mathbf{\Gamma}_{Si}^j)^\Delta)_S \cdot \mathbf{F}_{Si}^j \quad (3.98)$$

erhält man die Evolutionsgleichungen

$$(\mathbf{C}_{Si}^j)'_S = \frac{1}{\eta^j} 4 J_S^{-1} \rho_0^S (\mathbf{F}_S^j)^T \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{S_e}^j} \cdot \mathbf{F}_S^j \quad (3.99)$$

mit Bezug auf die Referenzkonfiguration.

**Bemerkung:**

Das viskoelastische Verhalten des Einphasenmaterials wird analog zu dem des Zweiphasenmaterials modelliert. Die Spannung ergibt sich mit dem zuvor erwähnten Lagrange-Parameter  $p$  zu

$$\mathbf{T} = -p \mathbf{I} + 2 \rho_0 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \Psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} + \sum_{j=1}^n 2 \rho_0 \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} \quad (3.100)$$

und die zur Bestimmung der inneren Variablen benötigten Evolutionsgleichungen haben die Form

$$\dot{\mathbf{C}}_i^j = \frac{1}{\eta^j} 4 \rho_0 (\mathbf{F}^j)^T \cdot \frac{\partial \Psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} \cdot \mathbf{F}^j. \quad (3.101)$$



# 4

---

## Versuchsstände und Experimente

---

### 4.1 Untersuchungsmethode

Die im folgenden Kapitel beschriebenen Untersuchungen beschränken sich auf das phänomenologische Verhalten des Materials. Der atomare Aufbau sowie die Mikrostruktur werden hierbei außer Acht gelassen. Bei dieser kontinuumsmechanischen Betrachtung wird die Materialantwort auf verschiedene Eingangsprozesse beobachtet und analysiert.

Um das Material in eine Klasse einordnen zu können, muss zu Anfang untersucht werden, ob die Materialantwort von der Geschwindigkeit des Belastungsprozesses abhängt und ob das Material eine statische Hysterese aufweist. Nach Haupt [59] kann mit diesen Betrachtungen das Material in eine der folgenden vier Klassen eingeordnet werden:

- Geschwindigkeitsunabhängig ohne Hysterese
- Geschwindigkeitsunabhängig mit Hysterese
- Geschwindigkeitsabhängig mit statischer Hysterese

- Geschwindigkeitsabhängig ohne statische Hysterese

Diese Einteilung beruht auf experimentellen Erfahrungen. Das Spannungs-Dehnungsverhalten dieser Klassen ist in Abb. 4.1 dargestellt.

Um das Material nun in eine der vier Kategorien einordnen zu können, wird zunächst untersucht, ob das Material eine Geschwindigkeitsabhängigkeit aufweist oder nicht. Wenn sich das Material geschwindigkeitsunabhängig verhält, können wiederum zwei Fälle unterschieden werden: Zum einen kann ein Hystereseverhalten vorliegen, d. h. Be- und Entlastungspfad unterscheiden sich, zum anderen können Be- und Entlastungspfad identisch sein, so dass kein Hystereseverhalten vorliegt.

Im Fall des geschwindigkeitsabhängigen Verhaltens liegt im Gegensatz dazu bei endlichen Geschwindigkeiten und nichtmonotonen Prozessen immer ein Hystereseverhalten vor. Für Geschwindigkeiten, die gegen Null gehen, können allerdings auch zwei Fälle unterschieden werden: Entweder weist das Material eine statische Hysterese auf, d. h. selbst bei einer gegen Null gehenden Geschwindigkeit unterscheiden sich Be- und Entlastungspfad voneinander, oder es liegt keine statische Hysterese vor, d. h. bei einer gegen Null gehenden Geschwindigkeit sind Be- und Entlastungspfad identisch.

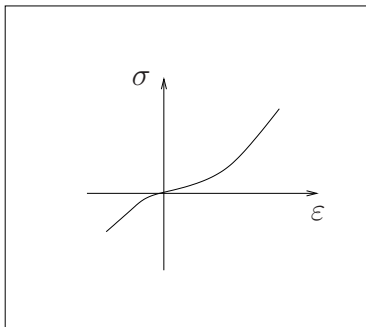
Das zu untersuchende Material weist bei den durchgeführten Experimenten eine Hysterese auf. Diese Hysterese unterscheidet sich allerdings nur unwesentlich bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Da allerdings festgestellt wurde, dass keine plastischen Deformationen auftreten, wird nicht davon ausgegangen, dass es sich um eine statische Hysterese handelt. Es wird angenommen, dass die langsamste Geschwindigkeit, die mit dem Versuchsaufbau möglich ist, noch zu schnell ist, um die Hysterese zu schließen. Somit wird das untersuchte Material der Kategorie geschwindigkeitsabhängig ohne Gleichgewichtshysterese zugeordnet. Dieses Verhalten wird als viskoelastisches Materialverhalten bezeichnet und im Folgenden detailliert untersucht.

## 4.2 Probenmaterial und Prüfkörper

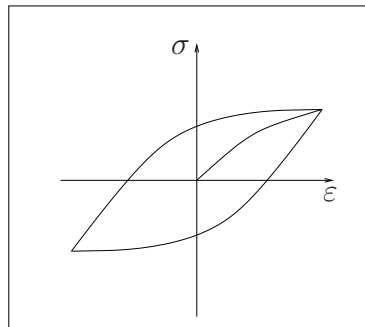
Die folgenden Untersuchungen werden an Gummiprüfproben aus EPDM durchgeführt. Diese werden durch Vulkanisation von synthetisch erzeugtem Kautschuk hergestellt. Dabei werden die Polymerketten des Kautschuks durch Zusatz von Schwefel unter Druck und Hitze vernetzt. Zur Verbesserung

## Geschwindigkeitsunabhängiges Verhalten

ohne Gleichgewichtshysterese

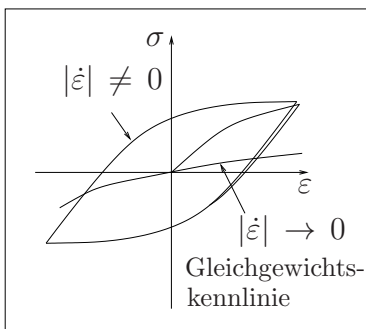


mit Gleichgewichtshysterese



## Geschwindigkeitsabhängiges Verhalten

ohne Gleichgewichtshysterese



mit Gleichgewichtshysterese

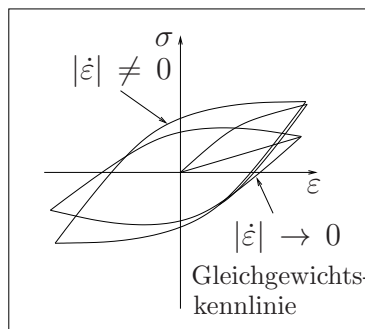


Abbildung 4.1: Materialklassen aufgrund des phänomenologischen Verhaltens nach Haupt [59]

der Haltbarkeit und Verarbeitbarkeit versetzt man industrielles Kautschuk-Gummi mit Zusatzstoffen. Ein vor allem in der Automobilindustrie eingesetzter Zusatzstoff ist Ruß, welcher auch in den zu untersuchenden Materialien zum Einsatz kommt.

Die Versuche werden an zwei unterschiedlichen Strukturen des genannten Gummis durchgeführt. Sowohl das Vollmaterial als auch eine zellige Struktur, die durch das Zuführen von Luft während der Vulkanisation erreicht wird, werden untersucht.

Das Hauptaugenmerk liegt auf der Beobachtung der zelligen Struktur, dem sogenannten Moosgummi. Diese poröse Struktur wird besonders im Automo-

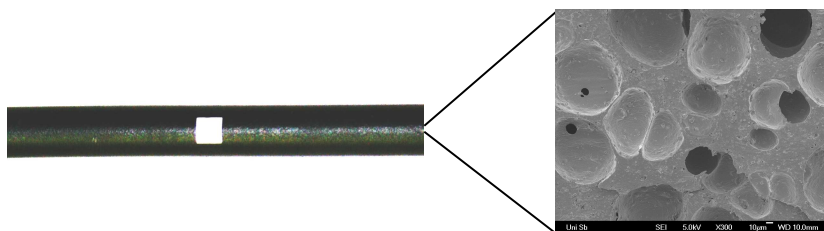


Abbildung 4.2: Zylinderprobe aus Moosgummi mit innerer Porenstruktur des Querschnitts unter dem Rasterelektronenmikroskop

bilbau bei der Herstellung von Türdichtprofilen und Schläuchen verwendet. Da jedoch viele Bauteile aus einem Verbund von Voll- und Moosgummi bestehen, soll auch die Modellierung des Vollmaterials kurz erwähnt werden. Zudem soll untersucht werden, ob mit Hilfe des Bulkmaterials direkt Schlüsse auf das Verhalten der porösen Struktur gezogen werden können. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird allerdings festgestellt, dass dies qualitativ zwar möglich ist, quantitativ jedoch keine Aussage getroffen werden kann. Dies war wegen des unterschiedlichen Herstellungsprozesses und den dadurch resultierenden unterschiedlichen chemischen Strukturen auch zu erwarten.

Alle Prüfkörper wurden von der Firma *SaarGummi International GmbH, Büschfeld*, zur Verfügung gestellt. Im Fall des Moosgummis werden sowohl Zylinder- als auch Schulterproben nach DIN ISO 572 mit einer Porosität von 40-60 % genutzt. Die Zylinderproben, die in Abb. 4.2 (links) dargestellt sind, wurden als Meterware geliefert und in 13 cm lange Stücke geschnitten. Diese Prüfkörper besitzen eine geschlossene Außenhaut. Die innere Porenstruktur ist in Abb. 4.2 (rechts) zu erkennen. Die genutzten Schulterproben (Abb. 4.3) wurden aus Autotürdichtungen gestanzt, somit verfügt diese Probengeometrie nicht über eine geschlossene Außenhaut. Die Porenstruktur ist allerdings identisch zu der der Zylinderproben.

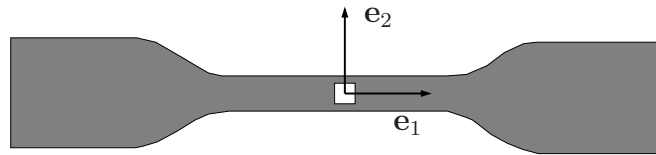


Abbildung 4.3: Schulterprobe nach DIN ISO 572

Die Experimente des Vollmaterials werden ausschließlich an Schulterproben durchgeführt, da hier die Problematik der Außenhaut nicht auftritt.

## 4.3 Versuchsaufbau und Durchführung der uniaxialen Experimente

### 4.3.1 Prüfmaschine und Messsysteme

Uniaxiale Untersuchungen sind zum einen einfach durchzuführen, zum anderen liefern sie ein Grundverständnis für das Material. Im Folgenden werden uniaxiale Zug- und Druckexperimente beschrieben. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf den Zugexperimenten. Beide Belastungszustände werden an einer selbstentwickelten Zugmaschine (Abb. 4.4) durchgeführt. Beim verwendeten System handelt es sich um ein uniaxiales Kraft-Weg-Messsystem. Die Proben werden an beiden Enden mit Klemmen befestigt und von einem vertikal angebrachten Lineartisch LINOS LT 50<sup>®</sup> gedehnt wobei der Maschinenweg direkt wiedergegeben wird. Die Probenhalterungen sind mit Anschlägen versehen, so dass die Proben immer gleich eingespannt werden können. Die Aufnahme der Dehnung erfolgt über eine optische Dehnungsmessung. Zur Kraftmessung werden verschiedene Doppelbiegebalken der Firma ME-Messsysteme verwendet, die einen Einsatzbereich von bis zu 100 N ermöglichen. Krafteinleitung und -ausleitung in die Probe erfolgen dabei zentrisch durch die Befestigung an den dafür vorgesehenen Gewindebohrungen. Bei den hier durchgeführten Messungen wird der Kraftsensor KD24S<sup>®</sup> mit einem Nennkraftbereich von  $\pm 20$  N verwendet. Er liefert ein Spannungssi-

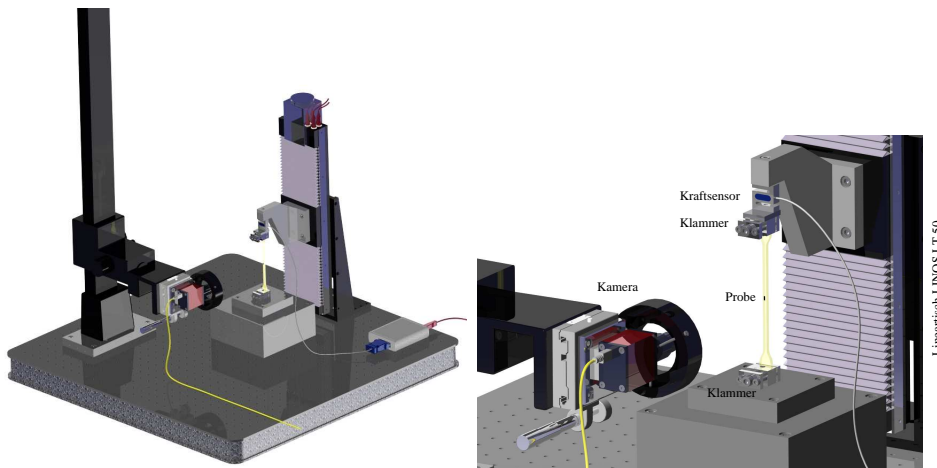


Abbildung 4.4: Versuchseinrichtung zur Durchführung der uniaxialen Experimente

gnal, welches über den Verstärker GSV-USB<sup>®</sup> der Firma ME-Messsysteme an die Software LabVIEW<sup>®</sup> weitergegeben und dort in einen Kraftwert umgerechnet wird.

### 4.3.2 Uniaxiale Zugversuche

Zu Anfang soll ein Zusammenhang zwischen Maschinenweg und Dehnung mit Hilfe eines Kamerasystems ermittelt werden. Das mit Siebdruckfarbe auf die Probe aufgebrachte Rechteck (Abb. 4.2 bzw. Abb. 4.3) wird für unterschiedliche Maschinenwege  $U$  vom Kamerasystem aufgenommen. Mit dem Bildanalyseprogramm VISION ASSISTANT<sup>®</sup> wird die deformierte Länge ermittelt (Klemmfunktion-Kontourekennung). Die Streckung in Zugrichtung  $\lambda_1$  wird über die Länge  $l_0$  des Rechtecks in der undeformierten Lage und die dazu korrespondierende Länge  $l$  der deformierten Markierung berechnet. Die Streckung in Querrichtung  $\lambda_2$  ergibt sich analog mit den Informationen über die Breite  $b_0$  und  $b$  des Rechtecks, somit erhält man  $\lambda_1 = \frac{l}{l_0}$  und  $\lambda_2 = \frac{b}{b_0}$ . Der so ermittelte Zusammenhang zwischen Streckungen und Maschinenweg  $U$  ist in Abb. 4.5 und 4.6 abgebildet. Er wird in LabVIEW<sup>®</sup> hinterlegt, sodass in den folgenden Experimenten die Dehnung direkt über den Maschinenweg berechnet werden kann und das Kamerasystem nicht mehr benötigt wird.



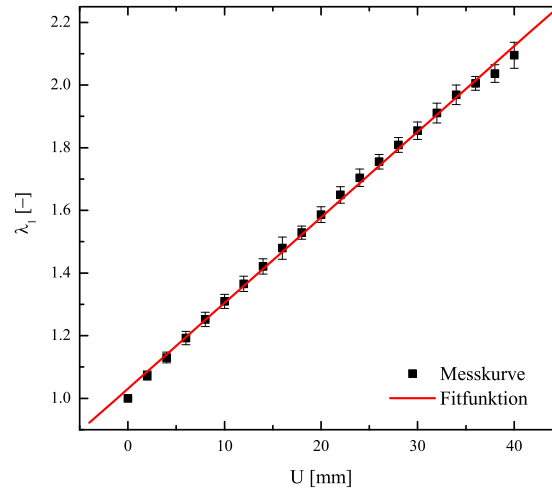


Abbildung 4.5: Streckung  $\lambda_1$  in Zugrichtung als Funktion des Maschinenwegs

Der hier gezeigte Zusammenhang wurde mit den Schulterproben ermittelt, die Untersuchung mit den Zylinderproben erfolgt analog.

In einem weiteren Experiment erfolgt die Untersuchung der Dehnung in Dickenrichtung. Dazu wird diese Richtung mit der Kamera aufgenommen und die gleichen Maschinenwege werden wie zuvor angefahren. Das Ergebnis ist, dass sich die Dicken- und die Querrichtung gleich verhalten. Aus diesem Grund wird im Folgenden von einem isotropen Materialverhalten ( $\lambda_2 = \lambda_3$ ) ausgegangen.

Auch im Fall des Vollmaterials muss die Beziehung zwischen Streckung und Maschinenweg ermittelt werden. Wegen der Inkompressibilität dieses Materials reicht allerdings der Zusammenhang zwischen der Streckung in Zugrichtung und dem Maschinenweg aus, da die Streckung in Querrichtung über die Bedingung

$$\det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2^2 = 1, \quad (4.1)$$

die aus der Inkompressibilität und der Isotropieannahme stammt, ermittelt werden kann.

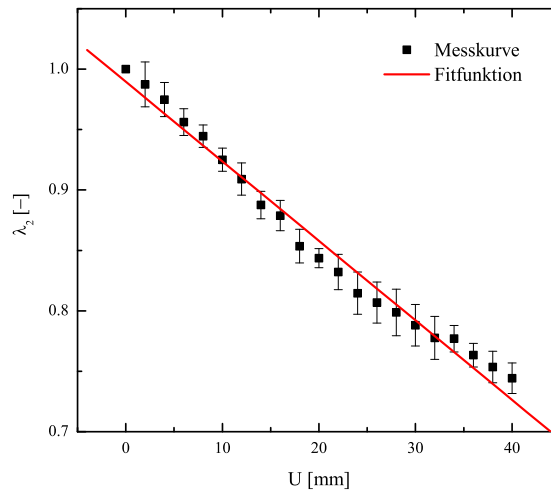


Abbildung 4.6: Streckung  $\lambda_2$  in Querrichtung als Funktion des Maschinenwegs

### Mullins-Effekt

Im Anschluss an die vorgestellte Voruntersuchung soll der Mullins-Effekt untersucht werden. Da im weiteren Verlauf der Arbeit gezeigt wird, dass der Einfluss der Probengeometrie sehr gering ist, werden diese Untersuchungen nur mit den Schulterproben durchgeführt. Diese werden bevorzugt, da es bei hoher und mehrfacher Belastung zu einer Beschädigung der Zylinderproben an der Einspannung kommen kann.

Der Mullins-Effekt beschreibt eine Entfestigung des Materials, die bei der zyklischen Belastung zuvor unbelasteter Proben auftritt. In der Literatur findet man einen irreversiblen und einen reversiblen Mullins-Effekt. Der irreversible Teil ist auf die Zerstörung von Polymerketten zurückzuführen und tritt nur im ersten Zyklus auf. Die so zerstörten Ketten können ohne das Zuführen von Energie nicht wieder geheilt werden. Somit kann die Spannung des ersten Zyklus durch einfache Erholung nicht wieder erreicht werden. Der reversible Anteil ist die Entfestigung, die in den weiteren Zyklen zu beobachten ist, was in [110] erläutert ist. Diese Entfestigung verschwindet wieder nach einer gewissen Ruhephase. Da dieses Verhalten auch mit der Viskoelastizitätstheorie beschrieben werden kann, wird im Folgenden nur der irreversible Anteil des Effekts als Mullins-Effekt bezeichnet, vgl. Büche [24]. Der Mullins-Effekt ist

unabhängig von der Deformationsgeschwindigkeit, allerdings ist er abhängig von der Deformation.

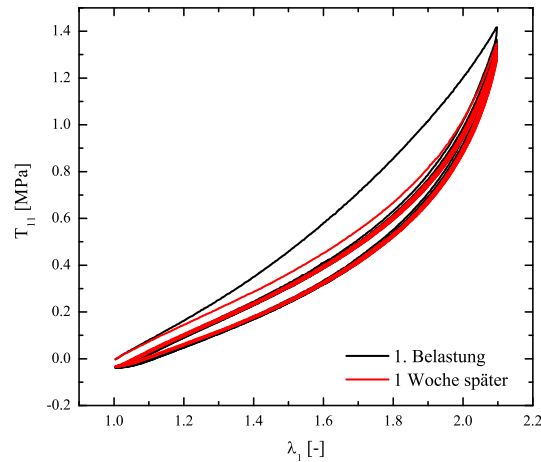


Abbildung 4.7: Untersuchung des Mullins-Effekts mit einer Ruhezeit von einer Woche (Moosgummi)

Um den Mullins-Effekt für das Moosgummi zu untersuchen, wird eine zuvor unbelastete Probe mit einer konstanten Dehnrage in zehn Zyklen bis auf einen Maximalwert von jeweils 110 % Deformation belastet. Diese Deformation wird gewählt, da in der technischen Anwendung dieses Werkstoffs vor allem große Deformationen benötigt werden. Danach ruht die Probe ohne äußere Last. Nach einer Woche wird das gleiche Experiment wiederholt. Die Ergebnisse hierfür sind in Abb. 4.7 dargestellt. Man erkennt hier im ersten Durchlauf einen deutlichen Spannungsabfall nach dem ersten Zyklus. In den folgenden Zyklen stellt sich ein nahezu konstantes Spannungsniveau ein. Dieses Verhalten deutet auf den Mullins-Effekt hin, allerdings könnte es auch vom viskoelastischen Verhalten selbst kommen, da die Probe nach dem ersten Zyklus einige Zeit braucht um zu relaxieren und sie diese Zeit wegen der kontinuierlichen Belastung nicht hat. Wenn das beobachtete Verhalten der Mullins-Effekt ist, muss die Spannung in jedem Zyklus des nach einer Woche durchgeführten Experiments unterhalb der des ersten Zyklus bleiben. Wie in Abb. 4.7 zu sehen ist, ist dies tatsächlich der Fall. Somit kann die Aussage getroffen werden, dass es sich beim Spannungsabfall nach dem ersten Belastungszyklus um den Mullins-Effekt handelt. Der gleiche Versuch wird auch

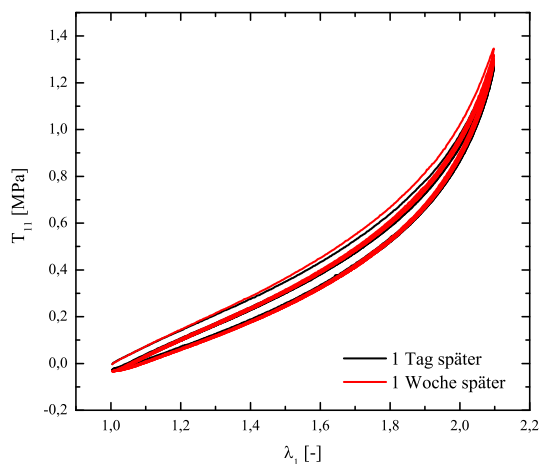


Abbildung 4.8: Untersuchung des Mullins-Effekts mit Ruhezeiten von einem Tag und einer Woche (Moosgummi)

nach einem Jahr nochmals durchgeführt und auch nach dieser Zeit erhält man nahezu die gleiche Kurve wie nach einer Woche. Dies ist ein sicheres Indiz für den Mullins-Effekt.

Zusätzlich ist im Experiment nach einer Woche zu erkennen, dass auch bei einer erneuten Belastung eine Entfestigung im ersten Zyklus auftritt. Dieser Effekt kann zwei Ursachen haben: Dieser Entfestigungseffekt kann entweder ein thixotroper Effekt sein oder durch die Kombination der Lastzyklen mit der Viskosität selbst entstehen. Die Definition der Thixotropie kommt aus der Rheologie und beschreibt dort viskose Effekte von Fluiden [6]. Man nimmt an, dass Zerstörungs- und Heilungsprozesse von Mikrostrukturen zu einer Entfestigung des Materials bei zyklischer Belastung und einer Verfestigung während einer Erholungsphase führen. Zudem haben thixotrope Effekte einen Einfluss auf das Relaxationsverhalten, wie es von Sedlan [126] ausführlich beschrieben wurde. Zum anderen kann es sich auch um einen viskoelastischen Effekt mit sehr langen Relaxationszeiten handeln. Durch den ersten Zyklus erfährt die Probe eine Vordeformation. Bei dem direkt angeschlossenen zweiten Zyklus ist nun eine geringere Kraft notwendig um die Deformation des ersten Zyklus zu erreichen.

Aus chemischer Sicht weisen vulkanisierte Materialien ohne thermische Energiezufuhr keine Heilungseffekte der Mikrostruktur auf, so dass im Folgenden

von einem viskoelastischen Effekt ausgegangen wird. Um diesen Effekt genauer zu spezifizieren wird eine weitere Untersuchung mit der gleichen Probe nach einem Tag durchgeführt (Abb. 4.8). Bis etwa 60 % Deformation liegen die Kurven übereinander, danach unterscheiden sie sich. Somit kann die Aus-

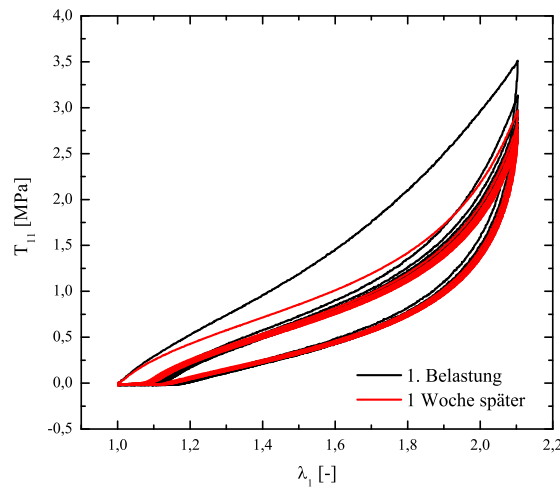


Abbildung 4.9: Untersuchung des Mullins-Effekts mit einer Ruhezeit von einer Woche (Vollgummi)

sage getroffen werden, dass das Material länger als einen Tag braucht, um vollständig zu relaxieren und dass diese Relaxation nach einer Woche abgeschlossen ist. Dieses Verhalten wird später noch detaillierter besprochen.

Da der Mullins-Effekt nicht modelliert werden soll, werden alle Proben zyklisch bis auf eine Deformation von 120 % vorbehandelt. Danach relaxieren sie eine Woche, da so sicher gestellt ist, dass die Relaxation abgeschlossen ist. Erst im Anschluss daran werden die Experimente durchgeführt.

Die Untersuchungen mit dem Vollmaterial erfolgen analog (Abb. 4.9 und Abb. 4.10). Hierbei ist deutlich zu erkennen, dass die Hysterese eine andere Form hat als bei den Moosgummiprobe. Es handelt sich hierbei also um ein anderes Materialverhalten als zuvor, was, wie schon erwähnt, zu erwarten war. Allerdings ist auch zu erkennen, dass der Mullins-Effekt hier ebenfalls existiert. Auch bei diesem Material sieht man, dass die Relaxation nach einem Tag noch nicht abgeschlossen ist und auch hier findet man die Entfestigung im ersten Zyklus des zweiten und dritten Versuchs. Auch wenn sich das Materialverhalten in der Hystereseform stark unterscheidet, können sehr viele

Parallelen zwischen Moosgummi und Vollgummi festgestellt werden.

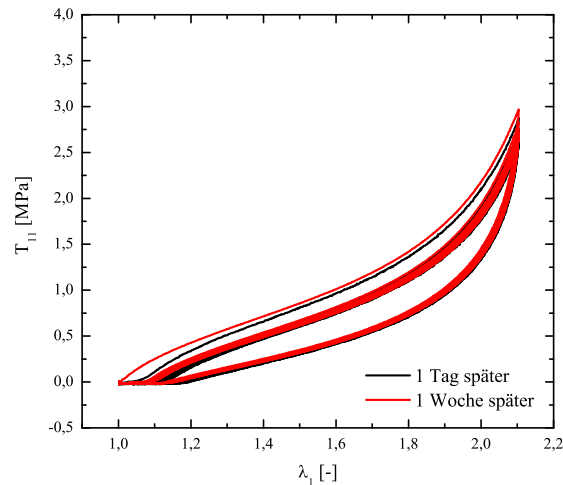


Abbildung 4.10: Untersuchung des Mullins-Effekts mit Ruhezeiten von einem Tag und einer Woche (Vollgummi)

### Grundelastizität

Im folgenden Kapitel soll die Grundelastizität des Moosgummis beider Probegeometrien bestimmt werden. Dies wird durchgeführt, um den Einfluss der Außenhaut genauer beschreiben und später modellieren zu können. Zur Bestimmung der Grundelastizität gibt es drei unterschiedliche Möglichkeiten:

- Bei der ersten Methode wird ein quasi-statischer Prozess durchgeführt. Hierbei wird die Probe mit der langsamst möglichen Deformationsgeschwindigkeit von  $0,000273 \text{ s}^{-1}$  bis auf 100 % Deformation belastet und im Anschluss entlastet. Hierbei wird festgestellt, dass die Hysterese in diesem Fall immer noch geöffnet ist. Dieses Verhalten könnte auf eine statische Hysterese hindeuten. Da allerdings festgestellt wurde, dass sich die Proben nicht plastisch verformen, müsste eine noch langsamere Geschwindigkeit genutzt werden um die Grundelastizität zu erhalten. Dies ist allerdings mit dem vorgestellten Aufbau nicht möglich.

- Bei der zweiten Methode wird eine bestimmte Deformation erst über den Be- und dann über den Entlastungspfad angefahren, woraufhin die Probe in dieser Stellung relaxiert. Die sich aus den beiden Pfaden ergebenden Spannungswerte für die angefahrne Deformation werden anschließend verglichen. Der Mittelwert dieser Experimente entspricht dann dem Grundelastizitätswert der angefahrenen Deformation. Der Versuch muss für weitere Deformationen wiederholt werden. Zuvor wurde festgestellt, dass die Relaxationszeit des verwendeten Materials zwischen einem Tag und einer Woche liegt. Aus diesem Grund sollte die Probe mindestens einen Tag auf konstanter Deformation verharren. Wegen der starken Temperaturschwankungen innerhalb eines Tages und wegen der Empfindlichkeit der Probe auf diese Schwankungen können höchstens über die Dauer von fünf Stunden akzeptable Ergebnisse produziert werden. Da sich die Be- und Entlastungswerte nach dieser Zeit noch immer um mehr als 20 % unterscheiden, eignet sich diese Methode auch nicht zur Charakterisierung des verwendeten Materials.
- Die dritte Möglichkeit besteht darin, zyklische Versuche um eine Mitteldehnung durchzuführen. In Abb. 4.11 sind der erste und der 50. Zyklus

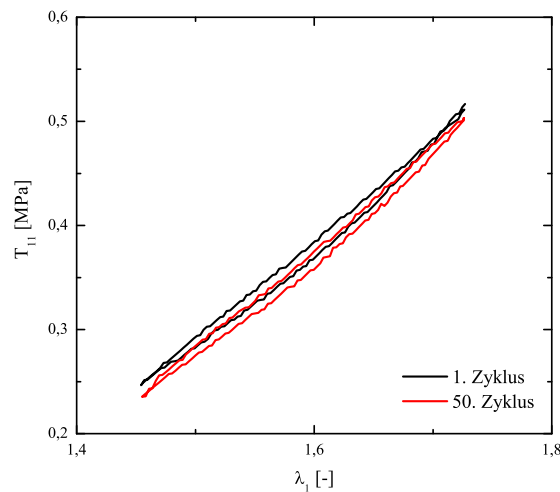


Abbildung 4.11: 1. und 50. Zyklus um die Mitteldehnung  $\lambda_1 = 1,6$  zur Ermittlung der Grundelastizität

klus bei einer Mitteldehnung von 60 % dargestellt. Die erhaltene Hysterese fällt bis zu einem stationären Zustand. Die zur Mitteldehnung zugehörige mittlere Spannung entspricht dann dem Wert der Grundelastizität bei dieser Dehnung.

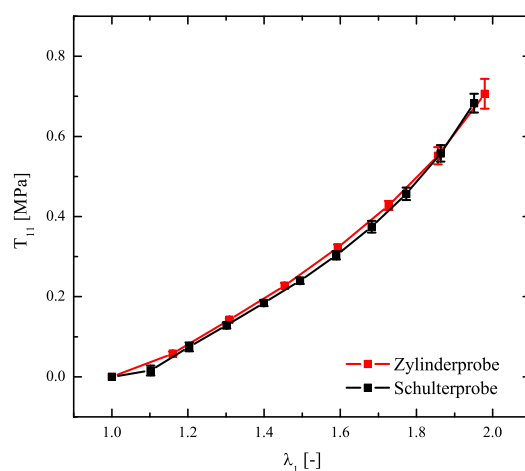


Abbildung 4.12: Grundelastizität der Schulter- und Zylinderprobe (Moosgummi)

Die Ermittlung der Grundelastizität nimmt mit allen drei Methoden aufgrund der langen Relaxationszeiten sehr viel Zeit in Anspruch. Zudem muss erwähnt werden, dass es sich bei den ermittelten Werten um Abbruchwerte handelt, die nach einer vertretbaren Versuchszeit erhalten werden. Allerdings sind die Abbruchwerte der dritten Methode wesentlich näher an der Grundelastizität als die Werte, die mit der ersten bzw. zweiten Methode in der gleichen Zeit erreicht werden. Aus diesem Grund erfolgt die Ermittlung der Grundelastizität beider Probengeometrien mit dieser Methode. In einem Abstand von 5 mm werden Maschinenwege von 0-40 mm angefahren. Dann wird an jedem Punkt so lange zyklisiert bis sich eine nahezu stationäre Hysterese einstellt. Der letzte dieser Zyklen wird dann dazu verwendet, die Grundelastizität zu bestimmen, indem der Mittelwert der Spannungshysterese an der Mitteldehnung ermittelt wird. In Abb. 4.12 ist die so erhaltene Grundelastizität mit Fehlerbalken, die die Standardabweichung von fünf Proben wiedergeben, für beide Probengeometrien des Moosgummis dargestellt.



Bei diesen Kurven ist die Cauchy-Spannung  $T_{11}$  in  $\mathbf{e}_1$ -Richtung gegenüber der Streckung  $\lambda_1$  in gleicher Richtung aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Probengeometrie keinen Einfluss auf die Grundelastizität hat. Zudem wurde bei den Zyklen festgestellt, dass sich auch das viskoelastische Verhalten nicht unterscheidet. Aus diesem Grund muss die Probengeometrie

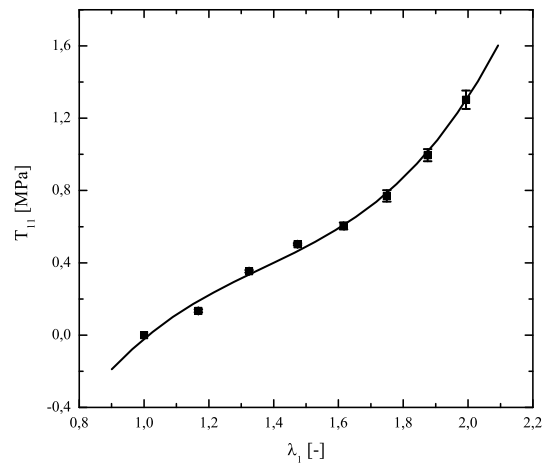


Abbildung 4.13: Grundelastizität ermittelt an Schulterproben (Vollgummi)

nicht in das Modell aufgenommen werden und es ist legitim, die Zugversuche mit den Schulterproben und die Druckversuche mit den Zylinderproben durchzuführen.

Die Werte der Grundelastizität des Vollmaterials sind in Abb. 4.13 dargestellt. Auch diese sind aufgrund der langen Relaxationszeiten mit der dritten Methode ermittelt worden. Der für Elastomere typische S-Schlag ist bei diesem Material im Gegensatz zum Moosgummi stark ausgeprägt. Das ist auch der Grund für die zuvor erwähnten unterschiedlichen Hystereseformen. Diese Unterschiede zeigen, dass die Grundelastizität des Vollgummis nicht aus einer einfachen Skalierung des Moosgummis entsteht. Dies liegt, wie zuvor schon erwähnt, an den unterschiedlichen Herstellungsprozessen. Aus diesem Grund müssen zwei unabhängige Modelle für Moos- und Vollgummi eingeführt werden.

## Viskoelastizität

Nachdem die Grundelastizität bekannt ist, soll im Folgenden das viskoelastische Verhalten untersucht werden. Dieses Verhalten zeichnet sich vor allem durch Relaxation, das heißt das Abfallen der Spannung bis auf den Grundelastizitätswert bei festgehaltener Dehnung und durch eine geöffnete Hysterese bei zyklischen Versuchen aus. Zunächst erfolgt die Untersuchung des Relaxationsverhaltens. Dazu werden unterschiedliche Deformationsniveaus angefahren und das Material relaxiert jeweils 30 Minuten. Nach einem Versuch ruht die Probe eine Woche im undeformierten Zustand. Danach wird eine andere Deformation angefahren. In Abb. 4.14 ist dies für sieben unterschiedliche Deformationen abgebildet, in Abb. 4.15 sind drei dieser Experimente mit den korrespondierenden Grundelastizitätswerten aus Abb. 4.12 dargestellt.

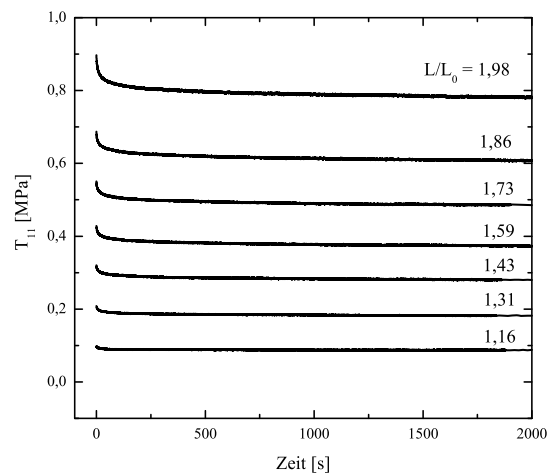


Abbildung 4.14: Relaxationsexperimente für unterschiedliche Deformationen (Moosgummi)

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Grundelastizität nach 30 Minuten noch lange nicht erreicht ist. Diese Erkenntnis stimmt mit den vorherigen Resultaten überein. Zudem lässt sich feststellen, dass das Relaxationsverhalten von der Deformation abhängt. Bei einer Deformation von 31 % unterscheidet sich die Spannung nach 30 Minuten um 36 % vom korrespondierenden Grundelas-

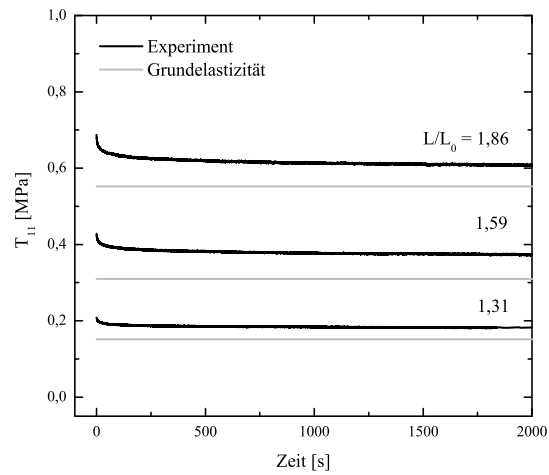


Abbildung 4.15: Relaxationsexperimente für unterschiedliche Deformationen mit Darstellung der Grundelastizität (Moosgummi)

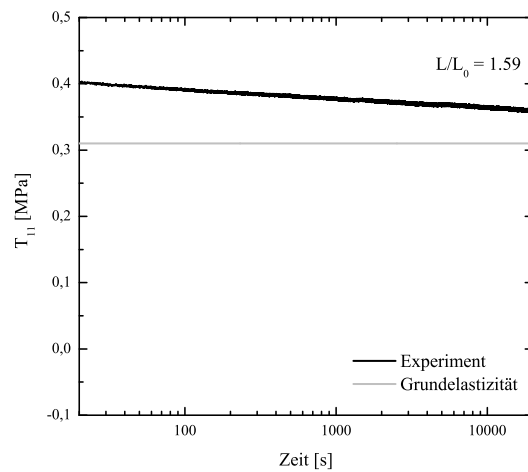


Abbildung 4.16: Relaxationsexperiment über 20.000 s (Moosgummi)

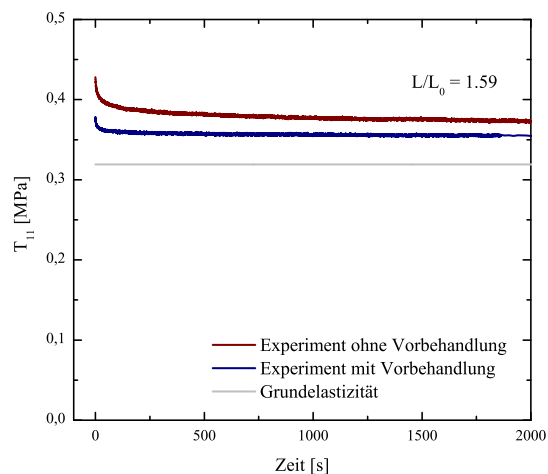


Abbildung 4.17: Relaxationsexperimente mit und ohne zyklische Vorbehandlung (Moosgummi)

tizitätswert, bei einer Deformation von 60 % um etwa 18 % und bei einer Deformation von 86 % nur noch um 13 %. Dieses Ergebnis muss später in das Modell mit einfließen.

Im Anschluss an diese Experimente wird eine Relaxation über fünf Stunden für eine Deformation von 60 % untersucht (Abb. 4.16). Auch nach dieser Zeit ist die Relaxation noch nicht beendet, die Werte unterscheiden sich immer noch von den Werten der Grundelastizität um etwa 12 %. Des Weiteren lässt sich in der halblogarithmischen Darstellung erkennen, dass die Kurve noch immer stark fällt. Dies ist neben den Untersuchungen zum Mullins-Effekt ein weiteres Indiz für sehr lange Relaxationszeiten.

Daraufhin soll das Relaxationsverhalten bezüglich einer zyklischen Vorbehandlung untersucht werden (Abb. 4.17). Der Spitzenwert der Relaxationskurve mit Vorbehandlung liegt deutlich unterhalb jenem ohne Vorbehandlung. Nach 30 Minuten unterscheidet sich der Spannungswert der Probe mit Vorbehandlung noch um 10 % von der Grundelastizität, der der Probe ohne Vorbehandlung um 18 %. Die Relaxationskurve mit Vorbehandlung hängt stark von der Amplitude, der Deformationsgeschwindigkeit und der Anzahl der Zyklen der Vorbehandlung ab. Mit einer geeigneten Wahl der Vorbehandlung kann ein Optimum erreicht werden und das Erreichen der Grundelastizität stark verkürzt werden.

Im Fall des Vollmaterials wird Ähnliches festgestellt.

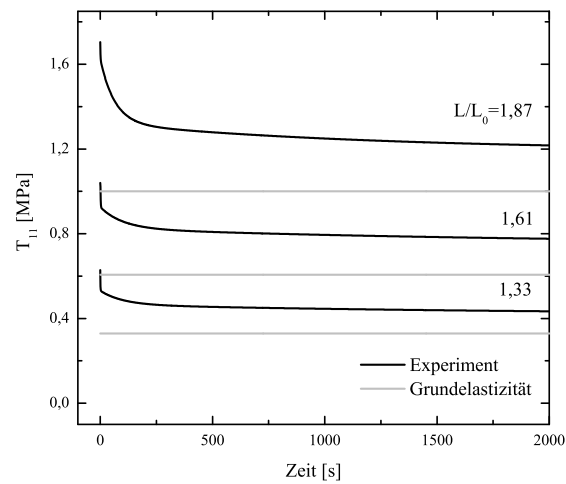


Abbildung 4.18: Relaxation bei unterschiedlichen Deformationsniveaus mit korrespondierender Grundelastizität (Vollgummi)

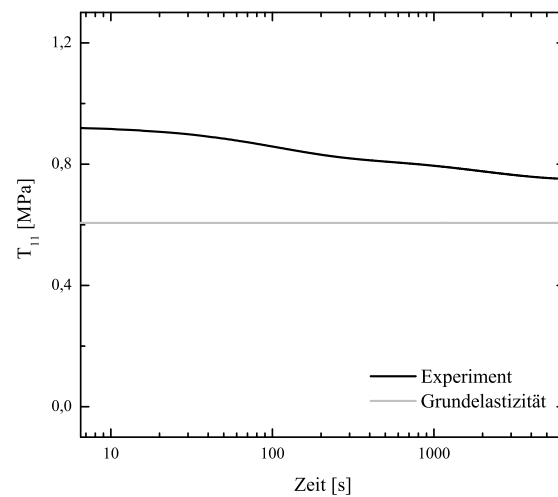


Abbildung 4.19: Relaxation innerhalb 6.000 s (Vollgummi)

In Abb. 4.18 sind Relaxationskurven des Vollgummis an drei unterschiedlichen Dehnungsniveaus dargestellt. Nach 30 Minuten ist in keinem der Fälle die Grundelastizität erreicht. Bei einer Dehnung von 33 % liegt die Relaxationskurve noch 31 % oberhalb der Grundelastizität, bei einer Dehnung von 61 % noch 26 % und bei einer Dehnung von 86 % noch 21 %. Hierbei ist auch die Dehnungsabhängigkeit der Relaxationskurve wie schon bei dem Moosgummi zu erkennen. Auch nach einer Relaxationzeit von 6.000 s ist die Grundelastizität nicht erreicht (Abb. 4.19). Hier unterscheiden sich die Werte immer noch um 20 %. Des Weiteren wird auch bei diesem Material festgestellt, dass die Relaxationszeit von der Vorbehandlung abhängt (Abb. 4.20). Diese Aspekte müssen alle im Materialmodell berücksichtigt werden

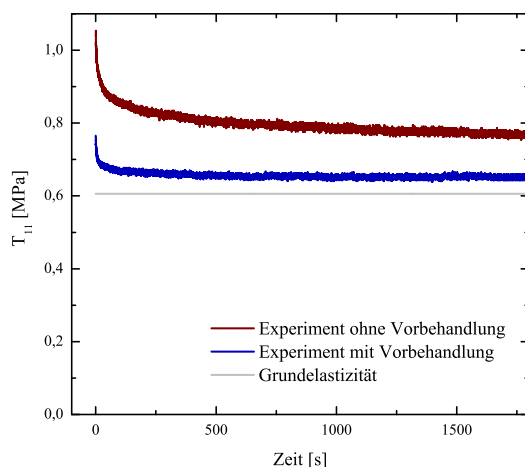


Abbildung 4.20: Relaxationsversuch mit Vorbehandlung (Vollgummi)

und führen dort zur Berücksichtigung entsprechender Nichtlinearitäten. Da auch zyklische Versuche Aufschluss über das Relaxationsverhalten geben, werden unterschiedlichen Dehnraten untersucht. In den Abbildungen 4.21-4.23 sind die Ergebnisse für Dehnraten aus drei Dekaden abgebildet. Es ist zu erkennen, dass sich im untersuchten Bereich weder der Spitzenwert noch die Öffnung der Hysterese stark unterscheiden. Dies spricht für ein nichtlineares Verhalten bezüglich der Dehnraten im untersuchten Bereich und muss im Modell beachtet werden. Dieses Verhalten wird häufig als statische Hysterese interpretiert. Allerdings wurde festgestellt, dass sich das Material nicht plastisch verformt. Aus diesem Grund wird in der Modellierung von der

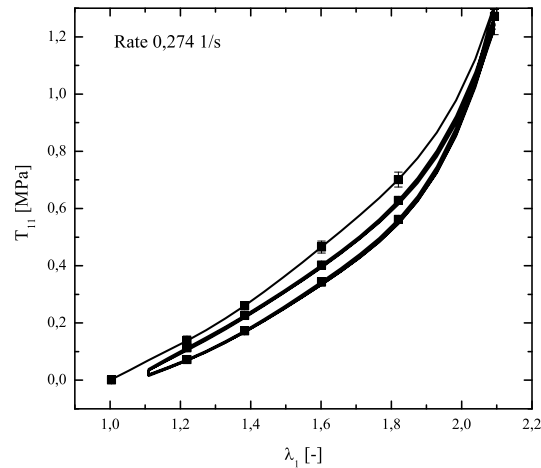


Abbildung 4.21: Zyklische Versuche bei einer Dehnrate von  $0,274 \text{ s}^{-1}$  (Moosgummi)

Einführung einer statischen Hysterese abgesehen und eine Viskoelastizitätstheorie mit sehr hohen und nichtlinearen Viskositäten verwendet.

Es wird davon ausgegangen, dass die langsamste Dehnrate von  $0,00274 \text{ s}^{-1}$  noch zu schnell für das Gleichgewichtsverhalten des untersuchten Materials ist und dass sich die Hysterese bei einer geeigneten, langsameren Dehnrate schließt. In allen drei Fällen beobachtet man zudem ein schnelles Abfallen der Spannung im ersten Zyklus. Das weitere Abfallen der Hystereseschleifen erfolgt so langsam, dass es fast nicht zu erkennen ist. Dieses Verhalten wird auch in den Relaxationsversuchen beobachtet. In den ersten 10 s fällt die Spannung um etwa 10 % und in den weiteren 2.000 s nur noch um etwa 2 %. Dieses langsame Abfallen kann allerdings nicht vernachlässigt werden, da es über einen sehr langen Zeitraum stattfindet. Die zyklischen Untersuchungen wurden an fünf Proben durchgeführt. Die Streuung der Ergebnisse ist über die Fehlerbalken dargestellt.

Die Experimente werden analog mit dem Vollmaterial durchgeführt. Auch hier ist die Entfestigung nach dem ersten Zyklus zu beobachten und die Öffnungen der Hysteresen sind in allen drei Dekaden sehr ähnlich. Lediglich der erste Zyklus unterscheidet sich stärker. In Abb. 4.24 sind die Spannungs-

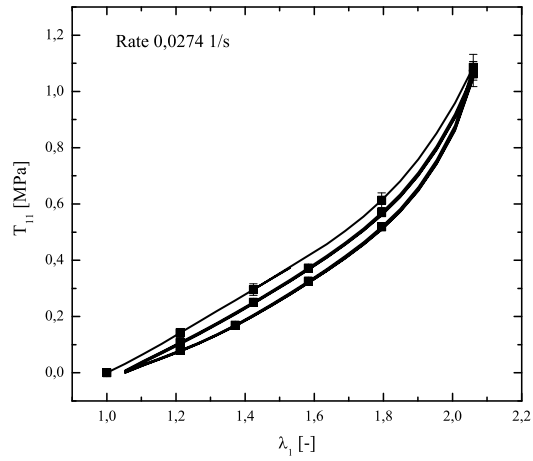


Abbildung 4.22: Zyklische Versuche bei einer Dehnrage von  $0,0274\text{s}^{-1}$  (Moosgummi)

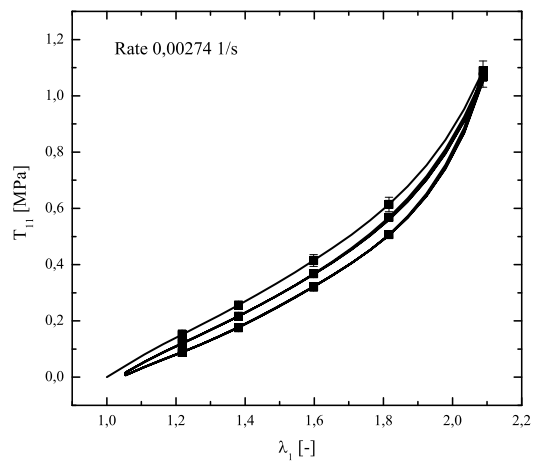


Abbildung 4.23: Zyklische Versuche bei einer Dehnrage von  $0,00274\text{s}^{-1}$  (Moosgummi)



Dehnungs-Verläufe dreier Dehnraten in einem Diagramm abgebildet. Eine de-

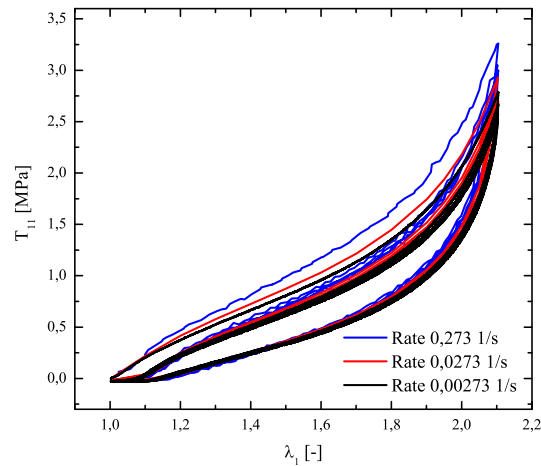


Abbildung 4.24: Zyklische Versuche bei Raten von  $0,274 \text{ s}^{-1}$  bis  $0,00274 \text{ s}^{-1}$  (Vollgummi)

taillierte Diskussion der Zugexperimente des Vollgummis kann in Koprowski-Theiss et al. [78] und des Moosgummis in Koprowski-Theiss et al. [77, 79] gefunden werden.

### 4.3.3 Uniaxiale Druckversuche

Im Anschluss an die uniaxialen Zugexperimente werden mit demselben experimentellen Aufbau am Moosgummi uniaxiale Druckexperimente durchgeführt. Für diese Untersuchungen sollen die bereits beschriebenen Zylinderproben genutzt werden.

Diese werden auf einen Zentimeter gekürzt und zwischen zwei Probenhalter geklebt (Abb. 4.25). Da an dieser Stelle keine unbelasteten Proben genutzt werden, ist es hier nicht möglich, Aussagen über den Mullins-Effekt unter Druckbelastung zu machen. Zu Anfang muss wegen der veränderten Probengeometrie und den anderen Halterungen wieder ein Zusammenhang zwischen Maschinenweg und Deformation gefunden werden. Da nun die gesamte Probe

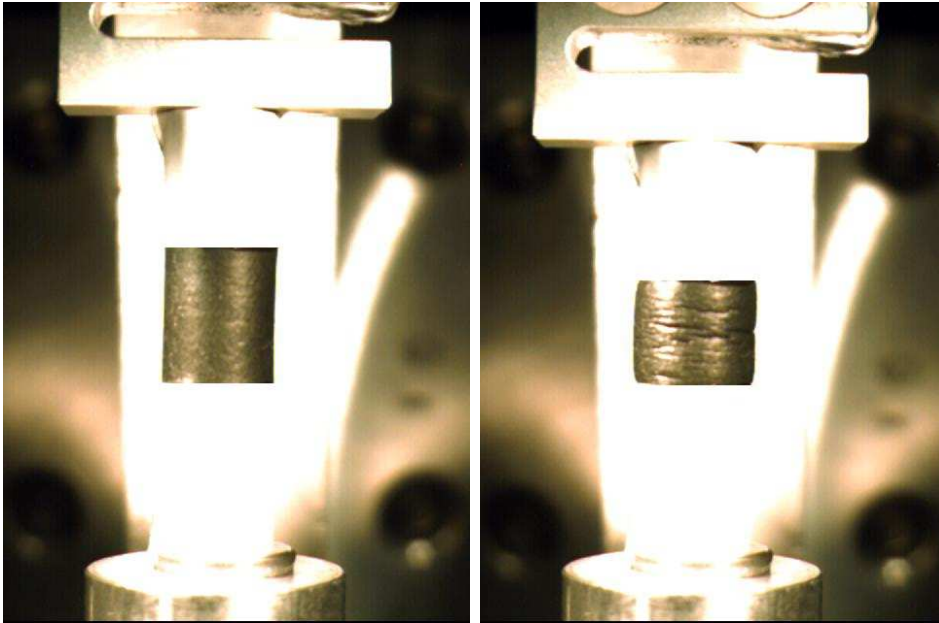


Abbildung 4.25: Zylinderprobe des uniaxialen Druckversuchs undeformiert (links) und nach einer Deformation von 20 % (rechts)

vom Bildbereich der Kamera erfasst wird, muss die Probe nicht mit Siebdruckfarbe markiert werden. Auch hier wird die Streckung in Druck- und in Querrichtung ermittelt (Abb. 4.26 und Abb. 4.27). In Abb. 4.25 (rechts) ist deutlich zu erkennen, dass sich die Oberfläche der Probe bei einer Deformation von 20 % wellt. Ab diesem Zeitpunkt ist es nicht mehr möglich genaue Informationen über die Dehnung zu erlangen, so dass alle Untersuchungen nur bis zu einer Stauchung von 20 % durchgeführt werden. Da auch bei geringeren Deformationen der Messfehler dieses Versuchsaufbaus sehr groß ist und da es sich wegen der Querdehnungsbehinderung durch die Probenhalterung nicht um einen rein uniaxialen Versuch handelt, sollen diese Untersuchungen ausschließlich als Validierung der mit Zugexperimenten und hydrostatischen Versuchen erlangten Ergebnissen genutzt werden. Aus diesem Grund ist die Anzahl der durchgeführten Experimente auch wesentlich geringer als bei den anderen Aufbauten.

Begonnen wird auch hier mit der Grundelastizität, die wie im Zugbereich über Zyklen um eine Mitteldehnung bestimmt wird. Die erhaltenen Ergebnisse mit entsprechenden Fehlerbalken sind in Abb. 4.28 dargestellt, die Ergebnisse der Grundelastizität des gesamten Messbereichs in Abb. 4.29. Bei

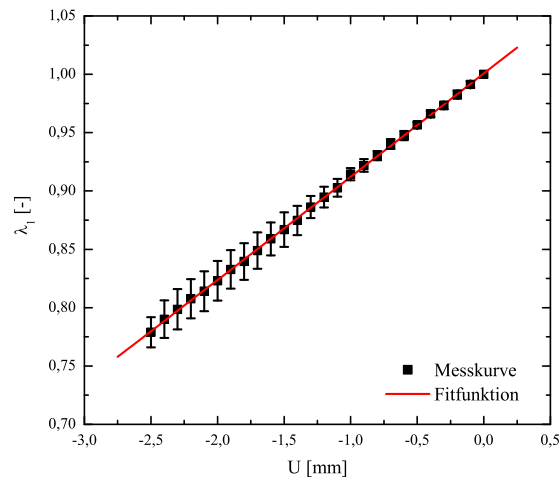


Abbildung 4.26: Streckung  $\lambda_1$  in Druckrichtung als Funktion des Maschinenwegs für den uniaxialen Druckversuch

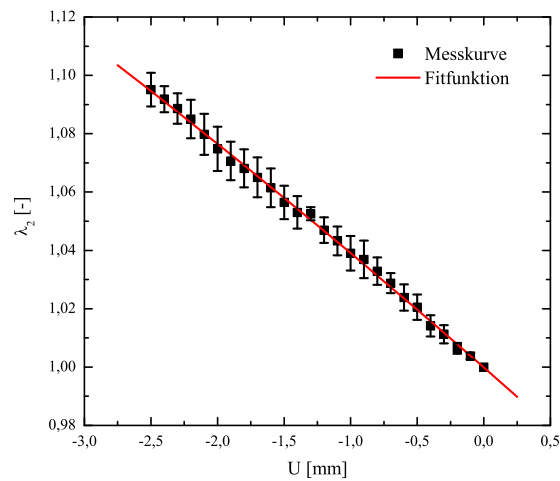


Abbildung 4.27: Streckung  $\lambda_2$  in Querrichtung als Funktion des Maschinenwegs für den uniaxialen Druckversuch

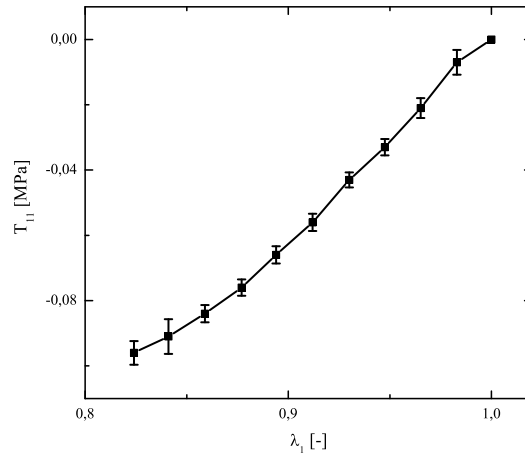


Abbildung 4.28: Grundelastizität unter uniaxialen Druck

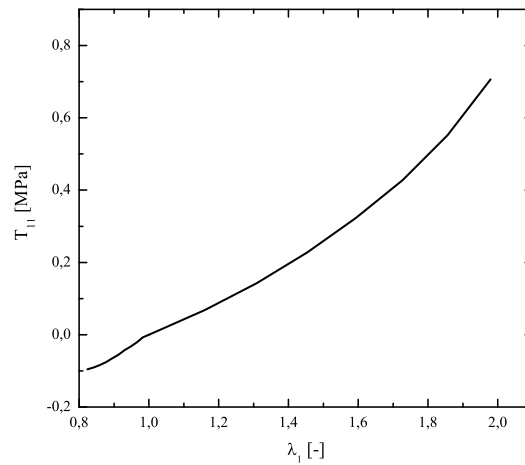


Abbildung 4.29: Grundelastizität im Zug- und Druckbereich

dem Übergang vom Zug- in den Druckbereich ist ein leichter Knick der Kurve festzustellen. Dies zeigt eine leichte Bimodularität des Materials.

Auch Relaxationsversuche werden durchgeführt. Zwei unterschiedliche Dehnungsniveaus  $\lambda_1 = 0,912$  und  $\lambda_1 = 0,824$  werden mit einer konstanten Rate angefahren und die Probe verweilt 30 Minuten auf diesem Niveau (Abb. 4.30). Wie schon bei den Zugversuchen ist auch hier zu erkennen, dass die Grundelastizität nach 30 Minuten noch lange nicht erreicht ist. Beim ersten Relaxationsversuch mit  $\lambda_1 = 0,912$  unterscheiden sich die Werte um etwa 20 %, mit  $\lambda_1 = 0,824$  nur um etwa 16 % vom Grundelastizitätswert. Somit ist auch im Druckbereich die Abhängigkeit des Relaxationsverhaltens von der Deformation zu beobachten. Zuletzt wird ein zyklischer Versuch mit einer Rate von  $0,0262 \text{ s}^{-1}$  durchgeführt. In Abb. 4.31 fällt auch hier die Entfestigung des Materials aufgrund der Viskoelastizität im ersten Zyklus auf. Auch bei anderen Raten kann dieses Verhalten beobachtet werden. Zudem unterscheiden sich verschiedene Raten nur marginal voneinander.

Im Allgemeinen kann festgehalten werden, dass das Relaxationsverhalten im Zug- und im Druckbereich qualitativ identisch ist. Dies ist eine wichtige Information für die spätere Modellierung.

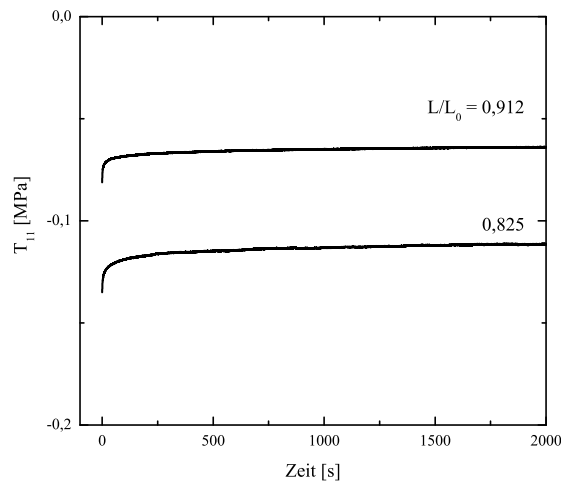


Abbildung 4.30: Relaxation bei zwei unterschiedlichen Dehnungsniveaus

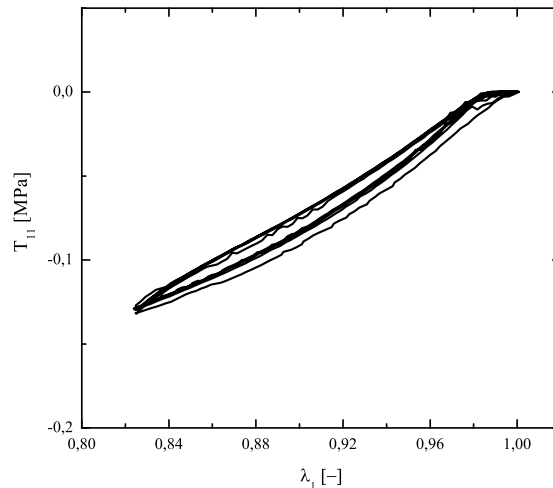


Abbildung 4.31: Zyklischer Versuch mit einer Rate von  $0,0262 \text{ s}^{-1}$  im uniaxialen Druckversuch

## 4.4 Versuchsaufbau und Durchführung der hydrostatischen Druckexperimente

### 4.4.1 Prüfmaschine und Messsysteme

Im Folgenden soll das hydrostatische Verhalten des Moosgummis untersucht werden. Um entsprechende Versuche durchführen zu können, wird eine Kompressionskammer entwickelt (Abb. 4.32). Auf der Primärseite befindet sich ein Antriebszylinder, der fest in einen Linearantrieb eingespannt ist. Durch den Vorschub der Linearachse wird auf der Primärseite ein Druck aufgebaut. Das Verbindungsglied der Primärseite zur Sekundärseite, der eigentlichen Probenkammer, ist ein Druckumwandler. Aufgrund der Verringerung des Kolbendurchmessers im Druckumwandler (Abb. 4.33 und Abb. 4.34), wird der Druck der Primärseite verstärkt auf die Sekundärseite übergeben. Im genutzten Aufbau handelt es sich konkret um ein Übersetzungsverhältnis

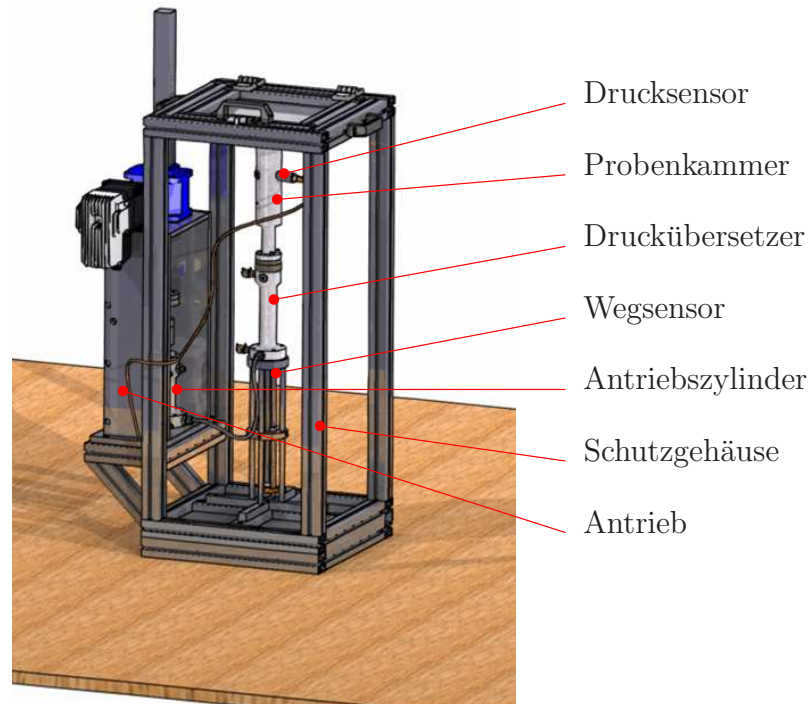


Abbildung 4.32: Aufbau der hydrostatischen Druckkammer, vgl. Seibert [128]

von 1:11. Folglich muss mit Hilfe des Antriebszylinders auf der Primärseite ein wesentlich geringerer Druck aufgebaut werden als eigentlich für den Versuch benötigt wird (vgl. Seibert [127, 128]).

Ursprünglich wurde das System mit Silikonöl betrieben. Allerdings ist in Öl mit bis zu 9 Vol.-% verhältnismäßig viel Luft gelöst, in Leitungswasser liegt dieser Wert bei nur 1,2 Vol.-%. Beim Komprimieren des Fluidvolumens bewirkt die gelöste Luft ein Abfallen des Drucks bei konstant gehaltenem Volumen (Abb. 4.35). Dieser Effekt ist bei Wasser aufgrund des geringeren Volumenanteils der Luft wesentlich geringer als bei Öl, so dass Wasser als Kammerfluid genutzt wird. Wegen der korrosiven Eigenschaften des Wassers wird ein synthetisches Additiv (HFA S1<sup>®</sup>, Fa. Total) zugesetzt.

Direkt am Druckumwandler angebracht befindet sich ein induktives Wegmesssystem, mit dem der Kolbenhub des Druckumwandlers aufgenommen wird. Bei einem idealen System könnte direkt über den Kolbenhub auf das verdrängte Fluidvolumen und damit auf die Volumenänderung  $\Delta V$  der Probe geschlossen werden. Da das System allerdings aufgrund von Schlauchverbin-

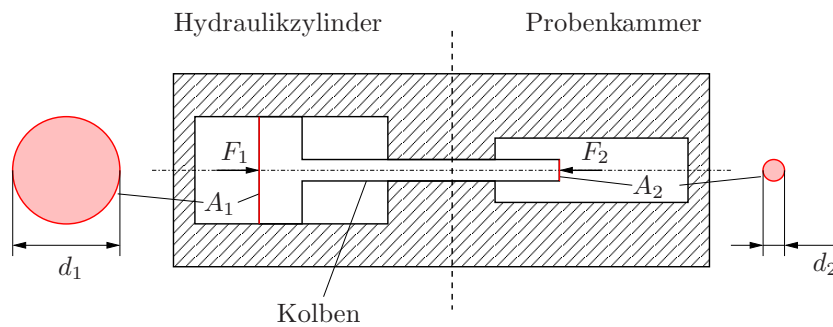


Abbildung 4.33: Prinzip des genutzten Druckumwandlers

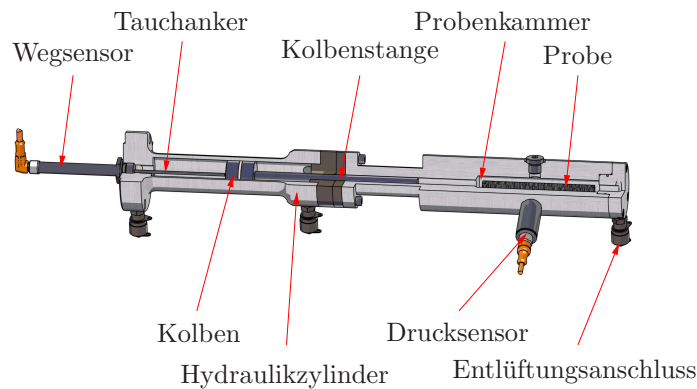


Abbildung 4.34: Schnitt durch Druckumwandler und angeschlossene Probenkammer

dungen und Dichtungen eine Eigensteifigkeit aufweist, muss zu Anfang eine Eichkurve mit einer Probe gleicher Geometrie aus Aluminium aufgenommen werden. Die mittlere Spannung  $T = 1/3(T_{11} + T_{22} + T_{33})$ , die dem negativen Druck entspricht, wird gegenüber dem Kolbenhub aufgezeichnet (Abb. 4.36). Bei allen darauf folgenden Messungen wird der zur aufgenommenen Spannung korrespondierende Kolbenhub aus der Eichkurve von dem in der Messung ermittelten Kolbenhub abgezogen. Diese Differenz wird dazu genutzt das verdrängte Volumen zu berechnen

$$\Delta V = A_2 (s_2 - s_{Eichkurve}). \quad (4.2)$$

Darin steht  $A_2$  für den Kolbenquerschnitt,  $s_2$  repräsentiert den Kolbenhub und  $s_{Eichkurve}$  den Kolbenhub, der mit Probendummy benötigt wurde um die



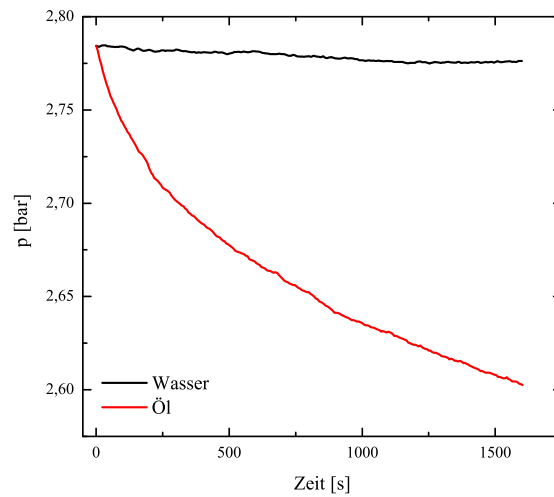


Abbildung 4.35: Vergleich des Druckabfalls bei den möglichen Kammerfluiden Wasser und Öl bei konstantem Volumen

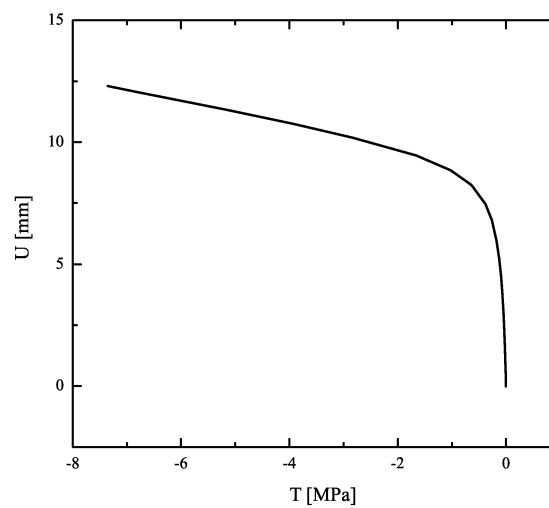


Abbildung 4.36: Eichkurve, hydrostatische Cauchy-Spannung  $T$  über Kolbenhub  $U$

gleiche Spannung aufzubringen. Daraufhin kann dann die Stauchung  $\lambda$  der

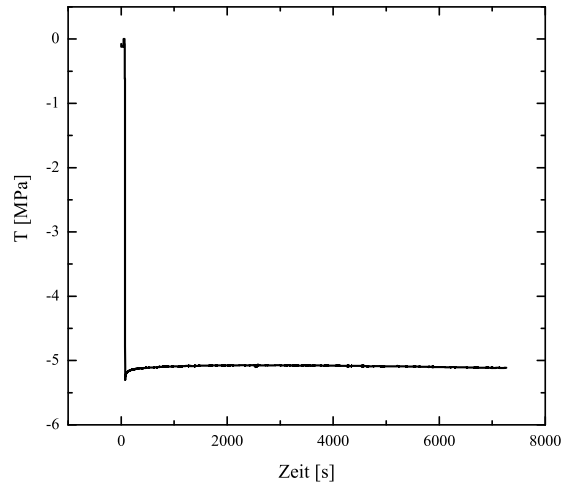


Abbildung 4.37: Konstante Belastung mit Probendummy

Probe über den Zusammenhang

$$V = J V_0 \quad (4.3)$$

berechnet werden. Darin steht  $V_0$  für das ursprüngliche Probenvolumen,  $V$  für das aktuelle, das sich aus  $V = V_0 - \Delta V$  berechnet und  $J$  für die Jacobi-Determinante. Die Jacobi-Determinante ist somit ein Maß für die Volumendehnung und wird aus der Determinanten des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  berechnet. Im hydrostatischen Druckversuch ergibt sie sich zu

$$J = \det \mathbf{F} = \lambda^3. \quad (4.4)$$

Damit kann die Stauchung  $\lambda$  der Probe wie folgt berechnet werden

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{V_0 - \Delta V}{V_0}}. \quad (4.5)$$

Dies kann auch in Seibert [128] und Koprowski-Theiss [80] nachgelesen werden. Der dazu korrespondierende Druck  $p$  wird in der Kammer der Sekundärseite über einen Druckaufnehmer bestimmt.

Da nicht nur statische Versuche durchgeführt werden sollen, muss das Verhalten der Kammer bei einem konstanten Volumen (Abb. 4.37) und bei zy-

klischer Belastung mit unterschiedlichen Deformationsraten (Abb. 4.38) untersucht werden. In Abb. 4.37 ist zu erkennen, dass der Druck auch während einer Zeit von 8.000s um weniger als 2 % fällt. Zudem ist in Abb. 4.38 zu sehen, dass das erhaltene Maximum des Drucks für unterschiedliche Deformationsraten gleich ist und es auch nach 20 Zyklen nicht abfällt. Somit ist sicher gestellt, dass sich die Kammer nicht viskoelastisch verhält.

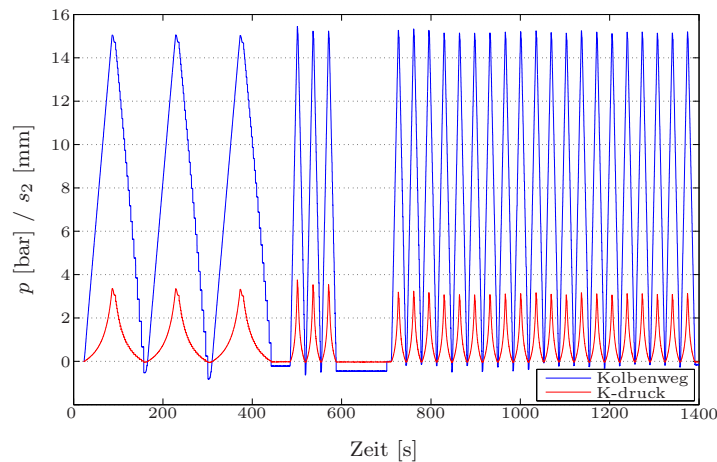


Abbildung 4.38: Zyklische Belastung eines Probendummys mit unterschiedlichen Dehnraten

#### 4.4.2 Mullins-Effekt

Zu Anfang soll der Mullins-Effekt unter hydrostatischem Druck untersucht werden. Dazu wird die Probe mehrfach bis zu einem festgelegten Kolbenhub belastet. Dann wird die Probe, wie auch schon im Zugbereich, eine Woche ruhen gelassen. Anschließend wird dasselbe Experiment nochmals durchgeführt. In Abb. 4.39 ist die mittlere Spannung über der Stauchung über die Versuchsergebnisse abgebildet. Man sieht auch hier, dass der Druck im ersten Zyklus des ersten Versuchs höher ist als in den folgenden. Diese Kurve kann auch nach einer Woche nicht wieder erreicht werden, so dass auch hier von einer irreversiblen Zerstörung des Materials bei der ersten Belastung ausgegangen werden kann. Ob dieses Phänomen im Ausknicken von Stegen oder in der Zerstörung von Polymerketten begründet ist, kann mit den vorgestellten Methoden nicht bestimmt werden. Zusätzlich wird das Experiment auch

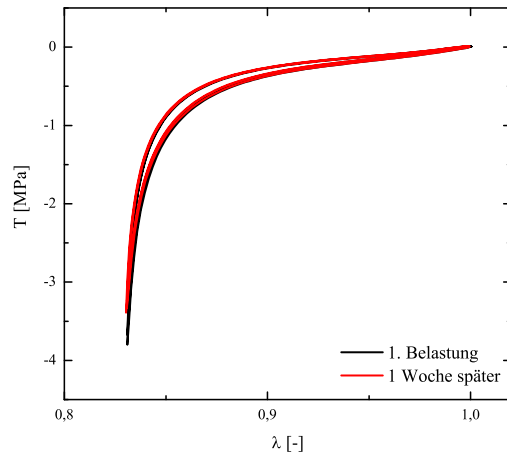


Abbildung 4.39: Untersuchung des Mullins-Effekts unter hydrostatischer Belastung mit einer Ruhezeit von einer Woche

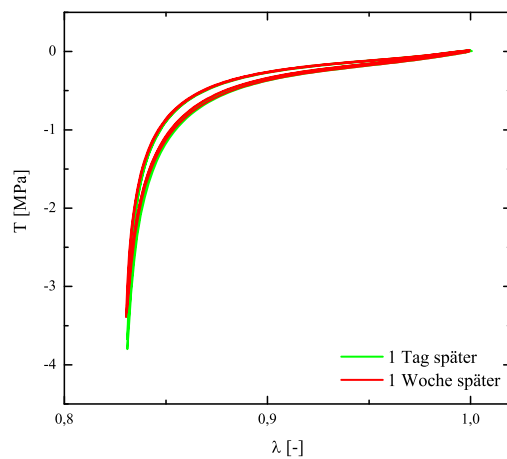


Abbildung 4.40: Untersuchung des Mullins-Effekts unter hydrostatischer Belastung mit Ruhezeiten von einem Tag und einer Woche

nach einem Tag durchgeführt. Es ist zu beobachten, dass sich die Kurven nach einem Tag und nach einer Woche bei größeren Deformationen marginal unterscheiden (Abb. 4.40). Dies ist wie auch schon im Zugversuch in der langen Relaxationszeit des Materials begründet. Nach einem Tag ist das Material wegen der vorherigen Belastung noch vorkomprimiert. Da die Probe nach jedem Versuch aus der Kammer genommen wird und die Kammer im Anschluss daran neu befüllt wird, ist die Porosität der Probe etwas geringer als zuvor. Somit wird eine geringere Volumenänderung benötigt, um alle Poren zu schließen. Erst nach einer Woche hat die Probe einen Zustand erreicht, der sich auch nach längeren Wartezeiten nicht ändert. Somit wird auch bei den hydrostatischen Druckversuchen nach jedem Versuch eine Woche gewartet bevor ein neuer Versuch durchgeführt wird. Zusätzlich ist an diesen Versuchen zu erkennen, dass die Hysterese geöffnet ist und Be- und Entlastungspfad um etwa 10 % voneinander abweichen. Ob auch bei den hydrostatischen Versuchen ein viskoelastisches Verhalten vorliegt, muss daher genauer untersucht werden.

### 4.4.3 Grundelastizität

Zur Bestimmung der Grundelastizität muss in diesem Versuchsstand ein anderes Verfahren angewendet werden. Die Durchführung schneller, kleiner Zyklen um eine Mitteldehnung kann mit dem vorhandenen Versuchsaufbau nicht realisiert werden. Aus diesem Grund wird die Grundelastizität mit Relaxationsversuchen bestimmt, bei denen die Temperatur konstant gehalten wird. Auf jeder Stufe verweilt das Material 24 Stunden. Es ist zwar bekannt, dass die Relaxationszeit bei etwa einer Woche liegt, allerdings ist die Versuchsdurchführung so schon sehr zeitaufwändig, so dass ein Abbruchpunkt nach einem Tag festgelegt wird. Die ermittelte Grundelastizität mit Fehlerbalken für drei Proben ist in Abb. 4.41 abgebildet. Bei einer Stauchung von  $\lambda = 0,83$  steigt der erhaltene Druck stark an. Das bedeutet, dass an dieser Stelle alle Poren geschlossen sind und die Inkompessibilität der Festkörperphase zum Tragen kommt. Dies ist auch plausibel, da alle Poren geschlossen sind, wenn die Jacobi-Determinante gleich dem Volumenanteil des Festkörpers in der Referenzlage ist,

$$J = n_0^S. \quad (4.6)$$

Die dazu korrespondierende Stauchung errechnet sich aus der dritten Wurzel der Jacobi-Determinante (Gl. 4.4). Mit einer angegebenen Porosität zwischen 40 % und 60 % muss der Druck bei einer Stauchung von  $0,74 \leq \lambda \leq 0,84$  gegen Unendlich gehen. Eine Diskussion der Grundelastizität unter hydrostatischen Druck ist auch in Koprowski-Theiss [80] zu finden.

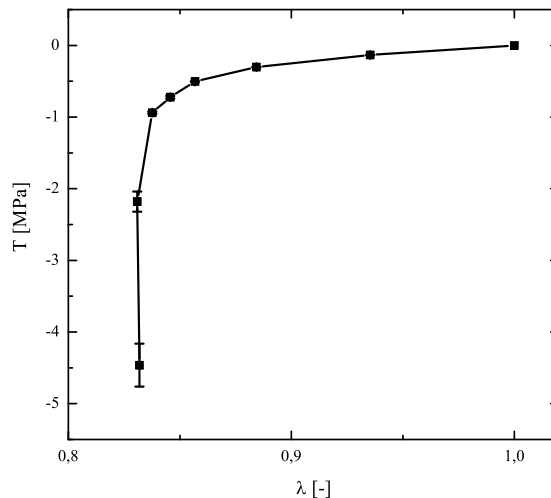


Abbildung 4.41: Grundelastizität des Moosgummi im hydrostatischen Druckversuch

#### 4.4.4 Viskoelastizität

Mit den Informationen über die Grundelastizität soll nun das viskoelastische Verhalten unter hydrostatischem Druck untersucht werden. Bisher wurde in der Literatur die Volumenviskosität vernachlässigt. Um dies zu untersuchen, werden in der vorgestellten Kammer sowohl Relaxationsexperimente als auch zyklische Experimente durchgeführt. In Abb. 4.42 sind die Ergebnisse der Relaxationsexperimente für vier verschiedene Deformationsniveaus abgebildet. Man beobachtet in allen Fällen ein ausgeprägtes Relaxationsverhalten, das auch nach einer Stunde noch nicht abgeklungen ist. Zudem ist bei einem Vergleich mit der korrespondierenden Grundelastizität auch hier eine Abhängigkeit von der Deformation, in der gleichen Weise wie bei den Zugexperimenten, zu erkennen. Für dieses Relaxationsverhalten gibt es unterschiedliche

Interpretationsmöglichkeiten. Eventuell verursacht das in den Poren eingeschlossene Gas diesen Effekt. Es kann zu Diffusionsprozessen des Gases aus dem Material oder des Kammerfluids in das Material kommen. Aus diesem Grund wird das Gewicht der Probe vor und nach der Untersuchung gemessen. Hierbei kann keine merkliche Veränderung festgestellt werden. Zudem wurde eine Probe nach dem Experiment in Längsrichtung aufgeschnitten, wobei festgestellt wurde, dass die Probe im Inneren noch vollständig trocken war. Somit kann das Relaxationsverhalten nicht von Diffusionsprozessen des Kammerfluids stammen. Um zu bestimmen, ob der Effekt in der Viskoelastizität des Festkörpers begründet ist, wird ein Relaxationsexperiment mit dem nicht aufgeschäumten Bulkmaterial durchgeführt (Abb. 4.43). Dieses Material ist nicht vollkommen inkompressibel, allerdings ist die Kompressibilität verglichen mit der des Moosgummis so gering, dass sie vernachlässigt werden kann und auch bei diesem Material kann ein hydrostatischer Druckversuch durchgeführt werden.

Auch ohne Gaseinschlüsse ist eine deutliche Relaxation zu erkennen. Somit stammt die beobachtete Relaxation zu einem großen Teil aus der Festkörperphase. Dies widerlegt die Aussage, dass eine Volumenviskosität nicht existiert. Zudem muss dieses Phänomen in der Modellierung des Materialver-

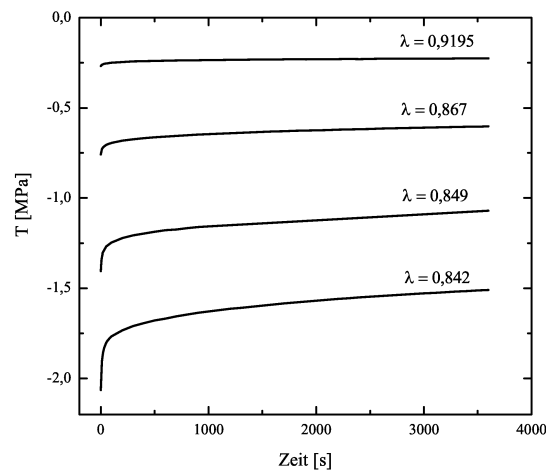


Abbildung 4.42: Relaxationsversuch des Moosgummis bei unterschiedlichen Dehnungsniveaus

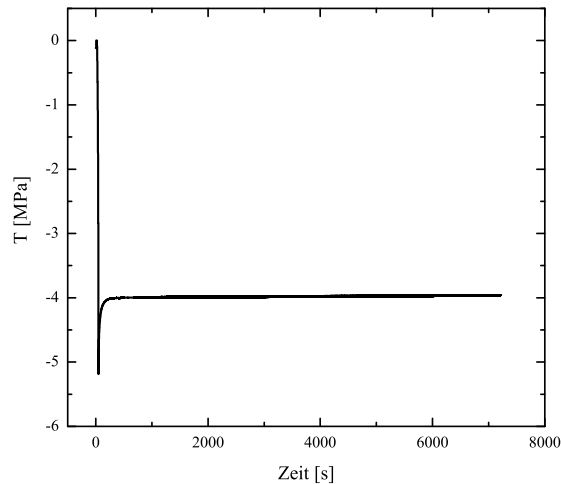


Abbildung 4.43: Relaxation des Vollmaterials unter hydrostatischer Belastung

haltens berücksichtigt werden. Dafür muss es exakt untersucht werden. Aus diesem Grund wird ein Relaxationsexperiment über 20.000s durchgeführt. In Abb. 4.44 sind die Ergebnisse dieses Experiments gemeinsam mit der Grundelastizität im halblogarithmischen Maßstab dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Werte nach dieser Zeit noch um etwa 20 % unterscheiden. Mit dieser Erkenntnis und mit der aus den Experimenten zum Mullins-Effekt kann davon ausgegangen werden, dass auch unter hydrostatischer Belastung die Relaxationszeiten bei etwa einer Woche liegen. Im Anschluss daran soll auch hier das Relaxationsverhalten bezüglich der Vorbehandlung untersucht werden.

Dazu wird die Probe vor dem eigentlichen Relaxationsversuch mit einem Zyklus auf einen Druck von 40 bar be- und entlastet. In Abb. 4.45 sind die Ergebnisse mit und ohne Vorbehandlung abgebildet. Auch in dieser Abbildung ist zu sehen, dass sich die Spannungswerte des Relaxationsexperimentes mit Vorbehandlung schneller an die Werte der Grundelastizität annähern als jene ohne Vorbehandlung. Somit ist auch in diesem Versuch qualitativ das gleiche Ergebnis zu beobachten wie in den Zugexperimenten. Zuletzt werden auch zyklische Untersuchungen durchgeführt. Dafür werden Deformationsraten in drei Dekaden genutzt. In Abb. 4.46 sind die



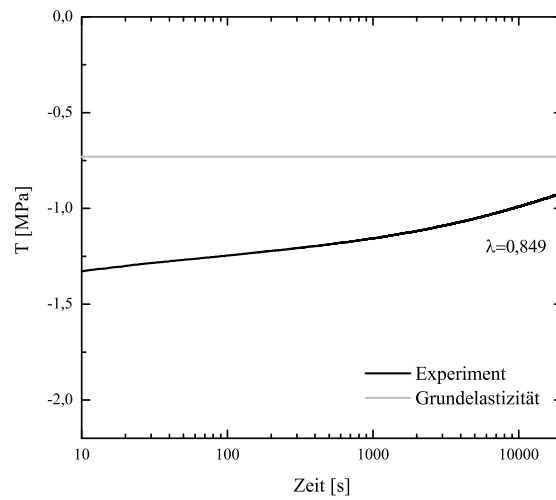


Abbildung 4.44: Relaxation innerhalb 20.000 s mit korrespondierender Grundelastizität

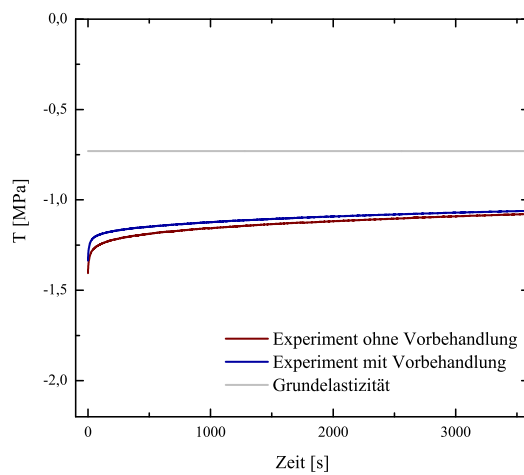


Abbildung 4.45: Relaxationsversuch mit Vorbehandlung

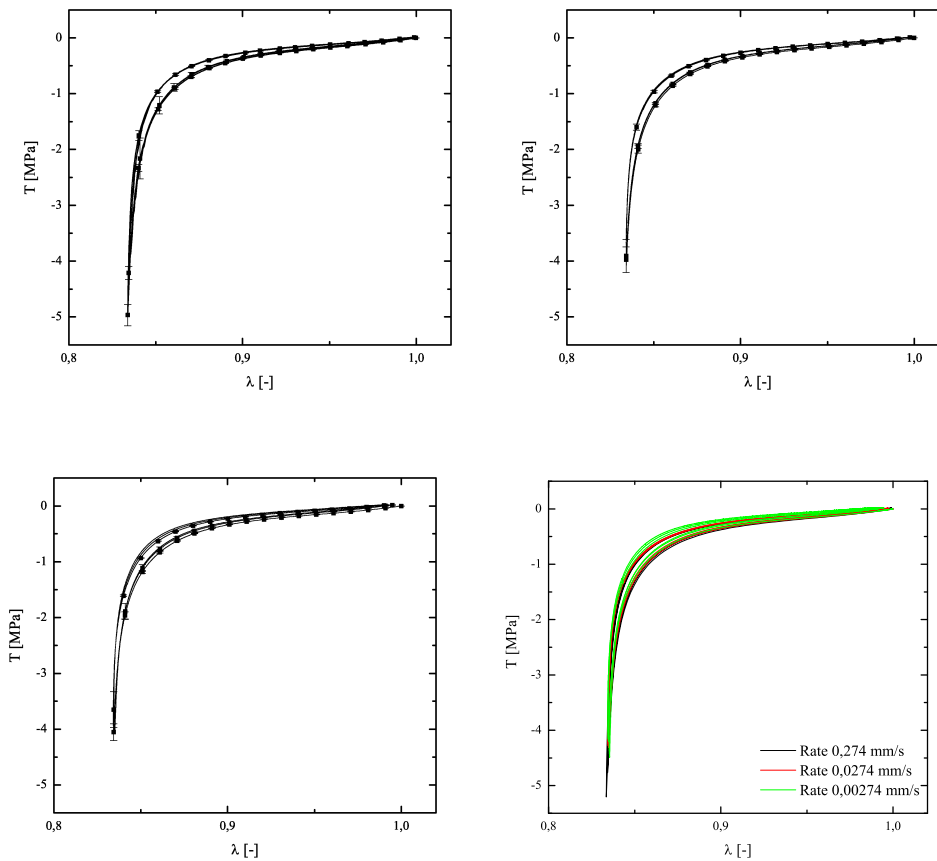


Abbildung 4.46: Zyklische Versuche bei einer Kolbengeschwindigkeit von 2,4 mm/s (links oben), 0,24 mm/s (rechts oben) und 0,0274 mm/s (links unten), Vergleich der Ergebnisse bei unterschiedlichen Kolbengeschwindigkeiten (rechts unten)

schnelle Kolbengeschwindigkeit von 2,4 mm/s (links oben), die mittlere von 0,24 mm/s (rechts oben), und die langsame Kolbengeschwindigkeit von 0,024 mm/s (links unten) abgebildet. In allen drei Fällen fällt die Hysterese nach dem ersten Zyklus stärker ab, in den folgenden nur noch sehr langsam, wobei sie im Fall der langsamsten Rate am schnellsten abfällt. Dies liegt am Verhältnis von Zykluszeit und Relaxationszeit (vgl. Sedlan [126]). Bei einem optimalen Verhältnis erreicht man am schnellsten eine stationäre Hysterese. Im untersuchten Fall erreicht man also mit weniger Zyklen die stationäre Hysterese, jedoch benötigt man für einen Zyklus mehr Zeit. Die

beste Methode muss aus diesem Grund genauestens untersucht werden, dies ist allerdings nicht Teil dieser Arbeit.

Der Spitzenwert der Spannung bei der schnellen Rate ist wesentlich höher als der der anderen Raten, jedoch ist die Öffnung der Hysterese in allen Fällen sehr ähnlich. In Abbildung 4.46 (rechts unten) sind die Ergebnisse aller drei Raten dargestellt. Hier sieht man deutlich, dass sich die Hysteresen nur marginal in ihrer Öffnung unterscheiden. Da sich jedoch die Spitzenwerte unterscheiden, ist die nichtlineare Abhängigkeit der Deformation weniger ausgeprägt als im Zugbereich.



# 5

---

## Materialmodellierung

---

In diesem Kapitel wird ein erweitertes, phänomenologisches, kontinuumsmechanisches Modell vorgestellt. Dieses Modell basiert auf der finiten Viskoelastizitätstheorie. Um sowohl das Verhalten im Zug- als auch im Druckbereich darzustellen, wird ein volumetrisch-isochorer Split des Deformationsgradienten gewählt. Das komplexe Relaxationsverhalten wird mit Hilfe nichtlinearer Relaxationszeitfunktionen abgebildet.

### 5.1 Hyperelastisches Teilmaterialmodell

Für die Beschreibung des Materialverhaltens soll zunächst die Viskoelastizität vernachlässigt und nur das Verhalten der Grundelastizität über eine Funktion der Dehnung beschrieben werden. Der Ausgangspunkt dafür ist die Spannung nach Gleichung (3.75), die sich aus einem Festkörper- und einem Gasanteil zusammensetzt. Um nun die gewünschte Beziehung zu erhalten, müssen die freien Energiefunktionen  $\Psi^G$  und  $\Psi^S$  gewählt werden. Im Fall der Gasphase wird ein ideales Gasgesetz mit einer Umparametrisierung zugrunde

gelegt

$$\Psi^G = p_0 \left( \frac{J_S - 1}{J_S - n_0^S} \right) \frac{1}{\rho^{GR}}, \quad (5.1)$$

worin  $p_0$  den Atmosphärendruck beschreibt. Die in (3.75) benötigte Ableitung ergibt sich dann zu

$$\frac{\partial \Psi^G}{\partial \rho^{GR}} = p_0 \left( \frac{1 - J_S}{J_S - n_0^S} \right) \frac{1}{(\rho^{GR})^2}. \quad (5.2)$$

Bei der Wahl der freien Energiefunktion des Festkörperskeletts ist wegen der hohen Porosität des Materials ein volumetrisch-isochorer Split des Deformationsgradienten (3.30) notwendig. Ohne diesen Split wäre die Identifikation der Materialparameter nahezu unmöglich. Eipper [42] schreibt zwar, dass dieses Vorgehen zu unphysikalischen Ergebnissen führt, allerdings zeigt Hartmann [55], dass dies nur für bestimmte Parameterkonstellationen der Fall ist. Ein Volumenanteil der diese Problematik nicht mit sich bringt, wurde von Hartmann & Neff [57] entwickelt. Dieser beinhaltet jedoch nicht die Strukturkompressibilität des Materials und wird deshalb im Folgenden nicht verwendet. Somit muss bei der Identifikation der Materialparameter auf physikalische Ergebnisse geachtet werden.

Der isochore Teil basiert auf den isochoren Invarianten (3.81). Wegen des Verlaufs der Grundelastizitätskurve im Zugversuch (Abb. 4.12) wird hierfür ein Modellansatz zweiter Ordnung

$$\rho_0^S \hat{\Psi}_{eq}^S = c_{10} (I_{\hat{\mathbf{B}}_S} - 3) + c_{20} (I_{\hat{\mathbf{B}}_S} - 3)^2 \quad (5.3)$$

mit den Schermoduln  $c_{10}$  und  $c_{20}$  gewählt. Die Abhängigkeit von der zweiten Invarianten kann nur mit biaxialen Versuchen bestimmt werden. Wenn die Versuchsdaten um diese Experimente ergänzt werden, muss das Modell eventuell um die zweite Invariante erweitert werden.

Da der isochore Anteil der freien Energiefunktion im Druckbereich keine Rolle spielt, wird ein volumetrischer Erweiterungsterm benötigt. Allerdings kann kein „klassischer“ Erweiterungsterm für ein kompressibles Einphasenmaterial genutzt werden. Solche Materialien lassen sich theoretisch auf einen singulären Punkt komprimieren. Erst dann strebt die Druckspannung gegen Unendlich. Das genutzte Material verfügt allerdings über eine Strukturkompressibilität, das Bulkmaterial selbst ist inkompressibel. Das bedeutet, dass die Druckspannung schon gegen Unendlich strebt, wenn alle Poren ge-

geschlossen sind. Diesen Punkt nennt man Kompressionspunkt. Er ist erreicht, wenn die Jacobi-Determinante gleich dem ursprünglichen Volumenanteil der Festkörperphase ist. Dies ist an der Grundelastizitätskurve der hydrostatischen Druckversuche deutlich zu erkennen (Abb. 4.41). Würde man ein Materialmodell für nicht-poröse kompressible Festkörper verwenden, könnte es zu einer Überschreitung des Kompressionspunkts kommen. Dies verletzt jedoch die Forderung nach materieller InkompRESSibilität. Zudem muss der Erweiterungsterm die Spannungsfreiheit im undeformierten Zustand gewährleisten. Auch bei einer unendlich großen Porenaufweitung wird eine unendlich große Verzerrungsenergie und Spannung benötigt. Außerdem darf die Konvexitätsbedingung nicht verletzt werden. Mit der von Ehlers & Eipper [42] vorgeschlagenen freien Energiefunktion

$$\rho_0^S \bar{\Psi}_{eq}^S = \frac{K^S}{\gamma \left( \gamma - 1 + \frac{1}{(1-n_0^S)^2} \right)} \left[ J_S^\gamma - 1 - \gamma \ln \frac{J_S - n_0^S}{1 - n_0^S} + \gamma n_0^S \frac{J_S - 1}{1 - n_0^S} \right] \quad (5.4)$$

werden diese Voraussetzungen erfüllt.  $K^S$  beschreibt darin den Kompressionsmodul der Struktur.  $\gamma$  ist ein Materialparameter der größer als Null sein muss, damit die Konvexität gewährleistet ist. Die freie Energiefunktion des Festkörperskeletts ergibt sich nun aus der Summation des isochoren und des volumetrischen Anteils zu

$$\begin{aligned} \rho_0^S \Psi_{eq}^S &= c_{10} (\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S} - 3) + c_{20} (\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{B}}_S} - 3)^2 \\ &+ \frac{K^S}{\gamma \left( \gamma - 1 + \frac{1}{(1-n_0^S)^2} \right)} \left[ J_S^\gamma - 1 - \gamma \ln \frac{J_S - n_0^S}{1 - n_0^S} + \gamma n_0^S \frac{J_S - 1}{1 - n_0^S} \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mit (3.73), (3.83) und (3.85) erhält man nun durch das Einsetzen beider Energiefunktionen die Gleichgewichtsspannung (3.75) der Mischung

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{eq} &= \mathbf{T}^G + \mathbf{T}_{eq}^S \\ &= -p_0 \left( \frac{1 - J_S}{J_S - n_0^S} \right) \mathbf{I} \\ &+ 2 J_S^{-\frac{5}{3}} \left[ c_{10} + 2 c_{20} (J_S^{-\frac{2}{3}} \mathbf{I}_{\mathbf{B}_S} - 3) \right] \left[ \mathbf{B}_S - \frac{1}{3} \mathbf{I}_{\mathbf{B}_S} \mathbf{I} \right] \\ &+ \frac{K^S}{\left( \gamma - 1 + \frac{1}{(1-n_0^S)^2} \right)} \left[ J_S^{\gamma-1} - \frac{1}{J_S - n_0^S} + \frac{n_0^S}{1 - n_0^S} \right] \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

**Bemerkung:**

Für das Modell des Einphasenmaterials wird der volumetrisch-isochoere Split nicht benötigt, da der Druck  $p$  in diesem Fall als Zwangskraft dient, um die Inkompressibilität zu gewährleisten. Da die Grundelastizitätskurve einen S-Schlag aufweist (Abb. 4.13) wird bei diesem Material ein Modell nach Yeoh [147] verwendet. Mit (3.76) erhält man das hyperelastische Materialmodell des Einphasenmaterials

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2 [c_{10} + 2c_{20}(\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3) + 3c_{30}(\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3)^2] \mathbf{B}. \quad (5.7)$$

## 5.2 Viskoelastisches Teilmaterialmodell

Bei den zuvor diskutierten Experimenten kam deutlich zum Vorschein, dass sich das Material viskoelastisch verhält. Aus diesem Grund muss die zuvor erläuterte Gleichgewichtsspannung um Nichtgleichgewichtsanteile erweitert werden. Wie schon in Kapitel 3 erläutert, ist die Grundlage der finiten Viskoelastizität der multiplikative Split des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil. Zu Anfang muss allerdings geklärt werden, ob auch hier, wie bei der Grundelastizität, ein volumetrisch-isochoerer Split des Deformationsgradienten vonnöten ist. Da sich jedoch ohne diesen Split die Anpassung der Materialparameter als sehr schwierig erweist, soll auch hier dieser Split durchgeführt werden. Dies ist begründet in der Kopplung der Terme untereinander und in der beobachteten Volumenviskosität. Da, wie Abb. 4.43 zeigt, festgestellt wurde, dass das Relaxationsverhalten auch beim Bulkmaterial zu beobachten ist, sollen nur Nichtgleichgewichtsanteile in der Phase der Festkörperstruktur auftreten. In der genutzten freien Energiefunktion

$$\begin{aligned} \rho_0^S \Psi_{neq}^{Sj} &= \frac{1}{2} \mu_e^j (\mathbf{I}_{\hat{\mathbf{B}}_{S_e}^j} - 3) \\ &+ K_e^j (1 - n_0^S)^2 \left[ \frac{J_{S_e}^j - 1}{1 - n_0^S} - \ln \frac{J_{S_e}^j - n_0^S}{1 - n_0^S} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

ist der isochoere Anteil über einen Neo-Hooke-Ansatz [122] dargestellt. Der Ansatz zweiter Ordnung wurde hier nicht gewählt, da dieser zusätzliche Abhängigkeiten der Deformation in die Nichtgleichgewichtsspannung ein-



bringt, die nicht benötigt werden. Zudem verkompliziert sich damit der Ausdruck für die internen Variablen (3.99), durch Einsetzen der freien Energiefunktion. Bei dem volumetrischen Erweiterungsterm gelten die gleichen Voraussetzungen wie im Fall der Gleichgewichtsspannung. Aus diesem Grund wird der identische Term gewählt, der nun die elastischen Anteile der Jacobi-Determinanten beinhaltet. Um auch diesen Term besonders einfach zu halten, wird  $\gamma$  gleich 1 gesetzt. Diese freie Energiefunktion wird für  $n$  Maxwell-Elemente genutzt. Die genaue Anzahl der Maxwell-Elemente hängt vom Materialverhalten ab und wird im folgenden Kapitel bestimmt. Mit Hilfe des Zusammenhangs

$$\frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} = \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial I_{\mathbf{B}_{Se}^j}} \frac{dI_{\mathbf{B}_{Se}^j}}{d\mathbf{B}_{Se}^j} + \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial J_{Se}^j} \frac{dJ_{Se}^j}{d\mathbf{B}_{Se}^j} \quad (5.9)$$

und mit den Ausdrücken

$$\begin{aligned} \frac{dI_{\mathbf{B}_{Se}^j}}{d\mathbf{B}_{Se}^j} &= J_{Se}^{-\frac{2}{3}j} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{B}_{Se}^j} \mathbf{B}_{Se}^{j-1} \right), \\ \frac{dJ_{Se}^j}{d\mathbf{B}_{Se}^j} &= \frac{1}{2} J_{Se}^j \mathbf{B}_{Se}^{j-1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

ergibt sich die in (3.94) benötigte Ableitung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{neq}^{Sj}}{\partial \mathbf{B}_{Se}^j} &= \frac{1}{2} J_{Se}^{-\frac{2}{3}j} \mu_e^j \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} I_{\mathbf{B}_{Se}^j} \mathbf{B}_{Se}^{j-1} \right) \\ &+ \frac{1}{2} J_{Se}^j K_e^j (1 - n_0^S)^2 \left( \frac{1}{1 - n_0^S} - \frac{1}{J_{Se}^j - n_0^S} \right) \mathbf{B}_{Se}^{j-1}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Die  $n$  Nichtgleichgewichtsanteile der Spannung lauten damit

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{neq}^{Sj} &= J_S^{-1} \left[ \mu_e^j J_{Se}^{-\frac{2}{3}j} \left( \mathbf{B}_{Se}^j - \frac{1}{3} I_{\mathbf{B}_{Se}^j} \mathbf{I} \right) \right. \\ &\left. + K_e^j (1 - n_0^S)^2 \left( \frac{J_{Se}^j}{1 - n_0^S} - \frac{J_{Se}^j}{J_{Se}^j - n_0^S} \right) \mathbf{I} \right]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die darin benötigten internen Variablen lassen sich mit (3.99) bestimmen und man erhält  $n$  Evolutionsgleichungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_i^{Sj})'_S &= \frac{2 J_S^{-1} \mu_e^j J_{S_e}^{-\frac{2}{3}j}}{\eta_D^j} \left( \mathbf{C}_S - \frac{1}{3} \mathbf{I}_{\mathbf{B}_{S_e}^j} \mathbf{C}_{S_i}^j \right) \\ &+ \frac{2 K_e^j}{\eta_V^j J_{S_i}^j} (1 - n_0^S)^2 \left( \frac{1}{1 - n_0^S} - \frac{1}{J_{S_e}^j - n_0^S} \right) \mathbf{C}_{S_i}^j, \end{aligned} \quad (5.13)$$

in denen eine Aufteilung der Viskosität  $\eta^j$  in einen volumetrischen Anteil  $\eta_V^j$  und einen isochoren Anteil  $\eta_D^j$  vorgenommen wird. Mit diesen Viskositäten ergeben sich für jedes Maxwell-Element eine volumetrische und eine isochore Relaxationszeit

$$r_V^j = \frac{\eta_V^j}{K_e^j}, \quad r_D^j = \frac{\eta_D^j}{\mu_e^j}, \quad (5.14)$$

die aufgrund der experimentellen Ergebnisse Abhängigkeiten der Deformation und der Deformationsgeschwindigkeit aufweisen müssen.

In den Experimenten wurde festgestellt, dass sich die Hysterese bei höheren Deformationsraten kaum öffnet (Abb. 4.21-4.23 und Abb. 4.46). Dies beinhaltet die „klassische“ Viskoelastizitätstheorie nicht. Deshalb muss dieses Verhalten als Nichtlinearität in die Relaxationszeit über den Betrag der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}_S$  einfließen. Zudem muss die Relaxationszeit eine Abhängigkeit der Deformation beinhalten (Abb. 4.15 und Abb. 4.42). Dies wird mit Hilfe der Norm des rechten Cauchy-Green-Deformationstensors erreicht. Die Abhängigkeit der Relaxation von der Vorbehandlung (Abb. 4.17 und Abb. 4.45) wird über sehr lange Relaxationszeiten abgebildet. Da die Abhängigkeit von der Norm von  $\mathbf{C}_S$  nicht bei allen Relaxationszeiten erforderlich ist, gibt es zwei Kategorien von Relaxationszeitfunktionen:

Kategorie 1

$$\begin{aligned} r_V^j &= \frac{1}{\|\mathbf{C}_S\|} (r_V^{j1} + r_V^{j2} \exp(-k_V^j \|\mathbf{D}_S\|)), \\ r_D^j &= \frac{1}{\|\mathbf{C}_S\|} (r_D^{j1} + r_D^{j2} \exp(-k_D^j \|\mathbf{D}_S\|)) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Kategorie 2

$$\begin{aligned} r_V^j &= (r_V^{j1} + r_V^{j2} \exp(-k_V^j \|\mathbf{D}_S\|)), \\ r_D^j &= (r_D^{j1} + r_D^{j2} \exp(-k_D^j \|\mathbf{D}_S\|)). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Im folgenden Kapitel muss nun noch die Anzahl der Maxwell-Elemente festgelegt und die Identifikation der Parameter durchgeführt werden.

**Bemerkung:**

Im Fall des Vollgummis erhält man die Nichtgleichgewichtsspannungen analog ohne den volumetrisch-isochoren Split. Wie in Abb. 4.18 und Abb. 4.24 gezeigt wurde, zeigt auch dieses Material nichtlineares Relaxationsverhalten. Da der S-Schlag jedoch stärker ausgeprägt ist und damit eine höhere Abhängigkeit von der Deformation benötigt wird, reicht das Neo-Hooke-Modell auch nicht bei den Nichtgleichgewichtsanteilen aus. Es werden zwei unterschiedliche freie Energiefunktionen

$$\begin{aligned} \rho_0 \Psi_{neq}^j &= c_{30j} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} - 3)^3 \\ \rho_0 \Psi_{neq}^j &= c_{10j} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} - 3) \end{aligned} \quad (5.17)$$

genutzt, die zu den folgenden Anteilen der Nichtgleichgewichtsspannung führen

$$\mathbf{T}_{neq}^j = 6 c_{30j} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} - 3)^2 \mathbf{B}_e^j \quad (5.18)$$

und

$$\mathbf{T}_{neq}^j = 2 c_{10j} \mathbf{B}_e^j. \quad (5.19)$$

Mit diesen Spannungsansätzen ergeben sich auch zwei unterschiedliche Arten von Evolutionsgleichungen

$$\dot{\mathbf{C}}_i^j = \frac{12 (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} - 3)^2}{r_j} \left[ \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_i^{-j}) \mathbf{C}_i^j \right] \quad (5.20)$$

und

$$\dot{\mathbf{C}}_i^j = \frac{4}{r_j} \left[ \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}_i^{-j}) \mathbf{C}_i^j \right]. \quad (5.21)$$

Auch das Relaxationsverhalten ist ein anderes als bei Moosgummi. Dieses führt zu folgenden Kategorien an Relaxationszeiten:

Kategorie 1

$$r^j = \textit{konst.} \quad (5.22)$$

Kategorie 2

$$r^j = r^{j1} + r^{j2} \exp(-k^{j1} \|\mathbf{D}\|) + r^{j3} \exp(-k^{j2} \|\mathbf{D}\|) \quad (5.23)$$

Kategorie 3

$$r^j = r^{j1} + (r^{j2} + r^{j3} \exp(-k^j \|\mathbf{D}\|)) (\|\mathbf{C}_i^j\| - \sqrt{3}). \quad (5.24)$$

Wegen des stark nichtlinearen Verhaltens wird in Kategorie 2 ein zusätzlicher Exponentialanteil benötigt, der nur Einfluss auf das Relaxationsverhalten hat. Mehr Details zu diesem Materialmodell befinden sich in Koprowski-Theiss [78].

# 6

---

## Parameteridentifikation und Simulation

---

Die Identifikation der Materialparameter ist ein inverses Problem. Mit den ermittelten Parametern soll das Experiment durch eine Simulation abbildbar sein. Um das inverse Problem zu lösen, wird eine Zielfunktion in Form eines Qualitätskriteriums eingeführt, die die Übereinstimmung von Simulation und Experiment widerspiegelt. Sie ist in Abhängigkeit des Parametersatzes  $\mathbf{p} = (p_1 \dots p_n)$  als Summe der Fehlerquadrate von Experiment und Simulation formuliert

$$f(\mathbf{p}) = \sum_i \|\mathbf{T}_i^{\text{num}}(\mathbf{p}) - \mathbf{T}_i^{\text{exp}}\| \rightarrow \text{MIN} \quad (6.1)$$

und wird über die inkrementelle Änderung der Materialparameter minimiert [124]. In dieser Gleichung steht

$$\mathbf{T}_i^{\text{exp}} = [T_i^{\text{exp}1}, T_i^{\text{exp}2}, \dots]^T \quad (6.2)$$

für die im Versuch bestimmten experimentellen Werte und die Werte

$$\mathbf{T}_i^{\text{num}} = [T_i^{\text{num}1}, T_i^{\text{num}2}, \dots]^T \quad (6.3)$$

werden mit dem Modell numerisch über die Lösung des jeweiligen Randwertproblems bestimmt. Der Index  $i$  zählt die diskreten Punkte, an denen Daten im Experiment aufgenommen wurden. Für einen optimalen Parametersatz muss diese Summe minimal sein.

In dieser Arbeit wird eine gradientenfreie Optimierungsmethode gewählt [124, 125]. Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, dass es auf die unterschiedlichsten Problemklassen und Materialmodelle angewandt werden kann, ohne Sensitivitäten berechnen zu müssen, wie es bei den Gradientenverfahren der Fall ist. Beim genutzten Verfahren generiert ein Algorithmus basierend auf Evolutionsstrategien einen Parametersatz. Der erste wichtige Mechanismus der Evolutionsstrategien ist das Mutations-Selektions-Prinzip. Jeder Variablensatz stellt einen Punkt im Entwurfsvariablenraum  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  dar. Davon ausgehend soll das Prinzip für einen zweidimensionalen Parameterraum erläutert werden (Abb. 6.1) [116]:

1. Um einen Eltern-Variablensatz  $E^{(g)}$  der Generation  $g$  wird ein Kreis mit dem Radius  $N$  erzeugt.
2. Durch  $\lambda$ -malige Modifikation dieses Radius entstehen  $\lambda$  neue Kreise, die normalverteilt um den ersten Kreis streuen.
3.  $\lambda$  Nachkommen der Generation  $g$  entstehen durch die zufällige Wahl eines Punktes auf jedem der neuen Kreise.
4. Nach Prüfung der Qualität der Nachkommen werden der beste Nachkomme und der zugehörige Radius gemerkt.
5. Der gemerkte Variablensatz wird zum Elter  $E^{(g+1)}$  der Generation  $g+1$  und das Verfahren wird mit dem korrespondierenden Radius von 1. wiederholt.

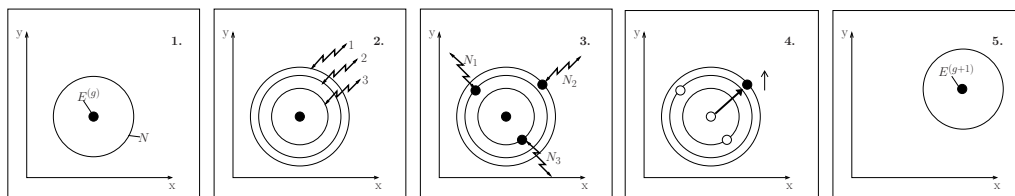


Abbildung 6.1: Mutations-Selektions-Prinzip [116]

Neben diesem Prinzip ist die Rekombination ein weiteres wichtiges Werkzeug der Evolutionsstrategien, das auch im zweidimensionalen Parameterraum kurz dargestellt wird:

1. Gegeben sind zwei echt verschiedene Elternvariablensätze  $E_1^{(g)} \neq E_2^{(g)}$  der Generation  $g$ .
2. Durch Halbieren des Abstandes der beiden Variablensätze entsteht der Mittelpunkt eines Kreises, auf dem beide Variablensätze liegen.
3. Mit gleicher Wahrscheinlichkeit werden zufällig  $\rho$  Punkte auf den Kreis gesetzt, wodurch  $\rho$  neue Variablensätze entstehen.
4. Nach Prüfung der Qualität der Nachkommen werden die beiden besten Nachkommen behalten und zu den Eltern  $E_1^{(g+1)}$  und  $E_2^{(g+1)}$  der Generation  $g + 1$ . Damit wird das Verfahren von 1. an wiederholt.

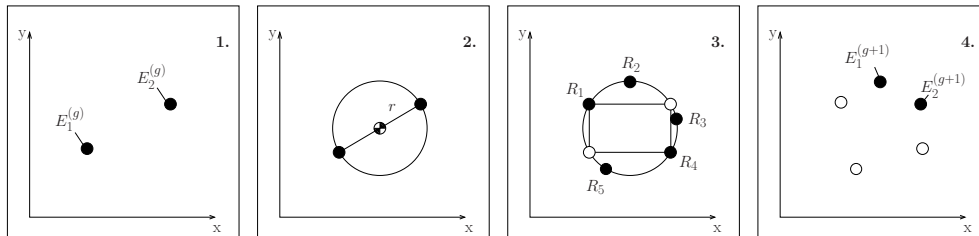


Abbildung 6.2: Rekombinationsmechanismus [116]

Die erläuterten Verfahren werden von der Optimization Toolbox<sup>TM</sup> der Software Matlab<sup>®</sup> genutzt. Durch die Verbindung mit dem Finite Elemente Programm Comsol Multiphysics<sup>®</sup> sollen im Folgenden die Parameter für den Zugversuch und den hydrostatischen Druckversuch schrittweise identifiziert werden. Im Anschluss daran wird der erhaltene Parametersatz mit Hilfe der uniaxialen Druckversuche validiert.

## 6.1 Identifikation und Simulation der Grundelastizität

Zu Anfang werden die Parameter der Grundelastizität identifiziert. Dazu wird die vorgestellte Konstitutivgleichung (5.6) genutzt. Die zu identifizierenden Parameter sind die Schubmoduln  $c_{10}$  und  $c_{20}$ , der Volumenanteil der

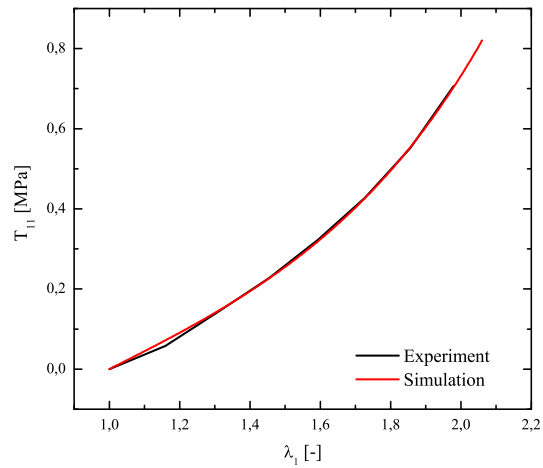


Abbildung 6.3: Vergleich von Simulation und Experiment der Grundelastizität im Zugbereich

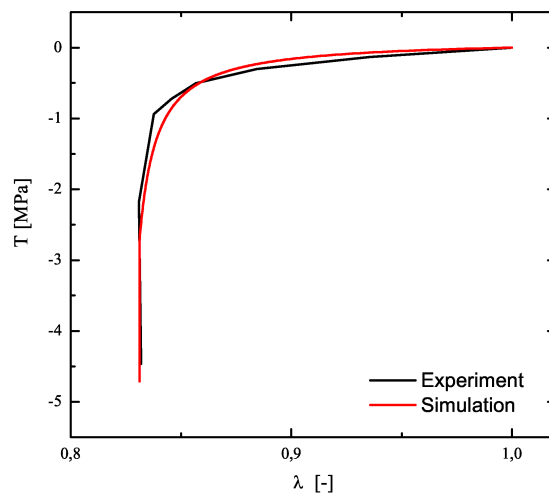


Abbildung 6.4: Vergleich von Simulation und Experiment der Grundelastizität im Druckbereich

Festkörperphase in der Referenzkonfiguration  $n_0^S$  und der Kompressionsmodul  $K^S$ . Der darin vorkommende Atmosphärendruck  $p_0$  ist ein fester Wert und beläuft sich auf 0,1 MPa. Da der isochore Anteil der freien Energiefunktion keinen Einfluss auf das hydrostatische Verhalten des Materials hat, könnte



die Annahme getroffen werden, dass zuerst  $n_0^S$ ,  $K^S$  und  $\gamma$  mit den Daten des Kompressionsversuchs bestimmt werden, um mit den erhaltenen Werten die Schubmoduln mit den Daten des Zugversuchs zu bestimmen. Wenn die Werte unabhängig voneinander bestimmt werden, kann es allerdings zu unphysikalischen Werten der Querkontraktion  $\nu$  kommen (vgl. Eipper [42]). Aus diesem Grund werden alle Parameter der Grundelastizität gleichzeitig an den experimentellen Daten des Zug- und des hydrostatischen Druckversuchs ermittelt. Zudem wird die Querkontraktion als „Nebenbedingung“ beobachtet. Eine weitere Einschränkung muss für  $n_0^S$  durchgeführt werden, da die Porosität des Materials vom Hersteller mit 40-60 % angegeben ist, kann  $n_0^S$  nur Werte zwischen 0,4 und 0,6 annehmen. Mit diesen Vorgaben werden die Parameter

$c_{10}$	0,085MPa	$c_{20}$	0,035MPa	$K^S$	0,05MPa	$\gamma$	15	$n_0^S$	0,5585
----------	----------	----------	----------	-------	---------	----------	----	---------	--------

Tabelle 6.1: Identifizierte Parameter der Grundelastizität (Moosgummi)

identifiziert (Tabelle 6.1). In Abb. 6.3 ist die Grundelastizitätskurve des Zugversuchs und in Abb. 6.4 die des hydrostatischen Druckversuchs dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich beide Kurven mit dem gewählten Parametersatz sehr gut darstellen lassen. Die Linkskrümmung im Zugversuch kann mit diesen Werten abgebildet werden. Zudem wird der Kompressionspunkt im hydrostatischen Druckversuch sehr gut realisiert. Bei  $J^S = 0,5585$  geht die Druckspannung gegen unendlich. Dieser Wert liegt im erwarteten Bereich und bildet die experimentellen Daten ab. Dies ist eine gute Grundlage zur Anpassung der Viskoelastizität.

## 6.2 Identifikation und Simulation der Viskoelastizität

Im Folgenden werden die experimentellen Daten der Relaxationsversuche und die der zyklischen Versuche genauer betrachtet. Dazu müssen die Schubmoduln  $\mu_e^1, \mu_e^2, \mu_e^3, \mu_e^4$ , die Kompressionsmoduln  $K_e^1, K_e^2, K_e^3, K_e^4$ , die isochoren Relaxationszeiten  $r_D^{11}, r_D^{12}, r_D^{21}, r_D^{31}, r_D^{32}, r_D^{41}, r_D^{42}$ , die volumetrischen Relaxationszeiten  $r_V^{11}, r_V^{12}, r_V^{21}, r_V^{31}$  und die Materialparameter  $k_D^1, k_D^3, k_D^4, k_V^1$  ermittelt werden. Die restlichen in dem Modell vorkommenden Parameter werden

zur Anpassung nicht benötigt. Hierbei wird festgestellt, dass das Relaxationsverhalten im Zugbereich etwas komplexer ist als das im Druckbereich. Um das Zugverhalten gut darstellen zu können, benötigt man vier Maxwell-Elemente. Im Fall des Druckverhaltens nur drei. Dies kann mit dem zyklischen Verhalten bei unterschiedlichen Deformationsraten erklärt werden. In den Zugversuchen sind diese Kurven nahezu identisch. Dieses Verhalten ist sehr schwierig darzustellen. Im Druckversuch unterscheiden sich die Spitzenwerte der unterschiedlichen Deformationsraten stark. Dieses Verhalten entspricht der klassischen Viskoelastizitätstheorie und ist aus diesem Grund einfacher abzubilden. In den Experimenten wurde zudem die Abhängigkeit der Relaxationskurven von der Deformation festgestellt. Dies kann zum einen am Abbruchpunkt beobachtet werden und zum anderen ist die Anfangssteigung der unterschiedlichen Relaxationsexperimente verschieden. Das Verhalten dazwischen ist sehr ähnlich. Aus diesem Grund wird bei zwei Maxwell-Elementen die Abhängigkeit der Deformation genutzt und bei den restlichen nicht. Wegen der hohen Anzahl an Materialparametern kann nicht über alle Parameter gleichzeitig optimiert werden. Das Vorgehen wird nun schrittweise erläutert.

Zu Anfang werden ausschließlich die Kompressionsversuche untersucht. Man beginnt mit den zyklischen Versuchen. Dabei kann festgestellt werden, dass sich die Hysterese nur bei verhältnismäßig hohen Werten der Kompressionsmoduln öffnet. Im Weiteren wird allerdings festgestellt, dass der Einfluss dieser Werte auf den Zugbereich so groß ist, dass damit das Zugverhalten nicht abgebildet werden kann. Aus diesem Grund müssen die Werte der Kompressionsmoduln beschränkt werden, sodass man nur eine schwach geöffnete Hysterese erhält. Die so ermittelten Werte werden nun als Startwerte genutzt und das Relaxationsverhalten wird angepasst. Mit Berücksichtigung sehr hoher Relaxationszeiten erhält man automatisch die Abhängigkeit des Relaxationsverhaltens von der Vorbehandlung. Die Kompressionsmoduln und die volumetrischen Relaxationszeiten werden nun fixiert und das Zugverhalten betrachtet. Da es sich hierbei um ein komplexeres Verhalten handelt, wird zu Anfang nur das zyklische Experiment mit der schnellsten Deformationsrate betrachtet. Hier werden die Schubmoduln und die Relaxationszeiten, die nicht in Verbindung mit der Deformationsrate stehen, identifiziert. Nun werden die erhaltenen Werte als Startwerte genutzt und eine Identifikation aller drei zyklischen Experimente durchgeführt. Die Relaxationszeiten, die zur Abbildung der zyklischen Experimente nicht benötigt werden, erhalten einen sehr hohen Materialparameter  $k^j$  und werden an den Relaxationsexperimenten identifiziert. Nach der Ermittlung dieser Werte werden sie als Startwerte gesetzt und alle Experimente nochmals zur Anpassung genutzt. Dabei wird festgestellt, dass die erwähnte Abhängigkeit der Relaxationszeit

$\mu_e^1$	0,032 MPa	$\mu_e^3$	0,046 MPa
$r_D^{11}$	$3,03 \cdot 10^5$ s	$r_D^{31}$	11,24 s
$r_D^{12}$	$112,12 \cdot 10^5$ s	$r_D^{32}$	776,42 s
$k_D^1$	5.000 s	$k_D^3$	150,36 s
$K_e^1$	0,16 MPa	$K_e^3$	0,063 MPa
$r_V^{11}$	$1,41 \cdot 10^5$ s	$r_V^{31}$	193,41 s
$r_V^{12}$	$6,46 \cdot 10^5$ s		
$k_V^1$	$10^5$ s		
$\mu_e^2$	3,46 MPa	$\mu_e^4$	0,04 MPa
$r_D^{21}$	0,01 s	$r_D^{41}$	1,5 s
		$r_D^{42}$	38,36 s
		$k_D^4$	1.500 s
$K_e^2$	0,059 MPa	$K_e^4$	0 MPa
$r_V^{21}$	540,85 s		

Tabelle 6.2: Identifizierte Parameter der Nichtgleichgewichtsanteile (Moosgummi)

von der Deformation zum einen bei einer sehr langen und zum anderen bei einer sehr kurzen Relaxationszeit benötigt wird. Somit entsprechen die Relaxationszeiten der ersten beiden Maxwell-Elemente der Kategorie 1 nach Gl. (5.15) und die der zweiten beiden Kategorie 2 nach Gl. (5.16). In Tabelle 6.2 sind alle identifizierten Parameter der Viskoelastizität dargestellt, alle nicht genannten Parameter werden zur Darstellung der Experimente nicht benötigt.

Zusammenfassung der Identifikation:

1. Identifikation der Parameter an den zyklischen hydrostatischen Kompressionsversuchen
2. Optimierung wird um die Ergebnisse der hydrostatischen Relaxationsversuche erweitert
3. Identifizierte Parameter der Volumenanteile werden konstant gehalten

4. Anpassung an Resultate der schnellsten Deformationsrate der Zugversuche (ohne Deformationsratenabhängigkeit)
5. Optimierung wird um die Ergebnisse der verbleibenden beiden Deformationsraten der Zugversuche erweitert (mit Deformationsratenabhängigkeit)
6. Schubmoduln werden nun auch konstant gehalten
7. Erweiterung um die Ergebnisse der Relaxationsversuche im Zugbereich und Optimierung

In Abb. 6.5 und 6.6 sind die Ergebnisse der Relaxationsversuche im Zugbereich abgebildet. Das Relaxationsverhalten kann mit dem Modell und

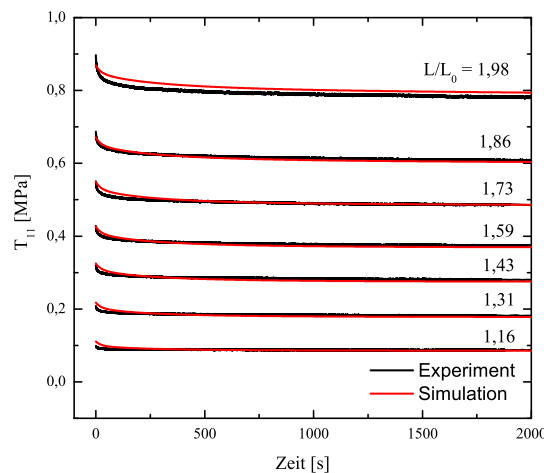


Abbildung 6.5: Vergleich von Simulation und Experiment der Relaxationsversuche im Zugbereich

den identifizierten Parametern sehr gut dargestellt werden. Die Spitzenwerte stimmen annähernd überein. Zudem ist auch nach 1.800 s die Grundelastizität noch lange nicht erreicht. Nur bei einer Dehnung von 98 % treten kleine Unterschiede zwischen den gemessenen und den berechneten Kurven von bis zu 3 % auf. In Abb. 6.7 sind die Ergebnisse der Relaxationsversuche unter hydrostatischem Druck abgebildet. Auch hier zeigen sich die erwünschten Ergebnisse. Die Unterschiede zwischen Experiment und Simulation liegen unter 1 %. Im Allgemeinen lässt sich zu diesen Untersuchungen sagen, dass die

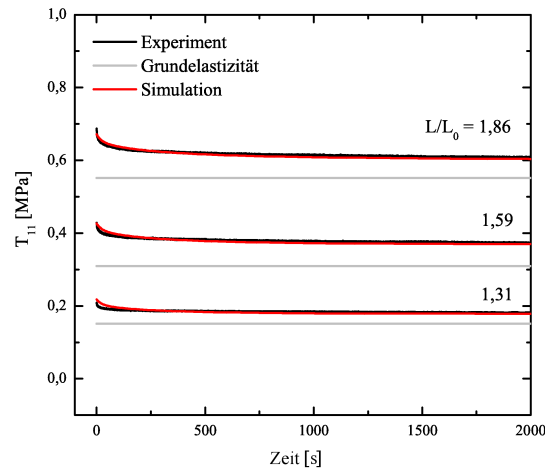


Abbildung 6.6: Vergleich von Simulation und Experiment der Relaxationsversuche im Zugbereich

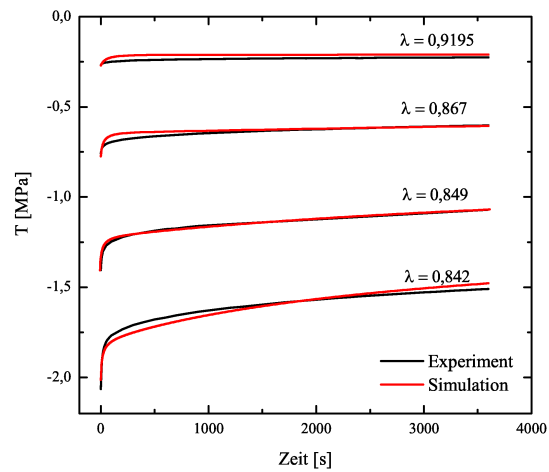


Abbildung 6.7: Vergleich von Simulation und Experiment der Relaxationsversuche im hydrostatischen Druckversuch

Abhängigkeit der Relaxationszeit von der Deformation mit dem gewählten Ansatz sehr gut abgebildet werden kann. Im Weiteren soll untersucht werden, ob das Verhalten auch nach längeren Relaxationszeiten so gut übereinstimmt. Dazu werden die Ergebnisse bei einem

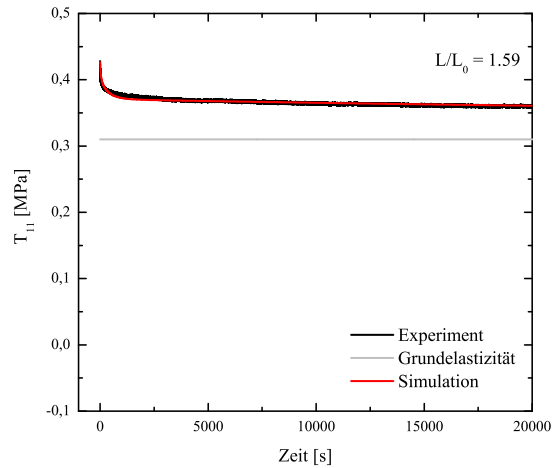


Abbildung 6.8: Vergleich von Simulation und Experiment eines Relaxationsversuchs über 20.000 s

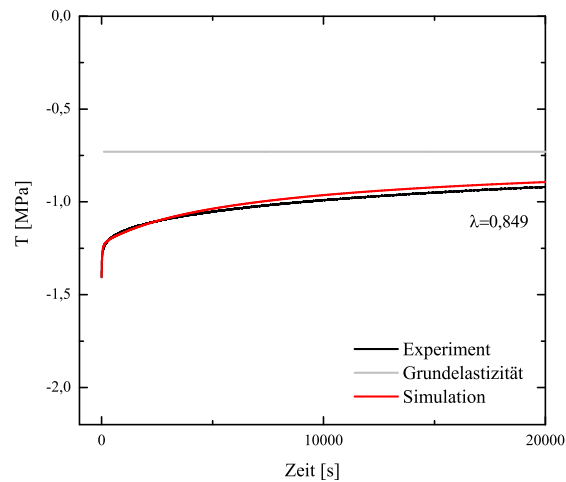


Abbildung 6.9: Vergleich von Simulation und Experiment eines Relaxationsversuchs über 20.000 s unter hydrostatischem Druck

Dehnungsniveau von 60 % im Zug und von 15 % im hydrostatischen Druck untersucht. Die Versuche laufen jeweils über einen Zeitraum von 20.000 s. Im Zugbereich (Abb. 6.8) sind nahezu keine Unterschiede zwischen Simulation und Experiment zu erkennen, im Druckbereich (Abb. 6.9) belaufen sich die

Unterschiede auf maximal 3 %. Auch über diesen langen Zeitraum können die Experimente mit dem Modell sowohl im Zug- als auch im Druckbereich gut dargestellt werden.

Nun muss noch untersucht werden, ob die Abhängigkeit der Relaxationszeit von der Vorbehandlung abgebildet werden kann. In der Literatur wird diese

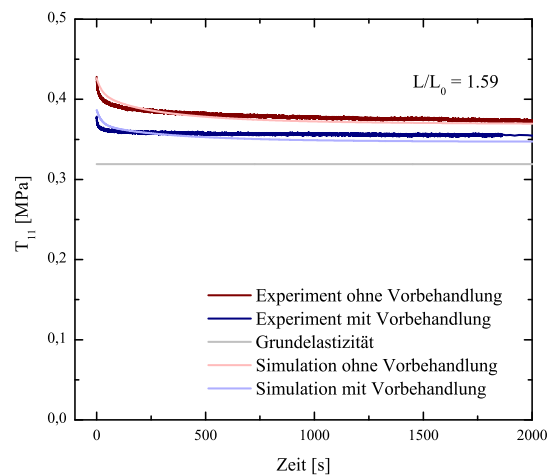


Abbildung 6.10: Vergleich von Simulation und Experiment eines Relaxationsversuchs mit Vorbehandlung im Zugbereich

Abhängigkeit meistens mit Hilfe des Phänomens der Thixotropie erklärt und mit inneren Variablen abgebildet. Da es bei diesem Material, wie in Kapitel 4 erläutert, voraussichtlich nicht zu Heilungseffekten der Mikrostruktur kommt, soll dieses Verhalten nur mit Hilfe der Viskoelastizitätstheorie dargestellt werden. Dazu werden sehr lange Relaxationszeiten genutzt. In Abb. 6.10 ist das Ergebnis dieses Experiments für den Zug- und in Abb. 6.11 für den Druckbereich veranschaulicht. Es ist zu erkennen, dass das Phänomen in beiden Bereichen abgebildet werden kann. Damit ist sicher gestellt, dass keine zusätzlichen inneren Variablen genutzt werden müssen. Die Viskoelastizitätstheorie beinhaltet automatisch das beobachtete Verhalten, wenn die Vorbehandlung der Proben in die Simulation einbezogen wird.

Alle in den Relaxationsversuchen beobachteten Phänomene können mit dem entwickelten Materialmodell unter Zug- und unter hydrostatischer Druckbelastung abgebildet werden.

Im Weiteren werden die Ergebnisse der zyklischen Versuche untersucht. In Abb. 6.12 sind sowohl die Ergebnisse der zyklischen Versuche mit drei unterschiedlichen Deformationsraten im Zugbereich und unter hydrostatischem

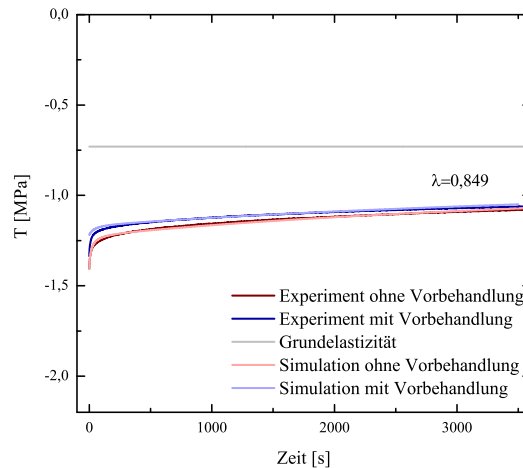


Abbildung 6.11: Vergleich von Simulation und Experiment eines Relaxationsversuchs mit unterschiedlicher Vorbehandlung unter hydrostatischem Druck

Druck abgebildet. Im Zug kann das Verhalten bei allen drei Raten gut dargestellt werden. Das schnelle Abfallen im ersten Zyklus und das sehr langsame Abfallen in den weiteren Zyklen kann mit dem gewählten Materialmodell ebenfalls simuliert werden. Zudem ist auch der Effekt der ähnlichen Hysterese über drei Dekaden abbildbar.

Unter hydrostatischem Druck verhält es sich etwas anders. Wie zuvor schon erwähnt öffnet sich die Hysterese in der Simulation nicht so weit wie im Experiment. Allerdings können die Spitzenwerte aller drei Dekaden gut abgebildet werden, so dass es sich um ein akzeptables Ergebnis handelt.

### 6.3 Validierung des Parametersatzes mit uniaxialen Druckversuchen

Mit den erhaltenen Parametern sollen im Folgenden die uniaxialen Druckversuche als Validierung des Modells simuliert werden. In Abb. 6.13 ist die Grundelastizität gezeigt. Mit den erhaltenen Parametern lässt sich auch die



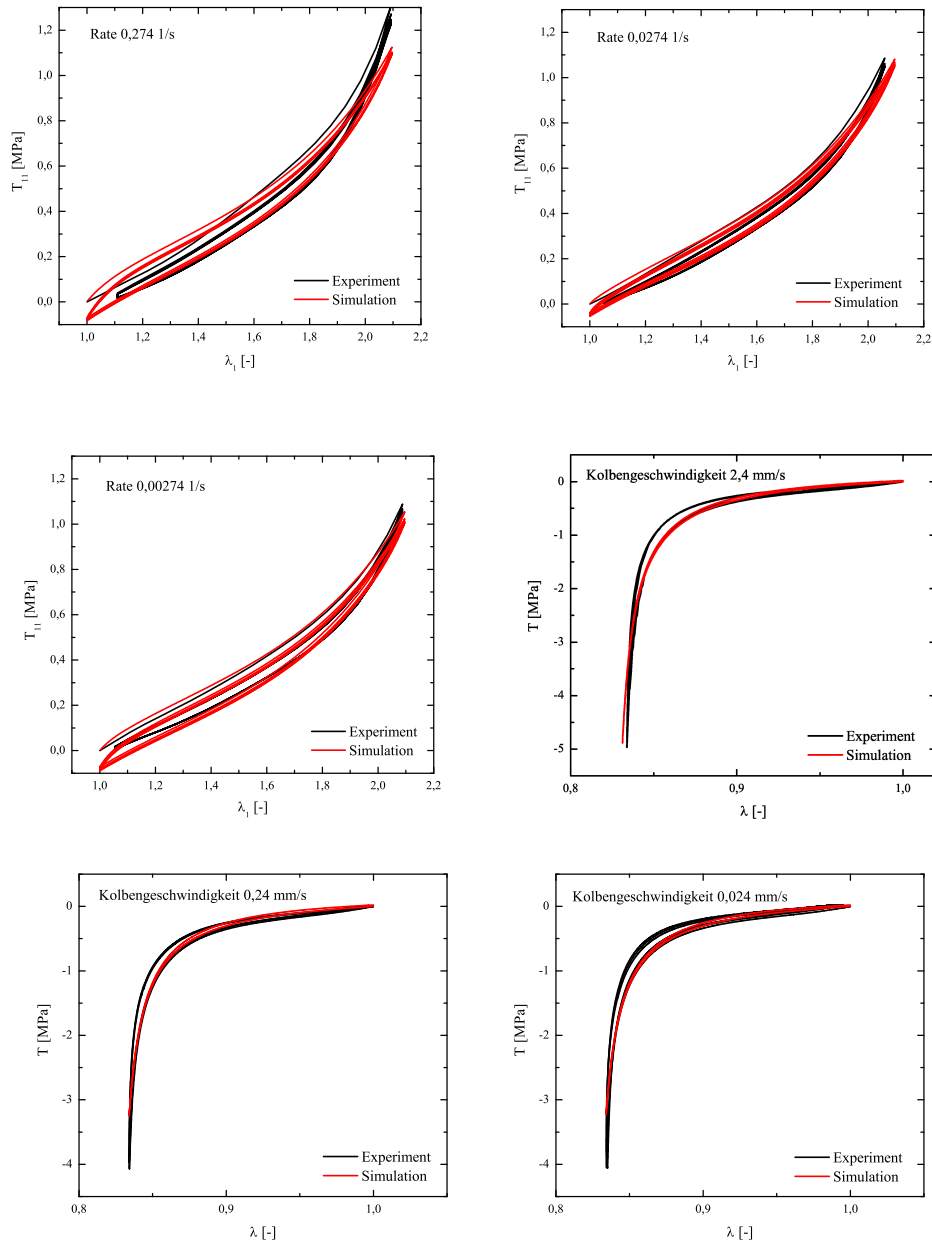


Abbildung 6.12: Vergleich von Simulation und zyklischen Experimenten im Zugbereich bei Raten von  $0,273 \text{ s}^{-1}$  bis  $0,00273 \text{ s}^{-1}$  und unter hydrostatischem Druck bei Kolbengeschwindigkeiten von  $2,4 \text{ mm/s}$  bis  $0,024 \text{ mm/s}$

Grundelastizität im Druckbereich abbilden. Auch der Übergang vom Zug- in den Druckbereich kommt der Realität sehr nah (Abb. 6.14). Das „bimodulare“ Verhalten kann mit dem Modell offensichtlich wiedergegeben werden, ohne als „konstitutive“ Annahme im Modell vorhanden zu sein.

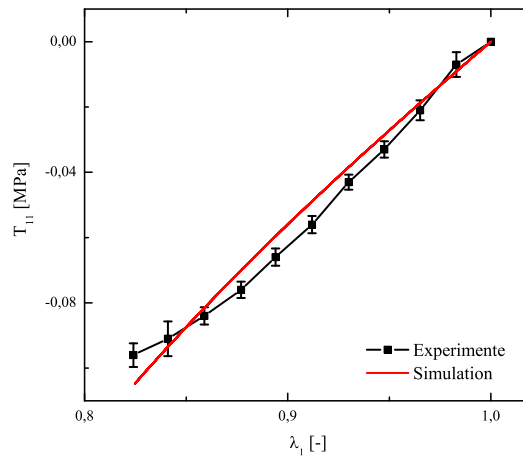


Abbildung 6.13: Vergleich von Simulation und Experiment der Grundelastizität der uniaxialen Druckversuche

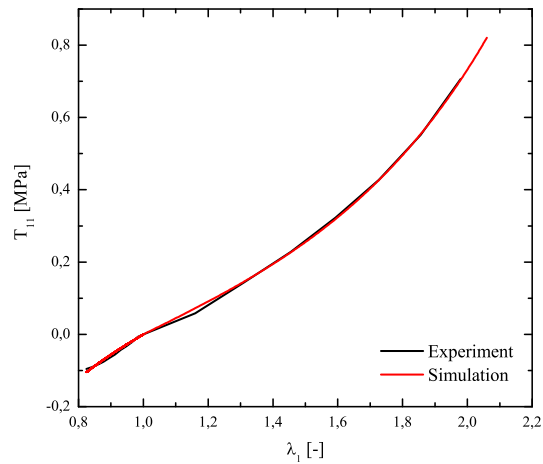


Abbildung 6.14: Vergleich von Simulation und Experiment der Grundelastizität der uniaxialen Versuche

Die Ergebnisse des uniaxialen Relaxationsversuchs und des zyklischen Versuchs im Druckbereich sind in Abb. 6.15 und 6.16 zu sehen. Die Relaxationsversuche unterscheiden sich um bis zu 10 %. Allerdings ist zu erkennen, dass das Relaxationsverhalten abgebildet werden kann. Nur der Spitzenwert unterscheidet sich und damit verschiebt sich die Kurve um genau diesen Betrag.

Das schnelle Abfallen der Hysterese im ersten Zyklus des zyklischen Versuchs (Abb. 6.16) und auch das langsame Abfallen der weiteren Zyklen kann auch in diesem Bereich gut abgebildet werden. Die Form der Hysterese unterscheidet sich in Simulation und Experiment, allerdings ist der Fehler nicht größer als 15 %. Da es sich hierbei nur um eine Validierung handelt und Effekte, wie das Ausknicken einzelner Stege, nicht im Modell berücksichtigt sind, handelt es sich dabei um ein sehr gutes Ergebnis.

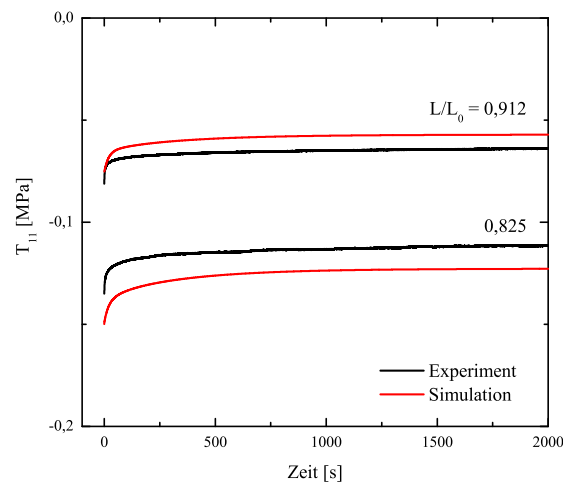


Abbildung 6.15: Vergleich von Simulation und Experiment der uniaxialen Relaxationsversuche im Druckbereich

## 6.4 Identifikation und Simulation des Vollmaterials

Da Moosgummi oft in Verbundbauteilen mit dem Vollmaterial zum Einsatz kommt, sollen hier kurz die identifizierten Parameter des Vollmaterials ge-

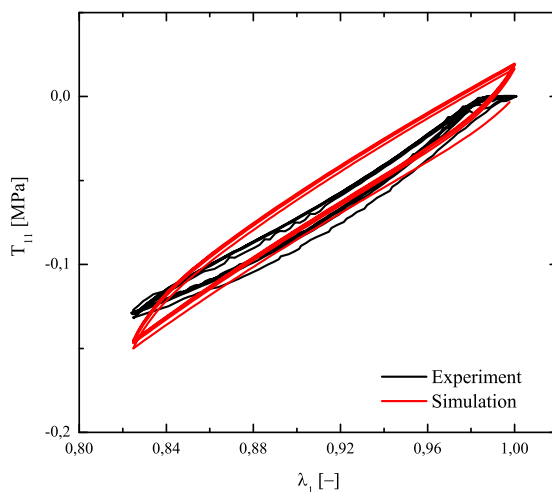


Abbildung 6.16: Vergleich von Simulation und Experiment eines uniaxialen, zyklischen Versuchs mit einer Streckrate von  $0,0262 \text{ s}^{-1}$  im Druckbereich

nannt und einige signifikante Simulationen gezeigt werden. In Tabelle 6.3 sind die Parameter der Grundelastizität aufgeführt. Obwohl hierbei ein ne-

$c_{10}$	0,2 MPa	$c_{20}$	-0,057 MPa	$c_{30}$	0,017 MPa
----------	---------	----------	------------	----------	-----------

Tabelle 6.3: Identifizierte Parameter der Grundelastizität (Vollgummi)

gativer Parameter genutzt wird, ist die Polykonvexität der Energiefunktion mit dem gewählten Parametersatz gewährleistet. Die Grundelastizitätskurve der Simulation kann den gemessenen S-Schlag des Materials abbilden (Abb. 6.17).

Im Anschluss an die Grundelastizität werden die Parameter der Viskoelastizität identifiziert. Hierbei werden ein Maxwell-Element mit dem erwähnten nichtlinearen Ansatz der freien Energiefunktion und konstanter Relaxationszeit, sowie drei Maxwell-Elemente mit einem Neo-Hooke-Ansatz für die freie Energiefunktion gewählt. In einem Element mit Neo-Hooke-Ansatz wird die Relaxationszeit der Kategorie 2 (vgl. Gl. 5.23) und zwei Relaxationszeiten der Kategorie 3 (vgl. Gl. 5.24) genutzt. Die erhaltenen Parameter sind in Tabelle 6.4 in der aufgeführten Reihenfolge der Maxwell-Elemente dargestellt. Der Vergleich der Simulation mit den Ergebnissen der Relaxationsexperimente (Abb. 6.18 und Abb. 6.19), sowie mit denen der zyklischen Versuche (Abb. 6.20 und Abb. 6.21) liefert sehr gute Ergebnisse. Die lange Relaxationszeit

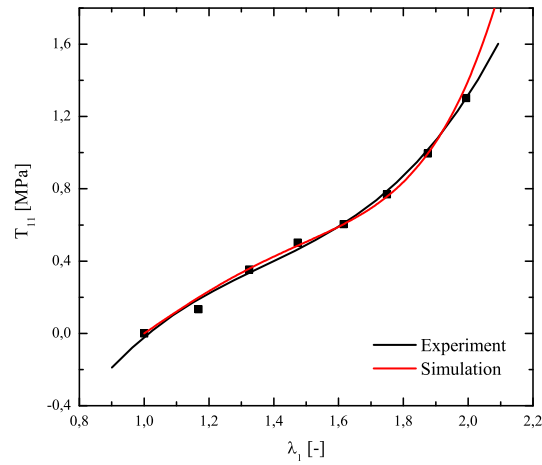


Abbildung 6.17: Vergleich von Simulation und Experiment der Grundelastizität

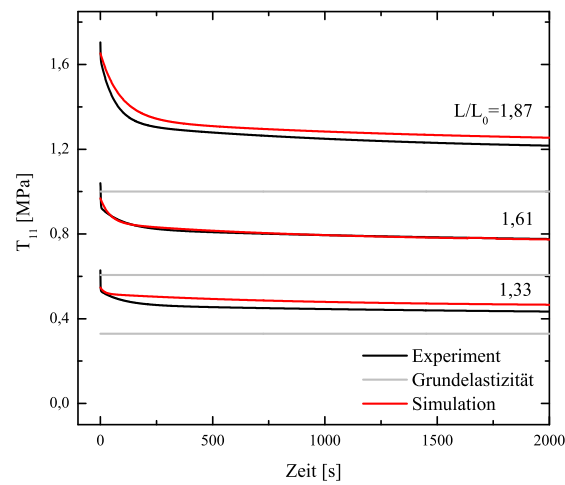


Abbildung 6.18: Vergleich von Simulation und Experiment für Relaxationsversuche

und die Abhängigkeit der Relaxationszeit von der Vorbehandlung kann gut abgebildet werden. Zudem ist auch die Öffnung der Hysterese für unterschiedliche Deformationsgeschwindigkeiten etwa gleich. Das schnelle Abfallen der Hysteresekurven im ersten Zyklus und das langsame in den weiteren Zyklen wird gut wiedergegeben.

$c_{301}$	0,002 MPa	$c_{102}$	0,057 MPa
$r_I$	$10^6$ s	$r_{21}$	40 s
		$r_{22}$	4.000 s
		$k_{21}$	$10^{14}$ s
$c_{103}$	0,061 MPa	$c_{104}$	3,0 MPa
$r_{31}$	23 s	$r_{41}$	0,1 s
$r_{32}$	529 s	$r_{42}$	0,22 s
$k_{31}$	32,08 s	$r_{43}$	20,74 s
$r_{33}$	400.000 s	$k_{41}$	131,82 s
$k_{32}$	$10^{14}$ s		

Tabelle 6.4: Identifizierte Parameter der Nichtgleichgewichtsanteile des Vollmaterials

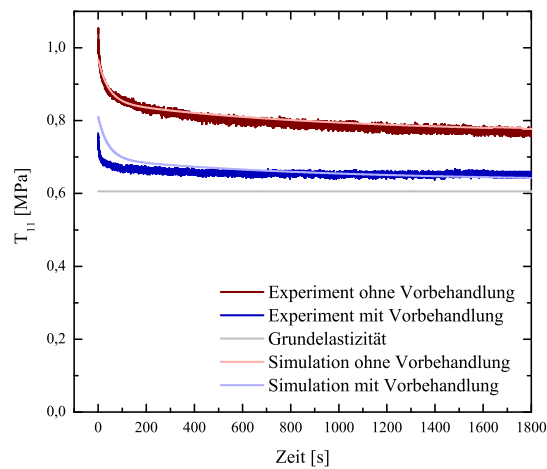


Abbildung 6.19: Vergleich von Simulation und Experiment eines Relaxationsversuchs mit Vorbehandlung

Mit diesen Ergebnissen können im Folgenden auch Verbundbauteile aus Voll- und Moosgummi berechnet werden.

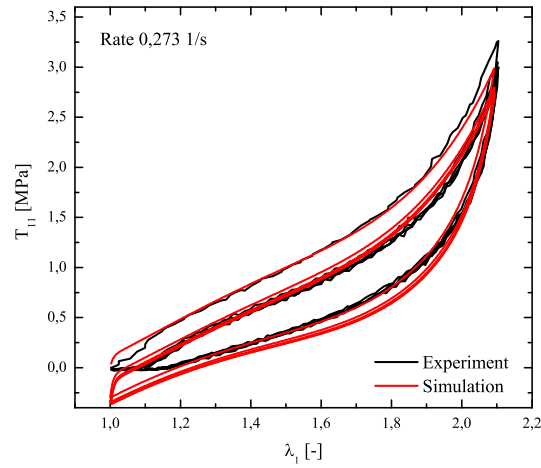


Abbildung 6.20: Vergleich von Simulation und Experiment für einen zyklischen Versuch mit einer Rate von  $0,274 \text{ s}^{-1}$

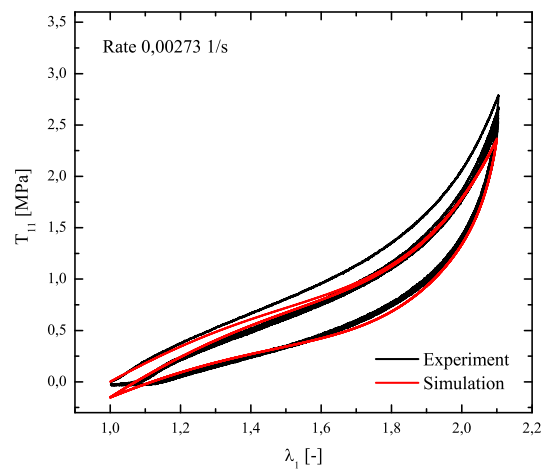


Abbildung 6.21: Vergleich von Simulation und Experiment für einen zyklischen Versuch mit einer Rate von  $0,00274 \text{ s}^{-1}$





# 7

---

## Numerische Umsetzung mit der FE Methode

---

### 7.1 Numerische Umsetzung

Die numerische Umsetzung des entwickelten Materialmodells erfolgt mit dem auf der Finiten Elemente Methode basierenden Programm Comsol Multiphysics<sup>®</sup>. Da der Fokus dieser Arbeit auf den Experimenten und der Modellentwicklung liegt, soll an dieser Stelle die numerische Umsetzung nur kurz erwähnt werden. Das genutzte Programm stellt eine Vielzahl von Möglichkeiten bereit, eigene Modelle bzw. Gleichungen zu implementieren und diese mit den bereits in Comsol Multiphysics<sup>®</sup> vorhandenen Gleichungen zu koppeln. Neben den vorhandenen „physics modes“, die auch leicht geändert werden können, stellt Comsol drei unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung, eigene Gleichungen zu implementieren:

### Koeffizientenform

Die Koeffizientenform ist die einfachste Form, jedoch sind ihre Möglichkeiten auch sehr begrenzt. Hiermit können nur lineare oder schwach nichtlineare Probleme gelöst werden. Bei dieser Methode gibt Comsol eine Koeffizientengleichung mit den beiden unabhängigen Variablen  $u_1$  und  $u_2$

$$\mathbf{e}_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{d}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{\Gamma} + \boldsymbol{\beta} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (7.1)$$

mit  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ , vor. In dieser Gleichung kennzeichnet  $\mathbf{e}_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$  den Massenterm und  $(\mathbf{e}_{ij})_a$  ist eine  $2 \times 2$ -Koeffizientenmatrix und kennzeichnet den Massenkoeffizienten. Der Dämpfungsterm ist durch  $\mathbf{d}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$  dargestellt und  $\mathbf{d}_a$  hat ebenfalls die Form einer  $2 \times 2$ -Matrix. Dieser Koeffizient wird bei  $\mathbf{e}_a = \mathbf{0}$  auch als Massenkoeffizient bezeichnet. Zusätzlich treten auch noch ein Konvektionsterm  $\boldsymbol{\beta} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u}$  und ein Absorptionsterm  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$  auf. Sowohl der Konvektionskoeffizient  $\boldsymbol{\beta}$ , als auch der Absorptionskoeffizient  $\mathbf{a}$  sind ebenfalls Matrizen, der Quellterm  $\mathbf{f}$  ist dagegen vektorwertig. Der konservative Flusssterm ist durch  $\mathbf{\Gamma}$  dargestellt und setzt sich aus

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{c} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\gamma} \quad (7.2)$$

zusammen. Auch der hier auftretende Diffusionskoeffizient  $\mathbf{c}$  ist in dieser Gleichung als  $2 \times 2$ -Matrix definiert, auch der konservative Konvektionskoeffizient  $\boldsymbol{\alpha}$ . Der konservative Fluss  $\boldsymbol{\gamma}$  ist vektorwertig. Diese Koeffizienten können im Folgenden gesetzt werden, um (7.1) an das behandelte physikalische Problem anpassen zu können.

Um die Randbedingungen zu setzen, können sowohl Neumann- als auch Dirichlet-Bedingungen formuliert werden. Diese Kombination wird über eine neue abhängige Variable  $\mu$ , welche nur auf dem Rand definiert ist, ermöglicht. In Problemen der Strukturmechanik entspricht diese Variable der Reaktionskraft auf den Rand. Damit wird die Neumann-Randbedingung definiert als

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{g} - \mathbf{h}^T \mu, \quad (7.3)$$

wobei man damit eine klassische Neumann-Randbedingung und auch eine Kombination aus Neumann- und Dirichlet-Randbedingung erhalten kann. Die klassische Dirichlet-Randbedingung kann zudem mit

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{r} \quad (7.4)$$

gesetzt werden. Der Faktor  $\mathbf{h}^T$  der Neumann-Randbedingung ist die Transponierte von  $\mathbf{h}$ .

### Generelle Form

Die Berechnung eines Problems mit Hilfe der generellen Form beruht auf dem folgendem Satz von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_a \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{d}_a \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{F} \\ \mathbf{c} &= - \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial (\operatorname{grad} \mathbf{u})} \\ \mathbf{a} &= - \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \\ \gamma &= \mathbf{\Gamma} \\ \alpha &= - \frac{\partial \mathbf{\Gamma}}{\partial \mathbf{u}} \\ \mathbf{f} &= \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Mit folgenden Substitutionen kann gezeigt werden, dass die Koeffizientenform ein Spezialfall der generellen Form ist:

$$\mathbf{F} = \mathbf{f} - \beta \cdot \operatorname{grad} \mathbf{u} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{g} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{u}. \quad (7.6)$$

Die zur Berechnung notwendigen Koeffizienten  $\mathbf{\Gamma}$  und  $\mathbf{F}$  lassen sich über die Zusammenhänge (7.2) und (7.6) berechnen. Die hier auftretenden Koeffizi-

enten werden mit Hilfe des zuvor genannten Gleichungssystems berechnet. Dazu wird die Tangente für das Newton-Verfahren numerisch bestimmt. Aus diesem Grund lassen sich vor allem auch nicht-lineare Probleme lösen. Diese Methode nimmt wegen der Berechnung der numerischen Tangente viel Zeit in Anspruch. Die Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen treten in folgender Form auf

$$\begin{aligned} -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Gamma} &= \mathbf{G} + \left( \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right)^T \mu, \\ \mathbf{0} &= \mathbf{R}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

### Schwache Form

Die allgemeinste der in Comsol möglichen Methoden ist die Implementierung der schwachen Form, die im Folgenden am Beispiel der quasi-statischen Impulsbilanz unter Vernachlässigung der Fernwirkungskräfte erläutert werden soll. Für die Lösungsvariable  $\mathbf{u}$  können auch hier Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen auf dem Rand  $\partial\Omega$  vorgeschrieben werden

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ auf } \partial\Omega_D^u \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} \text{ auf } \partial\Omega_N^u. \tag{7.8}$$

Die schwache Form der zu implementierenden Gleichung, erhält man, indem man sie mit einer Testfunktion  $\delta\mathbf{u}$  multipliziert und dann über das Gebiet  $\Omega$  integriert

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \delta\mathbf{u} \, dv = 0. \tag{7.9}$$

Mit Hilfe der partiellen Integration und des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, da, \tag{7.10}$$

wobei  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor der Oberfläche  $\partial\Omega$  ist, erhält man folgende

Gleichung

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \text{grad } \delta \mathbf{u} \, dv = \int_{\partial\Omega} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, da, \quad (7.11)$$

wobei  $\bar{\mathbf{t}}$  für die externe Belastung am Rand steht.

Um die Grundelastizität des Materialmodells zu implementieren wird der „physics mode“ des Moduls „Structural Mechanics“ genutzt. Mit diesem Modul können Probleme der Struktur- und Festkörpermechanik gelöst werden. Es unterstützt sowohl lineare als auch nichtlineare Materialmodelle. Bei der Analyse kann zwischen der statischen, der eigenfrequenten, der transienten und der parametrischen Analyse gewählt werden. In diesem Modul wird die zuvor erwähnte schwache Form in der Referenzkonfiguration gelöst. Da in diesem Modul schon die Berechnung eines Neo-Hooke-Modells implementiert ist, muss bei diesem Modell ausschließlich die verwendete freie Energiefunktion geändert werden. Mit dieser Änderung und den entsprechenden Randbedingungen kann dann die Grundelastizität des Problems berechnet werden.

Die in der Viskoelastizitätstheorie benötigten Evolutionsgleichungen können am einfachsten mit der generellen Form implementiert werden. Da vier Maxwell-Elemente genutzt werden, müssen auch vier Gleichungen definiert werden. Zu Anfang werden die Variablen der Gleichung festgelegt. Im Fall der Evolutionsgleichungen also die internen Variablen  $\mathbf{C}_{S_i}^j$ . Dann müssen die Koeffizienten belegt werden. Die rechte Seite der Evolutionsgleichung wird über  $\mathbf{F}$  realisiert und die zeitliche Ableitung von  $\mathbf{C}_{S_i}^j$  über  $\mathbf{d}_a$ . Mit der Startbedingung des Einheitstensors für  $\mathbf{C}_{S_i}^j$  können die Gleichungen gelöst werden. Um die internen Variablen in das zu lösende System zu integrieren, müssen die Nichtgleichgewichtsanteile der Spannung zur ursprünglichen Gleichgewichtsspannung addiert werden.

Im Folgenden sollen nun mit Hilfe dieses Programms zwei unterschiedliche Dichtungsprofile von Autotüren berechnet werden. Beim ersten Profil wird nur das entwickelte Modell des Moosgummis verwendet, beim zweiten Profil ist auch das Materialmodell des Vollgummis enthalten.

## 7.2 Simulation eines Dichtungsprofils aus Moosgummi

Zur Validierung des Materialmodells wird im Folgenden das Verhalten einer Autotürdichtung aus Moosgummi untersucht. Dazu wird ein 1 cm langes Stück aus der Dichtung geschnitten und in die in Kapitel 4 beschriebene Zugmaschine eingespannt. Eine dünne Platte drückt dann auf die Gummidichtung. Dabei werden das Deformationsbild und die Reaktionskraft aufgenommen. Um dies mit dem Modell zu vergleichen, wird die Geometrie der Dichtung in Comsol aufgenommen und das Modell auf die zuvor beschriebene Weise in 3D implementiert. Das im Experiment genutzte Kontaktproblem wird in der Simulation vereinfacht, indem im Bereich der Kontaktzone eine definierte Verschiebung als Randbedingung aufgebracht wird. In Abb. 7.1 sind die experimentell erhaltenen und die simulierten Deformationsbilder bei drei unterschiedlichen Verschiebungen dargestellt. Die ursprüngliche Form der Dichtung ist in den Experimenten in Rot und in den Simulationen in Schwarz dargestellt. In den Simulationen ist die Verzerrungskomponente des Green-Lagrange Verzerrungstensors in  $y$ -Richtung dargestellt, da sich dieser Verzerrungstensor bei großen Deformationen anbietet. Die Dehnung kann im Experiment nicht gemessen werden, es ist daher nur ein Vergleich der Deformationsbilder möglich. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich die Profile zu jedem Zeitpunkt gleich verformen, so dass auch inhomogene Probleme gelöst werden können. Um jetzt noch eine genauere Aussage über das Modell zu treffen, ist in Abb. 7.2 die Reaktionskraft über der Verschiebung in  $y$ -Richtung aufgetragen. Die Kraft unterscheidet sich in Simulation und Experiment höchstens um 15 %. Dies ist ein sehr gutes Ergebnis für den durchgeführten Bauteilversuch. Im Anschluss daran soll nun auch noch das Relaxationsverhalten untersucht werden (Abb. 7.3). Dazu wird eine Verschiebung von 6 mm in negativer  $y$ -Richtung auf das Bauteil aufgebracht, welche für zwei Minuten konstant gehalten wird. Da es sich um eine Verifikation handelt, soll nur dieser kurze Zeitraum betrachtet werden. Der Spitzenwert der Kraft in Experiment und Simulation unterscheidet sich etwa um 10 %. Dieser Unterschied bleibt während des gesamten Experiments konstant. Somit kann das Relaxationsverhalten richtig abgebildet werden, die simulierten Werte liegen lediglich 10 % unter den experimentell bestimmten. Das ist ein sehr gutes Ergebnis hinsichtlich des Relaxationsverhaltens.

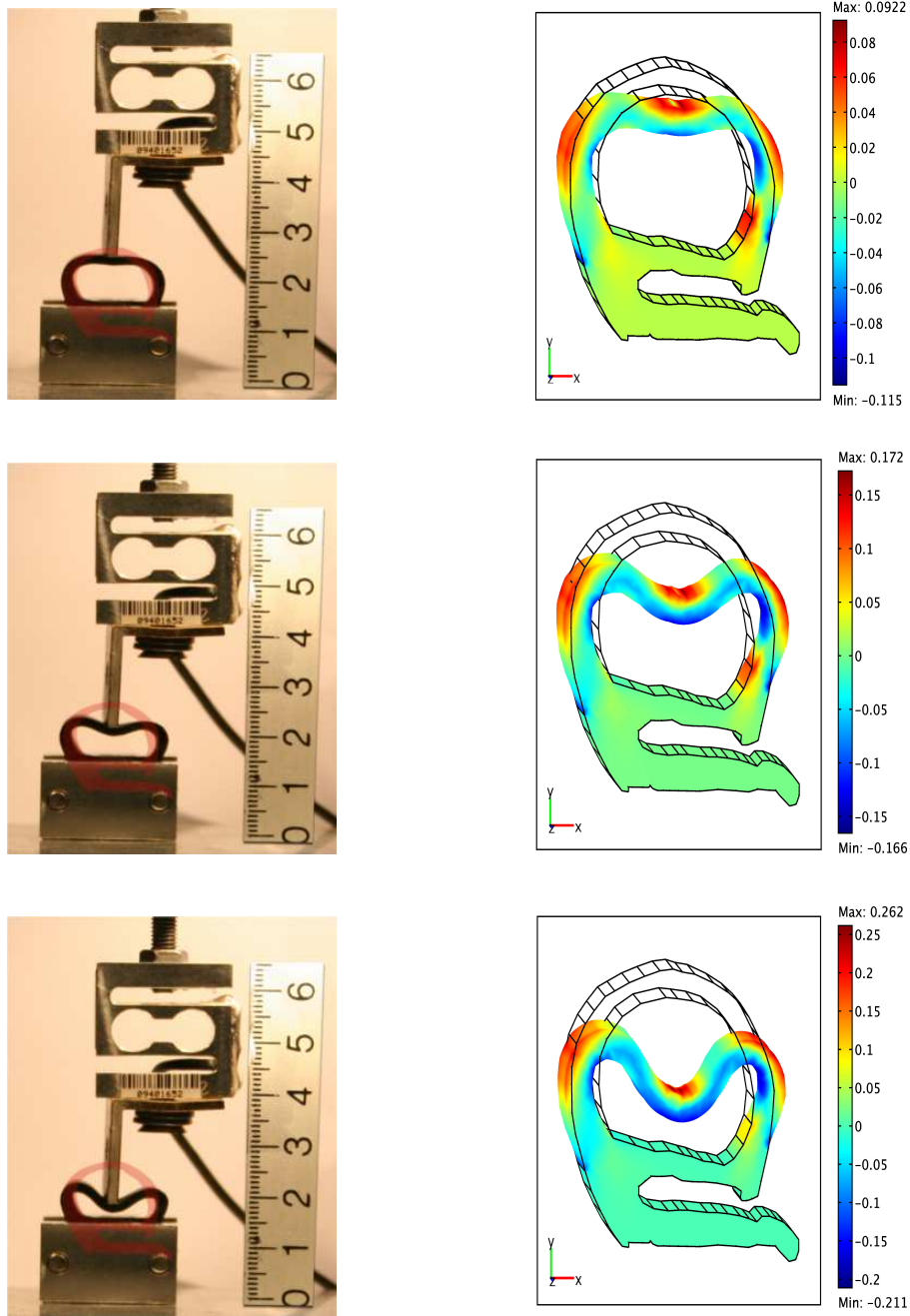


Abbildung 7.1: Experiment und Simulation bei einer Verschiebung von 3 mm, 6 mm und 9 mm. Darstellung der Green-Lagrange Verzerrung in Reaktionsrichtung

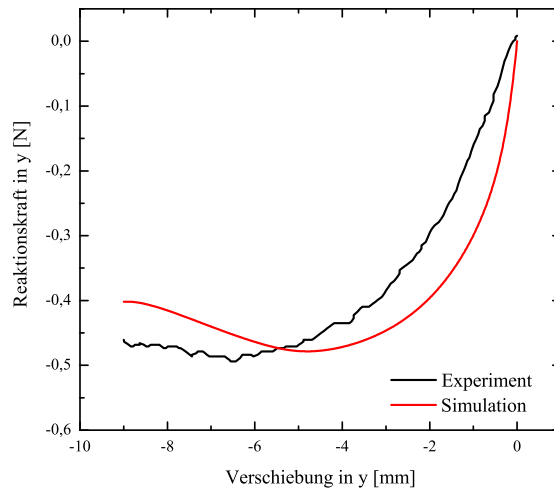


Abbildung 7.2: Vergleich der Reaktionskraft von Experiment und Simulation über der Verschiebung in gleicher Richtung bei Belastung bis 9 mm

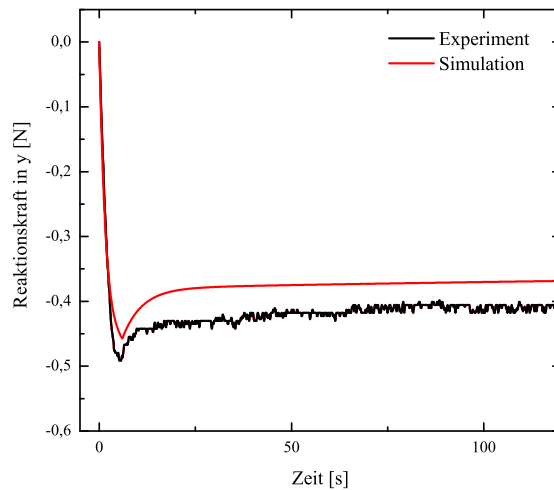


Abbildung 7.3: Vergleich der Reaktionskraft von Experiment und Simulation über der Zeit bei einer konstanter Belastung von 6 mm



## 7.3 Simulation eines Verbundbauteils aus Voll- und Moosgummi

Im folgenden Abschnitt soll das Verhalten eines Verbundbauteils aus Vollgummi, Moosgummi und Stahl untersucht werden. In Abb. 7.4 ist das Profil schematisch dargestellt. Die einzelnen Materialbereiche sind farblich abgegrenzt. Die entwickelten Materialmodelle für Voll- und Moosgummi wer-

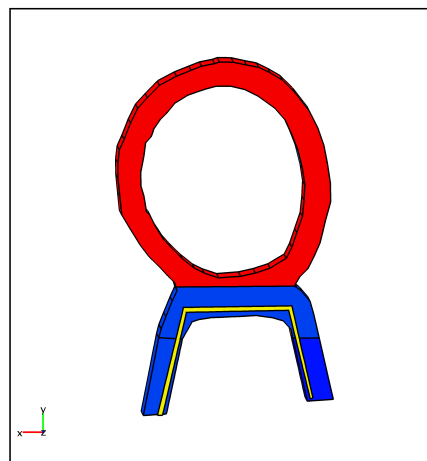


Abbildung 7.4: Schematische Darstellung des Türprofils: Moosgummi (rot), Vollgummi (blau), Stahl (gelb)

den an den entsprechenden Stellen implementiert. An der Stelle des Stahls wird ein vorhandenes elastisches Modell genutzt. Um die Deformationsbilder wie zuvor vergleichen zu können, sind in Abb. 7.5 die Experimente und die entsprechenden Simulationsbilder für Verschiebungen von 3 mm, 6 mm und 9 mm in negativer  $y$ -Richtung dargestellt. Das Profil ist am unteren Bereich fest eingespannt. Das eigentliche Kontaktproblem wird auch hier mit einer vorgegebenen Verschiebung vereinfacht.

Auch diese Deformationsbilder können sehr gut dargestellt werden. Hierbei ist natürlich das Verhalten des Moosgummis ausschlaggebend, da sich der Moosgummibereich besonders stark verformt. Die Materialmodelle für Stahl

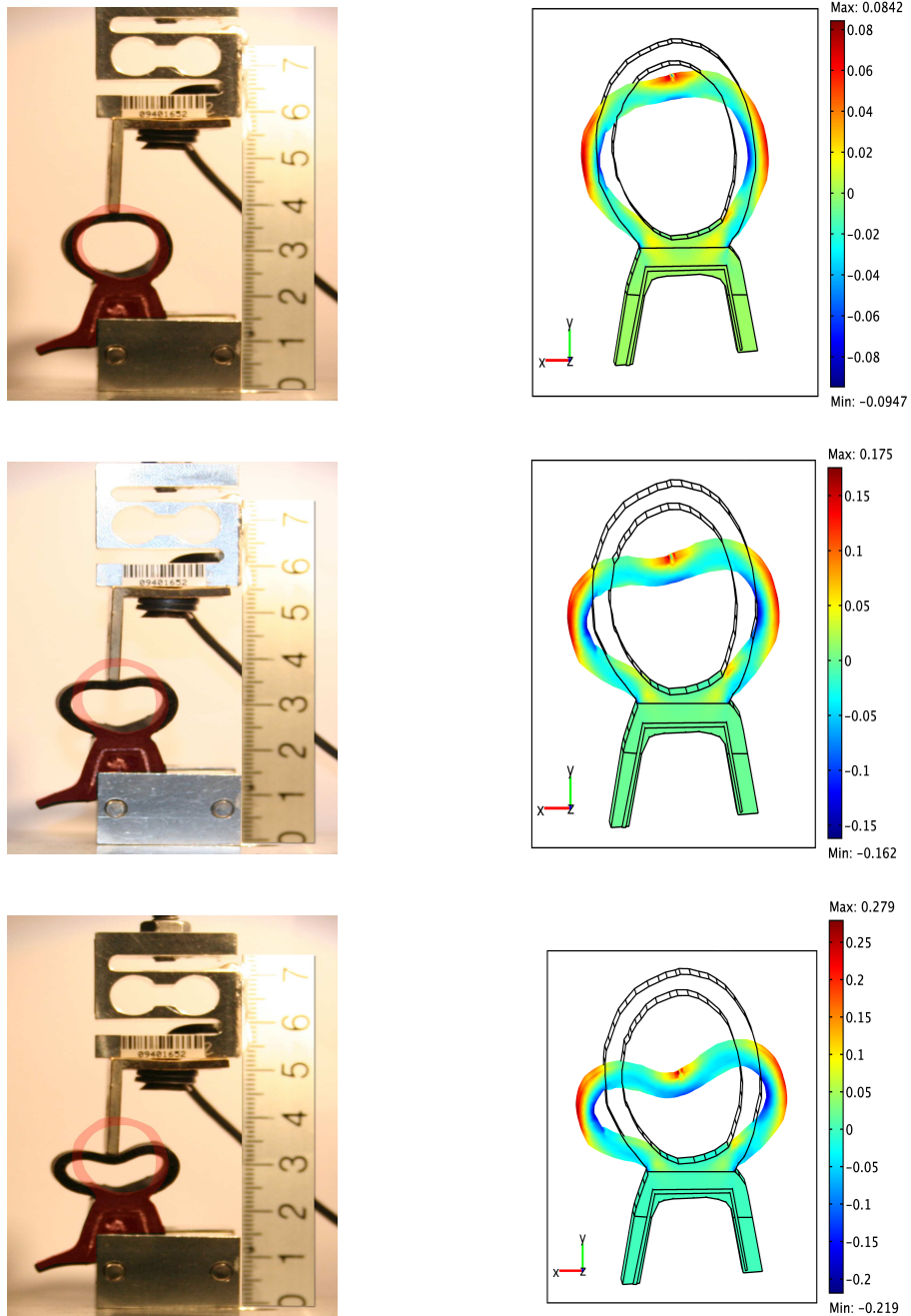


Abbildung 7.5: Experiment und Simulation bei einer Verschiebung von 3 mm, 6 mm und 9 mm. Darstellung der Green-Lagrange Verzerrung in Reaktionsrichtung

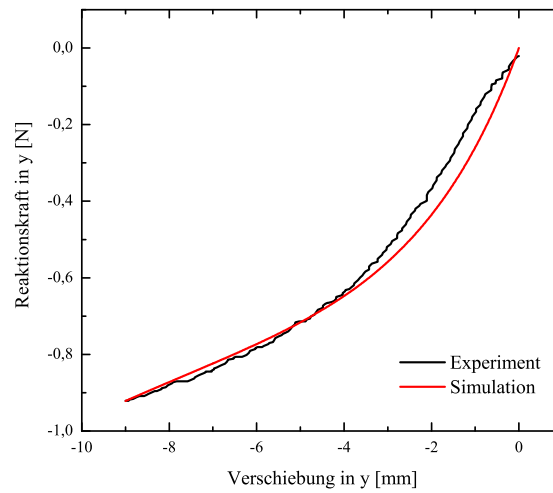


Abbildung 7.6: Vergleich der Reaktionskraft von Experiment und Simulation über der Verschiebung in gleicher Richtung bei Belastung bis 9 mm

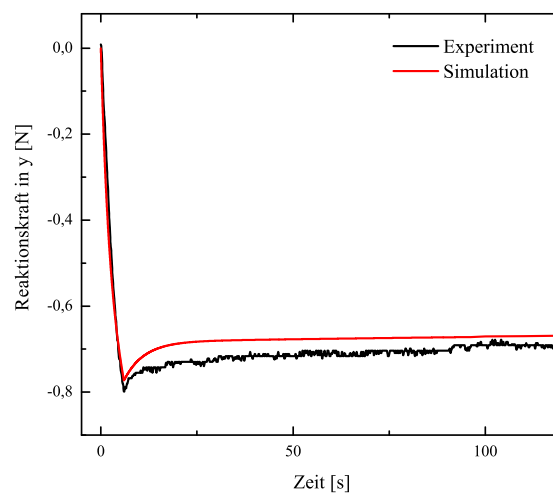


Abbildung 7.7: Vergleich der Reaktionskraft von Experiment und Simulation über der Zeit bei konstanter Belastung von 6 mm

und Vollgummi haben nur einen geringen Einfluss.

In Abb. 7.6 ist wiederum die Reaktionskraft über der Verschiebung in negativer  $y$ -Richtung aufgetragen. Bei diesem Profil ist der Unterschied von Simulation und Experiment noch geringer als im ersten Beispiel, was eventuell an der einfacheren Geometrie liegt. Bei der Reaktionskraft spielt natürlich auch das Verhalten des Vollgummis eine gewisse Rolle, da das Profil nicht komplett eingespannt ist. Somit sind beide entwickelten Materialmodelle gut geeignet, um auch das komplexe Deformationsverhalten von Bauteilen zu erfassen.

Um nun noch das Relaxationsverhalten zu untersuchen, wird auch hier eine Verschiebung des Profils am oberen Punkt um 6 mm in negativer  $y$ -Richtung aufgebracht und zwei Minuten konstant gehalten (Abb. 7.7). Die gemessenen und die berechneten Kurven unterscheiden sich nicht mehr als 5 %. Zusammenfassend spiegeln die erhaltenen Materialmodelle das Materialverhalten der unterschiedlichen Türprofile sehr gut wieder. Sowohl die lineare Belastung als auch der Relaxationsversuch können sehr gut abgebildet werden.

# 8

---

## Modellierung des Payne-Effekts

---

Im folgenden Kapitel soll mit dem erhaltenen Materialmodell ein weiterer bei Gummiwerkstoffen häufig auftretender Effekt untersucht werden, der sogenannte Payne-Effekt. Da keine experimentellen Resultate dieses Effektes für das genutzte Material vorhanden sind, soll an dieser Stelle untersucht werden, ob das Modell qualitativ in der Lage ist, diesen Effekt abzubilden. Wenn sich dies bestätigt, können die Experimente um die notwendigen Versuche erweitert und die Modellparameter gegebenenfalls angepasst werden.

### 8.1 Payne-Effekt

Der Payne-Effekt, der für das Schwingungs- und Akustikverhalten von Fahrzeugen von besonderem Interesse ist, tritt bei mit Ruß, Kieselsäure oder anderen aktiven Füllstoffen verstärkten Gummimischungen auf [114]. Das Ausmaß dieses Phänomens hängt wesentlich von der Beschaffenheit und dem Volumenanteil des entsprechenden Füllstoffs ab [29]. Bei sinusförmiger Belastung zeichnet sich der Payne-Effekt durch eine Abnahme des Speichermo-

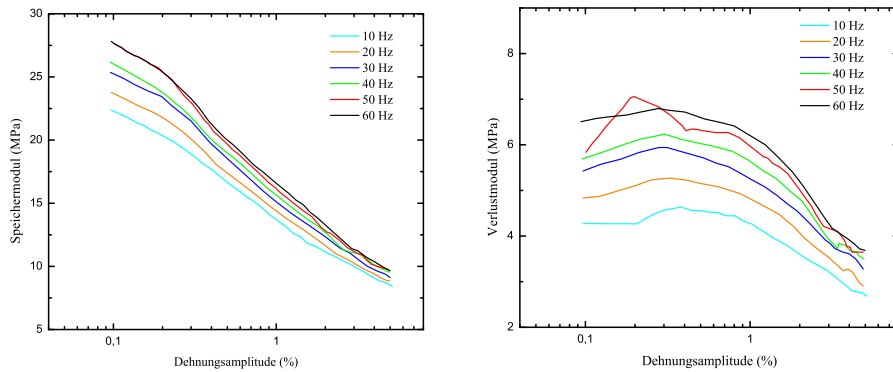


Abbildung 8.1: Frequenz- und Amplitudenabhängigkeit des Speicher- (links) und Verlustmoduls (rechts) von gefüllten Elastomeren (entnommen aus Lion et al. [94])

duls (Abb. 8.1 (links)) und durch ein nur schwach ausgeprägtes sigmoidales Verhalten des Verlustmoduls (Abb. 8.1 (rechts)) bei steigender Dehnungsamplitude aus (vgl. Lion [93]).

In einer Vielzahl von Arbeiten wurden Verstärkungsmechanismen durch das Einbringen von Füllstoffen und die Mikrostruktur der Füllstoffe untersucht [111]. Dabei wurde zwar die Abhängigkeit der Verstärkung von den Füllstoffen geklärt, allerdings sind die mikromechanischen Ursachen noch nicht eindeutig bewiesen [19]. In vielen dieser Theorien beruht der Verstärkungsmechanismus von Rußen auf mehreren Effekten. Bis zu einem kritischen Füllstoffgehalt erfolgt die Verstärkung aufgrund hydrodynamischer Prozesse. Dabei wird der Volumenanteil der elastischen Matrix durch vergleichsweise steife Füller reduziert, was zu einer makroskopischen Versteifung des Materials führt. Wegen der Oberflächenaktivität der Füllstoffe kommt es sowohl zu Wechselwirkungen zwischen den Füllern untereinander als auch mit der Matrix. Durch die Bindung von Polymerketten an der Füllstoffoberfläche erfolgt eine weitere Verstärkung des Materials. Beide Effekte sind amplitudenunabhängig. Bei einer kritischen Menge des Füllstoffgehalts kommt es jedoch zur Bildung eines durchgehenden Füllstoff-Netzwerks, was einen wesentlich höheren Verstärkungsbeitrag leistet als isolierte Füllstoffpartikel. Wird das Material nun mit einer größeren Amplitude belastet, brechen Teile dieses Netzwerks auseinander, was Umlagerungsprozesse impliziert und zu einer Reduktion der Steifigkeit führt. Dieses Phänomen ist in dem Abfall des Speichermoduls zu beobachten.

Zur Modellierung dieses Effektes existiert eine Vielzahl von Arbeiten. Eines der ersten Modelle wurde von Kraus [81] formuliert. Dieses mikromechanisch motivierte Modell basiert auf der permanenten Reorganisation des Rußnetzwerks während eines Belastungszyklus. Dabei wird eine Zerstörungs- und Rekombinationsrate für die physikalischen Bindungen definiert. Eine detaillierte Beschreibung dieses Modells lässt sich in Vieweg [142] finden. Über mikromechanisch motivierte Materialparameter kann mit diesem Modell der Payne-Effekt gut beschrieben und experimentell verifiziert werden [64, 141]. Allerdings wurde festgestellt, dass der Verlustmodul nicht symmetrisch verläuft [123] weshalb von Ulmer [141] eine Modifikation des Modells vorgeschlagen wurde. Zudem ist die thermodynamische Konsistenz des Modells im Zeitbereich fragwürdig, da unabhängige Ausdrücke für Speicher- und Verlustmodul verwendet werden [92]. Andere mikromechanisch motivierte Modelle stammen auch von Klüppel & Heinrich [76], Huber [71] und Böhm [19].

Auch eine Vielzahl phänomenologischer Modelle mit ratenunabhängigem Materialverhalten existiert zur Beschreibung des Payne-Effektes (z. B. Turner [140], Besdo & Ihlemann [13] und Kaliske & Rothert [73]). Bei einer Beschreibung des Effekts unter Einbeziehung der Ratenabhängigkeit werden häufig strukturabhängige Viskositäten genutzt [1, 82, 90, 92, 93]. Hier wird davon ausgegangen, dass das Materialverhalten von der Belastungsgeschichte abhängt, wie es auch schon bei der zuvor erläuterten Thixotropie der Fall ist. Da zuvor gezeigt wurde, dass „thixotropes“ Verhalten mit dem vorgestellten Materialmodell abbildbar ist, soll im Folgenden untersucht werden, ob sich auch der Payne-Effekt modellieren lässt ohne zusätzliche interne Variablen einführen zu müssen.

## 8.2 Simuliertes Randwertproblem

Zur Simulation des Problems wird auf die Probe der Länge  $l_R$  eine Vorspannung aufgebracht, was eine Verlängerung der Probe um  $u_0$  auf  $l_0$  zur Folge hat. In dieser Position verharrt die Probe bis der korrespondierende Grundelastizitätswert erreicht wird. Anschließend wird eine sinusförmige, zyklische Schwingung  $\Delta u \sin(2\pi ft)$  mit der Anregungsfrequenz  $f$  und der Amplitude  $\Delta u$  überlagert (Abb. 8.2). Alle Größen werden auf die vorverformte Konfiguration bezogen, in der die Länge den Wert  $l_0 = l_R + u_0$  hat. Mit den Definitionen der Vordehnung  $\varepsilon = u_0/l_0$  und der Dehnungsamplitude  $\Delta\varepsilon = \Delta u/l_0$

erhält man nach Division durch  $l_0$  den Ausdruck

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon \sin(2\pi ft). \quad (8.1)$$

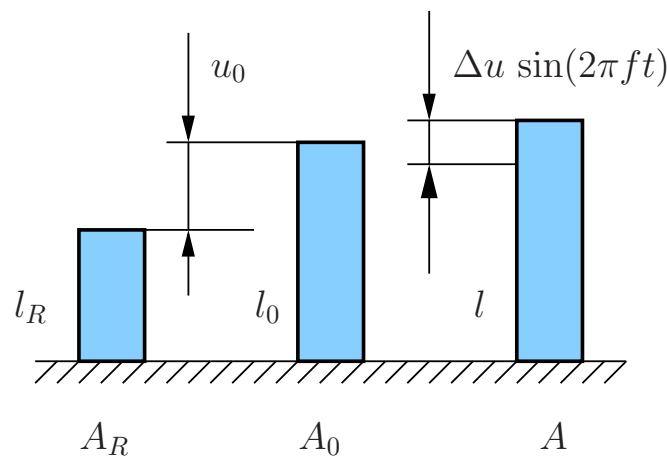


Abbildung 8.2: Dynamischer Versuch mit Vorspannung [92, 94]

Bei kleinen Dehnungsamplituden ist die Kraftantwort vom gleichen Funktionstyp wie die Verschiebung, wobei eine Phasenverschiebung  $\varphi$

$$F(t) = F_0 + \Delta F \sin(2\pi ft + \varphi) \quad (8.2)$$

berücksichtigt werden muss. Mit der statischen Spannung  $\sigma_0 = F_0/A_0$  und nach Verwendung von Additionstheoremen folgt schließlich für die Spannung mit Bezug auf den vordeformierten Querschnitt  $A_0$ :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \frac{F(t)}{A_0} \\ &= \sigma_0 + \Delta\sigma(\cos(\varphi) \sin(2\pi ft) + \sin(\varphi) \cos(2\pi ft)). \end{aligned} \quad (8.3)$$



Definiert man den Speichermodul  $G'$  und den Verlustmodul  $G''$  gemäß

$$G'(f, \Delta\varepsilon, \varepsilon_0) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \cos \varphi, \quad G''(f, \Delta\varepsilon, \varepsilon_0) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \sin \varphi, \quad (8.4)$$

erhält man schließlich für die Spannung

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \Delta\varepsilon(G' \sin(2\pi ft) + G'' \cos(2\pi ft)). \quad (8.5)$$

Da die Phasenverschiebung sehr gering ist, ergibt sich der Speichermodul zu

$$G'(f, \Delta\varepsilon, \varepsilon_0) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (8.6)$$

und der Verlustmodul zu

$$G''(f, \Delta\varepsilon, \varepsilon_0) = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \varphi = G' \varphi \ll G'. \quad (8.7)$$

Da der Verlustmodul für kleine Winkel vernachlässigt werden kann, wird im Folgenden nur der Speichermodul betrachtet. Dieser ist in mit dem erhaltenen Materialmodell für das Moosgummi berechnet worden. In Abb. 8.3 ist der Speichermodul gegenüber der Dehnungsamplituden für unterschiedliche Vordeformationen  $u_0$  dargestellt.

Das Abklingen des Speichermoduls mit steigender Dehnungsamplitude kann mit dem entwickelten Modell qualitativ abgebildet werden. Dies liegt in der Abhängigkeit der Relaxationszeiten von der Deformationsrate  $\mathbf{D}_S$ . Diese Deformationsrate ist ein Maß der Momentankonfiguration und enthält somit Informationen über die aktuelle Länge und damit auch über die unterschiedlichen Deformationen der verschiedenen Amplituden. Zudem ist eine Abhängigkeit des Speichermoduls von der Vordeformation zu erkennen. Diese Abhängigkeit erfolgt entsprechend der Grundelastizität und wurde von Lion [92] und Höfer [65] ausführlich diskutiert. Da die Grundelastizität des Moosgummis eine Linkskrümmung aufweist, wird die Steigung mit steigender Deformation größer. Das erklärt den relativ geringen Unterschied zwischen einer Vordeformation von 30 % und 60 % und dem dann folgenden starken Anstieg des Speichermoduls bei einer Vordeformation von 90 %.

Somit können die Phänomene des Payne-Effektes mit dem erhaltenen Mate-

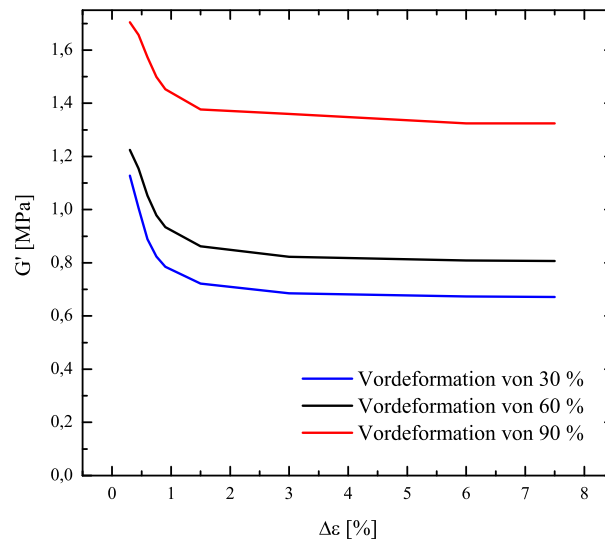


Abbildung 8.3: Speichermodul über Dehnungsamplitude bei verschiedenen Vordeformationen

rialmodell grundsätzlich abgebildet werden, allerdings ist die Anpassung an Versuchsdaten nicht Teil dieser Arbeit.

# 9

---

## Zusammenfassung und Ausblick

---

### 9.1 Darstellung der erzielten Ergebnisse

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war die Entwicklung eines Materialmodells für ein aufgeschäumtes Elastomer.

Auf der experimentellen Seite wurden aus Autotüerdichtungen gestanzte Schulterproben und Zylinderproben aus Meterware verwendet. Neben aufgeschäumten Schulterproben wurden auch solche aus Vollmaterial genutzt.

Mit uniaxialen Zugversuchen an Schulterproben wurde das viskoelastische Verhalten von Moos- und Vollgummi bei Raumtemperatur untersucht. Dabei waren auch Effekte wie der Mullins-Effekt und „Thixotropie“ zu beobachten. Die Zylinderproben aus Moosgummi wurden außerdem für hydrostatische Versuche genutzt. Auch hier konnten viskoelastisches Verhalten, der Mullins-Effekt und „Thixotropie“ festgestellt werden.

Auf der Grundlage dieser experimentellen Ergebnisse wurde ein finites, visko-

elastisches Materialmodell für beide Materialien eingeführt. Die Darstellung der Grundelastizität erfolgte in beiden Fällen über Ansätze höherer Ordnung. Im Hinblick auf das komplizierte viskoelastische Verhalten musste auf nichtlineare Relaxationszeitfunktionen, die von der Deformation und von der Deformationsrate abhängen, zurückgegriffen werden. Das „thixotrope“ Verhalten wurde über sehr lange Relaxationszeiten dargestellt.

Um die Strukturkompressibilität des Moosgummi darzustellen wurde ein volumetrisch-isochorer Split des Deformationsgradienten eingeführt. Der volumetrische Anteil beinhaltet die Verschiebung des Kompressionspunktes zu Werten  $J \neq 0$ . Aufgrund des beobachteten viskoelastischen Verhaltens unter hydrostatischem Druck musste dieser Split mit dem entsprechenden volumetrischen Anteil auch in den Nichtgleichgewichtstermen verwendet werden.

Die Materialparameter der Modelle sind sowohl für das Vollgummi als auch für das Moosgummi durch geeignete Optimierungsverfahren, die auf Evolutionsstrategien basieren, auf der Basis der experimentellen Daten bestimmt worden.

Die Validierung des kalibrierten Materialmodells erfolgte dann im Fall des Moosgummi mit Hilfe uniaxialer Druckversuche. Zudem wurden auch FE-Berechnungen an Verbundbauteilen aus Moos- und Vollgummi durchgeführt und diese mit experimentellen Ergebnissen verglichen.

Auch die Darstellung des Payne-Effekts ist mit dem entwickelten Materialmodell möglich.

Damit ist ein wesentlicher Fortschritt gegenüber dem derzeitigen Stand des Wissens erreicht worden, da zum jetzigen Zeitpunkt kein Materialmodell für ein aufgeschäumtes Elastomer vorhanden ist, welches beliebige mehrachsige Belastungszustände abbildet.

## 9.2 Ausblick auf künftige Arbeiten

Der Fokus des in dieser Arbeit vorgestellten Projektes liegt nun auf der Untersuchung des Einflusses der Temperatur. Hier steht vor allem das viskoelastische Verhalten im Vordergrund. Dieses Verhalten soll in Zug- und in hydrostatischen Druckversuchen in einem Temperaturbereich von  $-40^\circ\text{C}$  bis  $80^\circ\text{C}$  untersucht werden. Für die Theorie bedeutet dies, dass die vorliegenden Modelle mit der Temperatur gekoppelt werden müssen.

---

Wegen des speziellen thermomechanischen Verhaltens von Elastomeren ist dies von besonderer Bedeutung. Das viskoelastische Verhalten, insbesondere die Relaxationszeiten, ändert sich stark bei Temperaturänderungen. Da das untersuchte Material auch häufig in der Automobilindustrie genutzt wird und es hier unterschiedlichen Temperaturen ausgesetzt ist, muss dieses Verhalten genaustens untersucht werden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist den Payne-Effekt näher zu untersuchen. Das erhaltene Modell kann den Payne-Effekt qualitativ abbilden, im Weiteren müssen nun Experimente durchgeführt und eventuell das Modell daran angepasst werden um den Effekt auch quantitativ darstellen zu können

Außerdem ist auch die genaue Untersuchung des Mullins-Effekts, der bisher wegen einer geeigneten Vorkonditionierung vernachlässigt werden konnte, sowie die Implementierung dieses Effekts in das Materialmodell von besonderer Bedeutung.



---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] ACIERNO, D., F. P. L. MANITA, G. MARRUCCI & G. TITOMANLIO [1976]. ‘A non-linear viscoelastic model with structure-dependent relaxation times.’ *J. Non-Newton Fluid*, **1**, pp. 125–146.
- [2] AŞKAR, A. [1986]. *Lattice dynamical foundations of continuum theories*. World Scientific Publication, Singapore.
- [3] ALTENBACH, J. & H. ALTENBACH [1994]. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- [4] ALTS, T. [1979]. ‘On the energy-elasticity of rubber-like materials.’ *Prog. Coll. Pol. Sci. S.*, **66**, pp. 367–375.
- [5] AMIN, A., A. LION, S. SEKITA & Y. OKUI [2006]. ‘Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification.’ *Int. J. Plast.*, **22**, pp. 1610–1657.
- [6] BARNES, H. [1997]. ‘Thixotropy - a review.’ *J. Non-Newton Fluid*, **70**, pp. 1–33.
- [7] BARTHOLD, F.-J. [2002]. *Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrieprobleme*. Habilitation, Mechanik-Zentrum, Braunschweiger Schriften zur Mechanik 44, TU Braunschweig.
- [8] BEATTY, M. F. [1989]. ‘Gent-Thomas and Blatz-Ko models for foamed elastomers.’ *Department of Engineering Mechanics, University of Kentucky*, pp. 75–78.

- [9] BECKER, M. & W. HAUGER [1982]. ‘Granular material – Experimental realization of a plastic Cosserat continuum?’ In *Mechanics of Inelastic Media and Structure*, edited by O. Mahrenholtz & A. Sawczuk, pp. 23–39. Warszawa – Poznań.
- [10] BERGSTRÖM, J. S. & M. C. BOYCE [1998]. ‘Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **46**, pp. 931–954.
- [11] BESDO, D. [2003]. ‘A phenomenological constitutive model for rubberlike materials and its numerical applications.’ *Int. J. Plast.*, **19**, pp. 1019–1036.
- [12] BESDO, D. [2003]. ‘Properties of rubberlike materials under large deformations explained by self-organizing linkage patterns.’ *Int. J. Plast.*, **19**, pp. 1001–1018.
- [13] BESDO, D. & J. IHLEMANN [1996]. ‘Zur Modellierung des Stoffverhaltens von Elastomeren.’ *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, **49**, pp. 495–503.
- [14] BLATZ, P. & W. KO [1962]. ‘Application of finite elastic theory to deformation of rubbery materials.’ *Trans. Soc. Rheology*, **6**, pp. 223–251.
- [15] BOEHLER, J. P. [1987]. *Representations for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions*, pp. 31–53. Springer Verlag, Wien.
- [16] DE BOER, R. [1993]. ‘Thermodynamics of phase transitions in porous media.’ *Appl. Mech. Rev.*, **46**, pp. 1–48.
- [17] DE BOER, R. [2000]. *Theory of Porous Media*. Springer-Verlag, Berlin.
- [18] DE BOER, R. & W. EHLERS [1986]. ‘Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme.’ In *Forschungsberichte aus dem Fachbereich Bauwesen*, volume 40. Universität-GH-Essen.
- [19] BÖHM, J. [2001]. *Der Payneeffekt: Interpretation und Anwendung in einem neuen Materialgesetz für Elastomere*. Dissertation.
- [20] BOWEN, R. M. [1976]. ‘Theory of mixture.’ *Continuum Physics*, **III**, pp. 1–127.



- [21] BOWEN, R. M. [1980]. ‘Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures.’ *Int. J. Engng. Sci.*, **18**, pp. 1129–1148.
- [22] BOWEN, R. M. [1982]. ‘Compressible porous media models by use of the theory of mixtures.’ *Int. J. Engng. Sci.*, **20**, pp. 697–735.
- [23] BOYCE, M. R. & E. M. ARRUDA [2000]. ‘Constitutive models for rubber elasticity: A review.’ *Rubber Chem. Technol.*, **73**, pp. 504–523.
- [24] BUECHE, F. [1961]. ‘Mullins effect and rubber-filler interaction.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **5**, pp. 271–281.
- [25] CHACKO, S. R. & S. M. SIVAKUMAR [1999]. ‘A procedure for correction of creep in foam rubber optical pressure measurement techniques.’ *Exp. Mech.*, **39(2)**, pp. 125–131.
- [26] CHADWICK, P. [1974]. ‘Thermo-mechanics of rubberlike materials.’ *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond A*, **276**, pp. 371–403.
- [27] COLEMAN, B. D. & M. E. GURTIN [1967]. ‘Thermodynamics with internal variables.’ *J. Chem. Phys.*, **47**, pp. 597–613.
- [28] COLEMAN, B. D. & W. NOLL [1963]. ‘The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.’ *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **13**, pp. 167–178.
- [29] DANNENBERG, E. M. [1975]. ‘The effects of surface chemical interactions on the properties of filler-reinforced rubbers.’ *Rubber Chem. Technol.*, **48**, pp. 410–444.
- [30] DICK, J. S. & R. A. ANNICELLI [1999]. ‘Variation der Vernetzungs- und Treibreaktion für die Steuerung von Zellendichte und -struktur von zelligen Vulkanisaten.’ *GAK*, **52(4)**, pp. 297–308.
- [31] DIEBELS, S. [1999]. ‘A micropolar theory of porous media: Constitutive modelling.’ *Transport Porous Med.*, **34**, pp. 193–208.
- [32] DIEBELS, S. [2000]. *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Modellierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*. Habilitationsschrift, Institut für Mechanik (Bauwesen), Nr. II-4, Universität Stuttgart.
- [33] DIEBELS, S. & H. STEEB [2002]. ‘The size effect in foams and its theoretical and numerical investigation.’ *Proc. R. Soc. Lond. A*, **458**, pp. 2869–2883.

- [34] DIEHL, T. & R. C. BENSON [1995]. ‘Modeling foamed elastomeric tires with Ogden-Hill strain-energy functions.’ *AMD*, **213**, pp. 79–93.
- [35] DUTTA, N. K. & D. K. TRIPATHY [1992]. ‘Effects of types of fillers on the molecular relaxation characteristics, dynamic mechanical, and physical properties of rubber vulcanizates.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **44**, pp. 1635–1648.
- [36] EHLERS, W. [1993]. ‘Constitutive equations for granular materials in geomechanical context.’ In *Continuum mechanics in environmental sciences*, edited by K. Hutter, volume 337 of *CISM International Centre for Mechanical Sciences*, pp. 313–402. Springer-Verlag, Berlin.
- [37] EHLERS, W. [1996]. ‘Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien.’ *Technische Mechanik*, **16**, pp. 63–76.
- [38] EHLERS, W. [2002]. ‘Foundations of multiphase and porous materials.’ In *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*, edited by W. Ehlers & J. Bluhm, pp. 3–86. Springer-Verlag, Berlin.
- [39] EHLERS, W. & G. EIPPER [1999]. ‘Finite elastic deformations in liquid-saturated and empty porous solids.’ *Transport Porous Med.*, **34**, pp. 179–191.
- [40] EHLERS, W. & J. KUBIK [1993]. ‘On finite dynamic equations for fluid-saturated porous media.’ *Acta Mech.*, **105**, pp. 101–117.
- [41] EHLERS, W. & B. MARKERT [2003]. ‘A macroscopic finite strain model for cellular rubber.’ *Int. J. Plast.*, **19**, pp. 961–976.
- [42] EIPPER, G. [1998]. *Theorie und Numerik finiter elastischer Deformationen in fluidgesättigten porösen Festkörpern*. Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- [43] FERRY, J. D. [1980]. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons.
- [44] FUCHS, E. & K. S. REINARTZ [2001]. ‘Optimierung der Herstellung von Moosgummi.’ *GAK*, **54(4)**, pp. 245–251.
- [45] GENT, A. & A. THOMAS [1959]. ‘The deformation of foamed elastic materials.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **1**, pp. 107–113.
- [46] GIBSON, L. J. & M. F. ASHBY [1997]. *Cellular solids. Structure and properties*. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge University Press, Cambridge.

- [47] GÖKTEPE, S. & C. MIEHE [2005]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic Mullins-type damage.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **53**, pp. 2259–2283.
- [48] GÖRKE, U. J., H. GÜNTHER & A. SCHÖPFEL [1995]. ‘Auswahl von Materialgesetzen und Parameteridentifikation für nichtlinear-elastische Werkstoffe.’ *Mat.-wiss. u. Werkstofftech.*, **26**, pp. 459–467.
- [49] HABERSTROH, E. & A. KREMERS [2002]. ‘Modellierung der Vernetzung von EPDM-Moosgummiprofilen.’ *GAK*, **9(55)**, pp. 588–593.
- [50] HABERSTROH, E. & A. KREMERS [2004]. ‘Expansion chemisch geschäumten Kautschukmischungen.’ *Kaut. Gummi Kunstst.*, **3(57)**, pp. 105–108.
- [51] HABERSTROH, E., A. KREMERS & K. EPPING [2005]. ‘Extrusion von physikalisch geschäumten Kautschukprofilen.’ *Kaut. Gummi Kunstst.*, **9(58)**, pp. 449–454.
- [52] HARTMANN, S. [2001]. ‘Numerical studies of the identification of the material parameters of Rivlin’s hyperelasticity using tension-torsion test.’ *Acta Mech.*, **148**, pp. 129–155.
- [53] HARTMANN, S. [2001]. ‘Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions.’ *Int. J. Solids Structures*, **38**, pp. 7999–8018.
- [54] HARTMANN, S. [2006]. ‘A thermomechanically consistent constitutive model for polyoxymethylene.’ *Arch. Appl. Mech.*, **76**, pp. 349–366.
- [55] HARTMANN, S. [2010]. ‘The class of simo & pister-type hyperelasticity relations.’ *Technical report series, TU Clausthal*.
- [56] HARTMANN, S., J. GIBMEIER & B. SCHOLTES [2006]. ‘Experiments and material parameter identification using finite elements. Uniaxial tests and validation using instrumented indentation tests.’ *Experimental Mechanics*, **46**, pp. 5–18.
- [57] HARTMANN, S. & P. NEFF [2003]. ‘Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility.’ *Int. J. Solids Structures*, **40**, pp. 2767–2791.
- [58] HARTMANN, S., T. TSCHÖPE, L. SCHREIBER & P. HAUPT [2003]. ‘Finite deformations of a carbon black-filled rubber. Experiment, optical measurement and material parameter identification using finite elements.’ *Eur. J. Mech. A/Solids*, **22**, pp. 309–324.

- [59] HAUPT, P. [2000]. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, Berlin.
- [60] HAUPT, P. [2000]. ‘On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: constitutive modelling and identification of parameters.’ *Int. J. Solids Structures*, **37**, pp. 3633–3646.
- [61] HAUPT, P. & A. LION [2001]. ‘A generalisation of the Mooney-Rivlin model to finite linear viscoelasticity.’ In *Constitutive Models for Rubber*, edited by D. Besdo, R. H. Schuster & J. Ihlemann, pp. 57–64. Swets & Zeitlinger, London.
- [62] HAUPT, P. & A. LION [2002]. ‘On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials.’ *Acta Mech.*, **159**, pp. 87–124.
- [63] HAUPT, P. & C. TSAKMAKIS [1989]. ‘On the application of dual variables in continuum mechanics.’ *Continuum Mech. Therm.*, **1**, pp. 165–196.
- [64] HEINRICH, G., G. HELMIS & T. A. VILGIS [1995]. ‘Polymere Netzwerke - Entwicklungsstand der molekular-statistischen Theorie.’ *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, **48**, pp. 689–702.
- [65] HÖFER, P. & A. LION [2009]. ‘Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **57**, pp. 500–520.
- [66] HOHE, J. [2003]. *Elastizitätsverhalten von Sandwich-Zellkernen und zweidimensionalen Modellschäumen*. Habilitation, Berichte aus der Mechanik, Universität Siegen.
- [67] HOHE, J. & W. BECKER [2001]. ‘An energetic homogenisation procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores.’ *Composites: Part B*, **32**, pp. 185–197.
- [68] HOHE, J. & W. BECKER [2002]. ‘Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores: Homogenization, material models and properties.’ *Appl. Mech. Rev.*, **55**(1), pp. 61–87.
- [69] HOHE, J. & W. BECKER [2003]. ‘Geometrically nonlinear stress-strain behavior of hyperelastic solid foams.’ *Comp. Mat. Science*, **28**, pp. 443–453.
- [70] HOLZAPFEL, G. A. [2000]. *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester.

- [71] HUBER, G., T. A. VILGIS & G. HEINRICH [1996]. ‘Universal properties in the dynamical deformation of filled rubbers.’ *J. Phys.: Condens. Matter*, **8**, pp. L409–L412.
- [72] IHLEMANN, J. [2002]. *Kontinuumsmechanische Nachbildung hochbelasteter technischer Gummiwerkstoffe*. Dissertation, Universität Hannover.
- [73] KALISKE, M. & H. ROTHERT [1998]. ‘Constitutive approach to rate-independent properties of filled elastomers.’ *Int. J. Solids Structures*, **17**, pp. 2057–2071.
- [74] KECK, J. [1998]. *Zur Beschreibung finiter Deformation von Polymeren, Experimente, Modellbildung, Parameteridentifikation und Finite-Elemente-Formulierung*. Dissertation, Bericht-Nr. I-5 des Instituts für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Universität Stuttgart.
- [75] KINNEY, J. H., G. W. MARSHALL, S. J. MARSHALL & D. L. HAUPT [2001]. ‘Three-dimensional imaging of large compressive deformations in elastomeric foams.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **80**, pp. 1746–1755.
- [76] KLÜPPEL, M. & G. HEINRICH [1995]. ‘Fractal structures in carbon black reinforced rubbers.’ *Rubber Chem. Technol.*, **68**, pp. 623–651.
- [77] KOPROWSKI, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2009]. ‘Experimental and theoretical investigations of the viscoelastic behaviour of cellular rubber.’ *Proceedings of the sixth european conference on constitutive models for rubber*, **6**, pp. 71–76.
- [78] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2010]. ‘Experiments and theoretical modelling of a carbon black filled solid rubber.’ *Rubber Chem. Technol.*.. accepted.
- [79] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2010]. ‘Modelling of a cellular rubber with nonlinear viscosity functions.’ *Experimental Mechanics*. published online.
- [80] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2010]. ‘Pressure dependent properties of a compressible polymer.’ *Experimental Mechanics*. published online.
- [81] KRAUS, G. [1984]. ‘Mechanical losses in carbon-black-filled rubbers.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **39**, pp. 75–92.

- [82] KRAWIETZ, A. [1986]. *Materialtheorie: Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens*. Springer-Verlag.
- [83] KRÖNER, E. [1960]. ‘Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.’ *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4**, pp. 273–334.
- [84] LAIARINANDRASANA, L., R. PIQUES & A. ROBISSON [2003]. ‘Experimental microelasticity of two porous solids.’ *Int. J. Plast.*, **19**, pp. 977–1000.
- [85] LEE, E. H. [1969]. ‘Elastic-plastic deformation at finite strain.’ *J. Appl. Mech.*, **36**, pp. 1–6.
- [86] LEE, E. H. & D. T. LIU [1967]. ‘Finite-strain elastic-plastic theory with application to plane-wave analysis.’ *J. Appl. Phys.*, **38(1)**, pp. 19–27.
- [87] LION, A. [1996]. ‘A constitutive model for carbon black filled rubber, experimental results and mathematical representation.’ *Continuum Mech. Thermodyn.*, **8**, pp. 153–169.
- [88] LION, A. [1997]. ‘On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **45**, pp. 1805–1834.
- [89] LION, A. [1997]. ‘A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers.’ *Acta Mech.*, **123**, pp. 1–25.
- [90] LION, A. [1998]. ‘Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: Experiments and theory.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **46**, pp. 895–930.
- [91] LION, A. [1999]. ‘Strain-dependent dynamic properties of filled rubber: A non-linear viscoelastic approach based on structural variables.’ *Rubber Chemistry and Technology*, **72(2)**, pp. 410–429.
- [92] LION, A. [2000]. *Thermomechanik von Elastomeren*. Habilitationsschrift des Instituts für Mechanik der Universität Kassel (Bericht 1/2000). ISBN 3-89792-023-9.
- [93] LION, A. [2004]. ‘Phenomenological modelling of the material behaviour of carbon black-filled rubber in continuum mechanic.’ *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, **57**, pp. 184–190.

- [94] LION, A. [2006]. ‘Dynamische Modellierung von elastomeren Bauteilen.’ In *Geräusch- und Schwingungskomfort von Kraftfahrzeugen, Halifax*. Haus der Technik, Essen.
- [95] LION, A. [2008]. ‘Constitutive modeling of the dynamic properties of elastomers.’ pp. 9–19.
- [96] LION, A. & C. KARDELKY [2004]. ‘The Payne effect in finite viscoelasticity: Constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales.’ *Int. J. Plast.*, **20**, pp. 1313–1345.
- [97] LION, A., C. KARDELKY & P. HAUPT [2003]. ‘On the frequency and amplitude dependence of the payne effect: Theory and experiments.’ *Rubber Chemistry and Technology*, **76**, pp. 533–547.
- [98] LULEI, F. [2002]. *Mikromechanisch motivierte Modelle zur Beschreibung finiter Deformationen gummiartiger Polymere, physikalische Modellbildung und numerische Simulation*. Dissertation, Bericht Nr. I-09 des Instituts für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl I, Universität Stuttgart.
- [99] MAHNKEN, R. [1998]. *Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen*. Habilitation, Institut für Baumechanik und Numerische Methoden F98/2, Universität Hannover.
- [100] MAHNKOPF, D. [2000]. *Lokalisierung fluidgesättigter poröser Festkörper bei finiten elastoplastischen Deformationen*. Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- [101] MARKERT, B. [2005]. *Porous media viscoelasticity with application to polymeric foams*. Dissertation, Bericht-Nr. II-12(2005) Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- [102] MEGURIYA, N., S. SEKIGUCHI & N. TOMIZAWA [2004]. ‘Siliconkautschuk-Moosgummi mit offenen Zellen.’ *GAK*, **2(57)**, pp. 113–117.
- [103] MIEHE, C. [1988]. *Zur numerischen Behandlung thermomechanischer Prozesse*. Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. F88/6.
- [104] MIEHE, C. & S. GÖKTEPE [2005]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part II: The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **53**, pp. 2231–2258.

- [105] MIEHE, C., S. GÖKTEPE & F. LULEI [2004]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part I: The non-affine micro-sphere model of rubber elasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **52**, pp. 2617–2660.
- [106] MIEHE, C. & J. KECK [2000]. ‘Superimposed finite elastic-viscoelastic-plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, pp. 323–365.
- [107] MOREAU, C., S. THUILLIER, G. RIO & V. GROLLEAU [1998]. ‘The mechanical behavior of a slightly compressible rubber-like material: Correlation of simulations and experiments.’ *Rubber Chem. Technol.*, **72**, pp. 269–282.
- [108] MOW, V. C., S. C. KUEI, W. M. LAI & C. G. ARMSTRONG [1980]. ‘Biphasic creep and stress relaxation of articular cartilage in compression: Theory and experiments.’ *J. Biomech. Eng.*, **102**, pp. 73–84.
- [109] MULLINS, L. [1948]. ‘Effect of stretching on the properties of rubber.’ *Rubber Chem. Technol.*, **21**, pp. 281–300.
- [110] MULLINS, L. & N. R. TOBIN [1965]. ‘Stress softening in rubber vulcanizates Part I: Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **9**, pp. 2993–3009.
- [111] NIEDERMEIER, W., J. FRÖHLICH & H. D. LUGINSLAND [2002]. ‘Reinforcement mechanism in the rubber matrix by active fillers.’ *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, **55**, pp. 356–366.
- [112] PAYNE, A. R. [1960]. ‘A note on the existence of a yield point in the dynamic modulus of loaded vulcanizates.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **3**, pp. 127.
- [113] PAYNE, A. R. [1962]. ‘The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **6**, pp. 57–63.
- [114] PAYNE, A. R. [1974]. ‘Hysteresis in rubber vulcanizates.’ *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.*, **48**, pp. 169–196.
- [115] RECHENBERG, I. [1973]. ‘Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution.’ *Frommann-Holzboog, Stuttgart*.
- [116] RECHENBERG, I. [1994]. *Evolutionsstrategie '94*. Frommann-Holzboog.



- [117] REESE, S. [2001]. *Thermomechanische Modellierung gummiartiger Polymerstrukturen*. Habilitation, Bericht-Nr. F01/4 des Instituts für Bau-  
mechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [118] REESE, S. & S. GOVINDJEE [1998]. ‘Theoretical and numerical aspects  
in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers.’  
*Mechanics of Time-Dependent Materials*, **1**, pp. 357–396.
- [119] REESE, S. & S. GOVINDJEE [1998]. ‘A theory of finite viscoelasticity  
and numerical aspects.’ *Int. J. Solids Structures*, **35**, pp. 3455–3482.
- [120] REESE, S. & P. WRIGGERS [1997]. ‘A material model for rubber-like  
polymers exhibiting plastic deformation, computational aspects and a  
comparison with experimental results.’ *Comput. Methods Appl. Mech.  
Engrg.*, **148**, pp. 279–298.
- [121] REESE, S. & P. WRIGGERS [1999]. ‘Modelling of the thermo-  
mechanical material behaviour of rubber-like polymers – micromechanical  
motivation and numerical simulation.’ *In Constitutive Models for  
Rubber, edited by Dorfmann & Muhr*, pp. 13–21.
- [122] RIVLIN, R. S. [1948]. ‘Large elastic deformation of isotropic materials  
IV:Further developments of the general theory.’ *Phil. Trans. Roy. Soc.  
Lond A*, **A241**, pp. 379–397.
- [123] ROLAND, C. M. [1990]. ‘Dynamic mechanical behaviour of filled rub-  
ber at small strains.’ *Journal of Rheology*, **34**, pp. 25–34.
- [124] SCHEDAY, G. [2003]. *Theorie und Numerik der Parameteridentifikation  
von Materialmodellen der finiten Elastizität und Inelastizität auf  
der Grundlage optischer Feldmessmethoden*. Dissertation, Bericht-Nr.  
I-11 des Instituts für Mechanik, Lehrstuhl I, Universität Stuttgart.
- [125] SCHWEFEL, H. P. [1995]. ‘Evolution and optimum seeking.’ *John  
Wiley & Sons, New York*.
- [126] SEDLAN, K. [2001]. *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomer-  
werkstoffen, Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Disserta-  
tion, Berichte des Instituts für Mechanik (2/2001), Universität Ge-  
samthochschule Kassel.
- [127] SEIBERT, H. [2010]. ‘Echtzeitfähige Regelung eines hydrostatischen  
Druckversuchs zur Untersuchung des Kompressionsverhaltens poröser  
Elastomere.’ *Diplomarbeit*.

- [128] SEIBERT, H. [2010]. ‘Konstruktion und Steuerung einer Triaxialzelle zur Untersuchung des Kompressionsverhaltens gefüllter Elastomere.’ *Studienarbeit*.
- [129] SHEN, Y., F. GOLNARAGHI & A. PLUMTREE [2001]. ‘Modelling compressive cyclic stress-strain behaviour of structural foam.’ *Int. J. Fatigue*, **23**, pp. 491–497.
- [130] SIDOROFF, F. [1974]. ‘Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire.’ *Journal de Mécanique*, **13**, pp. 679–713.
- [131] SMITH, G. F. [1971]. ‘On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors, and vectors.’ *Int. J. Engng. Sci.*, **9**, pp. 899–916.
- [132] SOMBATSOMPOP, N. [1998]. ‘Effects of crosslink characteristics on density and swelling behaviour of expanded natural rubber vulcanisates.’ *Cellular polymers*, **17**, pp. 63–74.
- [133] TRELOAR, L. R. G. [1943]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. I.’ *T. Faraday Soc.*, **39**, pp. 36–41.
- [134] TRELOAR, L. R. G. [1943]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. II.’ *T. Faraday Soc.*, **39**, pp. 241–246.
- [135] TRELOAR, L. R. G. [1946]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. III.’ *T. Faraday Soc.*, **42**, pp. 83–94.
- [136] TRELOAR, L. R. G. [1954]. ‘The photoelastic properties of short-chain molecular networks.’ *T. Faraday Soc.*, **50**, pp. 881–896.
- [137] TRUESDELL, C. [1957]. ‘Sulle basi della termomeccanica.’ *Rend. Lincei*, **22**, pp. 33–38.
- [138] TRUESDELL, C. [1984]. ‘Thermodynamics of diffusion.’ In *Rational Thermodynamics, Second Edition*, edited by C. Truesdell. Springer-Verlag, New York.
- [139] TRUESDELL, C. & R. A. TOUPIN [1960]. ‘The classical field theories.’ In *Handbuch der Physik Band III/1*, edited by S. Flügge. Springer-Verlag, Berlin.
- [140] TURNER, D. M. [1988]. ‘A triboelastic model for the mechanical behaviour of rubber.’ *Plastic and Rubber Processing and Applications*, **9**, pp. 197–201.

- [141] ULMER, J. D. [1996]. ‘Strain dependence of dynamic mechanical properties of carbon black-filled rubber compounds.’ *Rubber Chem. Technol.*, **69**, pp. 15–47.
- [142] VIEWEG, S., R. UNGER, E. DONTN & G. HEINRICH [1999]. ‘Comparison of dynamic shear properties of styrene-butadiene vulcanizates filled with carbon black or polymeric fillers.’ *J. Appl. Polymer Sci.*, **73**, pp. 495–503.
- [143] VIEWEG, S., R. UNGER, K. SCHROETER, E. DONTN & G. HEINRICH [1995]. ‘Frequency and temperature dependence of the small-strain behavior of carbon-black filled vulcanizates.’ *Polymer networks & blends*, **5**, pp. 199–204.
- [144] VROOMEN, G., G. CHOONOO, T. ODENHAMN & M. HATTA [2004]. ‘EPDM-Moosgummi für die Tür- und Fensterdichtungen von Kraftfahrzeugen.’ *GAK*, **3(57)**, pp. 163–176.
- [145] WANG, C.-C. [1970]. ‘A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor G. F. Smith criticism of my paper on representation for isotropic functions. Part I. Scalar-valued isotropic functions.’ *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **36**, pp. 166–197.
- [146] WANG, C.-C. [1970]. ‘A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor G. F. Smith criticism of my paper on representation for isotropic functions. Part II. Vector-valued isotropic functions, symmetric tensor-valued functions, and skew-symmetric tensor-valued functions.’ *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **36**, pp. 198–223.
- [147] YEOH, O. H. & P. D. FLEMMING [1997]. ‘A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity.’ *J. Polym. Sci. Part B: Polym. Phys.*, **35**, pp. 1919–1931.