

Beitrag zur mikromechanischen Berechnung kurzfaserverstärkter Kunststoffe - Deformation und Versagen

Dissertation

zur Erlangung des Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät III

Chemie, Pharmazie, Bio- und Werkstoffwissenschaften

der Universität des Saarlandes

von

Jan-Martin Kaiser

Saarbrücken

2013

Tag des Kolloquiums:

23.08.2013

Dekan:

Prof. Dr. Volkhard Helms

Berichterstatter:

Prof. Dr.-Ing. Markus Stommel

Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels

Vorsitz:

Prof. Dr.-Ing. Dirk Bähre

Akad. Mitarbeiter:

Dr.-Ing. Michael Marx

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Polymerwerkstoffe (LPW) an der Universität des Saarlandes in den Jahren 2008 bis 2012.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Markus Stommel gilt mein besonderer Dank. Er gewährte mir den notwendigen Forschungsfreiraum zur Umsetzung der vorliegenden Arbeit und stand mir stets unterstützend in zahlreichen, konstruktiven Gesprächen zur Seite. Herrn Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels danke ich ausdrücklich für die Übernahme des Korreferats. Des Weiteren möchte ich meinen Dank der Robert Bosch GmbH für die Bereitstellung der Versuchsdaten zum Bosch-Probekörper aussprechen.

Allen Mitarbeitern am LPW möchte ich für die gute Zusammenarbeit und die vielfältige, kollegiale Unterstützung danken. Auch den Studien-, Diplom-, Master- und Bachelorarbeitern in meiner Arbeitsgruppe sowie den studentischen Hilfskräften möchte ich besonders danken. Ohne sie wäre die Arbeit in der vorliegenden Form nicht möglich gewesen.

Ich danke meiner Lebensgefährtin Frau Myriam Wendel, die mir stets Mut zusprach, mich in meiner Arbeit bestärkte und mir stets mit Rat zur Seite stand.

Auch möchte ich mich bei meinen Freunden bedanken, die stets für die erforderliche Abwechslung und Ablenkung von der Arbeit sorgten, sowie nicht zuletzt meinen Eltern, die in jeglicher Hinsicht die Grundsteine für meinen Weg legten.

Kurzzusammenfassung

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) hat sich in den letzten Jahren als Werkzeug für die Auslegung von Konstruktionsbauteilen, ebenso wie kurzfaserverstärkte thermoplastische Kunststoffe als Konstruktionswerkstoff, fest etabliert. Im Gegensatz zum weitverbreiteten Einsatz der FEM als Werkzeug, sowie der kurzfaserverstärkten Kunststoffe als Werkstoff, sind Methoden zur effizienten Berechnung der Deformation und des Versagens dieser Verbundwerkstoffe mittels FEM nicht ausreichend entwickelt.

Im Rahmen der Arbeit wird dieser Gegensatz aufgegriffen. Es wird zunächst die prozessbedingt sich einstellende Mikrostruktur analysiert und Methoden zur analytischen Beschreibung vorgestellt. Darauf aufbauend erfolgt die Entwicklung von zwei Ansätzen zur elastisch-plastischen Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe unter expliziter Berücksichtigung der vorliegenden Mikrostruktur. Neben der Berechnung des Deformationsverhaltens steht auch das Versagensverhalten im Fokus der Arbeit. Hierzu werden, aufbauend auf die Modellierungsansätze, zwei unterschiedliche Dimensionierungsstrategien entwickelt und exemplarisch angewendet.

Die Arbeit steht im Gesamtkontext einer effizienten und verlässlichen, computergestützten Berechnung von kurzfaserverstärkten, thermoplastischen Kunststoffen. Vor diesem Hintergrund wird der Aufwand zur Kalibrierung und Umsetzung der ausgewählten Modelle und Strategien in einem entsprechenden Bewertungsschema abschließend analysiert und ausgewertet.

Abstract

In recent years the Finite-Element-Method (FEM) has been established as a common tool for the dimensioning of structural parts. Also, short fiber reinforced thermoplastics have been established as structural materials. However, the development of methods for the efficient computation of the deformation and failure behavior of these composite materials is insufficient and in conflict to the common use of short fiber reinforced thermoplastics as a structural material and of FEM as an engineering tool.

In the presented contribution this contrast is in focus of the considerations. The process-related microstructure is analyzed and existing methods for the analytical description are presented. Based on this, two approaches for the elastic-plastic modeling of short fiber reinforced thermoplastics are developed by explicitly taking into account the existing microstructure. Besides the computation of deformation behavior, the computation of failure is of special interest. Therefore, two different dimensioning strategies are presented and are exemplarily applied to structural parts.

The contribution is seen in the context of developing an efficient and reliable, computational method for the simulation of short fiber reinforced thermoplastics. Against this background the developed models and strategies are evaluated by taking into account the effort for calibration and application and the results are summarized in an evaluation scheme.

Inhalt

1	Einleitung	4
2	Mikromechanische Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe	6
2.1	Mikrostruktur spritzgegossener, kurzfaserverstärkter Kunststoffe.....	6
2.2	Faserorientierungs- und Faserlängenverteilung	8
2.2.1	Analytische Beschreibung.....	8
2.2.2	Experimentelle Ermittlung	12
2.3	Effektive-Feld-Theorie.....	13
2.3.1	Reuss- und Voigt-Modell	15
2.3.2	Mori-Tanaka-Modell	16
2.3.3	Klassisch selbstkonsistentes Modell	18
2.3.4	Zweistufige Homogenisierung	19
2.4	Repräsentative Mikrostrukturmodelle	25
2.5	Elastisch-plastische Modellierungsansätze	27
2.5.1	Grundlagen der elastisch-plastischen Modellierung	27
2.5.2	Von Mises-Plastizitätsmodell.....	30
2.5.3	Drucker-Prager-Plastizitätsmodell	32
2.5.4	SAMP-Plastizitätsmodell	33
2.6	Elastisch-plastische Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe.....	35
2.6.1	Isotropierungskonzepte	36
2.6.2	Momentenformulierung erster und zweiter Ordnung.....	40
2.6.3	Inkrementelle Formulierung der zweistufigen Homogenisierung	42
2.7	Dimensionierungskriterien.....	45
2.7.1	Lineare Kriterien	48
2.7.2	Quadratische Kriterien	50
2.7.3	Auswahl.....	52

2.8	Zusammenfassung	53
3	Erweiterung des mikromechanischen Modellierungsansatzes	55
3.1	Integration von Dimensionierungskriterien	55
3.1.1	Mikro-Verbund-Ebene	55
3.1.2	Makro-Verbund-Ebene.....	56
3.2	Erweiterung des elastisch-plastischen Modellierungsansatzes	58
3.2.1	Modifizierte Isotropierung	58
3.2.2	Modifizierte Momentenformulierung zweiter Ordnung	59
3.2.3	Integration der Drucker-Prager-Plastizität	60
3.2.4	Integration der SAMP-Plastizität	62
3.3	Zusammenfassung der Erweiterungen	66
4	Experimentelle Untersuchungen	67
4.1	Eingesetzte Prüfkörper	67
4.1.1	Zug- und Schubprüfkörper	68
4.1.2	Rohrprüfkörper	69
4.1.3	Beispielbauteile	71
4.2	Ermittlung mechanischer Kennwerte	74
4.2.1	Ergebnisse der Zug- und Schubversuche	76
4.2.2	Ergebnisse der Rohrprüfkörperversuche	79
4.2.3	Ergebnisse der Beispielbauteilversuche	80
4.3	Ermittlung struktureller Kennwerte	83
4.3.1	Ergebnisse der μ CT-Messungen	83
4.3.2	Ergebnisse der Schliffbilderstellung	88
4.4	Zusammenfassung und Bewertung der experimentellen Ergebnisse	90
5	Finite-Elemente-Simulationen	93
5.1	Bewertung der elastisch-plastischen Modellierungsansätze	94

5.2	Virtuelle Absicherung der erweiterten, zweistufigen Homogenisierung	96
5.3	Virtuelle Ermittlung experimentell unzugänglicher Daten.....	105
5.4	Simulationsergebnisse für PBT-GF und PP-GF	107
5.4.1	Modellkalibrierung.....	108
5.4.2	Prüfkörperversuche	112
5.4.3	Bauteilversuche	117
5.5	Zusammenfassung und Bewertung der Simulationsergebnisse.....	124
6	Zusammenfassung und Ausblick	128
7	Symbole und Abkürzungen	132
8	Literaturverzeichnis	134

1 Einleitung

Der vorteilhafte, industrielle Einsatz von thermoplastischen Kunststoffen ist begründet durch eine hohe Flexibilität in der Formgebung und die Möglichkeit der Großserienfertigung mittels des Spritzgussprozesses. Zudem zeichnen sich thermoplastische Kunststoffe durch eine geringe Dichte aus, was sich wiederum positiv auf das Bauteilgewicht auswirkt. Im Gegensatz hierzu stehen die geringe Steifigkeit und Festigkeit, die den Einsatz der Thermoplaste als Konstruktionswerkstoff beschränken. Erst durch die Kombination von thermoplastischen Kunststoffen als Matrixwerkstoff mit Kurzglasfasern als Verstärkungswerkstoff in einem Verbund ändert sich dieser Sachverhalt. So lassen sich der Elastizitätsmodul als Indikator der Steifigkeit und die Festigkeit durch die Beimengung von Kurzglasfasern zu thermoplastischen Kunststoffen um ein vielfaches steigern. Dies wiederum ermöglicht eine Anwendung dieser Verbundwerkstoffe als Konstruktionswerkstoff in vielen, unterschiedlichen Industriebereichen.

Aus den genannten Gründen ermöglicht der Einsatz kurzfaserverstärkter, thermoplastischer Kunststoffe z. B. die Substitution von metallischen Werkstoffen und somit beispielsweise eine signifikante Gewichtsreduktion des Bauteils. Zudem erschließen sich weitere Einsatzmöglichkeiten, wie beispielsweise die Herstellung von Metall-Hybrid-Bauteilen. Bedingt durch den Einsatzbereich sind Bauteile aus kurzfaserverstärkten Kunststoffen in der Regel mechanisch hoch beansprucht und erfordern eine werkstoffgerechte Auslegung und Dimensionierung, um das vorhandene Potenzial voll auszuschöpfen. Die Konstruktion solcher Bauteile muss auf einer verlässlichen Bewertung der mechanischen Kennwerte zur Erfüllung der geforderten Funktionen basieren. Zudem haben sich Produktentwicklungszeiten in den vergangenen Jahren deutlich verkürzt. So müssen bereits in den frühen Phasen des Produktentwicklungsprozesses, in denen noch keine physikalischen Prototypen existieren, Aussagen bzgl. der Steifigkeit und Festigkeit mittels Simulationsberechnungen getroffen werden. Ein Standardwerkzeug zur Bewertung des mechanischen Verhaltens von Bauteilen ist die Finite-Elemente-Methode (FEM). Zum effizienten und effektiven Einsatz dieser Methode sind mathematische Modelle zur Beschreibung des anisotropen, elastisch-plastischen Verhaltens von kurzfaserverstärkten Kunststoffen zwingend erforderlich.

Im Gegensatz zum weitverbreiteten Einsatz dieser Verbundwerkstoffe sind Methoden für eine effiziente und verlässliche computerunterstützte Berechnung auf Basis der FEM bislang nicht ausreichend entwickelt. Die Entwicklung und Bewertung entsprechender Methoden zur ver-

besserten Berechnung des Deformations- und Versagensverhaltens kurzfaserverstärkter, thermoplastischer Kunststoffe bilden vor diesem Hintergrund den Fokus des vorliegenden Beitrags.

Im Rahmen der Arbeit werden zunächst die sich durch den Verarbeitungsprozess einstellende Mikrostruktur betrachtet und existierende Methoden zur experimentellen Analyse sowie zur analytischen Beschreibung vorgestellt. Darauf aufbauend erfolgt eine Übersicht über gängige Ansätze der Effektiven-Feld-Theorie zur elastisch-plastischen, mikromechanischen Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe unter expliziter Berücksichtigung der vorliegenden Mikrostruktur. Neben der Beschreibung des Deformationsverhaltens steht ebenfalls der Einsatz von Dimensionierungskriterien zur Vorhersage des Versagens im Fokus. In diesem Zusammenhang ist ein Überblick über Kriterien gegeben, die sich zur Integration in den mikromechanischen Ansatz eignen.

Aufbauend auf den grundlegenden Ergebnissen zur Beschreibung des Deformationsverhaltens kurzfaserverstärkter Kunststoffe werden zwei unterschiedliche, mikromechanische Modellierungsansätze entwickelt, virtuell abgesichert und mit einer Vorauswahl an Kriterien kombiniert. Hieraus ergeben sich zwei grundverschiedene Dimensionierungsstrategien, die im weiteren Verlauf der Arbeit exemplarisch auf Beispielbauteile angewendet werden. Die Arbeit steht im Gesamtkontext einer effizienten und verlässlichen, computergestützten Berechnung von kurzfaserverstärkten Kunststoffen. Mit Hinblick auf diesen Fokus ist das Merkmal der Prognosegüte als Qualitätsindex allein unzureichend. Vielmehr ist der aufzubringende Aufwand zur Kalibrierung und Umsetzung der ausgewählten Modelle und Strategien in einem entsprechenden Bewertungsschema mit zu berücksichtigen. Als abschließendes Ergebnis der Arbeit liegt ein solches Bewertungsschema vor.

2 Mikromechanische Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe

Im Folgenden wird aufgezeigt, welche Lösungsansätze bzw. Modelle in der Literatur existieren, um das elastisch-plastische, mechanische Verhalten von kurzfaserverstärkten Kunststoffen zu beschreiben. Hierzu wird zunächst in Abschnitt 2.1 die Mikrostruktur kurzfaserverstärkter Kunststoffe betrachtet, die aus einer polymeren Matrix mit darin eingebetteten Glasfasern besteht.

Anschließend werden im Abschnitt 2.2 Ansätze vorgestellt, die in Spritzgussimulationen eine analytische Beschreibung der bei kurzfaserverstärkten Kunststoffen auftretenden Faserorientierungsverteilungen ermöglichen. Es werden zudem Möglichkeiten aufgezeigt, wie diese in spritzgegossenen Bauteilen vorliegende Faserlängen- und Faserorientierungsverteilung experimentell zu ermitteln sind.

In Abschnitt 2.3 bis 2.7 wird ein Überblick über mögliche Modellierungsansätze zur Beschreibung des elastisch-plastischen, mechanischen Deformations- und Versagensverhaltens kurzfaserverstärkten Kunststoffen gegeben. Abschließend folgen eine Zusammenfassung und eine Auswahl an Ansätzen, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingesetzt bzw. erweitert werden.

2.1 Mikrostruktur spritzgegossener, kurzfaserverstärkter Kunststoffe

In Abbildung 2.1 ist eine Rasterelektronenmikroskopie-Aufnahme (REM-Aufnahme) einer kurzglasfaserverstärkten Polyamidschliffprobe mit 50 Gew.-% Glasfasern dargestellt, die einer spritzgegossenen Platte mit einer Dicke von 2 mm entnommen ist. Die eingebetteten Fasern sind je nach Orientierung als Ellipsen bzw. Kreise sichtbar. Der sich bei kurzfaserverstärkten Bauteilen während des Spritzgießens ausbildende Schichtaufbau ist deutlich zu erkennen und kann in drei Zonen unterteilt werden. In der Kernschicht B resultiert die Orientierung der Fasern quer zur Fließrichtung aus Quelleffekten an der Fließfront [1].

Im Gegensatz hierzu nimmt der Schergeschwindigkeitsgradient zur Randschicht hin zu und an den quer zur Fließrichtung ausgerichteten Fasern greifen unterschiedliche Scherkräfte an. Dies resultiert in einer Umorientierung der Fasern in Fließrichtung in den Randschichten A und C. Mit zunehmender Entfernung zum Anguss ist in der Regel eine Abnahme der Schichtdicke B zu erkennen. Eine ausführlichere Analyse und Beschreibung des Schichtaufbaus kann z. B. [2] entnommen werden.

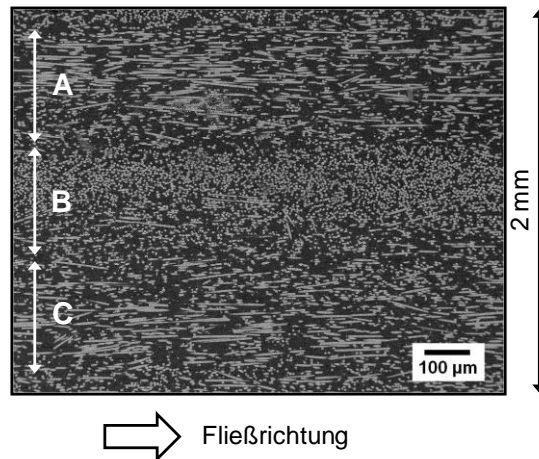


Abbildung 2.1: REM-Schliffbild einer Polyamid Probe mit 50 Gew.-% Glasfasern

Die unterschiedliche Ausrichtung der einzelnen Fasern führt zur Ausprägung anisotroper mechanischer Eigenschaften, je nachdem unter welchem Winkel zur Fließrichtung Proben einer spritzgegossenen Platte entnommen werden. Exemplarisch ist dies in Abbildung 2.2 anhand der wahren Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für zwei Proben aus Polybutylenterephthalat (PBT) mit 20 Gew.-% Glasfasern gezeigt, die unter 0° bzw. 90° einer Platte entnommen sind.

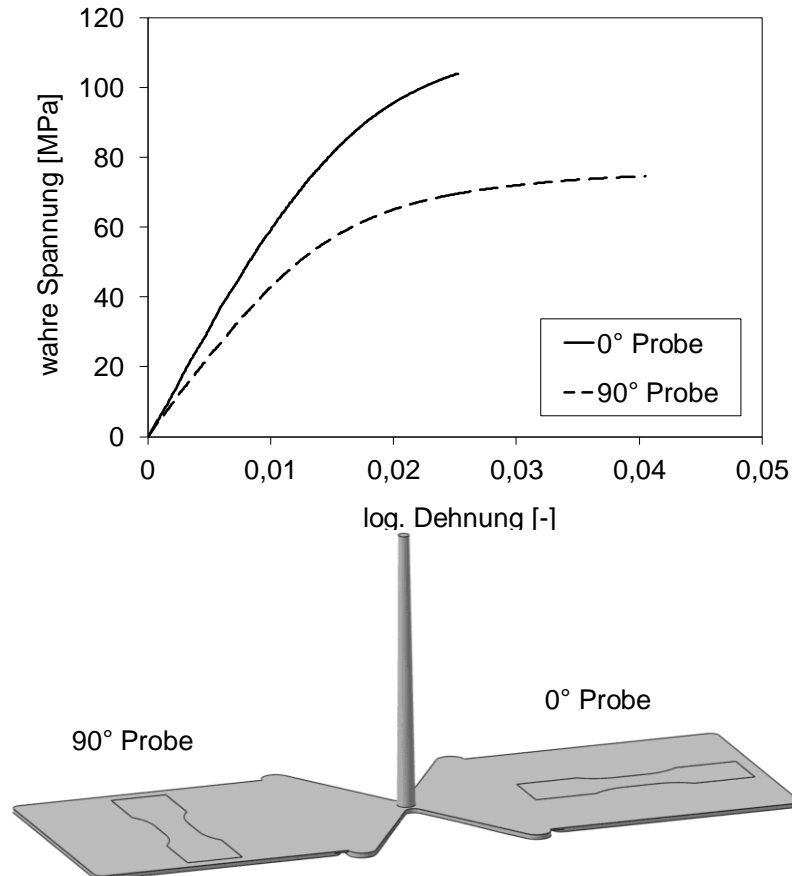


Abbildung 2.2: Einfluss der Probenorientierung auf die wahren Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven

Zusätzlich zur Faserorientierungsverteilung tritt eine Faserlängenverteilung auf, die ebenfalls die mechanischen Eigenschaften beeinflusst. In [3] sind anschauliche Beispiele für Faserlängenverteilungen sowie deren Bestimmung bzw. Auswertung gegeben. Anstelle der real vorhandenen Mikrostruktur ist im Folgenden eine Mikrostruktur zu definieren und zu beschreiben, die die reale Mikrostruktur repräsentiert und somit aus einer Matrix mit darin eingebetteten Fasern unterschiedlicher Länge und Orientierung besteht (siehe Abbildung 2.3).

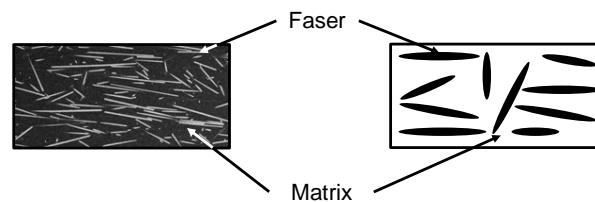


Abbildung 2.3: Reale (links) und repräsentative Mikrostruktur (rechts)

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine Faserlängenverteilung im Modellierungsansatz vereinfachend nicht berücksichtigt. Methoden zur experimentellen Bestimmung und zur analytischen Beschreibung werden im folgenden Abschnitt dennoch vorgestellt, da eine Integration in den Modellierungsansatz jederzeit möglich ist. Auf notwendige Modifikationen am Modell wird an den entsprechenden Stellen hingewiesen.

2.2 Faserorientierungs- und Faserlängenverteilung

Im Fokus der vorliegenden Arbeit steht die Berechnung spritzgegossener, kurzfaserverstärkter Kunststoffbauteile. Wie bereits in Abschnitt 2.1 erläutert, treten prozessbedingt Faserorientierungs- und Faserlängenverteilungen auf. Im Folgenden werden analytische Beschreibungsmöglichkeiten bzw. Berechnungsmodelle vorgestellt, die in Spritzguss simulationsprogrammen zur Bestimmung der Faserorientierung zum Einsatz kommen. Berechnungsmodelle zur Bestimmung einer Faserlängenverteilung existieren derzeit in Spritzguss simulationsprogrammen nicht. Des Weiteren werden Möglichkeiten zur experimentellen Analyse der vorliegenden Faserorientierungen und -längen aufgezeigt.

2.2.1 Analytische Beschreibung

Das Orientierungsmittelungsverfahren nach Advani et al. [4] ist eine Methode zur Beschreibung der resultierenden, mechanischen Eigenschaften bei kurzfaserverstärkten Kunststoffen bei Kenntnis der vorherrschenden Faserorientierungsverteilung. Wird beispielsweise die Stei-

figkeitsmatrix \mathbf{S} betrachtet, so ergibt sich die mittlere Steifigkeit $\langle \mathbf{S} \rangle$ des Verbundes durch Mittelung der Einzelsteifigkeiten über alle Orientierungen zu:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \int \mathbf{S}(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \quad (2.1)$$

Hierin ist $\psi(\mathbf{p})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, die Orientierungsverteilungsfunktion, die beim Vorhandensein einer Faserorientierungsverteilung diese gewichtet. Nach [4] gilt:

$$\psi(\mathbf{p}) = \psi(-\mathbf{p}) \quad \int \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = 1 \quad (2.2)$$

Die Orientierung einer Faser im dreidimensionalen Raum wird durch den Richtungsvektor \mathbf{p} beschrieben, wobei die einzelnen Komponenten des Vektors, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, durch die Winkel ϕ und θ definiert sind. Es gilt:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin \theta \cos \phi, \quad p_2 = \sin \theta \sin \phi, \quad p_3 = \cos \theta \\ |\mathbf{p}| &= \sqrt{p_i p_i} = 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

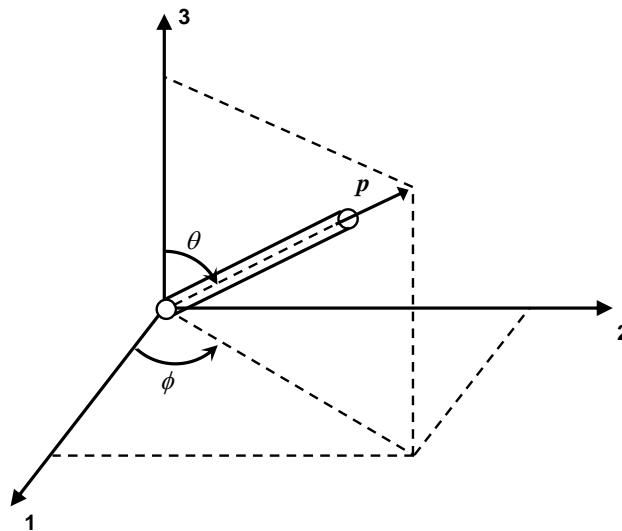


Abbildung 2.4: Beschreibung der Orientierung einer einzelnen Faser nach [4]

Die direkte Vorausberechnung der Orientierungsverteilungsfunktion $\psi(\mathbf{p})$ ist relativ aufwendig [5]. Aus diesem Grund wird die alternative Beschreibungsmethode über Orientierungstensoren gewählt [4]. Untersuchungen zeigen, dass eine ausreichende Beschreibungs-

genauigkeit unter Berücksichtigung des zwei- und vierstufigen Orientierungstensors \mathbf{a} bzw. \mathbf{A} erzielt wird [6], [7]. Diese sind nach [4] wie folgt definiert:

$$\int p_i p_j \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \langle \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \rangle_{\psi} = \langle p_i p_j \rangle = \mathbf{a} \quad (2.4)$$

$$\int p_i p_j p_k p_l \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} = \langle \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \rangle_{\psi} = \langle p_i p_j p_k p_l \rangle = \mathbf{A} \quad (2.5)$$

Heutige kommerzielle Simulationsprogramme für Spritzgussprozesse, wie beispielsweise Cadmould oder Autodesk Moldflow, liefern dem Anwender als Ergebnis ausschließlich den zweistufigen Orientierungstensor \mathbf{a} , der mittels des Folgar-Tucker-Modells [8] oder des Reduced-Strain-Closure-Modells (RSC-Modells) [9] berechnet wird. In einem experimentellen Vergleich zeigen Wang et al. [10], dass das RSC-Modell Ergebnisse der höchsten Prognosegüte für die Faserorientierungen liefert. Aus diesem Grund wird in Spritzgussimulationen im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich das RSC-Modell eingesetzt. Hierbei ist die materielle Ableitung zur Berechnung des zweistufigen Orientierungstensors \mathbf{a} wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}} = & -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2} \xi (\dot{\boldsymbol{\gamma}} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}} - 2[\mathbf{A} + (1 - \kappa)(\mathbf{L} - \mathbf{M} : \mathbf{A})] \dot{\boldsymbol{\gamma}}) \\ & + 2\kappa C_I \hat{\boldsymbol{\gamma}} (\boldsymbol{\delta} - 3\mathbf{a}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

In (2.6) ist ξ der Fasergeometrieparameter:

$$\xi = \frac{(l/d)^2 - 1}{(l/d)^2 + 1} \quad (2.7)$$

Des Weiteren sind in (2.6) $\boldsymbol{\omega}$ der Drehgeschwindigkeitstensor, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ der Scherdeformationsrattentensor, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ der skalarwertige Betrag von $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$, $\boldsymbol{\delta}$ der zweistufige Einheitstensor und \mathbf{L} bzw. \mathbf{M} sind vierstufige Tensoren, die sich aus den Eigenwerten λ_p und Eigenvektoren \mathbf{e}_i^p von \mathbf{a} nach [9] wie folgt ergeben:

$$\mathbf{L} = \sum_{p=1}^3 \lambda_p \mathbf{e}_i^p \mathbf{e}_j^p \mathbf{e}_k^p \mathbf{e}_l^p, \quad \mathbf{M} = \sum_{p=1}^3 \mathbf{e}_i^p \mathbf{e}_j^p \mathbf{e}_k^p \mathbf{e}_l^p \quad (2.8)$$

Im Spritzguss Simulationsprogramm Moldflow sind die Parameter C_l (Interaktionskoeffizient) und κ (RSC-Faktor) durch den Anwender anhand experimenteller Daten zu wählen [11]. Ausgehend vom zweistufigen Orientierungstensor \mathbf{a} kann die für Materialmodelle benötigte Orientierungsverteilungsfunktion $\psi(\mathbf{p})$ nach [12] bzw. [4] rekonstruiert werden. Es gilt:

$$\psi(\mathbf{p}) \approx \psi_1 + \psi_2 \mathbf{b}(\mathbf{a}) : \mathbf{f}(\mathbf{p}) + \psi_3 \mathbf{B}(\mathbf{a}) :: \mathbf{F}(\mathbf{p}) \quad (2.9)$$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{a}) &= \text{dev}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \text{dev}(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{a}) &= \mathbf{A}(\mathbf{a}) - \mathbf{A}^l(\mathbf{a}), \quad \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}^q(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) - \mathbf{A}^l(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Des Weiteren gilt für den betrachteten, dreidimensionalen Fall:

$$\psi_1 = \frac{1}{4\pi}, \quad \psi_2 = \frac{15}{8\pi}, \quad \psi_3 = \frac{315}{32\pi} \quad (2.11)$$

In (2.10) sind $\mathbf{A}^l(\mathbf{a})$ bzw. $\mathbf{A}^q(\mathbf{a})$ der lineare bzw. quadratische vierstufige Orientierungstensor. Diese sind nach [4] bzw. [13] wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^l(\mathbf{a}) &= \alpha \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2(\alpha - \beta) \mathbf{I} + \beta (\mathbf{I} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{I}) + 2\beta [\mathbf{I}(\mathbf{a} + \mathbf{I}) - \mathbf{I}(\mathbf{a})] \\ \mathbf{A}^q(\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die in (2.10) benötigten Größen $\mathbf{A}^l(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})$ bzw. $\mathbf{A}^q(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p})$ ergeben sich indem in (2.12) \mathbf{a} durch $\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$ ersetzt wird. In Gleichung (2.12) ist \mathbf{I} der zweistufige Einheitstensor mit $I_{ij} = \delta_{ij}$ und \mathbf{I} der vierstufige Einheitstensor mit $I_{ijkl} = 0,5(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$. Zudem gilt im dreidimensionalen Fall nach [4]:

$$\alpha = -\frac{1}{35}, \quad \beta = \frac{1}{7} \quad (2.13)$$

Für die Berechnung einer Orientierungsverteilungsfunktion (siehe Gleichung (2.9)) ist somit der vierstufige Orientierungstensor $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ aus Gleichung (2.10) zusätzlich zu approximieren. In

der Literatur existieren hierzu unterschiedliche Ansätze, wie z. B. die lineare und die quadratische Approximation [4], sowie die sogenannte Hybrid Closure [14] und die Orthotropic Closure [15] Approximation und ein neueres Modell von Doghri et al. [13]. In einer Studie untersuchen Regnier et al. [16] diese bestehenden Ansätze zur Approximation und vergleichen die Ergebnisse mit experimentellen Daten. Am genauesten kann das Orthotropic Closure Verfahren die experimentellen Daten rekonstruieren. Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit ausschließlich dieses Approximationsverfahren verwendet und im Rahmen der mikromechanischen Modellierung eingesetzt. Eine ausführliche Beschreibung und Herleitung des Verfahrens ist in [15] zu finden. Basierend auf den Ergebnissen kann die Orientierungsverteilungsfunktion aus Gleichung (2.9) rekonstruiert werden. Zur analytischen Beschreibung einer Faserlängenverteilung sei an dieser Stelle auf [5] verwiesen.

2.2.2 Experimentelle Ermittlung

Eine Reihe von Methoden zur experimentellen Ermittlung der Faserorientierungsverteilung werden in [17] vorgestellt. Weit verbreitet sind insbesondere die Analyse von Schlibfbildern [4], [7] und der Einsatz der Computertomographie [18], [19] zur Bestimmung der vorliegenden Faserausrichtung. Bei der Analyse von Schlibfbildern sind die Fasern als Ellipsen bzw. Kreise sichtbar. Dies kann genutzt werden, um über das Aspektverhältnis der Ellipsen auf die Faserorientierung zu schließen. Unter Berücksichtigung der Winkel aus Abbildung 2.4 lässt sich die Neigung einer Faser zur Normalen der Schnittebene θ und die Lage der Faser zur Schnittebene ϕ berechnen. Mittels dieser Werte und unter Verwendung der Aspektverhältnisse aus Abbildung 2.5 berechnen Bay et al. [7] die Diagonaleinträge des zweistufigen Orientierungstensor unter Verwendung folgender Gleichungen:

$$a_{11} = \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \phi, \quad a_{22} = \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \phi, \quad a_{33} = \cos^2 \theta, \quad a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 \quad (2.14)$$

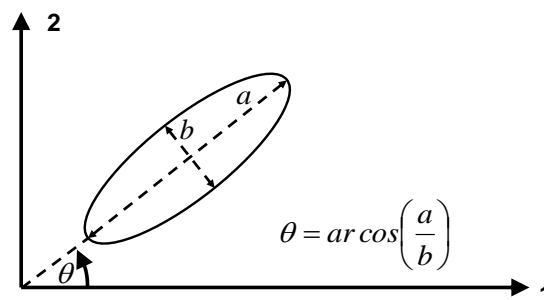


Abbildung 2.5: Definition der Achsenverhältnisse zur Berechnung des zweistufigen Orientierungstensors

Experimentelle Methoden zur Bestimmung der Faserlängenverteilung werden in [17] und [3] vorgestellt. Ein übliches Verfahren ist hierbei die Methode der Matrixveraschung [20] und die anschließende Auswertung von Mikroskopiebildern.

Eine Alternative zu den beschriebenen, experimentellen Methoden zur Bestimmung der vorliegenden Faserorientierungen und Faserlängen an Mikroskopiebildern bildet die Mikrocomputertomographie (μ CT). Diese Methode wird beispielsweise am Deutschen Kunststoff Institut in Darmstadt eingesetzt [19]. Als Ergebnis liefert die eingesetzte Auswertesoftware den zweistufigen Orientierungstensor a_{ij} , der in diesem Fall in Abhängigkeit der Länge Δl , des Faserradius r und der Faseranzahl N berechnet wird.

Es gilt:

$$a_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^N \Delta l_k \cdot r_k^2} \cdot \sum_{k=1}^N \Delta l_k \cdot r_k^2 \cdot (p_k)_i \cdot (p_k)_j \quad (2.15)$$

Des Weiteren liefert die Software Informationen über die Faserlängen- und Faserdurchmesserverteilung im analysierten Volumen.

2.3 Effektive-Feld-Theorie

Im Folgenden werden Modelle vorgestellt, die in der Literatur unter dem Begriff Effektive-Feld-Theorie bekannt sind. Böhm [21] versteht hierunter Ansätze, bei denen mikromechanische, heterogene Felder eines repräsentativen Volumens Ω durch mittlere Größen beschrieben werden. In Anlehnung an [22] und [23] ist ein repräsentatives Volumen ein theoretischer Materialausschnitt, welcher makroskopisch als Punkt angesehen wird. Voraussetzung ist, dass das betrachtete Volumen deutlich kleiner als die charakteristischen Abmessungen der betrachteten Bauteilstruktur und als eventuelle makroskopische Inhomogenitäten des Werkstoffs ist. Andererseits muss das Volumen gleichzeitig groß genug sein, um für eine finite, materielle Umgebung des Punktes als repräsentativ zu gelten. Die Größe ist demnach so zu wählen, dass mikroskopische Inhomogenitäten, wie beispielsweise Fasern, deutlich kleiner als das repräsentative Volumen und diese Inhomogenitäten in statistisch repräsentativer Anzahl vorhanden sind. In Abbildung 2.6 ist schematisch ein zweidimensionales, repräsentatives Volumen Ω dargestellt, welches in den weiteren Betrachtungen zur Veranschaulichung der Modellie-

lungsschritte verwendet wird. Es besteht aus einer Matrix mit darin eingebetteten Fasern gleicher Länge und unterschiedlicher Orientierung.

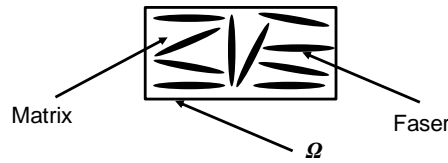


Abbildung 2.6: Betrachtetes, repräsentatives Volumen Ω

Im Rahmen der Effektiven-Feld-Theorie werden für einen solchen inhomogenen Werkstoff die örtlichen, mikroskopischen Dehnungen $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ und Spannungen $\boldsymbol{\sigma}(x)$ formal über:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{A}(x) : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma}(x) = \mathbf{B}(x) : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.16)$$

mit den makroskopischen Antworten $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ und $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ verknüpft. Hierin sind $\mathbf{A}(x)$ und $\mathbf{B}(x)$ die Konzentrations- oder Einflusstensoren [24]. Für das betrachtete Volumen Ω kann für die Phase p (Matrix oder Faser) mit dem Volumenanteil Ω^p eine Homogenisierungsbeziehung definiert werden:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^p = \frac{1}{\Omega^p} \int_{\Omega^p} \boldsymbol{\varepsilon}(x), \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^p = \frac{1}{\Omega^p} \int_{\Omega^p} \boldsymbol{\sigma}(x) \quad (2.17)$$

In (2.17) entsprechen $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^p$ bzw. $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^p$ abschnittsweise homogenen, mittleren Dehnungen bzw. Spannungen. Die Geometrie einer Phase wird hierbei in der Regel statistisch beschrieben und im Modell z. B. durch Volumenanteile, Aspektverhältnisse und Orientierungen berücksichtigt. Allgemein lässt sich die zu lösende Aufgabenstellung nach [24] durch Kombination von (2.16) und (2.17) wie folgt definieren:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^p = \mathbf{A}^p : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^p = \mathbf{B}^p : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (2.18)$$

Hierbei sind $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ und $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ die als homogen betrachteten, makroskopischen Dehnungen und Spannungen und $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^p$ bzw. $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^p$ die ebenfalls als homogen angenommenen, mikroskopischen Dehnungen und Spannungen in der Phase p des betrachteten Volumens. \mathbf{A}^p bzw.

\mathbf{B}^p sind wiederum die Konzentrationstensoren, die formal die mikroskopische und makroskopische Ebene verknüpfen. Zur Verdeutlichung wird erneut die Mikrostruktur aus Abbildung 2.6 herangezogen. Das betrachtete Volumen beinhaltet die Matrix und die Fasern mit den Volumenanteilen v^0 und v^1 , wobei 0 jeweils die Matrixphase und 1 die Phase der Einschlüsse (Fasern) indiziert (siehe Abbildung 2.7).

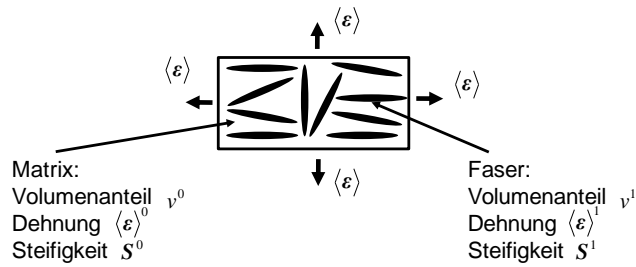


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung des betrachteten Volumens und relevanter Größen

Ausgehend von den Überlegungen mittlerer Größen kann eine Volumenmittelung der Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ und der Spannung $\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle$ definiert werden [24]. Diese ergeben sich formal zu:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = v^0 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 + v^1 \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = v^0 \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^0 + v^1 \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^1 \quad (2.19)$$

Unter Berücksichtigung der folgenden, allgemeingültigen Gleichungen:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{S} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^1 = \mathbf{S}^1 : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1, \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^0 = \mathbf{S}^0 : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 \quad (2.20)$$

lässt sich mittels des Dehnungskonzentrationstensors aus (2.18) eine Verbundsteifigkeitsmatrix \mathbf{S} für den betrachteten, inhomogenen Werkstoff definieren:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= v^1 \mathbf{S}^1 : \mathbf{A}^1 + v^1 \mathbf{S}^1 : \mathbf{A}^1 \\ &= \mathbf{S}^0 + v^1 (\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0) : \mathbf{A}^0 = \mathbf{S}^1 + v^0 (\mathbf{S}^0 - \mathbf{S}^1) : \mathbf{A}^0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3.1 Reuss- und Voigt-Modell

Eine wesentliche Herausforderung innerhalb der Effektiven-Feld-Theorie besteht in der Definition geeigneter Konzentrationstensoren. Die beiden einfachsten Modelle gehen auf Reuss [25] bzw. Voigt [26] zurück. Reuss geht in seiner Annahme von einem konstanten Span-

nungsfeld aus, während Voigt ein konstantes Dehnungsfeld voraussetzt. Aus diesen Annahmen folgen die jeweiligen Dehnungskonzentrationstensoren zu:

$$\mathbf{A}_{Reuss} = (\mathbf{S}^1)^{-1} : \mathbf{S}^0 \quad (2.22)$$

$$\mathbf{A}_{Voigt} = \mathbf{I} \quad (2.23)$$

In (2.23) ist \mathbf{I} der vierstufige Einheitstensor. Für die Steifigkeitsmatrizen ergibt sich:

$$\mathbf{S}_{Reuss} = \left[v^0 (\mathbf{S}^0)^{-1} + v^1 (\mathbf{S}^1)^{-1} \right]^{-1} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{S}_{Voigt} = v^0 \mathbf{S}^0 + v^1 \mathbf{S}^1 \quad (2.25)$$

2.3.2 Mori-Tanaka-Modell

Eine Vielzahl der heute verwendeten Modelle im Rahmen der Effektiven-Feld-Theorie basieren auf der Arbeit von Eshelby [27]. Eshelby untersucht die Dehnungs- und Spannungsverteilungen in einem homogenen Volumen mit einem ellipsoiden Einschluss gleicher mechanischer Eigenschaften, der eine Eigendehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle$ durch eine Größen- oder Formänderung erfährt. Eshelby zeigt, dass im Falle eines linear elastischen Werkstoffes die resultierenden Dehnungen $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^1 \rangle$ im Einschluss homogen sind und über den vierstufigen Eshelby-Tensor \mathbf{E} mit der wirkenden Eigendehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle$ verknüpft sind:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^1 \rangle = \mathbf{E} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle \quad (2.26)$$

Der Eshelby-Tensor in (2.26) ist abhängig von der Geometrie des ellipsoiden Einschlusses und der Steifigkeit \mathbf{S} des betrachteten Werkstoffes:

$$\mathbf{E} = f(\mathbf{S}, (l/d)) \quad (2.27)$$

Analytische Lösungen für unterschiedliche Aspektverhältnisse l/d und isotrope Steifigkeiten \mathbf{S} sind beispielsweise in [28] zu finden. Ist die Voraussetzung der Isotropie nicht erfüllt, kann der Eshelby-Tensor numerisch berechnet werden, wie von Gavazzi et al. [29] vorgeschlagen. Hill greift dieses Ergebnis von Eshelby in [24] auf zur Lösung des Problems eines einzelnen, ellipsoiden Einschlusses mit der Steifigkeit \mathbf{S}^1 , welcher in einer unendlich ausgedehnten Matrix mit der Steifigkeit \mathbf{S}^0 eingebettet ist. Die gesuchte Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1$ im Einschluss folgt in diesem Fall nach Hill [24] zu:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 = \mathbf{H} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.28)$$

mit:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{E} : (\mathbf{S}^0)^{-1} : (\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0) \right]^{-1} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{P} : (\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0) \right]^{-1} \quad (2.29)$$

In (2.29) ist \mathbf{P} der Hill-Tensor, der die Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^1 \rangle$ im Einschluss mit der durch $\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle$ wirkenden Eigenspannung $\langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle$ verknüpft:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 = -\mathbf{P} : \langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle \quad (2.30)$$

Detaillierte Informationen und Interpretationen zu den Ergebnissen der Arbeiten von Eshelby und Hill sind z. B. [23] zu entnehmen.

Ausgangspunkt der folgenden Überlegungen ist ein repräsentatives Volumen, das aus einer Matrix mit darin eingebetteten, unidirektional ausgerichteten Fasern besteht. Es wirkt erneut eine homogene, äußere Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$. Schematisch ist dies in Abbildung 2.8 dargestellt.

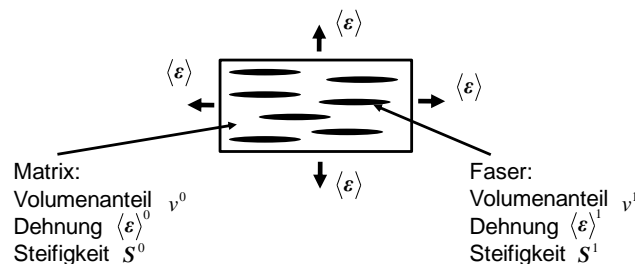


Abbildung 2.8: Verbundwerkstoff bestehend aus Matrix und unidirektional ausgerichteten Fasern

Gesucht sind die resultierenden Dehnungen in den einzelnen Phasen sowie die resultierende Verbundsteifigkeit \mathbf{S} . Die Idee der Kombination von Gleichung (2.18), (2.19) und (2.28) geht zurück auf Mori et al. [30] und bildet die Grundlage der Mori-Tanaka-Homogenisierungsmethode. Tandon et al. [31] und Benveniste [32] definieren basierend auf dieser Grundlage folgende Gleichungen:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 = \mathbf{H} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 = \mathbf{H} : \mathbf{A}_{MT} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 = \mathbf{A}_{MT} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.31)$$

$$\mathbf{A}_{MT} = [\nu^0 \mathbf{I} + \nu^1 \mathbf{H}]^{-1} = \left\{ \nu^0 \mathbf{I} + \nu^1 [\mathbf{I} + \mathbf{E} : (\mathbf{S}^0)^{-1} : (\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0)]^{-1} \right\}^{-1} = \mathbf{A}^0 \quad (2.32)$$

Wird (2.32) bzw. (2.31) in (2.21) eingesetzt, folgt für die Verbundsteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^0 : \left\{ \mathbf{I} - \nu^1 [(\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0) : (\mathbf{E} - \nu^1 (\mathbf{E} - \mathbf{I})) + \mathbf{S}^0]^{-1} : [\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}^0] \right\}^{-1} \quad (2.33)$$

Gleichung (2.33) ermöglicht die Berechnung der gesuchten Steifigkeit \mathbf{S} des Verbundes bestehend aus Fasern mit definiertem l/d -Verhältnis, einer elastischen Steifigkeit \mathbf{S}^1 , einem Volumenanteil ν^1 und einer unidirektionalen Faserorientierungsrichtung, welche in eine isotrope, elastische Matrix der Steifigkeit \mathbf{S}^0 mit dem Volumenanteil ν^0 eingebettet sind. Der Mori-Tanaka Ansatz ist besonders geeignet für Verbundwerkstoffe, die eine Faser-Matrix-Topologie besitzen [21]. Diese Voraussetzung ist bei kurzfaserverstärkten Kunststoffen erfüllt. Aufgrund der expliziten Gleichungen ist das Modell zudem effizient zu implementieren. Christensen [33] evaluiert das Mori-Tanaka-Modell bzgl. seiner Genauigkeit bei unterschiedlichen Faservolumenanteilen. Er stellt heraus, dass das Mori-Tanaka-Modell bis zu einem Volumenanteil ν^1 von 30 % sinnvoll einsetzbar ist.

2.3.3 Klassisch selbstkonsistentes Modell

Der wesentliche Unterschied zwischen dem klassisch selbstkonsistenten Modell und dem Mori-Tanaka-Modell liegt in der Definition von Gleichung (2.29). Während bei Mori-Tanaka der Tensor \mathbf{H} in Abhängigkeit der Matrixsteifigkeit \mathbf{S}^0 definiert ist, wird dieser im selbstkonsistenten Ansatz durch die zu berechnende, effektive Verbundsteifigkeit \mathbf{S} ersetzt [34]:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{E} : (\mathbf{S})^{-1} : (\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}) \right]^{-1} \quad (2.34)$$

Für den benötigten Dehnungskonzentrationstensor folgt:

$$\mathbf{A}_{SC} = \left\{ v^0 \mathbf{I} + v^1 \left[\mathbf{I} + \mathbf{E} : (\mathbf{S})^{-1} : (\mathbf{S}^1 - \mathbf{S}) \right]^{-1} \right\}^{-1} \quad (2.35)$$

Basierend auf dieser Umstellung geht der explizite Charakter des Mori-Tanaka-Gleichungssystems verloren und die Verbundsteifigkeit ist iterativ zu ermitteln. Selbstkonsistente Modelle sind nach Böhm [21] besonders für mehrphasige Verbundwerkstoffe geeignet, die keine Faser-Matrix-Topologie aufweisen und für Volumenanteile v^1 von 0 bis 100 %. Als Anwendungsbeispiel werden in diesem Zusammenhang polykristalline Metalle erwähnt.

2.3.4 Zweistufige Homogenisierung

Die bisher vorgestellten Modelle erlauben die Berechnung eines inhomogenen Verbundwerkstoffes, bestehend aus einer Matrix und mehreren Einschlüssen mit unidirektionaler Faserorientierung, unter einer homogen wirkenden Dehnung oder Spannung. Bei kurzfaserverstärkten Kunststoffen bilden der Polymerwerkstoff die Matrix und die Kurzglasfasern die Einschlüsse. Formal ist die Aufgabenstellung unter Verwendung von Gleichung (2.33) zu lösen und es gilt:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \mathbf{S} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.36)$$

Der Zustand einer unidirektionalen Faserorientierung trifft auf spritzgegossene Kunststoffbauteile nicht zu, da produktionsbedingt Faserorientierungsverteilungen auftreten (vergleiche Abbildung 2.1). Die betrachtete Ausgangssituation entspricht demnach der Aufgabenstellung aus Abbildung 2.7 und ist in Abbildung 2.9 zur Veranschaulichung erneut dargestellt.

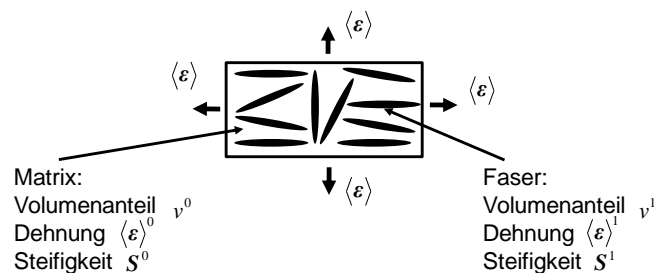


Abbildung 2.9: Verbundwerkstoff bestehend aus Matrix und beliebig orientierten Fasern

In diesem Fall ist in Anlehnung an die Ausführungen aus Abschnitt 2.2.1 und der Verwendung der Orientierungsverteilungsfunktion $\psi(\mathbf{p})$ folgende Aufgabenstellung zu lösen:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \int \mathbf{S}(\mathbf{p}) \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.37)$$

In Gleichung (2.37) ist $\langle \mathbf{S} \rangle$ eine mittlere Verbundsteifigkeitsmatrix in Abhängigkeit der vorliegenden Orientierungen. Basierend auf den Überlegungen von Camacho et al. [35] kann die formulierte Aufgabe in einem zweistufigen Homogenisierungsverfahren gelöst werden. Dieser Ansatz wird u. a. von Lielens [36], Pierard et al. [37] und Doghri et al. [13] angewendet und an unterschiedlichen thermoelastischen [36], [37] und inelastischen Verbundwerkstoffen [13] validiert. Im Rahmen der zweistufigen Homogenisierung wird das betrachtete Volumen, der Makro-Verbund, in N Bereiche gleicher Orientierung unterteilt, den Mikro-Verbunden (siehe Abbildung 2.10). Aufgrund der Diskretisierung folgt ausgehend von (2.37):

$$\langle \mathbf{S} \rangle \approx \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{S}(\mathbf{p}) \rangle_i \psi_i(\mathbf{p}) \Delta \mathbf{p} \quad (2.38)$$

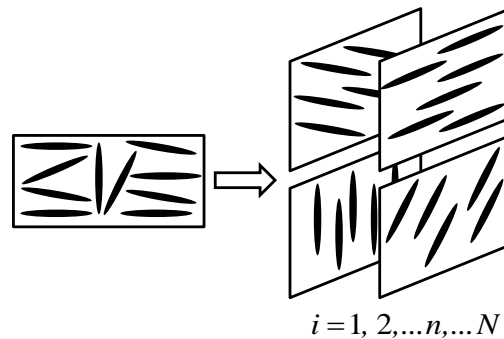


Abbildung 2.10: Unterteilung des Makro-Verbundes in N Mikro-Verbunde

Eine Erweiterung des Ansatzes zur Berücksichtigung von Faserlängenverteilungen ist möglich. Hierzu wird die Annahme getroffen, dass jeder n -te Mikro-Verbund wiederum aus K Verbunden besteht (siehe Abbildung 2.11).

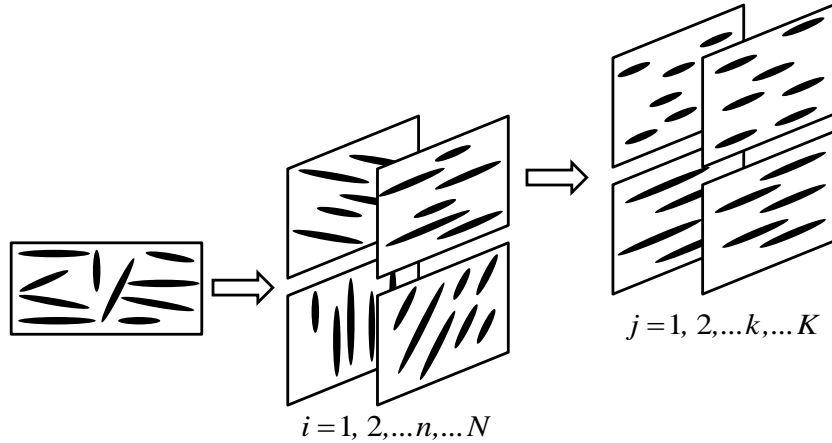


Abbildung 2.11: Unterteilung des Makro-Verbundes in N Mikro-Verbunde unterschiedlicher Faserorientierung und Unterteilung des n -ten Mikroverbundes in K Verbunde unterschiedlicher Faserlänge

Jeder k -te Verbund hat das Volumen v^k und ist durch ein l/d -Verhältnis bzw. eine Orientierungsverteilungsfunktion $\psi(\mathbf{p})$ gekennzeichnet. Es gilt [35]:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{j=1}^K \frac{v^j}{1-v^0} \int \mathbf{S}(\mathbf{p})_j \psi(\mathbf{p}) d\mathbf{p} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.39)$$

Für die Gesamtheit der Volumenanteile gilt:

$$v^0 + \sum_{j=1}^K v^j = v^0 + v^1 = 1 = v \quad (2.40)$$

Wie bereits zuvor erwähnt, wird im Folgenden ausschließlich eine Faserorientierungsverteilung betrachtet. Für eine praxistaugliche Unterteilung in eine endliche Anzahl von Mikroverbunden ist der geometrische Raum der Einheitskugel zu diskretisieren, welcher durch den Richtungsvektor \mathbf{p} (Abbildung 2.4) aufgespannt wird. Hierzu kann die Einheitskugel in gleichflächige Segmente unter Anwendung des Ansatzes von Weber et al. [38] unterteilt werden. Dieser Ansatz wird ebenfalls von [13] eingesetzt und ist im Folgenden näher erläutert. Das Ergebnis der Segmentierung ist aus Gründen der Symmetrie für einen Ausschnitt einer Einheitskugel in Abbildung 2.12 veranschaulicht.

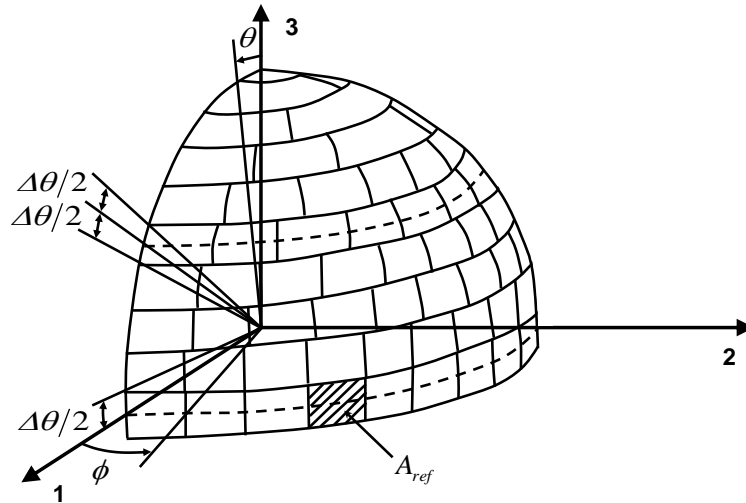


Abbildung 2.12: Unterteilung einer Einheitskugel in gleichflächige Segmente nach [38]

Aufgrund der Symmetrie zur 1-2-Ebene wird im Folgenden lediglich eine Halbkugel betrachtet und es gilt: $(\theta, \phi) \in [0, \pi]$. Für die Fläche eines Rings der Breite $\theta = \pi/2 \pm \Delta\theta/2$ folgt:

$$A_\theta = \pi \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} \sin(\gamma) d\gamma = 2\pi \sin(\theta) \sin(\Delta\theta/2) \quad (2.41)$$

Für einen Ring um den Äquator ($\theta = \pi/2$) gilt $\Delta\theta = \Delta\phi$ und für ein fest vorgegebenes Inkrement $\Delta\theta$ ergibt sich die Anzahl der Flächensegmente zu:

$$N_{\pi/2} = \frac{\pi}{\Delta\theta} \quad (2.42)$$

Aus Gleichung (2.42) ergibt sich die Referenzfläche für die einzelnen Segmente zu:

$$A_{ref} = \frac{A_{\pi/2}}{N_{\pi/2}} = \frac{2\pi}{N_{\pi/2}} \sin(\Delta\theta/2) \quad (2.43)$$

Für die Anzahl der Segmente auf einem Ring $\theta \pm \Delta\theta/2$ folgt die Anzahlzahl der ϕ -Inkremente zu:

$$N_\theta = \frac{A_\theta}{A_{ref}} = N_{\pi/2} \cdot \sin(\theta) \quad (2.44)$$

Für die Pole $(\theta = 0, \pi)$ gilt zudem:

$$A_{0,\pi} = \pi(1 - \cos(\Delta\theta/2)) \quad (2.45)$$

Ausgehend von den vorhergehenden Überlegungen ((2.41) - (2.45)) ergibt sich für Gleichung (2.38) die Diskretisierung zu:

$$\langle \mathbf{S} \rangle \approx 2 \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{S}(\theta_i, \phi_i) \cdot \psi_i(\theta_i, \phi_i) \cdot A(\theta_i, \phi_i) \quad (2.46)$$

Durch die Aufteilung des in Gleichung (2.38) definierten Makro-Verbundes ergeben sich N Mikro-Verbunde. Die Anzahl der Mikro-Verbunde entspricht somit der Gesamtheit der vorhandenen Flächensegmente. In einer ersten Homogenisierungsstufe wird auf jeden Mikro-Verbund das Mori-Tanaka-Modell angewendet und es gilt:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i^1 = \mathbf{H}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i^0 = \mathbf{A}_{MT,i} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i \quad (2.47)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_i = \mathbf{S}_i : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i, \quad i = 1 \dots N \quad (2.48)$$

In (2.47) bzw. (2.48) sind $\mathbf{A}_{MT,i}$ nach (2.32) bzw. \mathbf{S}_i nach (2.33) zu berechnen. Die zur Lösung des gegebenen Gleichungssystems benötigten Dehnungen $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i$ ergeben sich durch die im Folgenden beschriebene zweite Homogenisierungsstufe. Das Vorgehen bei der ersten Homogenisierungsstufe ist schematisch für den n -ten Mikro-Verbund in Abbildung 2.13 dargestellt.

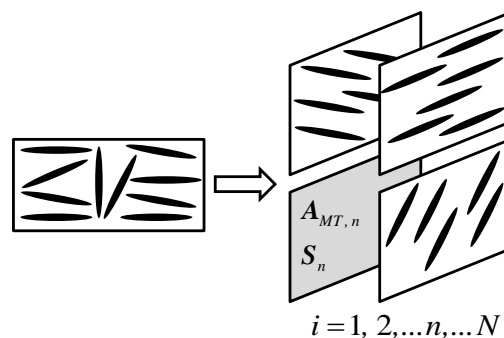


Abbildung 2.13: Erste Homogenisierungsstufe

In der zweiten Homogenisierungsstufe ist die Gesamtsteifigkeit des Makro-Verbundes zu berechnen. Schematisch, unabhängig vom eingesetzten Modell, ist das gesamte Vorgehen bei der zweistufigen Homogenisierung in Abbildung 2.14 dargestellt.

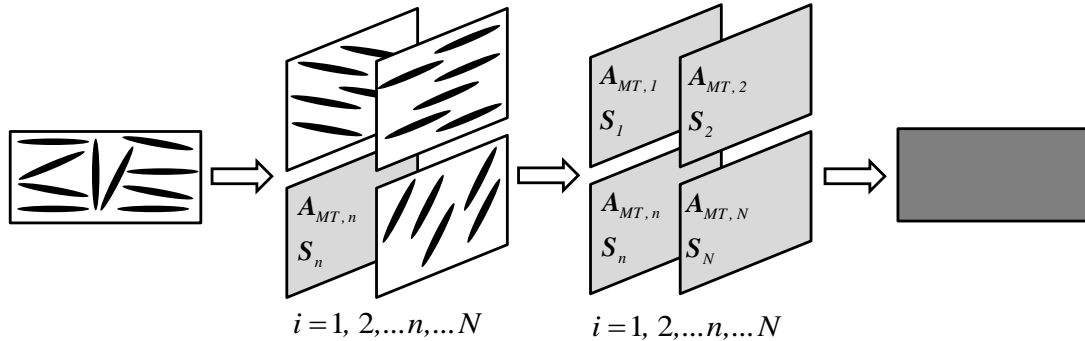


Abbildung 2.14: Zweistufiges Homogenisierungsverfahren

Die Kombination des Mori-Tanaka-Modells auf der ersten Homogenisierungsstufe mit dem Voigt-Modell auf der zweiten Homogenisierungsstufe ist eine in der Literatur übliche Vorgehensweise für faserverstärkte Verbundwerkstoffe [14], [35], [39]. Bei der Anwendung des Voigt-Modells wird jeder Mikro-Verbund mit der gleichen Dehnung belastet (siehe Abschnitt 2.3.1) und es gilt:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i, i = 1 \dots N \quad (2.49)$$

Die Makro-Verbund-Spannung ergibt sich zu:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \sum_{i=1}^N \left(\langle \boldsymbol{\sigma}_{i,v^0} \rangle v^0 + \langle \boldsymbol{\sigma}_{i,v^1} \rangle v^1 \right) \psi_i(\mathbf{p}) \mathbf{A} \mathbf{p} \quad (2.50)$$

In [40] wird eine Alternative zur Kombination der Mori-Tanaka-Voigt-Homogenisierung vorgestellt, indem nach der Mori-Tanaka-Homogenisierung auf der ersten Stufe das klassisch selbstkonsistente Modell auf der zweiten Stufe angewendet wird (siehe Abschnitt 2.3.3). Im Rahmen der Anwendung des klassisch selbstkonsistenten Modells wird der Makro-Verbund weiterhin als Komposition aus N Mikro-Verbunden aufgefasst. Für die Mikro-Verbund-Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i$ gilt allerdings in diesem Fall:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_i = \mathbf{A}_{SC} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.51)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass A_{SC} iterativ zu ermitteln ist. Durch die Kombination des Mori-Tanaka-Modells mit dem selbstkonsistenten Modell erfolgt die Dehnungsverteilung auf die Mikro-Verbunde abhängig vom jeweiligen Dehnungskonzentrationstensor. Kammoun [40] zeigt allerdings, dass durch die Anwendung dieser Vorgehensweise die elastische Verbundsteifigkeit unterbestimmt und eine geringere Prognosegüte für hochorientierte Verbundwerkstoffe erzielt wird. Vor diesem Hintergrund wird diese Form der zweistufigen Formulierung in dieser Arbeit nicht weiter betrachtet.

2.4 Repräsentative Mikrostrukturmodelle

Eine alternative Möglichkeit der mechanischen Charakterisierung von repräsentativen Volumen zur Effektiven-Feld-Methode (2.3) bilden repräsentative Mikrostrukturmodelle (RMS-Modelle). Ein RMS-Modell bildet ebenfalls einen theoretischen Materialausschnitt ab, welcher makroskopisch als Punkt angesehen werden kann [23]. Vereinfacht gesprochen wird in diesem Fall das betrachtete, repräsentative Volumen, bestehend aus Fasern und Matrix, explizit ausmodelliert.

RMS-Modelle stellen eine geeignete Methode zur Überprüfung von Homogenisierungsansätzen dar [5], [23], [41], [42]. Durch Anwendung sogenannter periodischer Randbedingungen (Periodic Boundary Conditions, PBC) sind für kleine, als repräsentativ angesehene RMS-Modelle zuverlässige Simulationsergebnisse erzielbar [23]. Bei der Umsetzung der PBCs werden die aus einem RMS-Modell herausstehenden Fasern an den Grenzflächen abgeschnitten und nach Maßgabe der periodischen Modellierung an der gegenüberliegenden Oberfläche wieder ins Modell eingefügt. Ausgehend von diesem Modellierungsansatz ist das RMS-Modell so beschaffen, dass über eine Aneinanderreihung beliebig vieler Modelle theoretisch ein beliebig großes, kontinuierliches Volumen erzeugt werden kann (siehe Abbildung 2.15).

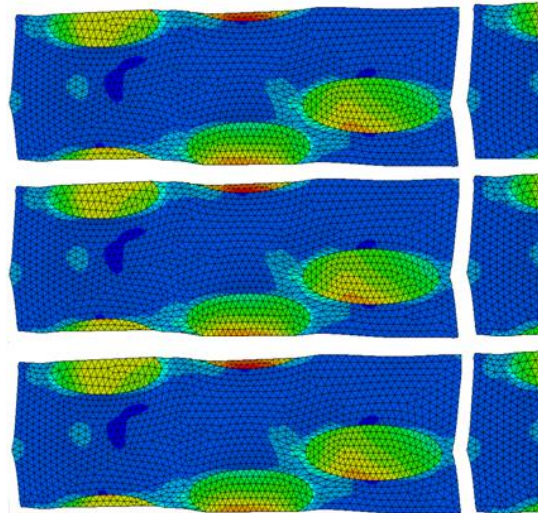


Abbildung 2.15: RMS-Modell mit periodischen Randbedingungen nach [43]

Bei der Aufbringung einer Belastung auf das RMS-Modell wird über periodische Randbedingungen festgelegt, dass sich die theoretisch kontinuierlich aneinandersetzbaren Flächen des RMS-Modells gleich deformieren. Dies wird im Folgenden aufgrund der Übersichtlichkeit für den 2D-Fall erläutert. In Anlehnung an Abbildung 2.16 gibt es zu jedem $x_l \in \partial u_l$ ein korrespondierendes $x_r \in \partial u_r$, bzw. zu jedem $x_u \in \partial u_u$ ein $x_o \in \partial u_o$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} x_r - x_l &= x_2 - x_1 \\ x_o - x_u &= x_4 - x_1 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Der Knoten 1 (siehe Abbildung 2.16) ist in diesem Fall ortsfest und die Deformation der 2D-Struktur ist durch die Bewegung der Knoten 2 und 4 vollständig beschrieben. Die dreidimensionale Verallgemeinerung des Konzeptes der periodischen Randbedingungen ergibt sich analog und ist detailliert beispielweise in [44] nachzulesen.

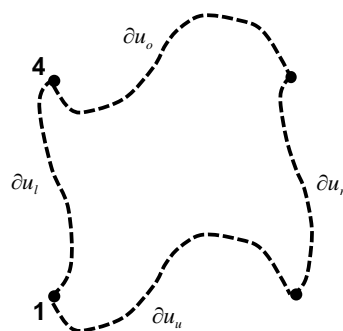


Abbildung 2.16: Schematische Darstellung der PBC nach [23] ES FEHLT 2 bzw. 3

Ausführliche Informationen zum Aufbau eines RMS-Modelles sind beispielsweise in [5], [23], [44] oder [45] zu finden. Besondere Aufmerksamkeit ist beim Aufbau eines RMS-Modells der Anordnung der Fasern sowie deren Anzahl zu widmen. Beispielsweise zeigt Pierard in [23], dass bereits mit 15 Einschlüssen bei einem l/d -Verhältnis von 3 ein RMS-Modell mit hoher Prognosegüte erstellbar ist.

2.5 Elastisch-plastische Modellierungsansätze

Die bisher vorgestellten Modellierungsansätze aus Abschnitt 2.3 gehen von einer elastischen Kunststoffmatrix aus. Zur Durchführung von Struktursimulationen an realen Kunststoffbauteilen ist allerdings die Berücksichtigung einer elastisch-plastischen Matrix zwingend notwendig. Im Folgenden werden daher Modellierungsansätze vorgestellt, die derzeit bei der elastisch-plastischen Simulation von Kunststoffen Anwendung finden und im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt werden. Dazu zählen das von Mises-Plastizitätsmodell [46], das Drucker-Prager-Modell [47] und das semianalytische Materialmodell für Kunststoffe (SAMP-Modell) [48].

Ghorbel [49] hebt hervor, dass es derzeit in der Literatur keine Einigkeit darüber gibt, welches Plastizitätsmodell am besten für Kunststoffe geeignet ist. Es ist allerdings bekannt, dass Kunststoffe unter Zug- und Druckbelastung eine unterschiedliche Fließspannung aufweisen [48]. In Kombination mit der Mori-Tanaka-Homogenisierung wird in der Regel das von Mises-Modell [50], [51], [52], [53] oder das Drucker-Prager-Modell angewendet [54], [55]. Literatur über die Anwendung eines Drucker-Prager- oder SAMP-Modells in Kombination mit der Mori-Tanaka-Homogenisierung zur Simulation kurzfaserverstärkter Kunststoffe und eine experimentelle Überprüfung der Simulationsergebnisse ist nicht bekannt.

2.5.1 Grundlagen der elastisch-plastischen Modellierung

Die folgenden Ausführungen orientieren sich an [56] und [57] sofern nicht anders vermerkt und beziehen sich auf kleine Deformationen. Im Rahmen einer elastisch-plastischen Modellierung wird der Dehnungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ in einen elastischen und einen plastischen Teil zerlegt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.53)$$

Des Weiteren ist eine Fließfunktion f zu definieren. Diese ist abhängig von der aktuellen Spannung σ und der skalarwertigen Verfestigungsgröße κ , die sich in Abhängigkeit von der plastischen Dehnung ε^{pl} entwickelt. Ein plastisches Fließen tritt auf, wenn folgende Fließbedingung erfüllt ist:

$$f(\sigma, \kappa) = 0 \quad (2.54)$$

Ferner wird das plastische Potential $g(\sigma, \kappa)$ eingeführt. Ausgehend von diesen Definitionen kann eine Fließregel definiert werden und es gilt:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = \dot{\lambda} \cdot \mathbf{N} = \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (2.55)$$

In (2.55) ist \mathbf{N} der Normalenvektor zur Fläche des plastischen Potentials und $\dot{\lambda}$ der plastische Multiplikator. Assoziierte Plastizität liegt vor für:

$$g \equiv f \quad (2.56)$$

In diesem Fall ist der Normalenvektor \mathbf{N} senkrecht zur Fließfläche. Zur Beschreibung der Verfestigung ist zudem eine Verfestigungsregel einzuführen. Diese kann nach [56] ausgehend von der Annahme einer isotropen Dehnungsverfestigung mittels der skalarwertigen akkumulierten plastischen Dehnung ε^{pl} definiert werden und es gilt:

$$\dot{\varepsilon}^{pl} = -\dot{\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial \kappa} \quad (2.57)$$

Ausgehend von diesen allgemeinen Definitionen kann eine inkrementelle Formulierung mittels eines Return-Mapping-Algorithmus und des Newton-Raphson-Verfahrens definiert werden. Detaillierte Informationen hierzu sind beispielsweise in [56], [57] oder [58] zu finden. Ist zum Zeitpunkt t_{n+1} das Dehnungsinkrement $\Delta \varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n$ gegeben, wird zunächst eine trial-Spannung σ_{n+1}^{trial} berechnet:

$$\sigma_{n+1}^{trial} = \sigma_n + \mathbf{S}^{el} : \Delta \varepsilon \quad (2.58)$$

Es ist zu prüfen, ob die Fließbedingung aus (2.54) für $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$ erfüllt ist. Falls dies zutrifft liegt plastisches Fließen vor und es gilt:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{pl} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl} = \Delta \lambda \frac{\partial g(\boldsymbol{\sigma}_{n+1})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}} = \Delta \lambda \mathbf{N}_{n+1} \quad (2.59)$$

Andernfalls handelt es sich bei dem zu berechnenden Inkrement um einen elastischen Schritt und es gilt $\Delta \lambda = 0$. Für den Fall, dass es sich um einen plastischen Schritt handelt, ist der plastische Multiplikator $\Delta \lambda$ iterativ zu bestimmen und für ein zu berechnendes, plastisches Inkrement folgt die Spannung zum Zeitschritt t_{n+1} zu:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \Delta \lambda \cdot \mathbf{S}^{el} : \mathbf{N}_{n+1} \quad (2.60)$$

Formal muss der plastische Multiplikator $\Delta \lambda$ die Fließbedingung erfüllen:

$$f(\Delta \lambda) = 0 \quad (2.61)$$

Diese nichtlineare Gleichung in $\Delta \lambda$ ist mittels des Newton-Raphson-Verfahrens zu lösen:

$$\Delta \lambda^{j+1} = \Delta \lambda^j - f_{n+1}^j \cdot \left(\frac{df_{n+1}^j}{d\Delta \lambda^j} \right)^{-1} \quad (2.62)$$

Nach Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens kann die aktuelle Spannung $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ zum Zeitpunkt t_{n+1} berechnet werden. Zur Anwendung eines Plastizitätsmodells in einem Homogenisierungsansatz ist es notwendig, eine Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{S}^{tg} zu berechnen, da ansonsten beispielsweise Gleichung (2.33) nicht lösbar ist. Formal gilt für eine Tangentensteifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{S}^{tg} \equiv \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (2.63)$$

Für die weiteren Ausführungen werden abschließend folgende Größen definiert:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{I}_{dev} :: (\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma})} = \sqrt{\frac{3}{2} dev(\boldsymbol{\sigma}) : dev(\boldsymbol{\sigma})} \\ \mathbf{I}_{dev} &= \mathbf{I} - \mathbf{I}_{vol}, \quad \mathbf{I}_{vol} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \\ dev(\boldsymbol{\sigma}) &= \boldsymbol{\sigma} - p \cdot \boldsymbol{\delta}, \quad p = \frac{1}{3} tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_{kk}\end{aligned}\tag{2.64}$$

In (2.64) ist σ_{eq} die von Mises-Vergleichsspannung, $dev(\boldsymbol{\sigma})$ die deviatorische und p die volumetrische Spannung.

2.5.2 Von Mises-Plastizitätsmodell

Nach [57] und unter Anwendung der in Abschnitt 2.5.1 aufgeführten Gleichung gilt für die assoziierte von Mises-Plastizität folgender Gleichungssatz:

$$\begin{aligned}f &\equiv g, \quad f = \sigma_{eq} - \kappa \\ \Delta \varepsilon^{pl} &= \Delta \lambda \cdot \frac{3}{2} \frac{dev(\boldsymbol{\sigma})}{\sigma_{eq}} = \Delta \lambda \cdot \mathbf{N}, \quad \Delta \varepsilon^{pl} = -\Delta \lambda\end{aligned}\tag{2.65}$$

In (2.65) entspricht κ der Verfestigung, σ_{eq} die von Mises-Vergleichsspannung und $\Delta \varepsilon^{pl}$ die akkumulierte plastische Dehnung. Für die algorithmisch konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix \mathbf{S}^{tg} gilt nach [57]:

$$\mathbf{S}^{tg} = \mathbf{S}^{el} - \frac{4G^2}{3G + \frac{d\kappa}{d\varepsilon^{pl}}} \cdot (\mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) - \frac{4G^2 \cdot \Delta \lambda}{\sigma_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \mathbf{I}_{dev} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right)\tag{2.66}$$

In Gleichung (2.66) ist G der Schubmodul. In Abbildung 2.17 ist die von Mises-Fließbedingung im $p - \sigma_{eq}$ -Raum dargestellt. Es wird deutlich, dass mittels der von Mises-Plastizität kein Fließen unter reiner hydrostatischer Belastung auftreten kann und somit Fließen rein aus der gestaltändernden, deviatorischen Beanspruchung resultiert.

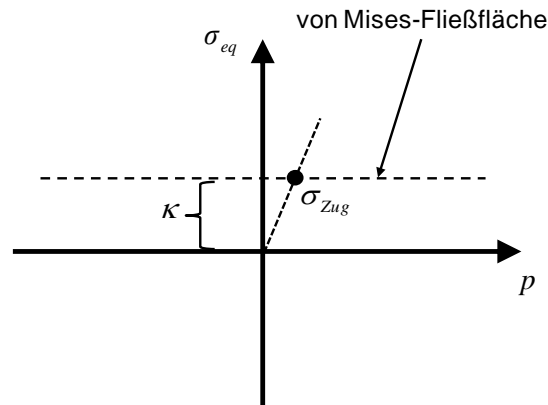


Abbildung 2.17: von Mises-Fließfläche

Eine Kalibrierung des von Mises-Modells erfolgt typischerweise anhand von Zugversuchsdaten und eine Berücksichtigung abweichender Fließgrenzen, beispielsweise unter Druckbelastung, ist nicht möglich. Die Beschreibung der Verfestigung kann beispielsweise unter Verwendung einer Verfestigungsfunktion κ erfolgen und anhand eines Zugversuche wie folgt definiert werden:

$$\kappa = \sigma_{zug} = \sigma_{y,Zug} + k_{Zug}(\varepsilon^{pl}) \quad (2.67)$$

In (2.67) ist $\sigma_{y,Zug}$ die Fließgrenze unter Zugbeanspruchung und $k_{Zug}(\varepsilon^{pl})$ die dazugehörige Verfestigung. Schematisch ist dies in Abbildung 2.18 dargestellt.

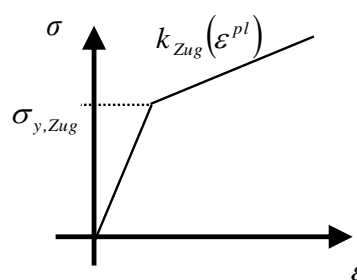


Abbildung 2.18: Kennwerte aus einem Zugversuch zur Kalibrierung des von Mises-Plastizitätsmodells

2.5.3 Drucker-Prager-Plastizitätsmodell

Nach [56] und mit Bezug auf die in Abschnitt 2.5.1 definierten, allgemeingültigen Gleichungen gilt für das nicht assoziierte Drucker-Prager-Plastizitätsmodell folgender Gleichungssatz:

$$g = \sigma_{eq} + \bar{\eta} \cdot p, \quad f = \sigma_{eq} + \eta \cdot p - \zeta \cdot \kappa$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Delta \lambda \cdot \left[\frac{3}{2} \frac{dev(\boldsymbol{\sigma})}{\sigma_{eq}} + \frac{\bar{\eta}}{3} \boldsymbol{\delta} \right] = \Delta \lambda \cdot [\mathbf{N}_{dev} + N_{vol} \cdot \boldsymbol{\delta}], \quad \Delta \varepsilon^{pl} = \Delta \lambda \cdot \zeta \quad (2.68)$$

Bei η , $\bar{\eta}$ bzw. ζ handelt es sich um skalarwertige Größen (siehe Abbildung 2.19) und bei κ um die Verfestigungsfunktion, die jeweils Werkstoffspezifisch zu ermitteln sind. Ferner kann die algorithmisch konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix für die in (2.68) definierten Gleichungen nach [56] wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{S}^{tg} = \mathbf{S}^{el} - \frac{4G^2}{3G + K\eta\bar{\eta} + \frac{dc}{d\varepsilon^{pl}}} \cdot (\mathbf{N}_{dev} \otimes \mathbf{N}_{dev}) - \frac{4G^2 \cdot \Delta \lambda}{\sigma_{eq}} \cdot \left(\frac{3}{2} \mathbf{I}_{dev} - \mathbf{N}_{dev} \otimes \mathbf{N}_{dev} \right)$$

$$- \frac{1}{3G + K\eta\bar{\eta} + \frac{d\kappa}{d\varepsilon^{pl}}} \cdot [2G\eta K(\mathbf{N}_{dev} \otimes \boldsymbol{\delta}) + 2G\bar{\eta} K(\boldsymbol{\delta} \otimes \mathbf{N}_{dev}) + K^2 \eta \bar{\eta} (\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta})] \quad (2.69)$$

In Gleichung (2.69) ist K der Kompressionsmodul. Eine grafische Darstellung der Drucker-Prager-Fließfläche im $p - \sigma_{eq}$ -Raum ist in Abbildung 2.19 gegeben. Für den Fall, dass:

$$\sigma_{eq}^{trial} = \sigma_{eq} - G\Delta\lambda < 0 \quad (2.70)$$

erfüllt ist, liegt die Rückprojektion des Normalenvektors außerhalb der gültigen Drucker-Prager-Fließfläche. Für diesen Fall ergibt sich eine leicht modifizierte Vorgehensweise zu Gleichung (2.68) und (2.69). Nähere Informationen hierzu können [56] entnommen werden.

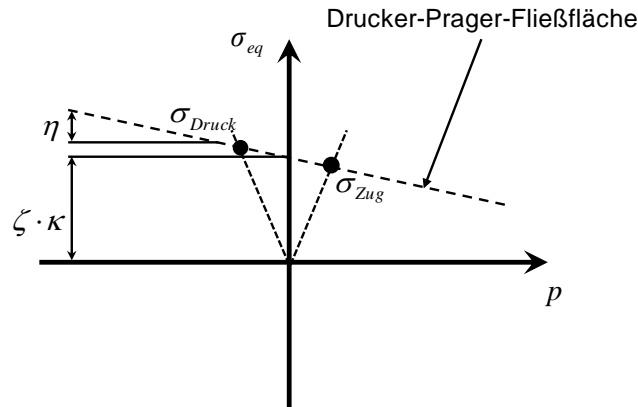


Abbildung 2.19: Drucker-Prager-Fließfläche

Ausgehend von Abbildung 2.19 wird deutlich, dass die Anwendung des Drucker-Prager-Modells dann sinnvoll ist, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen den Fließgrenzen unter Zug-, Schub- und Druckbelastung vorliegt. Zur Kalibrierung des Drucker-Prager-Modells sind mindestens zwei Versuche notwendig. Stehen ein Zug- und ein Druckversuch zur Verfügung, so gilt nach [59]:

$$\eta = 3 \cdot \left(\frac{\sigma_{Druck} - \sigma_{Zug}}{\sigma_{Druck} + \sigma_{Zug}} \right), \quad \zeta \cdot \kappa = \left(1 + \frac{\sigma_{Druck} - \sigma_{Zug}}{\sigma_{Druck} + \sigma_{Zug}} \right) \cdot \sigma_{Zug}, \quad \bar{\eta} = \eta \quad (2.71)$$

Unter Berücksichtigung der dritten Beziehung aus (2.71) folgt, dass es sich in diesem Fall um ein assoziiertes Fließkriterium handelt.

2.5.4 SAMP-Plastizitätsmodell

Als weiteres Plastizitätsmodell wird im Folgenden das SAMP-Plastizitätsmodell vorgestellt. Die dazugehörige Fließfläche ist in Abbildung 2.20 dargestellt. Es wird deutlich, dass im Gegensatz zu den vorherigen Plastizitätsmodellen das SAMP-Modell die Berücksichtigung eines nichtlinearen Zusammenhangs zwischen den Fließgrenzen unter Zug-, Schub- und Druckbelastung ermöglicht. Allerdings folgt hieraus zwangsläufig ein erhöhter Versuchsaufwand zur Kalibrierung des Modells und in der Regel sind ein Zugversuch, ein Druckversuch und ein Schubversuch erforderlich. In Anlehnung an die Vorgehensweise bei den vorangehenden Plastizitätsmodellen werden im Folgenden ausschließlich die wichtigsten Gleichungen zusammengefasst. Eine ausführliche Herleitung, Anwendung und Diskussion des SAMP-Plastizitätsmodells ist beispielsweise in [48] oder [58] zu finden.

Nach [44], [48] und [60] gilt:

$$g = \sigma_{eq}^2 + \alpha \cdot p^2, \quad \alpha = \frac{9}{2} \frac{1-2\nu^{pl}}{1+\nu^{pl}}, \quad f = \sigma_{eq}^2 - A_0 - A_1 \cdot p - A_2 \cdot p^2 \quad (2.72)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \Delta \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \Delta \lambda \cdot \left[3 \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) + \frac{2}{3} \alpha p \boldsymbol{\delta} \right], \quad \Delta \varepsilon^{pl} = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^{pl} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^{pl}}$$

In (2.72) ist ν^{pl} die plastische Querkontraktionszahl, die in einem Standardzugversuch zu bestimmen ist, und $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{dev}^{pl}$ der deviatorische Anteil von $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl}$. Die Parameter A_0 , A_1 und A_2 ergeben sich aus Zug-, Druck- und Schubversuchen und sind wie folgt definiert:

$$A_0 = 3 \cdot \sigma_{Schub}^2, \quad A_1 = 9 \cdot \sigma_{Schub}^2 \left(\frac{\sigma_{Druck} - \sigma_{Zug}}{\sigma_{Druck} \cdot \sigma_{Zug}} \right), \quad A_2 = 9 \cdot \left(\frac{\sigma_{Druck} \cdot \sigma_{Zug} - 3 \cdot \sigma_{Schub}^2}{\sigma_{Druck} \cdot \sigma_{Zug}} \right) \quad (2.73)$$

In Abbildung 2.20 ist die SAMP-Fließfläche mit den benötigten Kalibrierversuchen dargestellt.

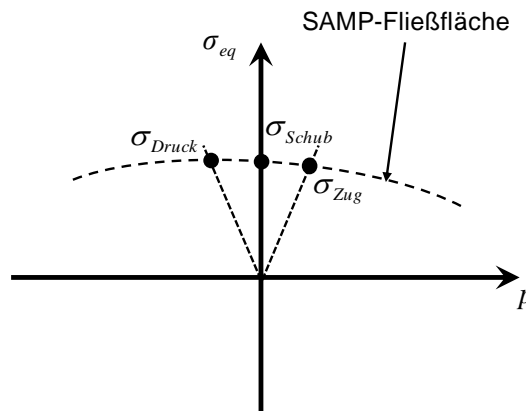


Abbildung 2.20: SAMP-Fließfläche

Für den Fall, dass beispielsweise nur Zug- und Schubversuche zur Verfügung stehen, ergeben sich die Parameter A_0 , A_1 und A_2 nach [60] zu:

$$A_0 = 3 \cdot \sigma_{Schub}^2, \quad A_1 = 3 \cdot \left(\frac{\sigma_{Zug}^2 - \sigma_{Schub}^2}{\sigma_{Zug}} \right), \quad A_2 = 0 \quad (2.74)$$

Und für den Fall, dass nur Zug- und Druckversuche verfügbar sind, gilt vereinfachend [44]:

$$A_0 = \sigma_{Zug} \cdot \sigma_{Druck}, \quad A_1 = 3 \cdot (\sigma_{Druck} - \sigma_{Zug}), \quad A_2 = 0 \quad (2.75)$$

Die Herleitung einer algorithmisch konsistenten Tangentensteifigkeitsmatrix, wie sie beispielsweise Doghri [57] definiert, ist derzeit in der Literatur nur für die in Gleichung (2.75) beschriebene Vereinfachung verfügbar und kann für diesen Fall [44] entnommen werden.

2.6 Elastisch-plastische Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe

Grundlage der Effektiven-Feld-Theorie ist die Annahme von homogenen, mittleren Dehnungen und Spannungen im betrachteten Volumen (vgl. Abschnitt 2.3). Diese Annahme ist für ein elastisches Werkstoffverhalten hinreichend, verliert jedoch beim Übergang hin zu einem plastischen Werkstoffverhalten ihre Gültigkeit. In [23], [50], [51], [52], [55] und [61] wird beispielsweise aufgezeigt, dass in elastisch-plastischen Homogenisierungsformulierungen die Fließgrenze in der Regel überschätzt und die Verfestigung zu steif berechnet werden. In Abbildung 2.21 ist dies anhand einer simulierten technischen Spannungs-/technischen Dehnungs-Kurve grafisch dargestellt. Basis der Simulationen ist ein repräsentatives Mikrostrukturmodell (RMS) mit einem Fasergewichtsanteil von 20 %. Die Fasern weisen ein elastisches und die Kunststoffmatrix ein elastisch-plastisches Werkstoffverhalten mit von Mises-Plastizität auf. Die verwendeten Daten sind im Folgenden aufgeführt:

$$\begin{aligned} E_{Matrix} &= 2100 \text{ MPa}, \quad \nu_{Matrix} = 0,42, \quad \sigma_{y,Zug} = 45 \text{ MPa} \\ E_{Faser} &= 72000 \text{ MPa}, \quad \nu_{Faser} = 0,22, \quad l/d = 20, \quad vol. - \% = 12,561 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Hierbei sind in (2.76) E_{Matrix} bzw. E_{Faser} der Elastizitätsmodul der Matrix bzw. der Faser. Die Querkontraktionszahlen von Matrix und Faser sind mit ν_{Matrix} und ν_{Faser} gegeben, die Fließgrenze der Matrix mit $\sigma_{y,Zug}$, das Aspektverhältnis der Faser mit l/d und der Faservolumenanteil mit $vol. - \%$. Anhand von Abbildung 2.21 ist deutlich zu erkennen, dass das mechanische Verhalten des RMS in Faserrichtung (0° Orientierung) im plastischen Bereich unter Verwendung des zweistufigen Mori-Tanaka-Homogenisierungsansatzes (MT) als zu steif angesehen wird. Des Weiteren wird der Fließbeginn überschätzt. Die Kurven der 90° -Simulationsergebnisse sind hingegen identisch.

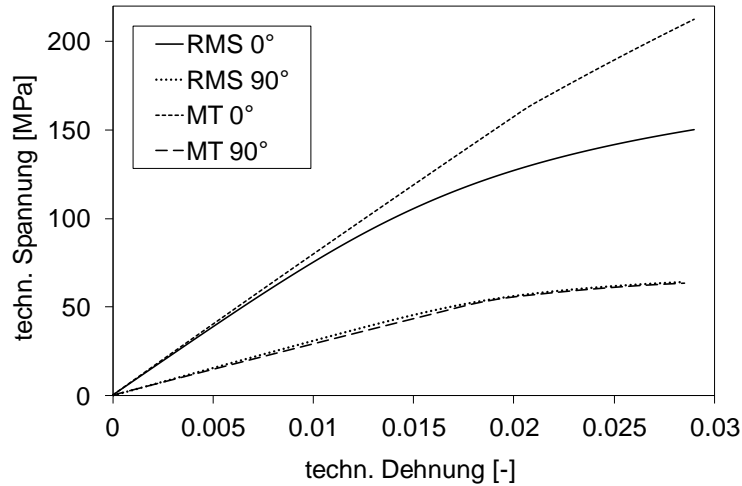


Abbildung 2.21: Vergleich zwischen RMS-Berechnungen und MT Berechnungen nach [61]

Vor diesem Hintergrund werden in den beiden folgenden Abschnitten Erweiterungen vorgestellt, die eine verbesserte, elastisch-plastische Modellierung kurzfaserverstärkter Kunststoffe erlauben. Eine Isotropierung der Steifigkeitsmatrix der unverstärkten Kunststoffes (Abschnitt 2.6.1) trägt dazu bei, die Gesamtsteifigkeit des Verbundwerkstoffes im plastischen Bereich zu reduzieren [50]. Zur Herabsetzung der Fließspannung existieren derzeit in der Literatur zwei Ansätze. Zum einen kann der Matrixwerkstoff durch einen „virtuellen“ Matrixwerkstoff ersetzt und zum anderen kann eine sogenannte Momentenformulierung zweiter Ordnung [62] für die Fließspannungsberechnung angewendet werden. Beide Ansätze werden in Abschnitt 2.6.2 vorgestellt.

2.6.1 Isotropierungskonzepte

Ein vierstufiger, isotroper Steifigkeitstensor kann ausgehend vom Kompressionsmodul K und Schubmodul G wie folgt definiert werden:

$$\mathbf{S}^{iso} = 3K\mathbf{I}_{vol} + 2G\mathbf{I}_{dev} = (\mathbf{I}_{vol} :: \mathbf{S}^{iso})\mathbf{I}_{vol} + \frac{1}{5}(\mathbf{I}_{dev} :: \mathbf{S}^{iso})\mathbf{I}_{dev} \quad (2.77)$$

Mit:

$$\mathbf{I}_{dev} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_{vol}, \quad \mathbf{I}_{vol} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \quad (2.78)$$

Zur Extraktion eines isotropen Anteils \mathbf{S}^{iso} aus einem anisotropen Tensor \mathbf{S}^{aniso} sind demnach zwei skalare Größen K_t und G_t zu finden, die folgende Beziehung erfüllen:

$$\mathbf{S}^{iso} = 3K_t \mathbf{I}_{vol} + 2G_t \mathbf{I}_{dev} \quad (2.79)$$

Im Folgenden werden nun drei Methoden zur Isotropierung vorgestellt.

Allgemeine Methode:

Die allgemeine Methode geht auf Bornert [63] zurück und es gilt:

$$3K_t = \mathbf{I}_{vol} :: \mathbf{S}^{aniso}, 10G_t = \mathbf{I}_{dev} :: \mathbf{S}^{aniso} \quad (2.80)$$

Hieraus folgt die gesuchte und isotropierte Steifigkeitsmatrix zu:

$$\mathbf{S}^{isogen} = (\mathbf{I}_{vol} :: \mathbf{S}^{aniso}) \mathbf{I}_{vol} + \frac{1}{5} (\mathbf{I}_{dev} :: \mathbf{S}^{aniso}) \mathbf{I}_{dev} \quad (2.81)$$

Die Anwendung der Methode auf die Tangentensteifigkeitsmatrix der von Mises-Plastizität aus Gleichung (2.66) liefert:

$$K_t = K, G_t = G - \frac{3}{5} G^2 \left(\frac{1}{3G + \frac{d\kappa}{d\varepsilon^{pl}}} + 4 \frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{trial}} \right) \quad (2.82)$$

Spektrale Methode:

Die spektrale Methode geht auf Ponte Castaneda [64] zurück und ist beschränkt auf Materialmodelle, die folgende Beziehungen für den Normalenvektor nach Gleichung (2.55) erfüllen:

$$N_{ij} = N_{ji}, N_{ii} = 0, \mathbf{N} : \mathbf{N} = \frac{3}{2} \quad (2.83)$$

Zudem muss folgende Kollinearitätsbedingung gültig sein:

$$dev(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) // \mathbf{N} \quad (2.84)$$

Sind die Voraussetzungen aus (2.83) und (2.84) erfüllt, wie dies beispielsweise bei der von Mises-Plastizität der Fall ist, so gilt für den anisotropen Tangentensteifigkeitstensor:

$$\mathbf{S}^{aniso} = 3k_1 \mathbf{I}_{vol} + 2k_2 \left(\mathbf{I}_{dev} - \frac{2}{3} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) + 2k_3 \left(\frac{2}{3} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \right) \quad (2.85)$$

Die Anwendung auf Gleichung (2.66) liefert in diesem Fall:

$$k_1 = K_t, k_3 = G_t \quad (2.86)$$

$$K_t = K, G_t = G \left[1 - \frac{3G}{3G + \frac{d\kappa}{d\varepsilon^{pl}}} \right], k_2 = G \left[1 - 3G \frac{\Delta\lambda}{\sigma_{eq}^{trial}} \right] \quad (2.87)$$

Einsetzen in Gleichung (2.85) liefert schließlich die gesuchte und isotropierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{S}^{isosp} .

Modifizierte Spektrale Methode:

Selmi et al. [65] stellen eine modifizierte Version zur Berechnung von G_t aus Gleichung (2.87) vor:

$$G_t = G \left[1 - \frac{3G}{3G + \frac{d\kappa}{d\varepsilon^{pl}} (H_{\varepsilon^{pl}} \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} + H_0)} \right] \quad (2.88)$$

In (2.88) sind $H_{\varepsilon^{pl}}$ und H_0 Kalibrierparameter, die anhand von Zugversuchsdaten bestimmt werden.

Kammoun et al. führen in [66] einen weiteren Kalibrierparameter H_μ ein, sodass folgt:

$$G_t = G \cdot H_\mu \left[1 - \frac{3G}{3G + \frac{dk}{d\varepsilon^{pl}} (H_{\varepsilon^{pl}} \varepsilon^{pl} + H_0)} \right] \quad (2.89)$$

Chaboche et al. [67], wie auch Doghri et al. [50] und Pierard [23] untersuchen ausführlich die Auswirkungen der Isotropierung auf die anisotrope Verbundsteifigkeit S^{tg} . So zeigen beispielsweise Doghri et al. in [50], dass $S^{tg} \geq S^{isosp}$ und Pierard zeigt in [23], dass $S^{isogen} > S^{isosp}$ und dass für einen makroskopischen Zugversuch $S^{isogen} > S^{tg}$ ist. Zusammenfassend ist festzustellen, dass die Anwendung einer Isotropierungsmethode zur Reduktion der Steifigkeit führt. Dieser Effekt ist bei der Anwendung der spektralen Methode am stärksten ausgeprägt. Jiang et al. [55] untersuchen die Auswirkungen der Isotropierung auf die Gesamtsteifigkeit bei der Drucker-Prager-Plastizität und Pierard et al. [68] untersuchen dies entsprechend für die von Mises-Plastizität. In [68] wird die Anwendung der spektralen Isotropierung zur Berechnung des Hill-Tensors \mathbf{P} (2.29) und Eshelby-Tensors \mathbf{E} (2.26) empfohlen, wohingegen Jiang et al. in [55] für die Drucker-Prager-Plastizität die anzuwendende allgemeine Isotropierung ausschließlich zur Berechnung des Eshelby-Tensors empfehlen. In Abbildung 2.22 ist als Ergebnis die Anwendung der spektralen Isotropierungsmethode in Kombination mit der von Mises-Plastizität (MT-iso-1) für das in Abbildung 2.21 eingeführte Beispiel dargestellt. Insgesamt ist festzustellen, dass die erzielten Simulationsergebnisse durch Anwendung der spektralen Isotropierung noch nicht zufriedenstellend sind.

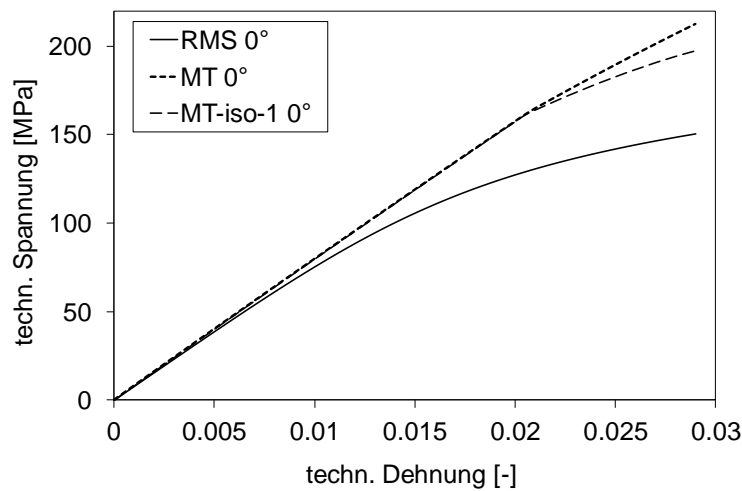


Abbildung 2.22: Anwendung der spektralen Isotropierungsmethode nach [61]

2.6.2 Momentenformulierung erster und zweiter Ordnung

Das in Abbildung 2.22 dargestellte Ergebnis verdeutlicht anschaulich die Notwendigkeit der Reduktion der Fließspannung. Eine Möglichkeit dies zu erreichen besteht in der Formulierung einer „virtuellen“ Matrix, welche sich durch einen frühzeitigeren Fließbeginn und einen abweichenden Verfestigungsverlauf im Vergleich zu den experimentellen Matrixdaten auszeichnet. Eine Kalibrierung kann dazu führen, dass die Verbundsteifigkeit unter 0° gut repräsentiert wird. Eine solche Kalibrierung führt aber zwangsläufig auch dazu, dass die Verbundsteifigkeit unter 90° zur Faserausrichtung deutlich unterschätzt wird. Die Simulationsergebnisse des in Abbildung 2.21 eingeführten Beispiels unter Verwendung einer kalibrierten virtuellen Matrix (MT-iso-virt) sind in Abbildung 2.23 dargestellt.

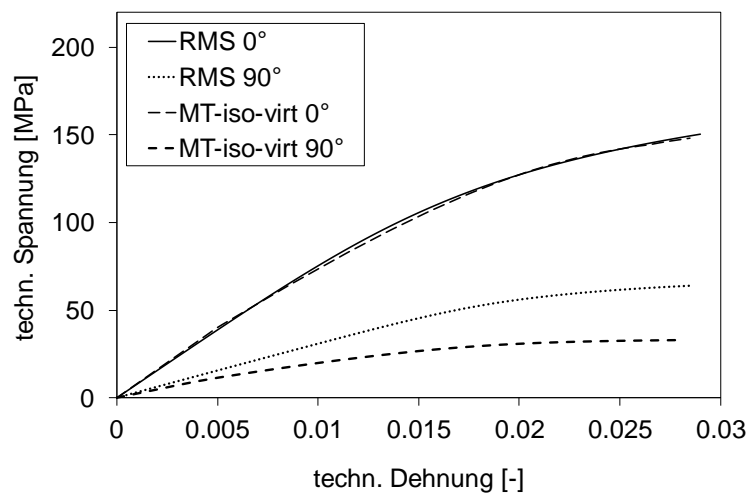


Abbildung 2.23: Simulationsergebnisse unter Anwendung einer virtuellen Matrix nach [61]

Die verwendete, virtuelle Zugversuchskurve des Matrixwerkstoffes, die zur Erzeugung der in Abbildung 2.23 dargestellten Berechnungsergebnisse eingesetzt wird, ist im Vergleich zur experimentellen Zugversuchskurve in Abbildung 2.24 abgebildet. Es wird deutlich, dass die virtuelle Matrix einen wesentlich reduzierten Fließbeginn aufweist. Die Anwendung eines spannungsbasierten Dimensionierungskriteriums auf Matrixebene ist beispielweise in diesem Zusammenhang problematisch, wenn für die Kalibrierung Literatur bzw. Datenbankwerte verwendet werden.

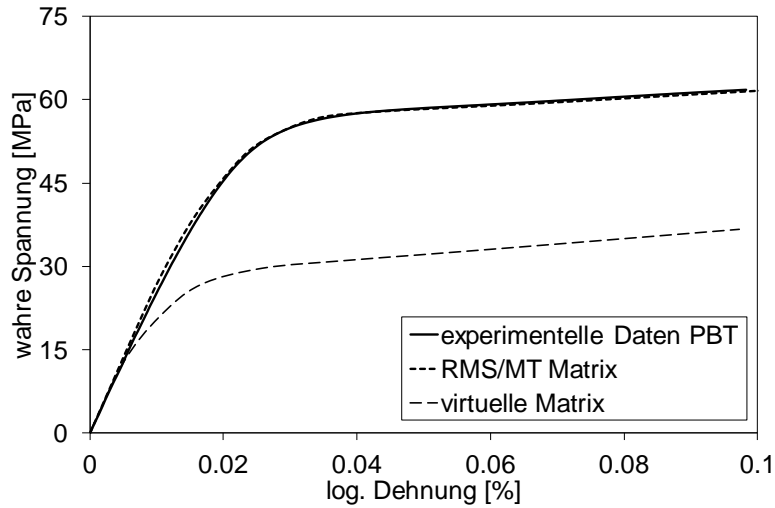


Abbildung 2.24: Experimentelle und virtuelle Zugversuchskurve des jeweiligen Matrixwerkstoffes im Vergleich

Eine alternative Möglichkeit zur Reduktion des Fließbeginns besteht darin, die klassische Berechnung der von Mises-Spannung basierend auf dem ersten Moment der Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ (Methode erster Ordnung) zu ersetzen. Dies ist nach Suquet [69] bzw. Ponte Castaneda et al. [70] möglich durch die Anwendung des zweiten Moments der Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$. Dieses ist analog zu den Ausführungen von Suquet [69], Bobeth et al. [71] und Buryachenko [72] wie folgt zu berechnen:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 = \frac{1}{v^0} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle : \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{S}^0} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.90)$$

Unter Verwendung von Gleichung (2.90) kann ein sogenanntes von Mises-Spannungsmaß zweiter Ordnung berechnet werden und nach [73] bzw. [74] gilt:

$$\sigma_{eq}^z = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{I}_{dev} :: \langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \rangle} = 3G \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{I}_{dev} :: \langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} \quad (2.91)$$

Derzeit ist eine Lösung von Gleichung (2.90) für den linear elastischen Fall für kugelförmige Einschlüsse in [69] und für ellipsoide Einschlüsse in [42] dargestellt. Brenner et al. [75] schlagen zudem eine numerische Lösung vor. Anhand von Gleichung (2.91) wird deutlich, dass zur Berechnung nicht die mittlere Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ (Moment erster Ordnung) sondern das zweite Moment der Dehnung $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ verwendet wird, woraus die entsprechende Namensgebung resultiert. Eine detaillierte Diskussion der Thematik ist in [64] und [76] zu finden. Die

Simulationsergebnisse für das in Abbildung 2.21 eingeführte Beispiel unter Anwendung der Momentenformulierung zweiter Ordnung und unter Verwendung der numerischen Implementierung nach [62] sind in Abbildung 2.25 dargestellt und mit MT-iso-2 bezeichnet. Es wird ersichtlich, dass unter 0° eine höhere Simulationsgüte zu erzielen ist.

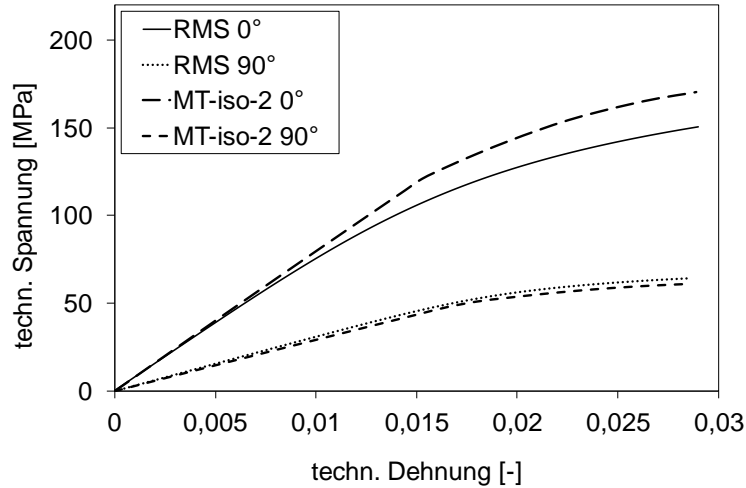


Abbildung 2.25: Ergebnis der Anwendung des 2. Moments nach [61]

2.6.3 Inkrementelle Formulierung der zweistufigen Homogenisierung

Zur Umsetzung und Erweiterung der vorgestellten Homogenisierungsansätze für kurzfaserverstärkte Kunststoffe aus Abschnitt 2.3 ist eine inkrementelle Formulierung nötig. Diese geht auf Hill [77] zurück und es gilt formal:

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{S}_p^{tg}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_p \quad (2.92)$$

Mit der Einführung eines Referenzmaterials $\tilde{\mathbf{S}}_p^{tg}$ vereinfacht sich (2.92) zu:

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{S}}_p^{tg}(t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_p \quad (2.93)$$

Die wesentliche Herausforderung ist die Definition der benötigten Referenzmaterialien. Tandon et al. [78] berechnen dieses basierend auf den mittleren Dehnungen $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$. Hieraus folgen die Beziehungen:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 = \tilde{\mathbf{H}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 \quad (2.94)$$

$$\langle \dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle = \tilde{\mathbf{S}}^{tg} : \langle \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \quad (2.95)$$

Durch Einsetzen folgt schließlich:

$$\tilde{\mathbf{S}}^{tg} = \tilde{\mathbf{S}}^0 : \left\{ \mathbf{I} - \nu_1 \left[(\tilde{\mathbf{S}}^1 - \tilde{\mathbf{S}}^{0,tg}) : (\mathbf{E} - \nu_1(\mathbf{E} - \mathbf{I})) + \tilde{\mathbf{S}}^{0,tg} \right]^{-1} : [\tilde{\mathbf{S}}^1 - \tilde{\mathbf{S}}^{0,tg}] \right\}^{-1} \quad (2.96)$$

Dies entspricht der Vorgehensweise von Doghri et al., wie beispielsweise in [50] ausgeführt. In einem letzten Schritt ist eine Diskretisierung im Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ umzusetzen. Angewendet auf Gleichung (2.37) bzw. (2.48) ergibt sich:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = (\tilde{\mathbf{S}}^{tg})_{t=t_{n+\alpha}} : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (2.97)$$

Zur Diskretisierung setzen Pettermann et al. [52] wie auch Doghri et al. [50] eine generalisierte Mittelpunktsregel ein. Diese ist wie folgt definiert:

$$t_{n+\alpha} = (1-\alpha)t_n + \alpha t_{n+1}, \alpha = 1/2 \quad (2.98)$$

Die wesentlichen Schritte der Implementierung mit einer elastischen Faser und einer elastisch-plastischen Matrix sind in einer Übersicht in Tabelle 2.1 dargestellt, um später auf erforderliche Erweiterungen und Änderungen im Vergleich zu diesem Ansatz konkret eingehen zu können. Weiterführende, detaillierte Informationen zur numerischen Implementierung sind [50], [52] und [62] zu entnehmen.

1.	Input:	$\boldsymbol{\varepsilon}_{t_n}, \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
2.	Linear elast. Berechnung von:	$\boldsymbol{S}^{el,0}$
3.	Linear elast. Berechnung von:	$\boldsymbol{S}^{el,1}$
4.	Linear elast. Berechnung von:	\boldsymbol{S}^{el}
5.	Linear elast. Berechnung des zweiten Momentes der von Mises-Spannung der Matrix mit 1., 2. und 4.:	$\sigma_{eq,t_{n+1}}^z$
6.	Setze:	$\langle\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^1 \leftarrow \Delta\boldsymbol{\varepsilon}$
7.	Berechne:	$\langle\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^0 = \frac{\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \nu^1 \langle\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^1}{1 - \nu^1}$
8.	Berechne elastisch-plastische Tangentensteifigkeit der Matrix mit von Mises-Plastizitätsmodell:	$\tilde{\boldsymbol{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^0$
9.	Extrahiere isotropen Anteil mittels modifizierter spektraler Methode:	$\tilde{\boldsymbol{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{0,isospe}$
10.	Berechne mit 9. Eshelby-Tensor:	$\boldsymbol{E}_{t_{n+\frac{1}{2}}}$
11.	Berechne mit 3., 9. und 10. \boldsymbol{H} -Tensor:	$\boldsymbol{H}_{t_{n+\frac{1}{2}}} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{E}_{t_{n+\frac{1}{2}}} : \left(\tilde{\boldsymbol{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{0,isospe} \right)^{-1} : \left(\boldsymbol{S}^1 - \tilde{\boldsymbol{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^0 \right) \right]^{-1}$
12.	Berechne den Konzentrations-tensor mit 8.:	$\boldsymbol{A}_{MT,t_{n+\frac{1}{2}}} = \left[\nu_0 \boldsymbol{I} + \nu_1 \boldsymbol{H}_{t_{n+\frac{1}{2}}} \right]^{-1}$
13.	Berechne Residuum:	$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}_{MT,t_{n+\frac{1}{2}}} : \left[\nu^1 \boldsymbol{A}_{MT,t_{n+\frac{1}{2}}} + \nu^0 \boldsymbol{I} \right]^{-1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \langle\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^1$
14.	Prüfe:	$\boldsymbol{R} < \text{Toleranz}$
15.	Falls nein, zurück zu 6., falls ja folgt gehe zu 16.	$\langle\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^1 \leftarrow \langle\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle^1 + \zeta \boldsymbol{R}, \zeta \in]0,1]$
16.	Output: Berechne mit 3., 9. und 12. Verbundsteifigkeitsmatrix und Spannungsinkrement:	$\tilde{\boldsymbol{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{tg}, \Delta\boldsymbol{\sigma}$

Tabelle 2.1: Übersicht der numerischen Implementierung mit von Mises-Plastizität (MT-iso-2)

2.7 Dimensionierungskriterien

In der Literatur existieren diverse Ansätze zur Dimensionierung bzw. zur Versagens- und Schädigungsmodellierung von Verbundwerkstoffen. Die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten kurzfaserverstärkten, thermoplastischen Kunststoffe zeigen ein komplexes Versagen, welches in der Regel eine Kombination aus Faserenthaftung, Matrixbruch und Faserbruch darstellt (siehe Abbildung 2.26).

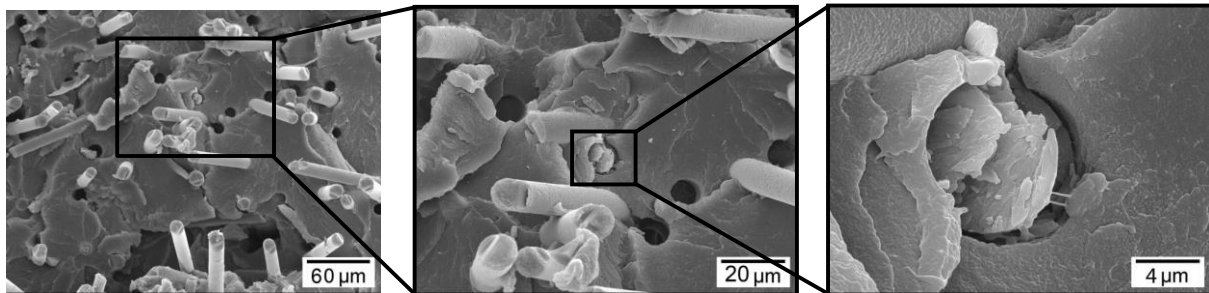


Abbildung 2.26: REM-Versagensbruchbild eines kurzfaserverstärkten Kunststoffes

Die existierenden Ansätze zur Versagens- und Schädigungsmodellierung von kurzfaserverstärkten Kunststoffen lassen sich im Allgemeinen in zwei Klassen unterteilen. Die erste Klasse beinhaltet rein phänomenologische Schädigungsmodelle [79], [80] und [81], die ohne mikromechanische Modellierungsansätze auskommen. Diese Modelle werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter betrachtet. Wesentlich interessanter erscheint die zweite Klasse an Modellen. Diese beinhaltet mikromechanische Versagens- oder Schädigungsmodelle, die auf der Mori-Tanaka-Homogenisierung aufbauen. Das Versagen wird von [82] und [83] beispielsweise durch Mikrorisse initiiert, die akkumuliert eine dritte Phase bilden. In [66], [84], [85] und [86] werden bestehende Versagenskriterien in den Homogenisierungsansatz integriert. Des Weiteren wird in [87] und [88] die Mori-Tanaka-Homogenisierung mit einer Schädigungsformulierung kombiniert. Von der hier aufgeführten Auswahl an Literaturquellen der zweiten Klasse betrachten allerdings ausschließlich [86] und [66] ein elastisch-plastisches Verbundwerkstoffverhalten. Trotz guter Prognosegüte werden im Rahmen dieser Arbeit keine phänomenologischen Schädigungsformulierungen betrachtet, da diese in der Regel mit einem erhöhten Versuchsaufwand einhergehen. Mit einem überschaubaren Aufwand dagegen sind Versagenskriterien wie beispielsweise das Tsai-Hill- [89] oder Tsai-Wu-Kriterium [90] zu kalibrieren und in die mikromechanische Modellierung zu integrieren. Dieser Sachverhalt erscheint insbesondere aus technisch-wirtschaftlicher Sicht interessant und wird im Nachfolgenden näher betrachtet.

Die im Folgenden aufgeführten Kriterien zur Auslegung und Dimensionierung beziehen sich zunächst auf einen orthotropen Werkstoff, d. h. es existieren, wie in Abbildung 2.27 dargestellt, drei Symmetrieebenen.

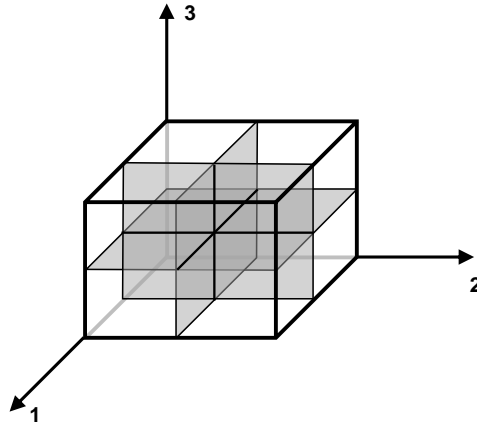


Abbildung 2.27: Symmetrieebenen der Orthotropie

Ausgehend von der Annahme der Orthotropie ergeben sich neun Festigkeitskennwerte für die vollständige Beschreibung. Die hierfür benötigten Zug-, Druck- und Schubversuchskennwerte sind in Abbildung 2.28 dargestellt.

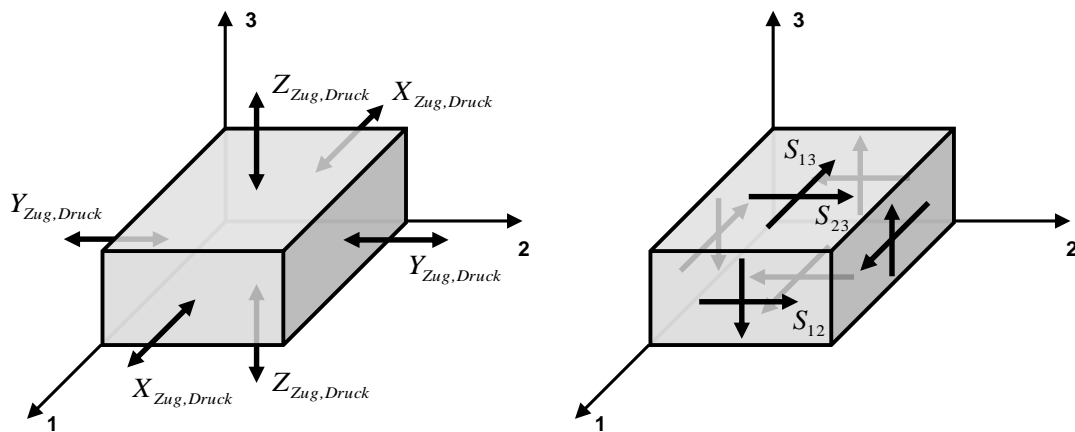


Abbildung 2.28: Orthotrope Zug-, Druck und Schubfestigkeitskennwerte

Insgesamt sind neun Versuche zur Charakterisierung eines orthotropen Werkstoffes notwendig. Wird anstelle eines orthotropen ein transversal isotroper Werkstoff betrachtet, reduziert sich der Versuchsaufwand von neun auf sechs Versuche und es gilt:

$$Y_{\text{Zug,Druck}} = Z_{\text{Zug,Druck}}, \quad S_{13} = S_{12} \quad (2.99)$$

Die sich daraus ergebenden Symmetrieebenen sind in Abbildung 2.29 und die benötigten Kennwerte in Abbildung 2.30 dargestellt, wobei die 2-3 Ebene die Isotropieebene bildet.

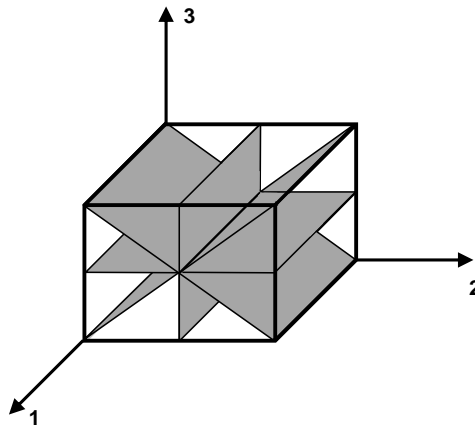


Abbildung 2.29: Symmetrieebenen der transversalen Isotropie

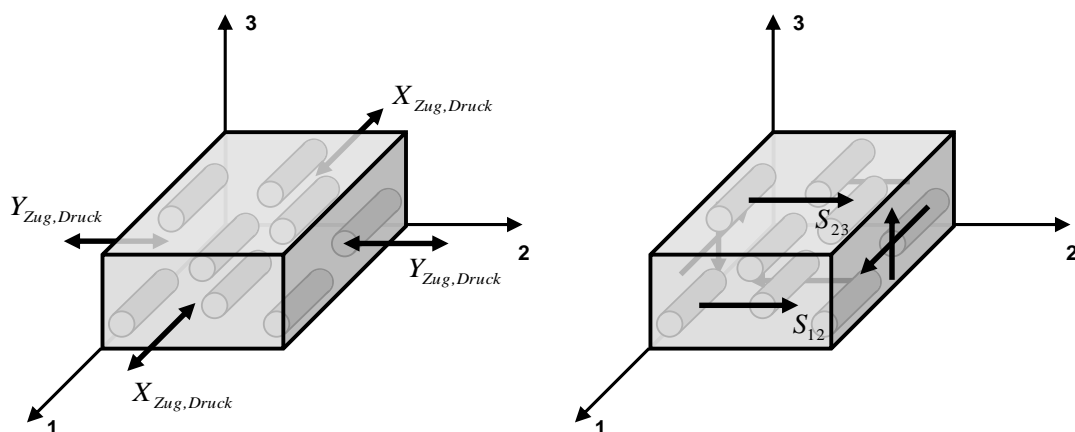


Abbildung 2.30: Transversal isotrope Zug-, Druck- und Schubfestigkeitskennwerte

Wird ein isotroper Werkstoff betrachtet, reduziert sich der Versuchsaufwand auf drei Versuche, wie in Abbildung 2.31 dargestellt, und es gilt:

$$X_{Zug,Druck} = Y_{Zug,Druck} = Z_{Zug,Druck}, \quad S_{23} = S_{13} = S_{12} \quad (2.100)$$

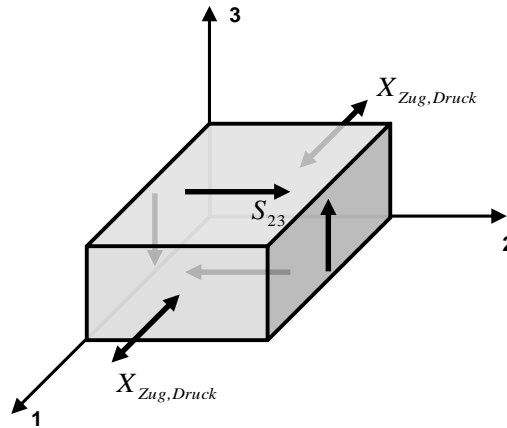


Abbildung 2.31: Isotrope Festigkeitskennwerte

Unter der Annahme, dass das Versagen nur infolge gestaltändernder und nicht aufgrund hydrostatischer Beanspruchung resultiert (von Mises-Bedingung, siehe auch Abschnitt 2.5.2) gilt:

$$X_{Zug} = X_{Druck} = \sqrt{3} \cdot S_{23} \quad (2.101)$$

Demnach ist zur Kalibrierung lediglich ein Versuch notwendig. In der Literatur werden in der Regel zwei Typen von Dimensionierungskriterien unterschieden (siehe [91], [92] und [93]). Hierzu zählen zum einen sogenannte lineare Kriterien, bei denen keine Interaktionen zwischen den einzelnen wirkenden Spannungen oder Dehnungen berücksichtigt werden, und zum anderen quadratische Kriterien, die zusätzlich Interaktionen berücksichtigen.

2.7.1 Lineare Kriterien

Für einen orthotropen Werkstoff ist das maximale Spannungskriterium nach [91] wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 e_1^{Zug} &= \frac{\sigma_{11}}{X_{Zug}}, \sigma_{11} \geq 0 & e_1^{Druck} &= \frac{|\sigma_{11}|}{X_{Druck}}, \sigma_{11} \leq 0 & e_4 &= \frac{|\sigma_{12}|}{S_{12}} \\
 e_2^{Zug} &= \frac{\sigma_{22}}{Y_{Zug}}, \sigma_{22} \geq 0 & e_2^{Druck} &= \frac{|\sigma_{22}|}{Y_{Druck}}, \sigma_{22} \leq 0 & e_5 &= \frac{|\sigma_{13}|}{S_{13}} \\
 e_3^{Zug} &= \frac{\sigma_{33}}{Z_{Zug}}, \sigma_{33} \geq 0 & e_3^{Druck} &= \frac{|\sigma_{33}|}{Z_{Druck}}, \sigma_{33} \leq 0 & e_6 &= \frac{|\sigma_{23}|}{S_{23}}
 \end{aligned} \quad (2.102)$$

Demnach sind neun Versuche zur Kalibrierung notwendig. Aus (2.102) lässt sich folgende Versagensbedingung ableiten:

$$f_i^{MS} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } e_i^{Zug,Druck} < 1 \\ 1 & \text{wenn } e_i^{Zug,Druck} \geq 1 \end{cases} \quad \text{für } i = 1 \dots 6 \quad (2.103)$$

Ein Versagen tritt auf, sobald die Bedingungen $f_i^{MS} = 1$ erfüllt ist. Wird anstelle eines orthotropen Werkstoffes ein transversal isotroper Werkstoff betrachtet, reduziert sich der Versuchsaufwand auf sechs Versuche und Gleichung (2.99) ist gültig. Eine weitere Vereinfachung auf drei Versuche ist möglich unter der Voraussetzung von Isotropie (siehe Gleichung (2.100)). Ist die von Mises-Bedingung erfüllt, gilt Gleichung (2.101) und es genügt ein Versuch. Bei der Betrachtung von Dehnungen anstelle von Spannungen ergibt sich analog das maximale Dehnungskriterium [91]. Es gilt:

$$\begin{aligned} e_{\varepsilon,1}^{Zug} &= \frac{\varepsilon_{11}}{X_{\varepsilon,Zug}}, \varepsilon_{11} \geq 0 & e_{\varepsilon,1}^{Druck} &= \frac{|\varepsilon_{11}|}{X_{\varepsilon,Druck}}, \varepsilon_{11} \leq 0 & e_{\varepsilon,4} &= \frac{|\varepsilon_{12}|}{S_{\varepsilon,12}} \\ e_{\varepsilon,2}^{Zug} &= \frac{\varepsilon_{22}}{Y_{\varepsilon,Zug}}, \varepsilon_{22} \geq 0 & e_{\varepsilon,2}^{Druck} &= \frac{|\varepsilon_{22}|}{Y_{\varepsilon,Druck}}, \varepsilon_{22} \leq 0 & e_{\varepsilon,5} &= \frac{|\varepsilon_{13}|}{S_{\varepsilon,13}} \\ e_{\varepsilon,3}^{Zug} &= \frac{\varepsilon_{33}}{Z_{\varepsilon,Zug}}, \varepsilon_{33} \geq 0 & e_{\varepsilon,3}^{Druck} &= \frac{|\varepsilon_{33}|}{Z_{\varepsilon,Druck}}, \varepsilon_{33} \leq 0 & e_{\varepsilon,6} &= \frac{|\varepsilon_{23}|}{S_{\varepsilon,23}} \end{aligned} \quad (2.104)$$

Es sind neun Versuche zur Kalibrierung im orthotropen Fall notwendig und die Versagensbedingung folgt zu:

$$f_i^{MD} = \begin{cases} 0 & \text{wenn } e_{\varepsilon,i}^{Zug,Druck} < 1 \\ 1 & \text{wenn } e_{\varepsilon,i}^{Zug,Druck} \geq 1 \end{cases} \quad \text{für } i = 1 \dots 6 \quad (2.105)$$

Eine Reduktion der benötigten Anzahl an Versuchen ist analog zum maximal Spannungskriterium möglich. Durch die fehlende Interaktion der einzelnen Spannungs- bzw. Dehnungskomponenten kann in bestimmten Fällen ein physikalisch unrealistisches Verhalten auftreten [94]. Bei Kriterien, die innerhalb einer skalaren Gleichung die Interaktion der Spannungs- bzw. Dehnungskomponenten erfassen, ist dies nicht der Fall.

2.7.2 Quadratische Kriterien

Quadratische Kriterien berücksichtigen die Interaktionen zwischen den wirkenden Spannungen und gehen im Wesentlichen auf Hill [95] zurück. Allgemein sind zwei Formulierungen einer quadratischen Versagensfläche verbreitet:

$$\boldsymbol{\sigma}^T : \mathbf{F} : \boldsymbol{\sigma} = 1 \quad (2.106)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T : \mathbf{F} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} : \boldsymbol{\sigma} = 1 \quad (2.107)$$

In Gleichung (2.106) und (2.107) sind \mathbf{F} bzw. \mathbf{b} die vier- bzw. zweistufige Festigkeitstensoren. Gleichung (2.106) wird beispielsweise von [89] und [96] verwendet, wobei die hier verwendete Formulierung auf Azzi et al. [89] zurückgeht und in der Literatur als Tsai-Hill-Kriterium bekannt ist. Formal lässt sich die Gleichung umschreiben, so dass gilt:

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2(L\sigma_{12}^2 + M\sigma_{13}^2 + N\sigma_{23}^2) = 1 \quad (2.108)$$

Die Koeffizienten F , G , H , L , M , N ergeben sich aus den experimentell zu ermittelnden Zugfestigkeitskennwerten nach Abbildung 2.28 zu:

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}, \quad 2G = \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2}, \quad 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \quad (2.109)$$

beziehungsweise aus den Schubfestigkeitskennwerten zu:

$$2L = \frac{1}{S_{12}^2}, \quad 2M = \frac{1}{S_{13}^2}, \quad 2N = \frac{1}{S_{23}^2} \quad (2.110)$$

Eine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckfestigkeit ist nicht vorgesehen. Es sind sechs Festigkeitskennwerte zur Kalibrierung nötig. Wird ein transversal isotroper Werkstoff betrachtet, ist erneut Gleichung (2.99) gültig und die Anzahl der Versuche reduziert sich auf vier. Eine weitere Reduktion auf drei Versuche ist nach [91] möglich unter der Annahme von:

$$S_{23} = -0.5\sqrt{Y \cdot Y} \quad (2.111)$$

Das in Gleichung (2.107) allgemein formulierte Kriterium wird beispielsweise von [97] und [90] angewendet. Weitverbreitet ist die Formulierung nach [90], die in der Literatur unter dem Namen Tsai-Wu-Kriterium bekannt ist. Es gilt:

$$b_1\sigma_{11} + b_2\sigma_{22} + b_3\sigma_{33} + F_{11}\sigma_{11}^2 + F_{22}\sigma_{22}^2 + F_{33}\sigma_{33}^2 + 2F_{12}\sigma_{11}\sigma_{22} + 2F_{23}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2F_{13}\sigma_{11}\sigma_{33} + F_{44}\sigma_{12}^2 + F_{55}\sigma_{13}^2 + F_{66}\sigma_{23}^2 = 1 \quad (2.112)$$

Die benötigten Terme ergeben sich nach [91] und [90] zu:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{X_{\text{Zug}}} - \frac{1}{X_{\text{Druck}}}, & b_2 &= \frac{1}{Y_{\text{Zug}}} - \frac{1}{Y_{\text{Druck}}}, & b_3 &= \frac{1}{Z_{\text{Zug}}} - \frac{1}{Z_{\text{Druck}}} \\ F_{11} &= \frac{1}{X_{\text{Zug}}X_{\text{Druck}}}, & F_{22} &= \frac{1}{Y_{\text{Zug}}Y_{\text{Druck}}}, & F_{33} &= \frac{1}{Z_{\text{Zug}}Z_{\text{Druck}}} \\ F_{44} &= \frac{1}{S_{12}^2}, & F_{55} &= \frac{1}{S_{13}^2}, & F_{66} &= \frac{1}{S_{23}^2} \\ F_{12} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{X_{\text{Zug}}X_{\text{Druck}}Y_{\text{Zug}}Y_{\text{Druck}}}}, & F_{13} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{X_{\text{Zug}}X_{\text{Druck}}Z_{\text{Zug}}Z_{\text{Druck}}}}, \\ F_{23} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{Y_{\text{Zug}}Y_{\text{Druck}}Z_{\text{Zug}}Z_{\text{Druck}}}} \end{aligned} \quad (2.113)$$

Das Tsai-Wu-Kriterium ermöglicht eine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckfestigkeit. Zur Kalibrierung sind im orthotropen Fall neun und im transversal isotropen Fall sechs Versuche notwendig. Durch die Anwendung der Vereinfachung nach [91] folgt:

$$F_{66} = 2(F_{22} - F_{23}) \quad (2.114)$$

Hierdurch reduziert sich die Anzahl der zu ermittelnde Versagenskennwerte auf fünf. Wird anstelle der transversalen Isotropie ein isotroper Werkstoff betrachtet, folgt:

$$F_{11} = F_{22} = F_{33}, \quad b_1 = b_2 = b_3, \quad F_{12} = F_{23} = F_{13}, \quad F_{44} = F_{55} = F_{66} \quad (2.115)$$

Zur Kalibrierung verbleiben je ein Zug-, Druck- und ein Schubversuch. An dieser Stelle sei angemerkt, dass sich aus Gleichung (2.108) und den Voraussetzungen aus (2.114) und (2.115) nach [48] ebenfalls das isotrope SAMP-Plastizitätsmodell ableiten lässt. Eine Anwendung des Modells als Dimensionierungskriterium ist allerdings nicht bekannt. Eine Anwendung des hier als SAMP-Kriterium bezeichneten Modells wird im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls

untersucht. Unter der Voraussetzung, dass Gleichung (2.101) und somit die von Mises-Bedingung gültig ist, folgt weiterhin:

$$b_1 = 0, \quad F_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{F_{11} F_{22}} = -\frac{1}{2} F_{11} \quad (2.116)$$

Hieraus kann schließlich das von Mises-Kriterium abgeleitet werden, welches bereits als Plastizitätsmodell in Abschnitt 2.5.2 vorgestellt wurde. Im Rahmen der Anwendung als Dimensionierungskriterium wird es nach [98] wie folgt definiert:

$$\sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} < X_{Zug} \quad (2.117)$$

Nach Gleichung (2.117) ist die Kalibrierung des von Mises-Kriteriums mit einem Zugversuch möglich.

2.7.3 Auswahl

Die unter Abschnitt 2.7.1 und 2.7.2 aufgeführten Kriterien sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst. Im Rahmen dieser Arbeit stehen transversal isotrope bzw. isotrope Werkstoffe bei der Anwendung der Dimensionierungskriterien im Vordergrund. Folglich beschränkt sich die Zusammenfassung auf diese Fälle.

Kriterium		Anzahl Versuche
max. Spannung	Transversal Isotrop	6*
	Isotrop	3**
max. Dehnung	Transversal Isotrop	6*
	Isotrop	3**
Tsai-Hill	Transversal Isotrop	3
Tsai-Wu	Transversal Isotrop	5
SAMP	Isotrop	3
von Mises	Isotrop	1

* 3 Versuche: ohne Zug-Druck-Unterscheidung

** 1 Versuch: Anwendung der von Mises-Bedingung

Tabelle 2.2: Dimensionierungskriterien und Anzahl benötigter Kalibrierversuche

2.8 Zusammenfassung

Tucker et al. [41] und Lusti [5] zeigen, dass das Mori-Tanaka-Modell im Vergleich zur Finite-Elemente-Simulation an einem periodischen, repräsentativen Mikrostrukturmodell mit zylindrischen Fasern Ergebnisse hoher Prognosegüte im elastischen Bereich liefert. Die Erweiterung auf den plastischen Bereich ermöglicht die inkrementelle, zweistufige, elastisch-plastische Mori-Tanaka Formulierung, die auf Pettermann et al. [52] zurückgeht und beispielsweise von Doghri et al. [50] erneut aufgegriffen und erweitert wird. Pierard et al. [42] führen Simulationen mit RMS-Modellen zur Überprüfung von inkrementellen, elastisch-plastischen Mori-Tanaka-Homogenisierungsansätzen durch. In diesem Fall bilden ellipsoide Einschlüsse die Fasern. Insgesamt wird deutlich, dass eine gute Übereinstimmung der Mori-Tanaka-Homogenisierung mit den Berechnungen an RMS-Modellen für den elastischen Bereich vorliegt [5], [23], [41], [42]. Dies gilt allerdings nicht für den Übergang in den plastischen Bereich [23], [42].

Eine Verbesserung der Simulationsgüte im plastischen Bereich kann durch den Einsatz der Isotropierung (siehe Abschnitt 2.6.1) und durch die Verwendung der Momentenformulierung zweiter Ordnung (siehe Abschnitt 2.6.2) erzielt werden. Hieraus erfolgt, dass die inkrementelle, zweistufige Mori-Tanaka-Homogenisierung, wie sie beispielsweise von Doghri et al. [50] erfolgreich angewendet und weiterentwickelt wird (siehe beispielsweise [62], [99], [100] und [101]), als eine vielversprechende Methode zur Berechnung kurzfaserverstärkter Kunststoffe in dieser Arbeit angesehen wird. Kammoun modifiziert diese Homogenisierungsmethode indem er statt der Voigt-Annahme im zweiten Homogenisierungsschritt eine selbstkonsistente Formulierung wählt [40]. Dies ermöglicht eine eventuell realistischere Dehnungsverteilung und führt insgesamt zu einem Verbundwerkstoff mit geringerer Steifigkeit. Nachteilig ist allerdings, dass die gute Übereinstimmung im elastischen Bereich der Mori-Tanaka-Voigt-Homogenisierung verloren geht [40].

Des Weiteren ist festzuhalten, dass RMS-Modelle eine interessante Methode zur Überprüfung von Homogenisierungsansätzen darstellen. So lassen sich beispielsweise nur bedingt unidirektionale Faserausrichtungen im Spritzgussprozess erzeugen (siehe Abbildung 2.1). Zudem sind die exakten geometrischen und mechanischen Werkstoffeigenschaften von der Matrix und den Fasern, sowie die Festigkeit der Faser-Matrix-Haftung nur in RMS-Modellen bekannt. Aus den genannten Gründen eignen sich RMS-Modelle zum einen zur Absicherung von Homogenisierungsansätzen im elastischen Bereich. Zum anderen eignen sie sich aber auch insbesondere zu deren Absicherung bei der Erweiterung auf den plastischen Bereich.

Im Rahmen der Erweiterung des bestehenden Ansatzes in Abschnitt 3 wird die Modifikation des zweistufigen Homogenisierungsansatzes mit Momentenformulierung erster und zweiter Ordnung angestrebt. Zielsetzung ist es hierbei, die Prognosegüte im Übergangsbereich vom elastischen hin zum plastischen Verhalten weiter zu verbessern. Des Weiteren zielt die Erweiterung auf die Integration der Drucker-Prager- und SAMP-Plastizität in den Homogenisierungsansatz ab. Dies wird als zwingend erforderlich angesehen, um dem Verhalten von Kunststoffen unter mechanischer Belastung, insbesondere unter Druck, gerecht zu werden.

In Bezug auf die Integration von Dimensionierungskriterien in den zweistufigen Homogenisierungsansatz sind Informationen über eine umfassende Vergleichsstudie zur Evaluierung der Prognosegüte unterschiedlicher, bestehender Versagenskriterien nicht bekannt. Eine weitere Zielsetzung ist es daher, im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Integration entsprechender Kriterien in den zweistufigen Homogenisierungsansatz umzusetzen, eine entsprechende Vergleichsstudie durchzuführen und aus den Ergebnissen eine Evaluierung nach technisch-wirtschaftlichen Gesichtspunkten abzuleiten.

3 Erweiterung des mikromechanischen Modellierungsansatzes

Im Folgenden werden die in Abschnitt 2 definierten Ansätze zur Berechnung von kurzfaserverstärkten Kunststoffen aufgegriffen, modifiziert und erweitert. Zunächst folgt in Abschnitt 3.1 eine Erläuterung von Möglichkeiten zur Integration von Dimensionierungskriterien in den Homogenisierungsansatz. Anschließend wird eine Erweiterung der elastisch-plastischen Formulierung durch Modifikation der Isotropierung und der Momentenformulierung zweiter Ordnung vorgestellt, sowie die Einbindung der Drucker-Prager- und SAMP-Plastizitätsmodelle dargelegt (Abschnitt (3.2)). Die Anwendung eines Plastizitätsmodells beeinflusst den Einsatz von Dimensionierungskriterien nicht. Es ist allerdings auf eine sinnvolle Kombination bzgl. der Berücksichtigung der volumetrischen Spannung in den Plastizitäts- bzw. in den Versagensmodellen zu achten.

3.1 Integration von Dimensionierungskriterien

Zur Integration von Dimensionierungskriterien werden zwei Strategien erarbeitet. Diese ermöglichen die Einbindung unterschiedlicher Kriterien in den zweistufigen, elastisch-plastischen Modellierungsansatz aus Abschnitt 2.6 zum einen auf der Mikro- und zum anderen auf der Makro-Verbund-Ebene.

3.1.1 Mikro-Verbund-Ebene

Ausgangspunkt der ersten Versagensmodellierungsstrategie ist die Mikro-Verbund-Ebene, die Ebene der ersten Homogenisierungsstufe. In Anlehnung an Abbildung 2.13 aus Abschnitt 2.3.4 weisen die definierten Mikro-Verbunde jeweils eine unidirektionale Faserorientierung und somit eine transversal isotrope Struktur auf. Dies ermöglicht die Anwendung entsprechender transversal isotroper Kriterien aus Tabelle 2.2. Beim Erreichen des versagenskritischen Wertes ist dies als eine Eliminierung des betroffenen n -ten Mikro-Verbundes zu interpretieren. Es gilt formal:

$$\langle \mathcal{S}(\mathbf{p}) \rangle_n = \mathcal{S}_n = 0 \quad (3.1)$$

Dieses Vorgehen ist in Abbildung 3.1 dargestellt und wird beispielsweise in [102] und [103] erfolgreich für ein Tsai-Hill-, maximales Spannungs- und Dehnungskriterium angewendet.

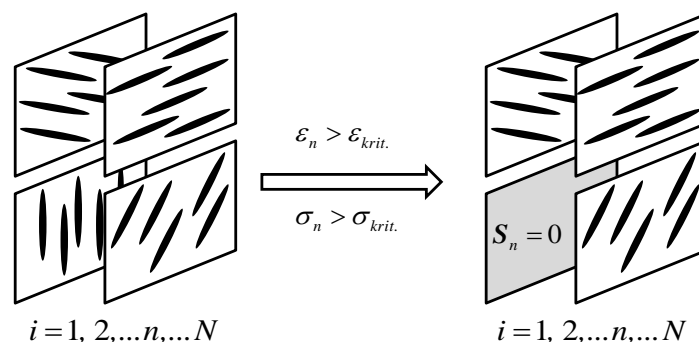


Abbildung 3.1: Umsetzung der Versagensmodellierungsstrategie auf der Mikro-Verbund-Ebene

Das Ausschalten einzelner Mikro-Verbunde kann demnach als eine stufenweise Absenkung der Steifigkeit des Makro-Verbundes und somit als Schädigungsmodellierung angesehen werden. In Tabelle 3.1 sind die im Rahmen der ersten Versagensmodellierungsstrategie angewendeten Kriterien und die dazu benötigten experimentellen Versuche zusammengefasst. Die als optional gekennzeichneten Versuche sind notwendig, falls eine Zug-Druck-Unterscheidung berücksichtigt wird bzw. zur Absicherung der Annahme aus Gleichung (2.111) zur Bestimmung von S_{23} .

Versuch	X_{Zug}	X_{Druck}	Y_{Zug}	Y_{Druck}	S_{12}	S_{23}
max. Spannung	X	O	X	O	X	O
max. Dehnung	X	O	X	O	X	O
Tsai-Hill	X		X		X	O
Tsai-Wu	X	X	X	X	X	X

Tabelle 3.1: Mindestens benötigte (X) und optionale Versuche (O) zur Kalibrierung der Kriterien

3.1.2 Makro-Verbund-Ebene

Im Gegensatz zur Mikro-Verbund-Ebene wird auf der Makro-Verbund-Ebene der Verbundwerkstoff nach der zweiten Homogenisierungsstufe und infolgedessen mit allen auftretenden Orientierungen betrachtet (siehe Abschnitt 2.3.4 Abbildung 2.14). Ein solcher Verbund weist in der Regel eine anisotrope Steifigkeit auf. Die Anwendung entsprechender Kriterien ist aufgrund der wesentlich höheren Anzahl an Kalibrierversuchen aufwendig (siehe Abschnitt 2.7.3). Die Notwendigkeit des Einsatzes von Isotropierungsmethoden zur Verbesserung der Simulationsgüte ist in Abschnitt 2.6.1 erläutert. Die Anwendung einer solchen Methode über-

führt den im Fall vorhandener Plastizität anisotropen Matrixwerkstoff in einen repräsentativen, isotropen Werkstoff. Dies wiederum ermöglicht den Einsatz unterschiedlicher Kriterien auf den Matrixwerkstoff nach der zweiten Homogenisierungsstufe mit einem stark reduzierten, experimentellen Aufwand. Die Umsetzung dieser sogenannten zweiten Versagensmodellierungsstrategie setzt die Kenntnis der Dehnungen bzw. Spannungen in der Matrix voraus. Gemäß der Mori-Tanaka-Formulierung aus Abschnitt 2.3.2 und insbesondere Gleichung (2.31) ist die Berechnung der gesuchten Größen ausgehend von den wirkenden, makroskopischen Verbunddehnungen bzw. Verbundspannungen möglich. Erreicht die Dehnung bzw. Spannung in der Matrix den versagenskritischen Wert, wird die Verbundsteifigkeit auf der Makro-Ebene eliminiert. In diesem Fall gilt:

$$\langle \mathbf{S} \rangle = 0 \tag{3.2}$$

Die beschriebene, zweite Versagensmodellierungsstrategie ist in Abbildung 3.2 grafisch dargestellt. Die angewendeten Kriterien und benötigten, experimentellen Versuche sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

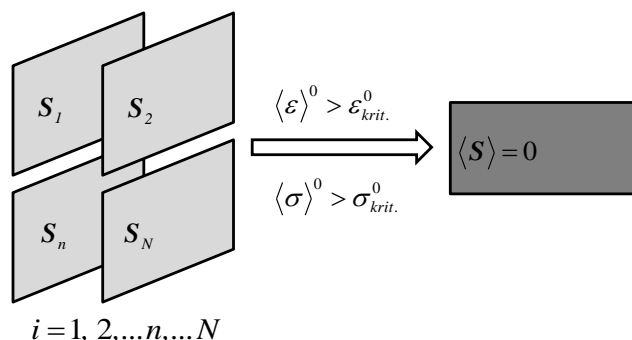


Abbildung 3.2: Umsetzung der Versagensmodellierungsstrategie auf der Makro-Verbund-Ebene

Versuch	X_{Zug}	X_{Druck}	S_{12}
max. Spannung	X	O	O
max. Dehnung	X	O	O
SAMP	X	X	X
Von Mises	X		

Tabelle 3.2: Mindestens benötigte (X) und optionale Versuche (O) zur Kalibrierung der Kriterien

3.2 Erweiterung des elastisch-plastischen Modellierungsansatzes

Die im Folgenden aufgeführten Erweiterungen verfolgen zwei Zielsetzungen. Zum einen ist die Prognosegüte der in Abschnitt 2.6 beschriebenen Ansätze im Übergangsbereich vom elastischen in den plastischen Bereich sowie im rein plastischen Bereich unzureichend. Dies wird beispielsweise anhand von Abbildung 2.22 deutlich. Die Erweiterungen zielen demnach auf eine modifizierte Formulierung der Isotropierung und eine modifizierte Momentenformulierung zweiter Ordnung ab.

Zum anderen ist derzeit in der Regel ein von Mises-Plastizitätsmodell in den Homogenisierungsansätzen für das Matrixverhalten hinterlegt. Dies widerspricht dem belastungsabhängigen Fließen eines Kunststoffes [48], [49], [104], wodurch eine Integration entsprechender Plastizitätsmodelle vorgesehen ist.

3.2.1 Modifizierte Isotropierung

Die Fließspannung in Form der von Mises-Spannung wird gemäß Abschnitt 2.5.1 nach Gleichung (2.64) wie folgt berechnet:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} dev(\boldsymbol{\sigma}) : dev(\boldsymbol{\sigma})} \quad (3.3)$$

Diese Vorgehensweise führt zur Überschätzung des Fließbeginns. Eine Überschätzung des Fließbeginns hat zwangsläufig im weiteren Plastizitätsverlauf einen zu steilen Anstieg der Verfestigungskurve zur Folge. Bei der spektralen Isotropierung ist der Tangentenkompressionsmodul K_t konstant zu halten. Demnach beeinflusst lediglich der Tangentenschubmodul G_t die Steigung der Verfestigungskurve im plastischen Bereich. Mit der Einführung des Parameters l_κ als Exponent der Verfestigungsableitung nach der plastischen Dehnung $d\kappa / d\varepsilon^{pl}$ wird eine modifizierte Formulierung zur Berechnung von G_t definiert:

$$G_t = G \left[1 - \frac{3G}{3G + \left(\frac{d\kappa}{d\varepsilon^{pl}} \right)^{l_\kappa}} \right] \quad (3.4)$$

Insgesamt ermöglicht diese Vorgehensweise die direkte Skalierung der Verfestigungskurve und dadurch die Modellkalibrierung durch Anpassung eines einzigen Parameters. Die Anwendung der spektralen Isotropierung ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit durch die Bedingung (2.83) auf das von Mises-Plastizitätsmodell begrenzt. Eine analoge Vorgehensweise kann dennoch für die allgemeine Isotropierungsmethode formuliert werden, indem bereits zur Berechnung der isotropierten Steifigkeit nach Gleichung (2.81) der Parameter l_κ eingeführt wird. In diesem Fall beeinflusst l_κ sowohl den Tangentenkompressionsmodul K_t als auch den Tangentenschubmodul G_t .

3.2.2 Modifizierte Momentenformulierung zweiter Ordnung

Die Modifikationen aus Abschnitt 3.2.1 tragen aber nicht zur Herabsetzung der Fließspannung bei. Erst durch die Anwendung der Momentenformulierung zweiter Ordnung setzt eine plastische Verformung bereits bei deutlich kleineren Spannungen ein. Die Fließspannung wird in diesem Fall wie folgt berechnet (siehe Abschnitt 2.6.2 Gleichung (2.91)):

$$\sigma_{eq}^z = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{I}_{dev} :: \langle \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \rangle} \quad (3.5)$$

In der inkrementellen Umsetzung nach [62] folgt hieraus folgender Gleichungssatz:

$$\sigma_{eq, n+1}^z = \sqrt{\sigma_{eq, n}^s{}^2 + \Delta\sigma_{eq}^s{}^2 + 3dev(\boldsymbol{\sigma})_n : \Delta dev(\boldsymbol{\sigma})} \quad (3.6)$$

$$\Delta\sigma_{eq}^z = 3G \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{I}_{dev} :: \langle \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle} \quad (3.7)$$

Anhand von Gleichung (3.6) ist ersichtlich, dass die Zunahme der Vergleichsspannung durch den Term $\Delta\sigma_{eq}^z$ gesteuert wird, der wiederum selbst von $\langle \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle$ abhängig ist. Es wird ein zweiter Kalibrierparameter l_σ zur Skalierung der Fließspannung definiert:

$$\Delta\sigma_{eq}^z = l_\sigma \cdot \left(3G \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{I}_{dev} :: \langle \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \otimes \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \rangle} \right) \quad (3.8)$$

Der Parameter l_σ steuert den Spannungszuwachs ausgehend vom zweiten Moment der Dehnung und führt unter der Voraussetzung, dass $l_\sigma \geq 1$ ist zu einer weiteren Reduktion der Fließgrenze in Abhängigkeit der Ableitung $\partial \mathbf{S}^{el} / \partial \mathbf{S}^{el,0}$ und des Dehnungsincrement $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 = \frac{1}{\nu^0} \Delta \boldsymbol{\varepsilon} : \frac{\partial \mathbf{S}^{el}}{\partial \mathbf{S}^{el,0}} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.9)$$

Die verbleibenden Größen in Gleichung (3.8) sind Konstanten und l_σ ermöglicht somit eine Skalierung der Fließspannung in Abhängigkeit der elastischen, transversal isotropen Verbundsteifigkeitsmatrix. Die Implementierung der zwei aufgeführten Modifikationen entspricht dem Ablaufschema aus Tabelle 2.1 und es sind lediglich die Parameter l_σ und l_κ zusätzlich vorzugeben. Die Bezeichnung dieser Implementierung lautet im Folgenden MT-iso-2e.

3.2.3 Integration der Drucker-Prager-Plastizität

Das Drucker-Prager-Plastizitätsmodell wurde in Abschnitt 2.5.3 vorgestellt. Zur Integration in den bestehenden Modellierungsansatz ist eine algorithmisch konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix zu berechnen. Diese ist mit Gleichung (2.69) bereits angegeben. In Tabelle 3.3 sind die wesentlichen Schritte der Implementierung zusammengefasst. Änderungen in Bezug auf die Formulierung in Tabelle 2.1 sind kursiv hervorgehoben. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Anwendung der Momentenformulierung zweiter Ordnung nach dem derzeitigen Stand ausschließlich unter Verwendung der von Mises-Plastizität möglich ist (4. und 5. Schritt entfallen) [62].

Ferner ist die hier beschriebene Vorgehensweise in Schritt 9 bis 11 nicht eindeutig. Jiang et al. [55] zeigen an einem Beispiel für kugelförmige Einschlüsse, dass sie mittels Mori-Tanaka-Homogenisierung mit Drucker-Prager-Plastizität und assoziierter Fließfläche die besten Ergebnisse erzielen, wenn sie die isotropierte Matrix ausschließlich zur Berechnung des Eshelby-Tensors (Schritt 10) verwenden [55]. Einen allgemeingültigen Beleg hierfür liefern die Autoren allerdings nicht. Ausgehend von den durchgeführten Simulationen im Rahmen dieser Arbeit zeigt sich, dass die Anwendung der isotropierten Steifigkeitsmatrix zur Berechnung des Eshelby-Tensors als auch zur Berechnung des Hill-Tensors in Kombination mit dem Drucker-Prager-Modell zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

1.	Input:	$\boldsymbol{\varepsilon}_{t_n}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$
2.	Linear elast. Berechnung von:	$\mathbf{S}^{el,0}$
3.	Linear elast. Berechnung von:	$\mathbf{S}^{el,1}$
4.	<i>entfällt</i>	
5.	<i>entfällt</i>	
6.	Setze:	$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 \leftarrow \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$
7.	Berechne:	$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \nu^1 \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1}{1 - \nu^1}$
8.	Berechne elastisch-plastische Tangentensteifigkeit der Matrix mit Drucker-Prager-Plastizitätsmodell:	$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^0$
9.	Extrahiere isotropen Anteil mittels allgemeiner Methode:	$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{0, isogen}$
10.	Berechne mit 9. Eshelby-Tensor:	$\mathbf{E}_{t_{n+\frac{1}{2}}}$
11.	Berechne mit 3., 9. und 10. \mathbf{H} -Tensor:	$\mathbf{H}_{t_{n+\frac{1}{2}}} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{E}_{t_{n+\frac{1}{2}}} : \left(\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{0, isogen} \right)^{-1} : \left(\mathbf{S}^1 - \tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^0 \right) \right]^{-1}$
12.	Berechne den Konzentrations-tensor mit 8.:	$\mathbf{A}_{MT,t_{n+\frac{1}{2}}} = \left[\nu_0 \mathbf{I} + \nu_1 \mathbf{H}_{t_{n+\frac{1}{2}}} \right]^{-1}$
13.	Berechne Residuum:	$\mathbf{R} = \mathbf{A}_{MT,t_{n+\frac{1}{2}}} : \left[\nu^1 \mathbf{A}_{MT,t_{n+\frac{1}{2}}} + \nu^0 \mathbf{I} \right]^{-1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1$
14.	Prüfe:	$R < \text{Toleranz}$
15.	Falls nein, zurück zu 6. Falls ja folgt 16.	$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 \leftarrow \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 + \zeta \mathbf{R}, \zeta \in]0,1]$
16.	Output: Berechne mit 3., 9. und 12. Verbundsteifigkeitsmatrix und Spannungsinkrement:	$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{tg}, \Delta \boldsymbol{\sigma}$

Tabelle 3.3: Übersicht der numerischen Implementierung mit Drucker-Prager-Plastizität (MT-DP)

3.2.4 Integration der SAMP-Plastizität

Analog zu 3.2.3 wird im Folgenden das SAMP-Modell in die zweistufige Homogenisierung integriert. Hierzu ist zunächst eine algorithmisch konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix her-zuleiten:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{tg} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} \quad (3.10)$$

Wird berücksichtigt, dass die Eingabe des Return-Mapping-Algorithmus die elastische „trial“-Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{trial}$ ist und diese über $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^{pl}$ mit der Gesamtdehnung verknüpft ist, so gilt nach [44]:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{tg} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{trial}} \quad (3.11)$$

bzw.:

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = d \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})_{n+1} + dp_{n+1} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{S}_{n+1}^{tg} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{trial} \quad (3.12)$$

Demnach sind zur Herleitung der benötigten Tangentensteifigkeitsmatrix die totalen Ableitungen der deviatorischen und volumetrischen Spannungen zu berechnen. Ausgehend von Gleichung (2.58) aus Abschnitt 2.5.4 gilt:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - \mathbf{S}^{elast.} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} - 6G\Delta\lambda \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})_{n+1} - \frac{2}{3}K\alpha p_{n+1} \Delta\lambda \boldsymbol{\delta} \quad (3.13)$$

Die Aufteilung der Spannung in einen deviatorischen und volumetrischen Anteil (auf den Index „ $n+1$ “ wird im Folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet) liefert:

$$\begin{aligned} \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}) &= \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})^{trial} - 6G\Delta\lambda \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}) \Leftrightarrow \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})^{trial}}{1+6G\Delta\lambda} = \frac{\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})^{trial}}{\zeta_{dev}} \\ p &= p^{trial} - 2K\alpha p \Delta\lambda \Leftrightarrow p = \frac{p^{trial}}{1+2K\alpha \Delta\lambda} = \frac{p^{trial}}{\zeta_{vol}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die gesuchten Ableitungen der deviatorischen und volumetrischen Anteile ergeben sich unter Berücksichtigung der Kettenregel und Produktregel zu:

$$\begin{aligned} d \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{d \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{dev}}} - \frac{\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma})^{\text{trial}} 6G d\Delta\lambda}{(\zeta_{\text{dev}})^2} \\ dp &= \frac{dp^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} - \frac{p^{\text{trial}} 2\alpha K d\Delta\lambda}{(\zeta_{\text{vol}})^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Hierbei gilt:

$$\begin{aligned} dp^{\text{trial}} &= K d\varepsilon_{\text{vol}}^{\text{trial}} = K \boldsymbol{\delta} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{trial}} \\ d \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{trial}}) &= 2G d\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}}^{\text{trial}} = 2G \mathbf{I}_{\text{dev}} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{trial}} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Es verbleibt die Berechnung der totalen Ableitung des plastischen Multiplikators in Gleichung (3.15). Ausgehend von der Fließfunktion:

$$f = \sigma_{\text{eq}}^2 - A_0 - A_1 \cdot p - A_2 \cdot p^2 \quad (3.17)$$

folgt durch Einsetzen der Gleichungen (3.14) in (3.17) die Konsistenzbedingung zu:

$$\left(\frac{\sigma_{\text{eq}}^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{dev}}} \right)^2 - A_0 + A_1 \frac{p^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} - A_2 \left(\frac{p^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} \right)^2 = 0 \quad (3.18)$$

Die totale Ableitung der Konsistenzbedingung liefert nach Umstellen den Term für $d\Delta\lambda$:

$$\begin{aligned} d\Delta\lambda &= \frac{\frac{d(\sigma_{\text{eq}}^{\text{trial}})^2}{(\zeta_{\text{dev}})^2} + \frac{A_1 dp^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} - \frac{A_1 d(p^{\text{trial}})^2}{(\zeta_{\text{vol}})^2}}{\frac{12G(\sigma_{\text{eq}}^{\text{trial}})^2}{(\zeta_{\text{dev}})^3} + \frac{\partial A_0}{\partial \Delta\lambda} - \frac{\partial A_1}{\partial \Delta\lambda} \frac{p^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} + A_1 \frac{2p^{\text{trial}} K \alpha}{(\zeta_{\text{vol}})^2} + \frac{\partial A_2}{\partial \Delta\lambda} \left(\frac{p^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} \right)^2 - A_2 \frac{4(p^{\text{trial}})^2 K \alpha}{(\zeta_{\text{vol}})^3}} \quad (3.19) \\ &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{d(\sigma_{\text{eq}}^{\text{trial}})^2}{(\zeta_{\text{dev}})^2} + \frac{A_1 dp^{\text{trial}}}{\zeta_{\text{vol}}} - \frac{A_1 d(p^{\text{trial}})^2}{(\zeta_{\text{vol}})^2} \right) \end{aligned}$$

Die Ableitungen von A_0, A_1, A_2 bzw. deren Entwicklungen in Abhängigkeit der plastischen Dehnung sind [48] zu entnehmen. Einsetzen von (3.16) und (3.19) in (3.15) liefert schließlich:

$$\begin{aligned}
d\Delta\lambda &= \frac{1}{\eta} \left(\frac{6G \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}) : (\mathbf{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial})}{(\zeta_{dev})^2} + \frac{A_1}{\zeta_{vol}} \boldsymbol{\delta} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial} - \frac{2A_2 K p^{trial}}{(\zeta_{vol})^2} \boldsymbol{\delta} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial} \right) \\
d \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{2G \mathbf{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial}}{\zeta_{dev}} - \frac{36G^2}{\eta(\zeta_{dev})^4} (\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}) \otimes \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial})) : (\mathbf{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial}) \\
&\quad - \left[\frac{6GA_1 K}{\eta \zeta_{vol} (\zeta_{dev})^2} - \frac{12GA_2 K p^{trial}}{\eta (\zeta_{dev})^2 (\zeta_{vol})^2} \right] (\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}) \otimes \boldsymbol{\delta}) d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial} \\
dp &= \left[\frac{K}{\zeta_{vol}} - \frac{2A_1 K^2 \alpha p^{tr}}{\eta (\zeta_{vol})^3} + \frac{4K^2 \alpha p^{tr} A_2}{\eta (\zeta_{vol})^4} \right] \boldsymbol{\delta} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial} - \frac{12 p^{trial} \alpha K G}{\eta (\zeta_{vol})^2 (\zeta_{dev})^2} \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}) : (\mathbf{I}_{dev} : d\boldsymbol{\varepsilon}^{trial})
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Das Einsetzen der Ergebnisse aus (3.20) in (3.12) liefert letztlich die gesuchte algorithmisch konsistente Tangentensteifigkeitsmatrix:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{tg} &= \frac{2G}{\zeta_{dev}} \mathbf{I}_{dev} - \frac{36G^2}{\eta(\zeta_{dev})^4} (\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}) \otimes \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial})) \\
&\quad - \left[\frac{6GA_1 K}{\eta (\zeta_{dev})^2 \zeta_{vol}} - \frac{12GA_2 K p^{trial}}{\eta (\zeta_{dev})^2 (\zeta_{vol})^2} \right] (\operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}) \otimes \boldsymbol{\delta}) \\
&\quad + \left[\frac{K}{\zeta_{vol}} - \frac{2A_1 K^2 \alpha p^{trial}}{\eta (\zeta_{vol})^3} + \frac{4K^2 \alpha (p^{trial})^2 A_2}{\eta (\zeta_{vol})^4} \right] (\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta}) \\
&\quad - \frac{12KG \alpha p^{trial}}{\eta (\zeta_{dev})^2 (\zeta_{vol})^2} (\boldsymbol{\delta} \otimes \operatorname{dev}(\boldsymbol{\sigma}^{trial}))
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Analog zu Abschnitt 3.2.3 sind die wesentlichen Schritte der Implementierung des zweistufigen Homogenisierungsverfahrens mit SAMP-Plastizität in Tabelle 3.4 aufgeführt. Änderungen sind erneut kursiv hervorgehoben. Wie zuvor wird auch unter Verwendung der SAMP-Plastizität eine isotropierte Steifigkeitsmatrix zur Berechnung des Eshelby- sowie des Hill-Tensors eingesetzt.

1.	Input:	$\boldsymbol{\varepsilon}_{t_n}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$
2.	Linear elast. Berechnung von:	$\mathbf{S}^{el,0}$
3.	Linear elast. Berechnung von:	$\mathbf{S}^{el,1}$
4.	<i>entfällt</i>	
5.	<i>entfällt</i>	
6.	Setze:	$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 \leftarrow \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$
7.	Berechne:	$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^0 = \frac{\Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \nu^1 \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1}{1 - \nu^1}$
8.	<i>Berechne elastisch-plastische Tangentensteifigkeit der Matrix mit SAMP-Plastizitätsmodell:</i>	$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^0$
9.	<i>Extrahiere isotropen Anteil mittels allgemeiner Methode:</i>	$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{0, isogen}$
10.	Berechne mit 9. Eshelby-Tensor:	$\mathbf{E}_{t_{n+\frac{1}{2}}}$
11.	Berechne mit 3., 9. und 10. \mathbf{H} -Tensor:	$\mathbf{H}_{t_{n+\frac{1}{2}}} = \left[\mathbf{I} + \mathbf{E}_{t_{n+\frac{1}{2}}} : \left(\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{0, isogen} \right)^{-1} : \left(\mathbf{S}^1 - \tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^0 \right) \right]^{-1}$
12.	Berechne den Konzentrations-tensor mit 8.:	$\mathbf{A}_{MT, t_{n+\frac{1}{2}}} = \left[\nu_0 \mathbf{I} + \nu_1 \mathbf{H}_{t_{n+\frac{1}{2}}} \right]^{-1}$
13.	Berechne Residuum:	$\mathbf{R} = \mathbf{A}_{MT, t_{n+\frac{1}{2}}} : \left[\nu^1 \mathbf{A}_{MT, t_{n+\frac{1}{2}}} + \nu^0 \mathbf{I} \right]^{-1} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1$
14.	Prüfe:	$\mathbf{R} < \text{Toleranz}$
15.	Falls nein, zurück zu 6. Falls ja folgt 16.	$\langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 \leftarrow \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle^1 + \zeta \mathbf{R}, \zeta \in]0, 1]$
16.	Output: Berechne mit 3., 9. und 12. Verbundsteifigkeitsmatrix und Spannungsinkrement:	$\tilde{\mathbf{S}}_{t_{n+\frac{1}{2}}}^{tg}, \Delta \boldsymbol{\sigma}$

Tabelle 3.4: Übersicht der numerischen Implementierung mit SAMP-Plastizität (MT-SAMP)

3.3 Zusammenfassung der Erweiterungen

In Abschnitt 3.1 werden Möglichkeiten zur Integration von Dimensionierungskriterien vorgestellt, die nicht bzgl. der Versagensart unterscheiden. Als Ergebnis stehen abschließend zwei Dimensionierungsstrategien zur Verfügung. Die erste Strategie bezieht sich auf die Mikro-Verbund-Ebene, also den nach der ersten Homogenisierungsstufe vorliegenden, transversal isotropen Verbundwerkstoff. Im Gegensatz hierzu zielt die zweite Strategie auf die Marko-Verbund-Ebene und die nach der zweiten Homogenisierungsstufe vorliegende, isotropierte Matrix ab. Ausgehend von den zwei Anwendungsebenen sind verschiedene Kriterien mit unterschiedlichem Kalibrierungsaufwand einsetzbar. Es bleibt zu prüfen, inwiefern die definierten Strategien und deren Kombination mit entsprechenden Dimensionierungskriterien dazu beitragen können, das Versagen von kurzfaserverstärkten Kunststoffen zu prognostizieren.

Ferner werden in Abschnitt 3.2 Erweiterungen bzgl. der mikromechanischen Modellierung präsentiert. Der bestehende Ansatz der zweistufigen Homogenisierung (MT-iso-2) aus Abschnitt 2.6 wird erweitert, um die aufgezeigten Defizite der ursprünglichen Formulierung zu überwinden und als MT-iso-2e bezeichnet. Zur Berücksichtigung der volumetrischen Spannung bei der Berechnung der Fließspannung eines kurzfaserverstärkten Kunststoffes wird die Integration des Drucker-Prager-Plastizitätsmodells (MT-DP) und die des SAMP-Plastizitätsmodells (MT-SAMP) vorgestellt. Somit stehen insgesamt drei mikromechanische Modellierungsansätze zur Verfügung, die es im weiteren Verlauf der Arbeit anzuwenden und zu bewerten gilt.

4 Experimentelle Untersuchungen

Im Folgenden werden zunächst die eingesetzten Prüfkörper vorgestellt. Diese dienen zur experimentellen Ermittlung der benötigten mechanischen und strukturellen Werkstoffkennwerte. Die entsprechenden Versuchsergebnisse werden in Abschnitt 4.2 und 4.3 vorgestellt und abschließend in Abschnitt 4.4 zusammengefasst. Strukturelle Kennwerte umfassen Details zur Faserorientierungs- und Faserlängenverteilung der betrachteten Werkstoffe bzw. Prüfkörper. Mechanische Kennwerte umfassen alle relevanten Festigkeits- und Steifigkeitskennwerte, wie z. B. den Elastizitätsmodul, die Querkontraktionszahl oder die maximal ertragbare Zugspannung des vorliegenden Prüfkörpers.

Zur Evaluierung der drei vorgestellten Modellierungsansätze aus Tabelle 2.1 (MT-iso-2 bzw. -2e), Tabelle 3.3 (MT-DP) und Tabelle 3.4 (MT-SAMP)) kommen zwei kurzfaserverstärkte Thermoplaste zum Einsatz. Dies ist zum einen ein Polybutylenterephthalat mit einem Kurzglasfaseranteil von 20 Gew.-% (PBT-GF) der Firma Ticona (Celanex 2300 GV1/20). Zum anderen wird ein Polypropylen mit einem Kurzglasfasergehalt von 30 Gew.-% (PP-GF) der Firma Pio Kunststoffe (Pio P G30CA45) eingesetzt. In beiden Fällen steht sowohl der mit Kurzglasfasern verstärkte, als auch der unverstärkte Ausgangswerkstoff in Form von Granulat zur Verfügung.

4.1 Eingesetzte Prüfkörper

Die in der vorliegenden Arbeit eingesetzten, kurzfaserverstärkten Prüfkörper und Bauteile werden mittels einer Spritzgussmaschine vom Typ Allrounder 320c Gold Edition der Firma Arburg produziert. Die benötigten Werkzeuge zur Herstellung der Prüfkörper und Bauteile entstammen einem im Rahmen der Arbeit ausgeführten CAE-Entwicklungsprozess. Die Details zu den verwendeten Prozessparametern bzw. Prüfkörper- und Beispielbauteilabmessungen sowie die Versuchsaufbauten sind den folgenden Abschnitten zu entnehmen. Eine Ausnahme bildet das Beispielbauteil des Bosch-Probekörpers (B-P). Dieser wird von der Robert Bosch GmbH in Waiblingen eingesetzt und auf entsprechende Versuchsergebnisse kann im Rahmen dieser Arbeit zurückgegriffen werden.

4.1.1 Zug- und Schubprüfkörper

Die verwendeten Zug- und Schubprüfkörper sind Platten der Größe 90 mm x 90 mm x 2 mm entnommen. Zur Erzielung einer sich möglichst parallel ausbreitenden Fließfront ist ein kleiderbügelförmiger Angussverteiler gewählt. Die entformten, spritzgegossenen Platten bzw. der gewählte Anguss und Angussverteiler sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Die Prozessparameter des Spritzgussprozesses sind in Tabelle 4.1 aufgeführt.

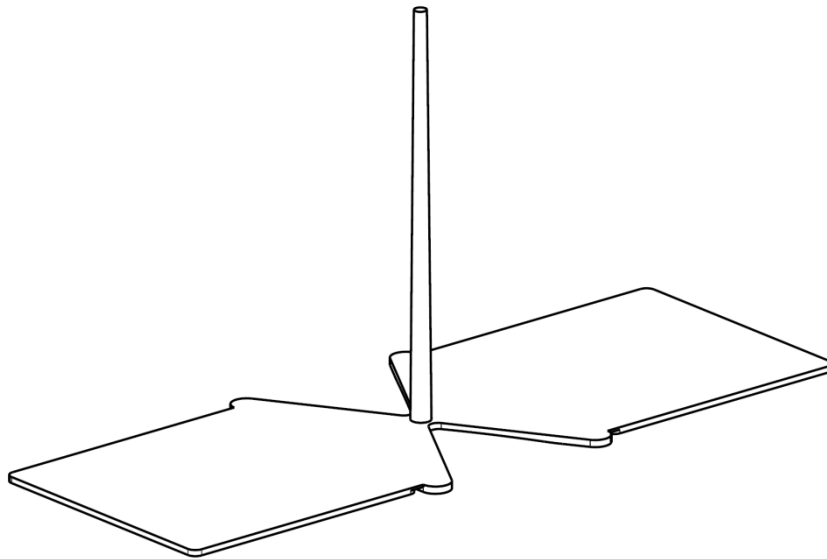


Abbildung 4.1: Spritzgegossene Platte mit Anguss und Angussverteiler

Parameter:	PBT + PBT-GF	PP + PP-GF
Schmelztemperatur	280 °C	240 °C
Werkzeugtemperatur	90 °C	50 °C
Massevolumen	52 cm ³	52 cm ³
Umschaltvolumen	3 cm ³	3 cm ³
Volumenstrom	40 cm ³ /s	40 cm ³ /s
Nachdruck	400 bar	400 bar
Nachdruckzeit	17 s	17 s

Tabelle 4.1: Spritzgussprozessparameter der 90 mm x 90 mm x 2mm Platte

Ausgehend von den Untersuchungen von Becker [105] bzgl. der Anforderung einer zuverlässig und reproduzierbar durchführbaren Dehnungsmessung und eines möglichst uniaxialen Spannungszustand im parallelen Prüfkörperbereich wird die BZ-Prüfkörpergeometrie zur

Durchführung von Zugversuchen gewählt (siehe Abbildung 4.2, links). In [106] untersucht Naumann unterschiedliche Schubprüfkörper bzgl. der Anforderung eines reinen, deviatorischen Schubspannungszustandes und zeigt, dass die Iosipescu-Geometrie (siehe Abbildung 4.2, rechts) diese Anforderung im Vergleich zu anderen Geometrien am bestens erfüllt. Zur Durchführung der benötigten Zug- und Schubversuche werden Prüfkörper jeweils unter 0° , 30° und 90° zur Fließrichtung aus den Platten herausgefräst. Die Fräsparameter sind in Tabelle 4.2 aufgeführt. Zum Fräsen wird ein Hartmetallschaftfräser mit einem Schneidendurchmesser von 3 mm für die Zugprüfkörper und mit einem 2 mm Durchmesser für die Schubprüfkörper verwendet.

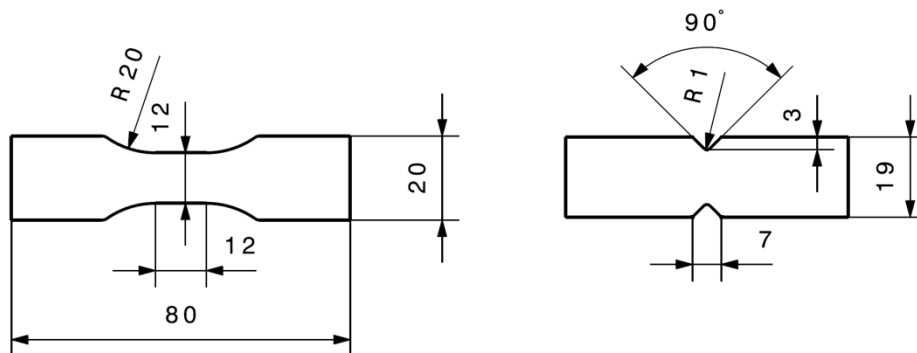


Abbildung 4.2: BZ-Zugprüfkörper (links) und Iosipescu-Schubprüfkörper (rechts)

Parameter:	unverstärkter Kunststoff	verstärkter Kunststoff
Tiefenzustellung	1 mm	1 mm
Spindeldrehzahl	2500 U/min	3500 U/min
Vorschub	3 mm/s	3 mm/s

Tabelle 4.2: Fräsparameter für Zug- und Schubprobekörper

4.1.2 Rohrprüfkörper

Zur Kalibrierung eines Drucker-Prager- bzw. SAMP-Plastizitätsmodells oder eines Tsai-Wu-Dimensionierungskriteriums sind Druckversuche hilfreich bzw. zwingend erforderlich. Zudem bietet ein dickwandiger Rohrprüfkörper die Möglichkeit, Zug-, Druck- und Schubeigenschaften an einer Prüfgeometrie zu bestimmen [107]. Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit ein Rohrprüfkörper zur Bestimmung der erforderlichen mechanischen Kennwerte entwickelt. Ein Rohrprüfkörper gilt nach Drakow et al. [108] als dickwandig, wenn für die Wandstärke h im Verhältnis zum Innendurchmesser D_i gilt:

$$h \geq \frac{D_i}{20} \quad (4.1)$$

Zur Erzielung eines homogenen Spannungszustandes ist der parallele Prüfbereich l_p nach Kraatz [107] so zu wählen, dass gilt:

$$l_p = 3 \dots 5 \cdot h \quad (4.2)$$

Der entwickelte Probekörper erfüllt diese Voraussetzungen und weist zudem im Vergleich zu bestehenden Rohrprüfkörpern, wie beispielsweise die in Anlehnung an DIN EN ISO 527-1 gestaltete Probe aus [107], zwei wesentliche Unterscheidungsmerkmale auf.

Zur Erzielung einer hohen unidirektionalen Faserausrichtung ist zum einen eine über den Umfang gleichförmige Formteillfüllung notwendig. In der Extrusionstechnik wird dies beispielsweise in begrenzten Bauräumen mittels Radialwendelverteilerwerkzeugen erzielt [109]. Diese Werkzeugtechnik wird entsprechend auf den Anguss des Rohrprüfkörpers übertragen (siehe Abbildung 4.3). Zum anderen wirkt sich ein konvergenter Einlauf der Schmelze ebenfalls positiv auf die unidirektionale Faserausrichtung auf [110]. Dies wird durch eine stetige Abnahme der Wandstärke zur Prüfkörpermitte hin erzielt (siehe Abbildung 4.4). Als weiteres Merkmal verfügt der entwickelte Probekörper über eine Torx®-ähnliche Fixierungsaufnahme. Dies ermöglicht in Kombination mit den vorhandenen Probenschultern das Aufbringen einer Zug- oder Druckbelastung und deren Überlagerung mit einer Momentenbelastung.

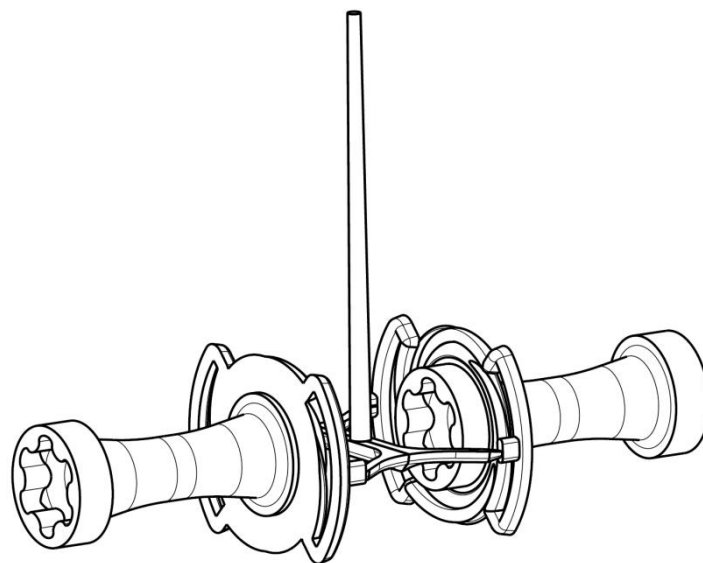


Abbildung 4.3: Rohrprüfkörper mit Radialwendelverteileranguss

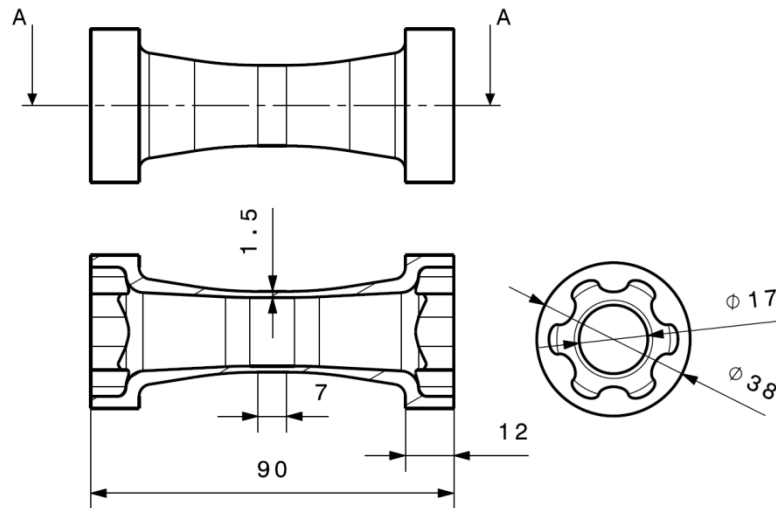


Abbildung 4.4: Anschlussmaße des Rohrprüfkörpers

Die genannten Voraussetzungen bzgl. des Verhältnisses von Wandstärke und Innendurchmesser bzw. von Wandstärke und Länge des parallelen Prüfbereichs sind erfüllt. Die verwendeten Spritzgussprozessparameter sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

Parameter:	PBT + PBT-GF	PP + PP-GF
Schmelztemperatur	280 °C	240 °C
Werkzeugtemperatur	90 °C	50 °C
Massevolumen	76 cm ³	76 cm ³
Umschaltvolumen	5 cm ³	5 cm
Volumenstrom	50 cm ³ /s	50 cm ³ /s
Nachdruck	700 bar	700 bar
Nachdruckzeit	27 s	27 s

Tabelle 4.3: Spritzgussprozessparameter des Rohrprüfkörpers

4.1.3 Beispielbauteile

Die Anwendung und Evaluierung des erweiterten, mikromechanischen Modellierungsansatzes und der Dimensionierungsstrategien erfolgt anhand von zwei Beispielbauteilen. Es handelt sich hierbei zum einen um ein im Rahmen dieser Arbeit entworfenes Bauteil, welches einem im Kfz-Bereich eingesetzten Gaspedal nachempfunden ist. In Abbildung 4.5 sind das Bauteil mit Anguss und Angussverteiler und in Abbildung 4.6 die entsprechenden Anschlussmaße dargestellt. Die Gestaltung des Bauteils gewährleistet, dass ein mehraxialer Spannungszu-

stand unter Belastung vorliegt. Die zur Produktion verwendeten Spritzgussparameter sind in Tabelle 4.4 aufgeführt.

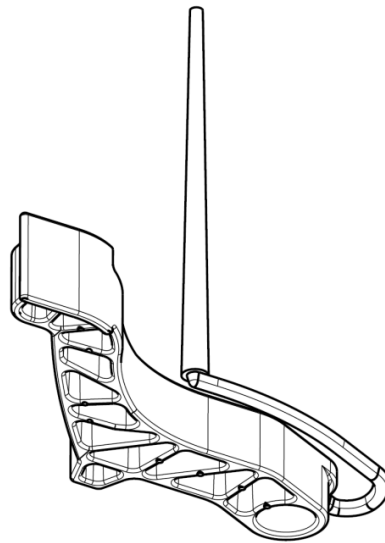


Abbildung 4.5: Beispielbauteil „Gaspedal“ mit Anguss und Angussverteiler

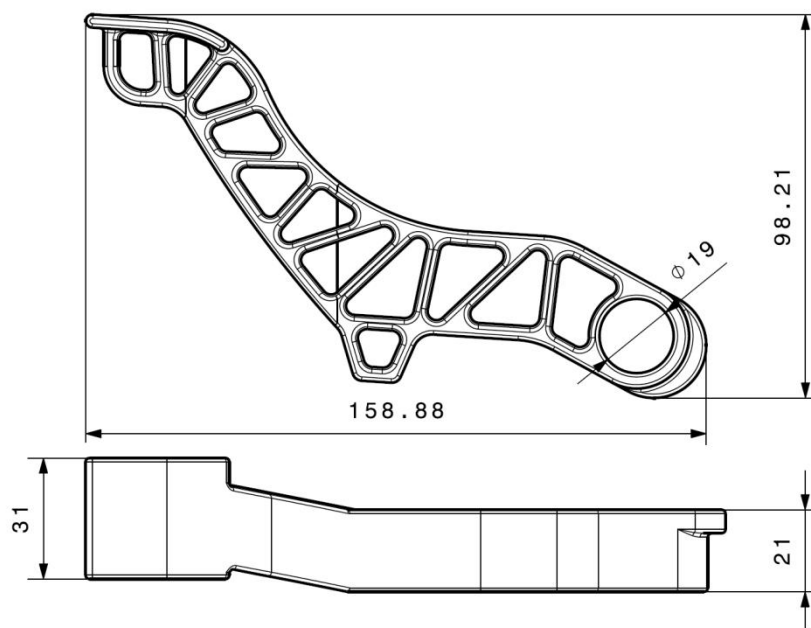


Abbildung 4.6: Anschlussmaße des Beispielbauteils „Gaspedal“

Parameter:	PBT-GF	PP-GF
Schmelztemperatur	280 °C	240 °C
Werkzeugtemperatur	90 °C	50 °C
Massevolumen	73 cm ³	72 cm ³
Umschaltvolumen	4 cm ³	4 cm ³
Volumenstrom	32 cm ³ /s	30 cm ³ /s
Nachdruck	700 bar	500 bar
Nachdruckzeit	35 s	40 s

Tabelle 4.4: Spritzgussparameter des Beispielbauteils „Gaspedal“

Bei dem zweiten Beispielbauteil handelt es sich um einen Probekörper der Robert Bosch GmbH. Angussverteiler und Anschlussmaße sind in Abbildung 4.7 abgebildet. Insgesamt kommen drei Varianten mit den Bezeichnungen K1, K3 und K4 des Probekörpers zum Einsatz, die sich bzgl. Radius und Wandstärke durch den Einsatz verschiedener Kerne unterscheiden (siehe Abbildung 4.8). Die genannten Varianten werden ausschließlich aus dem Werkstoff PBT-GF spritzgegossen. Die verwendeten Spritzgussparameter sind in Tabelle 4.5 aufgeführt.

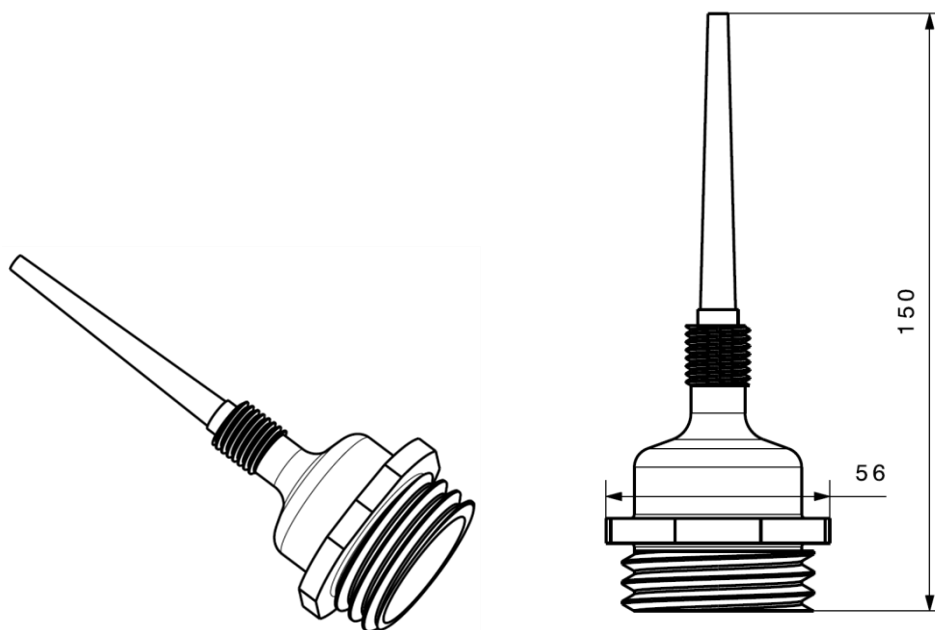


Abbildung 4.7: Beispielbauteil Bosch-Probekörper mit Anguss (links) und Anschlussmaßen (rechts)

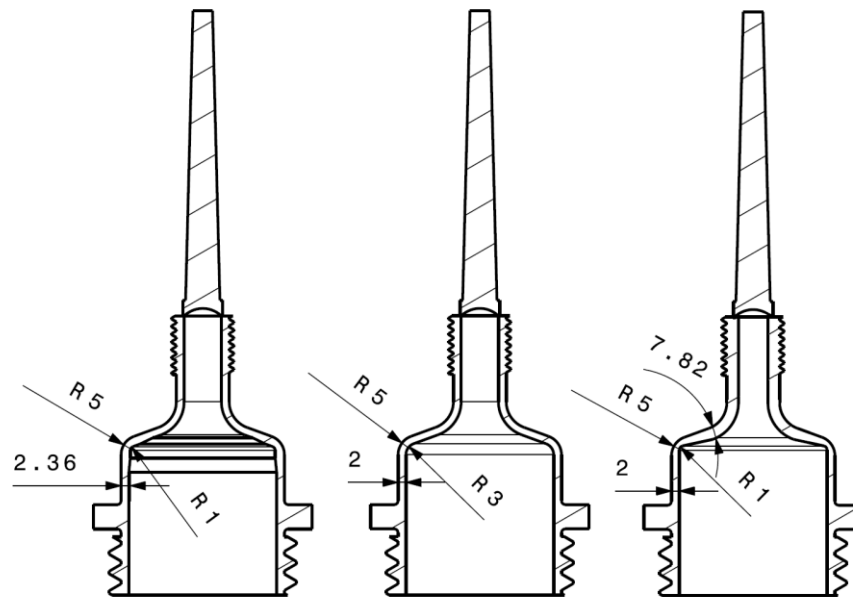


Abbildung 4.8: Varianten des Bosch-Probekörpers: K1, K3 und K4 (von links nach rechts)

Parameter:	PBT-GF
Schmelzetemperatur	260 °C
Werkzeugtemperatur	80 °C
Einspritzzeit	1,29 s

Tabelle 4.5: Spritzgussparameter des Bosch-Probekörpers

4.2 Ermittlung mechanischer Kennwerte

Alle aufgeführten Versuche werden unter quasistatischen Bedingungen mit einer Traversengeschwindigkeit von 1 mm/min durchgeführt. Bis auf das Beispielbauteil des Bosch-Probekörpers erfolgt mittels eines Zug-Druck-Torsionsprüfstandes. Die Dehnungsmessung bei den Prüfkörperversuchen erfolgt optisch mittels 3D-Bildkorrelation mit zwei Kameras und der Auswertesoftware Vic-3D 2010 der Firma Correlated Solutions. Das System ermöglicht die Berechnung der lokalen Längs- und Querdehnung. Zur Berechnung der Dehnung ausgehend von einer durch das System messbaren Verschiebung auf der Probenoberfläche existieren in der Literatur unterschiedliche Ansätze [111]. Ausgehend von dem großen Deformationsvermögen thermoplastischer Kunststoffe und in Anlehnung an [105] wird zur Auswertung der Zug- und Schubversuche die logarithmische Henky-Dehnung ε verwendet. Es gilt:

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{1}{L} dL = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (4.3)$$

In (4.3) bezeichnet l den aktuellen Verschiebungszustand und l_0 die definierte Ursprungslänge. Sind Längs- ε_l und Querdehnung ε_q bekannt, kann die Querkontraktionszahl ν berechnet werden:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l} \quad (4.4)$$

Bei einer aufgetragenen Schubbelastung steht die Krafrichtung senkrecht auf der Flächennormalen und es kommt im Gegensatz zum Zugversuch zu keiner Änderung des Bezugsquerschnitts. Die Spannung, bei der sich die Kraft auf den ursprünglichen Probenquerschnitt A_0 bezieht, wird als technische (Schub-) Spannung bezeichnet und es gilt:

$$\sigma_{tech} = \frac{F}{A_0} \quad (4.5)$$

Im Gegensatz hierzu ändert sich unter Zugbelastung der Probenquerschnitt aufgrund der auftretenden Querdehnungen. Wird transversal isotropes Werkstoffverhalten vorausgesetzt, dann entspricht die Dehnung in Dickenrichtung ε_d der Querdehnung ε_q und für die wahre Spannung σ_{wahr} gilt nach [112]:

$$\sigma_{wahr} = \frac{F}{A_0 \cdot e^{\varepsilon_q + \varepsilon_d}}, \quad \varepsilon_q = \varepsilon_d \quad (4.6)$$

Zur Definition der plastischen Verfestigungskurven $\kappa(\varepsilon^{pl})$ sind diese aus den Versuchskurven der unverstärkten Werkstoffe zu extrahieren. Es gilt näherungsweise:

$$\varepsilon^{pl} = \varepsilon_{ges} - \varepsilon_{el} = \varepsilon_{ges} - \frac{\sigma_{wahr}}{E} \quad (4.7)$$

Hierbei ist E der Elastizitätsmodul des unverstärkten Thermoplasts.

4.2.1 Ergebnisse der Zug- und Schubversuche

Die zur Durchführung der Zug- bzw. Schubversuche eingesetzten Versuchsaufbauten und die zur Dehnungsmessung ausgewertete Probenbereiche sind schematisch in Abbildung 4.9 dargestellt. Als Ergebnis liegen Spannungs-/Dehnungs-Kurven für die unverstärkten und verstärkten Werkstoffe vor (siehe Abbildung 4.10 - Abbildung 4.15). Ferner ermöglicht die Versuchsdurchführung die Bestimmung der Querkontraktionszahlen der unverstärkten Werkstoffe (vgl. Abbildung 4.16). Bei den abgebildeten Kurven handelt es sich jeweils um den Mittelwert aus drei Versuchen. Als Fehler ist aus Gründen der Übersichtlichkeit ausschließlich die maximal auftretende Abweichung beim Versagen dargestellt.

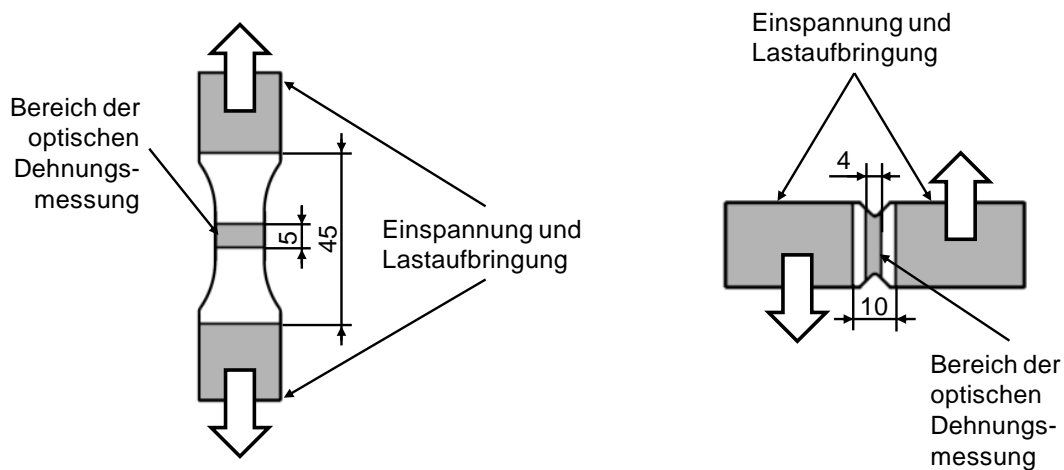


Abbildung 4.9: Experimentelle Versuchsaufbauten der Zug- und Schubversuche

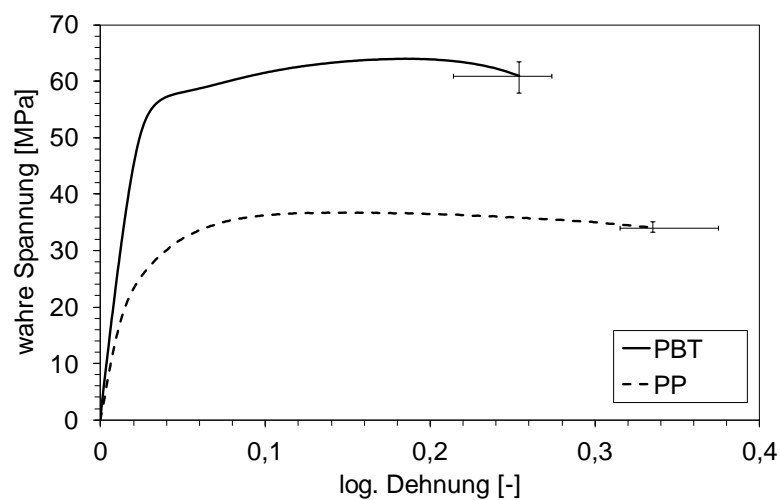


Abbildung 4.10: Wahre Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für unverstärkte BZ-Proben

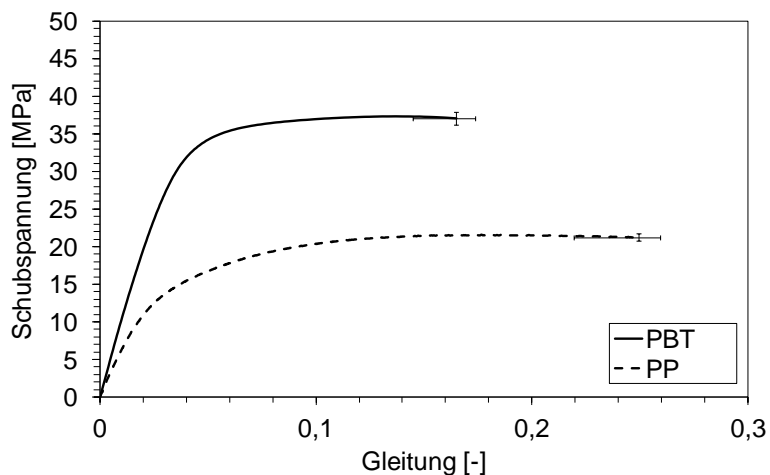


Abbildung 4.11: Schubspannungs-/log. Dehnungs-Kurven für unverstärkte Iosipescu-Proben

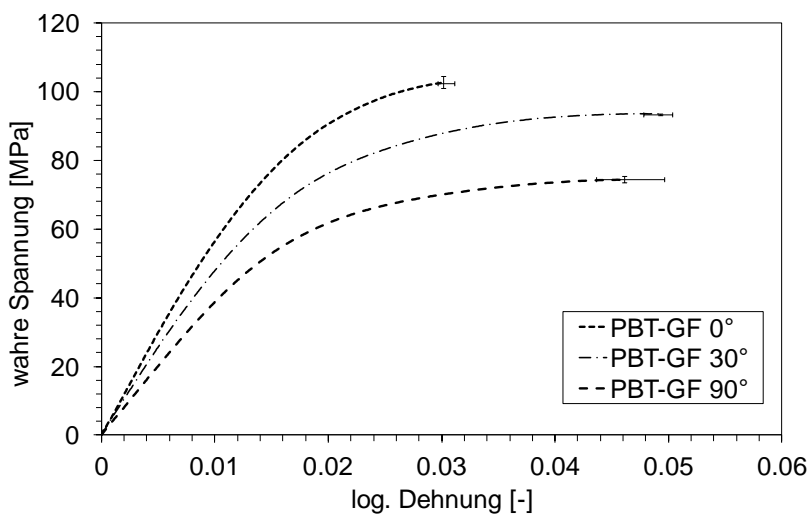


Abbildung 4.12: Wahre Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für verstärkte BZ-Proben (PBT-GF)

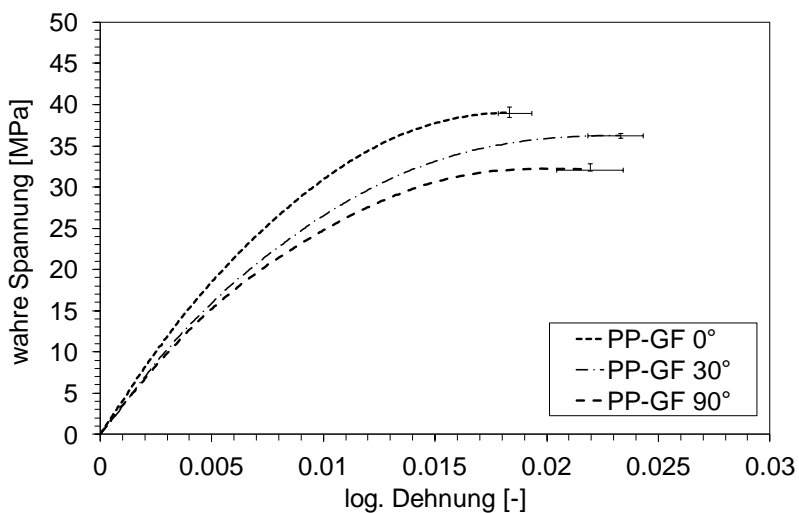


Abbildung 4.13: Wahre Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für verstärkte BZ-Proben (PP-GF)

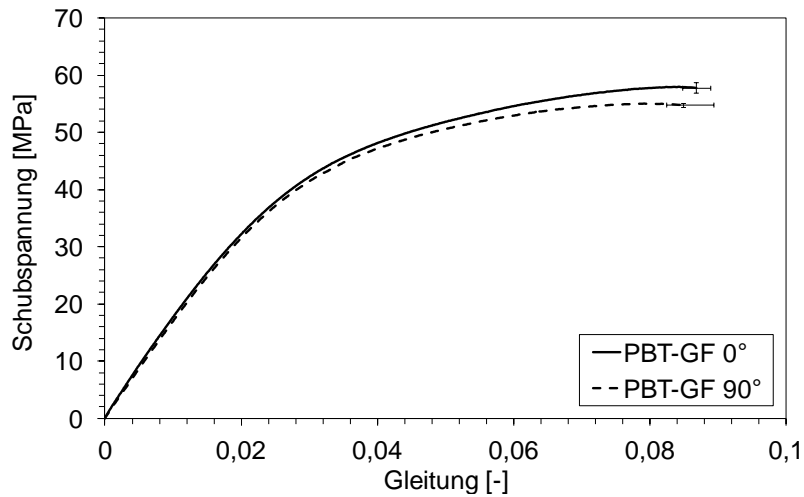


Abbildung 4.14: Schubspannungs-/log. Dehnungs-Kurven für verstärkte Iosipescu-Proben (PBT-GF)

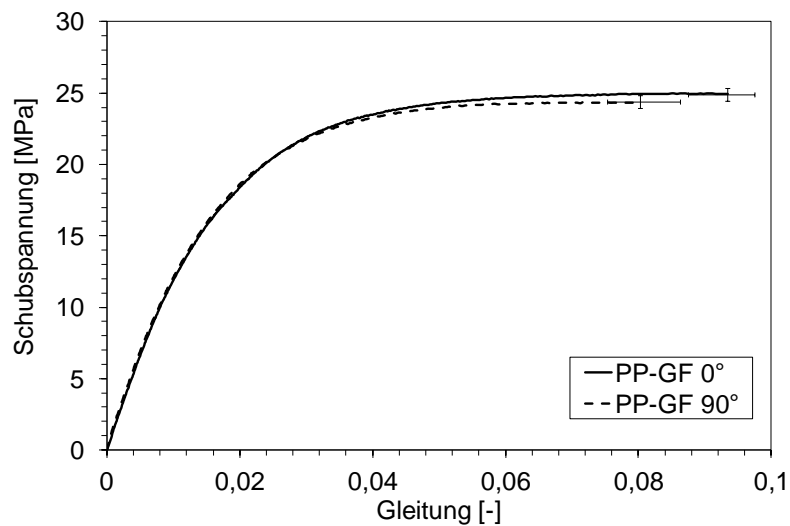


Abbildung 4.15: Schubspannungs-/log. Dehnungs-Kurven für verstärkte Iosipescu-Proben (PP-GF)

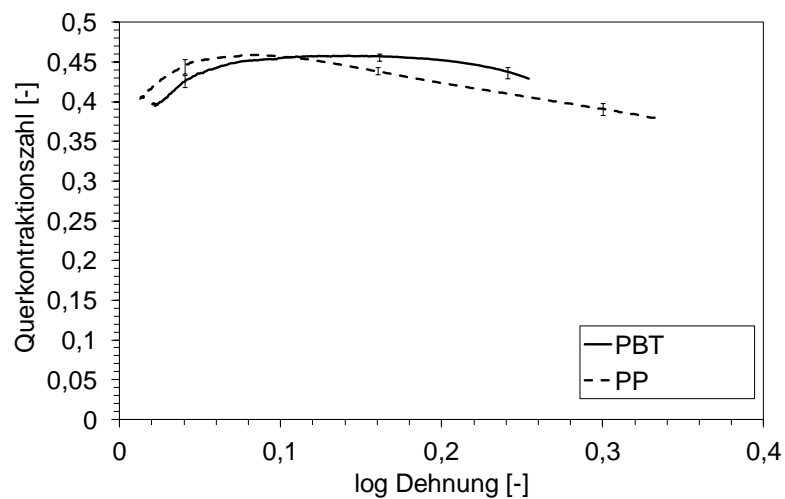


Abbildung 4.16: Querkontraktionszahl/log. Dehnungs-Kurven für unverstärkte BZ-Proben

4.2.2 Ergebnisse der Rohrprüfkörperversuche

Der Rohrprüfkörper wird zur Durchführung von Zug- und Druckversuchen eingesetzt. Der verwendete Versuchsaufbau mit Bereichen zur Auswertung der Dehnungsmessung ist schematisch in Abbildung 4.17 dargestellt. Als Ergebnis liegen technische Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für den unverstärkten und verstärkten Werkstoff vor (vgl. Abbildung 4.18 und Abbildung 4.19). Eine Berücksichtigung der Dickenänderung ist derzeit nicht möglich.

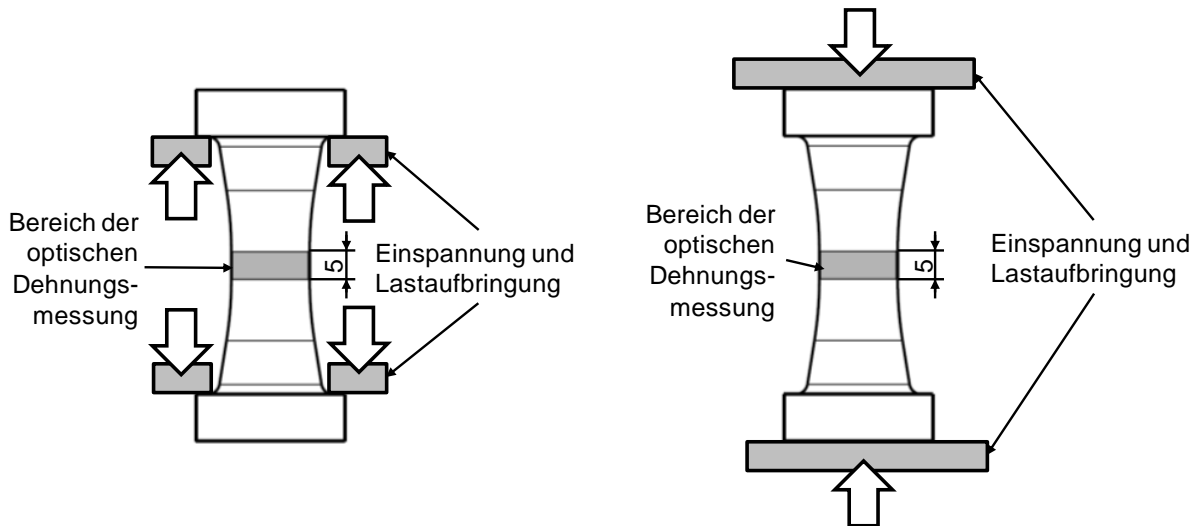


Abbildung 4.17: Experimentelle Versuchsaufbauten der Zug- und Druckversuche mit Rohrprüfkörper

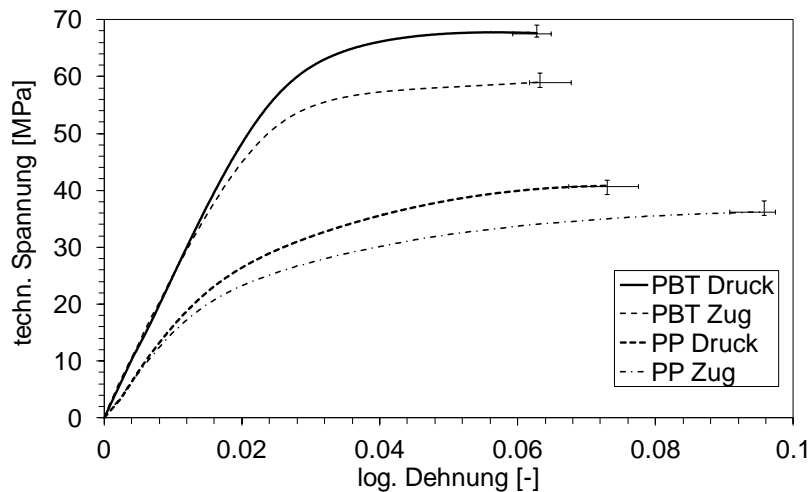


Abbildung 4.18: Technische Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für unverstärkte Rohrprüfkörper

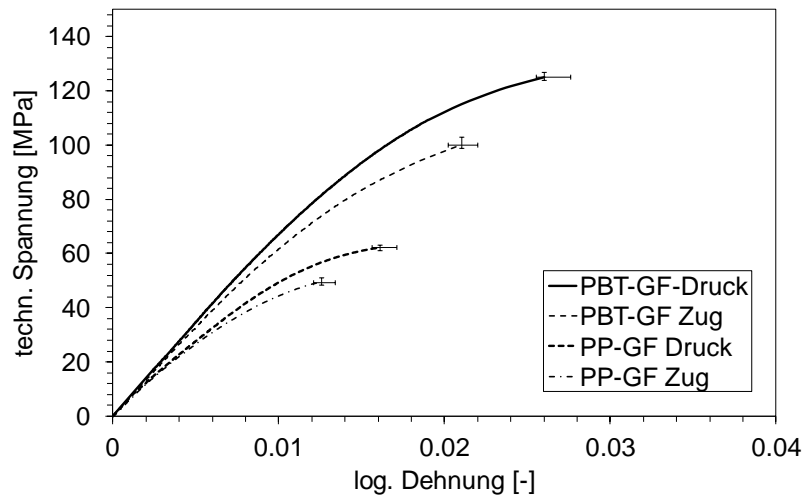


Abbildung 4.19: Technische Spannungs-/log. Dehnungs-Kurven für verstärkte Rohrprüfkörper

4.2.3 Ergebnisse der Beispielbauteilversuche

Der experimentelle Versuchsaufbau zur Durchführung der Bauteilprüfung des Gaspedals ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Der Stempel wird hierbei mittels des Hubzylinders des Zug-Druck-Torsionsprüfstandes betätigt. Als Ergebnis liegen Kraft-/Weg-Kurven für PBT-GF (Abbildung 4.21) und PP-GF (Abbildung 4.23) vor. Die Bruchbilder zu den jeweils durchgeführten Versuchen sind in Abbildung 4.22 und Abbildung 4.24 gezeigt.

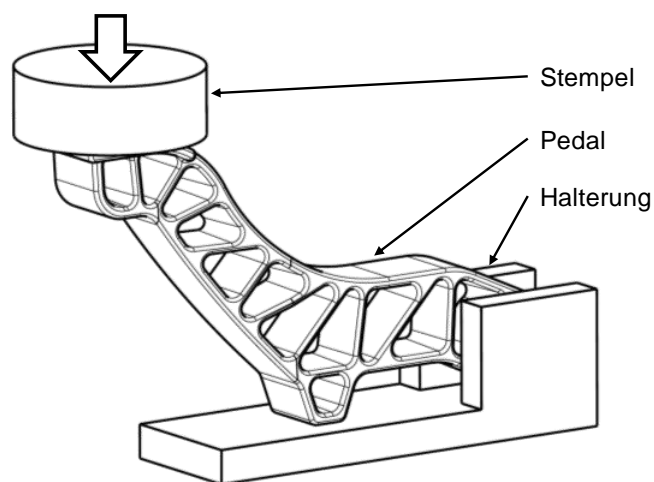


Abbildung 4.20: Versuchsaufbau für die Gaspedalversuche

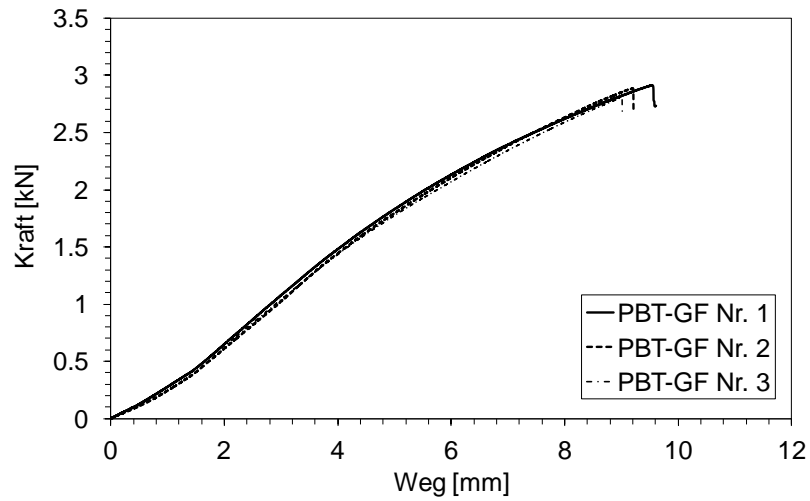


Abbildung 4.21: Kraft-/Weg-Kurven der Gaspedalversuche für PBT-GF

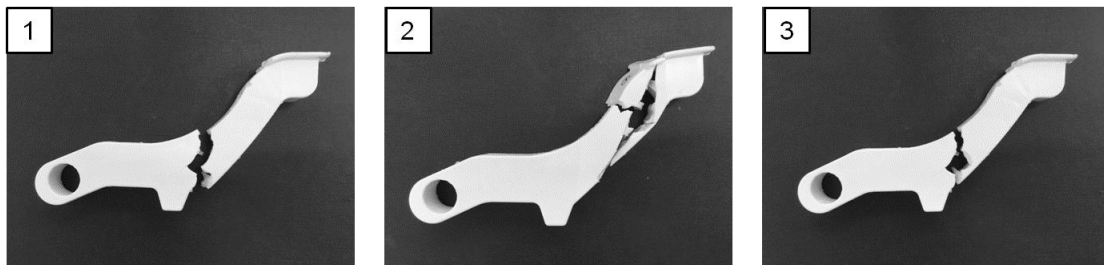


Abbildung 4.22: Bruchbilder der PBT-GF Gaspedalversuche

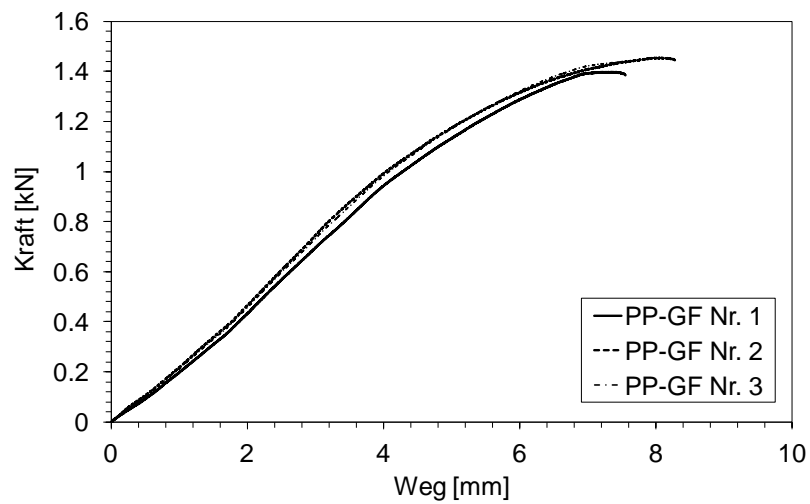


Abbildung 4.23: Kraft-/Weg-Kurven der Gaspedalversuche für PP-GF



Abbildung 4.24: Bruchbilder der PP-GF Gaspedalversuche

Der experimentelle Versuchsaufbau zur Durchführung der Prüfung des Bosch-Probekörpers ist in Abbildung 4.25 dargestellt. Die Dehnungsmessung erfolgt mittels Klemmdehnungsaufnehmer. Die experimentellen Ergebnisse als Kraft-/ Δl -Kurven sind in Abbildung 4.26 abgebildet. Bei den Kurven handelt es sich jeweils um eine Mittelung aus fünf Versuchen.

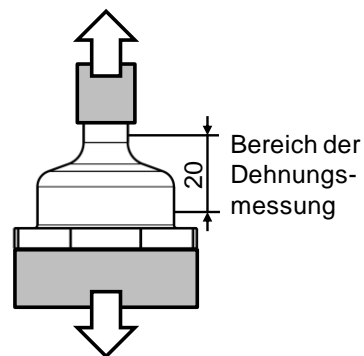
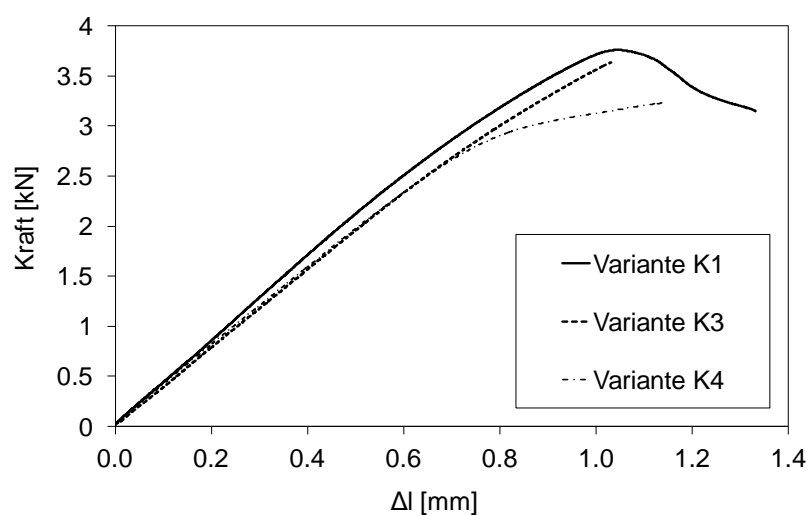


Abbildung 4.25: Versuchsaufbau für Bosch-Probekörperversuche

Abbildung 4.26: Kraft-/ Δl -Kurven der Bosch-Probekörperversuche für PBT-GF

Die Versagensorte der jeweils fünf geprüften Bauteile pro Variante unterscheiden sich nicht. Daher ist in Abbildung 4.27 lediglich ein Bauteil pro Variante exemplarisch abgebildet.

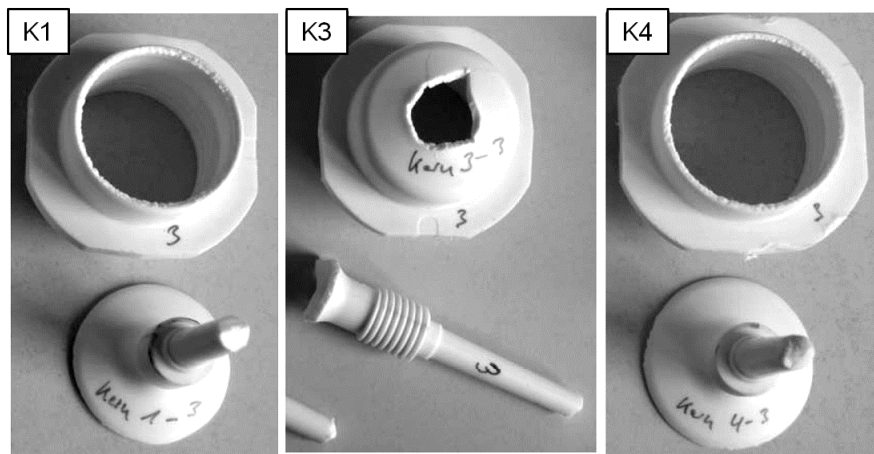


Abbildung 4.27: Bruchbilder der PBT-GF Bosch-Probekörperversuche (K1, K3 und K4)

4.3 Ermittlung struktureller Kennwerte

Bei dem Interaktionskoeffizienten C_f und dem RSC-Faktor κ (vgl. Gleichung (2.6) aus Abschnitt 2.2.1) handelt es sich um strukturelle Kennwerte. Sie ermöglichen eine werkstoffspezifische Berechnung der Faserorientierungsverteilung in einer Füllsimulation. Die resultierende Verteilung ist im Wesentlichen durch die Spritzgussprozessparameter und durch den verwendeten Werkstoff bedingt. Erst durch die Kalibrierung der strukturellen Kennwerte kann die experimentell ermittelte Faserorientierungsverteilung in der Füllsimulation erzeugt werden.

Die experimentelle Ermittlung der auftretenden Faserorientierungs- und Faserlängenverteilungen erfolgt durch Auswertung von μ CT-Messungen durch das Deutsche Kunststoffinstitut in Darmstadt und ergänzend hierzu durch die Erstellung von Schlibfbildern. Die eingesetzte Computertomographie arbeitet mit einer Auflösung von 1,80 μ m Voxelkantenlänge. Zur Auswertung der Proben, die der Platte mit einer Wandstärke von 2 mm entnommen sind, stehen somit ca. 1200 Schnittbilder zur Verfügung. Bei der Probe des Rohrprüfkörpers mit einer Wandstärke von 1,5 mm liegen ca. 1000 Schnittbilder vor. Zur Analyse der Schlibfproben wird ein Rasurelektronenmikroskop (REM) Typ SEM-7000 der Firma Jeol verwendet.

4.3.1 Ergebnisse der μ CT-Messungen

Die Entnahmepositionen der zur Ermittlung der strukturellen Kennwerte benötigten μ CT-Proben mit einem Durchmesser von 2 mm sind in Abbildung 4.28 dargestellt.

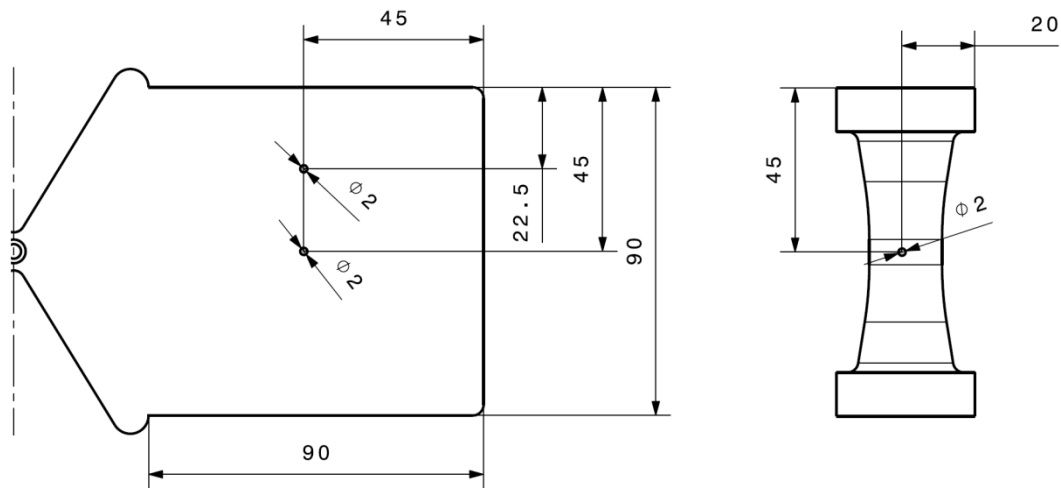


Abbildung 4.28: Entnahmeposition der μ CT-Proben aus Platte (links) und Rohrprüfkörper (rechts)

Die statistischen Mittelwerte der Hauptwerte des Orientierungstensors \mathbf{a} sind für die μ CT-Proben der Platte in den Abbildung 4.29 bis Abbildung 4.32 für PBT-GF und PP-GF über die Plattendicke dargestellt. Position 1 der Platte entspricht nach Abbildung 4.28 der Position (45; 22,5) und Position 2 entspricht der Position (45; 45). In Abbildung 4.33 und Abbildung 4.34 sind die statistischen Mittelwerte der Hauptkomponenten des Orientierungstensors \mathbf{a} für die μ CT-Messung der PBT-GF und PP-GF Rohrprüfkörperproben abgebildet.

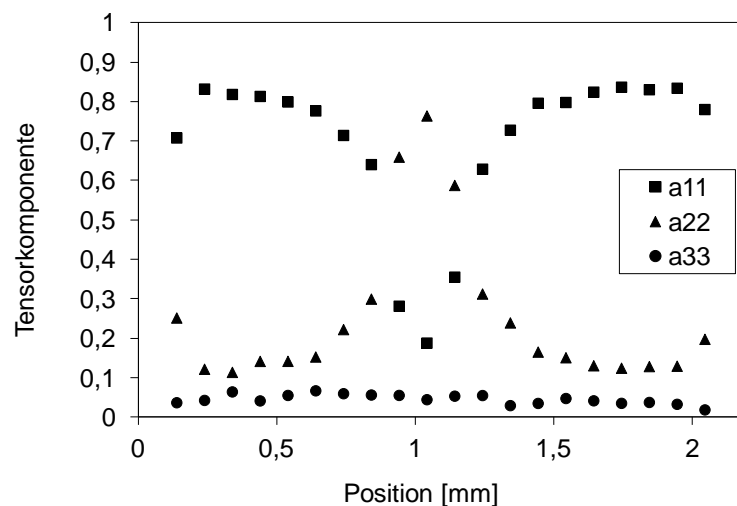
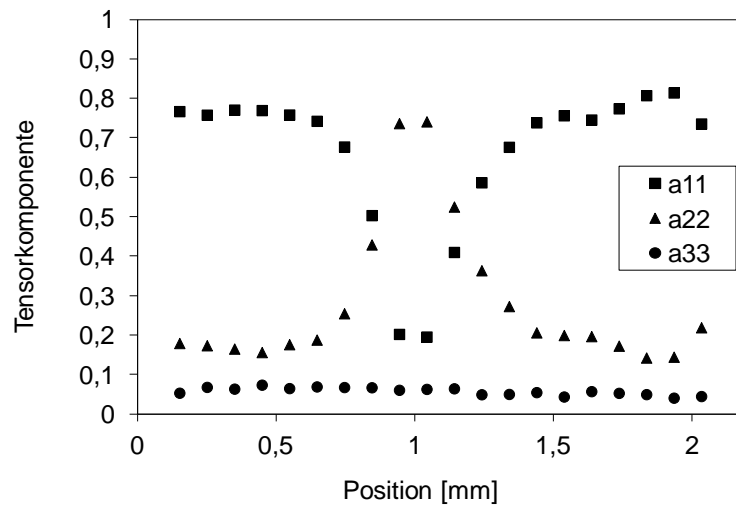
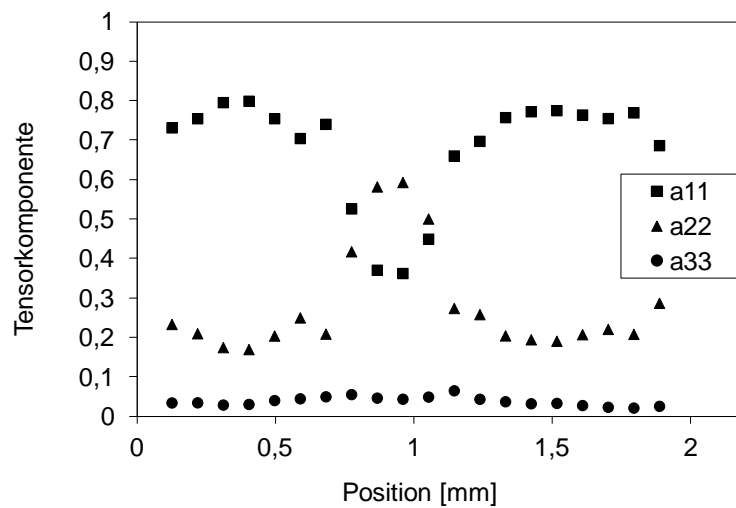
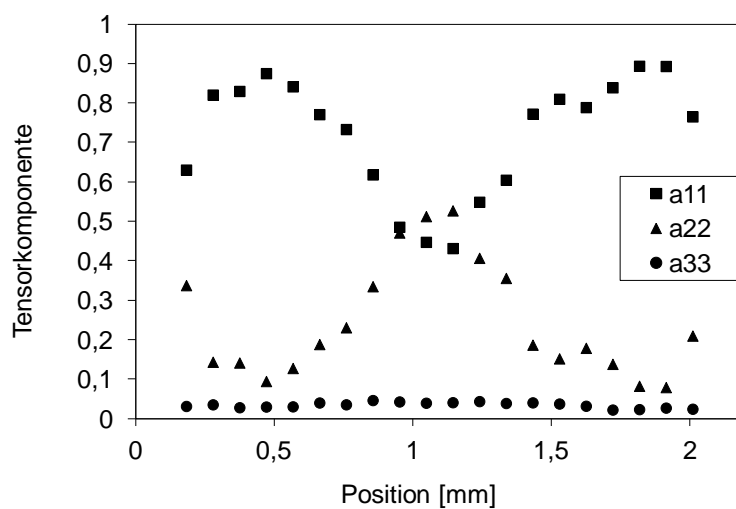
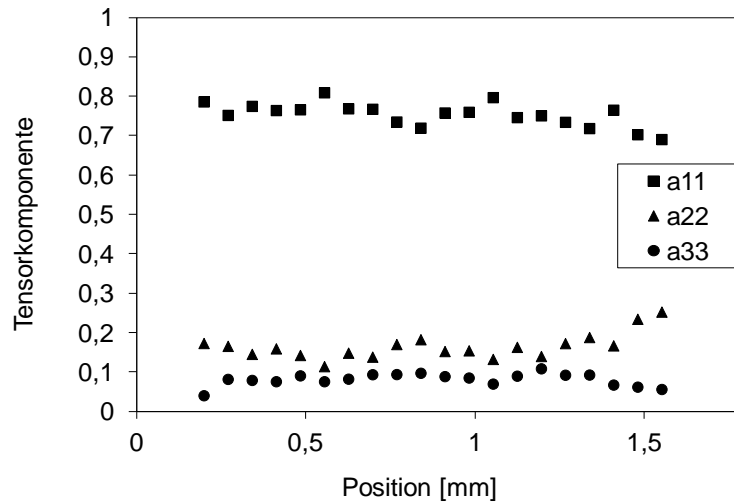
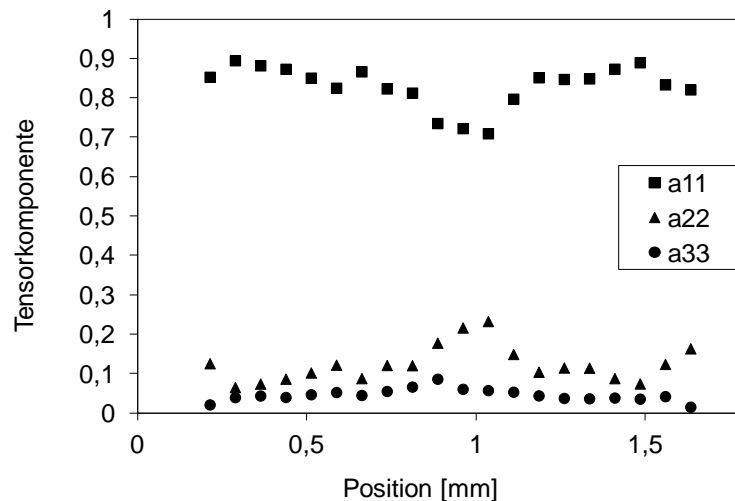


Abbildung 4.29: Orientierungstensorwerte der μ CT-Messung an PBT-GF Platte Position 1

Abbildung 4.30: Orientierungstensorwerte der μ CT-Messung an PBT-GF Platte Position 2Abbildung 4.31: Orientierungstensorwerte der μ CT-Messung an PP-GF Platte Position 1Abbildung 4.32: Orientierungstensorwerte der μ CT-Messung an PP-GF Platte Position 2

Abbildung 4.33: Orientierungstensorwerte der μ CT-Messung an PBT-GF RohrprüfkörperprobenAbbildung 4.34: Orientierungstensorwerte der μ CT-Messung an PP-GF Rohrprüfkörperproben

Als weiteres statistisches Ergebnis liefern die μ CT-Auswertungen Informationen über die Faserlängen- und Faserdurchmesserverteilungen für die untersuchten und ausgewerteten Proben. Aufbauend auf diesen Ergebnissen wird später ein Aspektverhältnis l/d bestimmt, welches zur Durchführung der mikromechanischen Berechnungen notwendig ist. In Abbildung 4.35 und Abbildung 4.36 sind die Ergebnisse für die Faserlängenverteilung von PBT-GF und PP-GF abgebildet. Die Faserdurchmesserverteilungen für PBT-GF sind in Abbildung 4.37 dargestellt bzw. in Abbildung 4.38 für PP-GF. Insgesamt ist keine signifikante Abweichung der mittleren Faserabmessungen bezogen auf den Prüfkörper bzw. die entsprechende Position festzustellen.

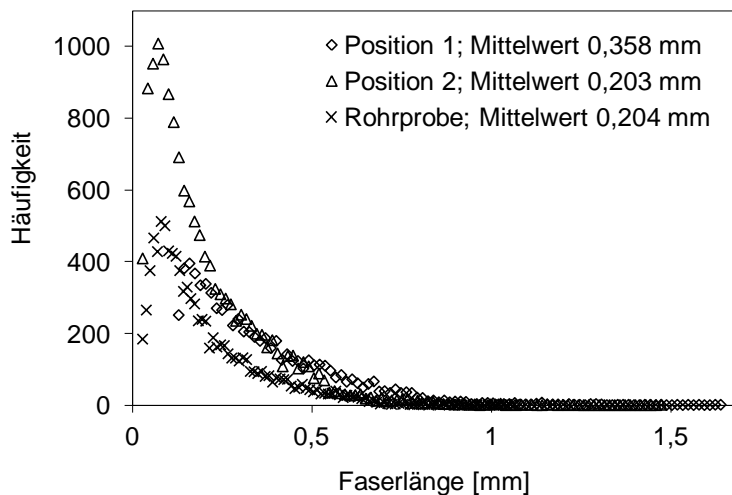


Abbildung 4.35: Auswertung der Faserlängenverteilung für PBT-GF

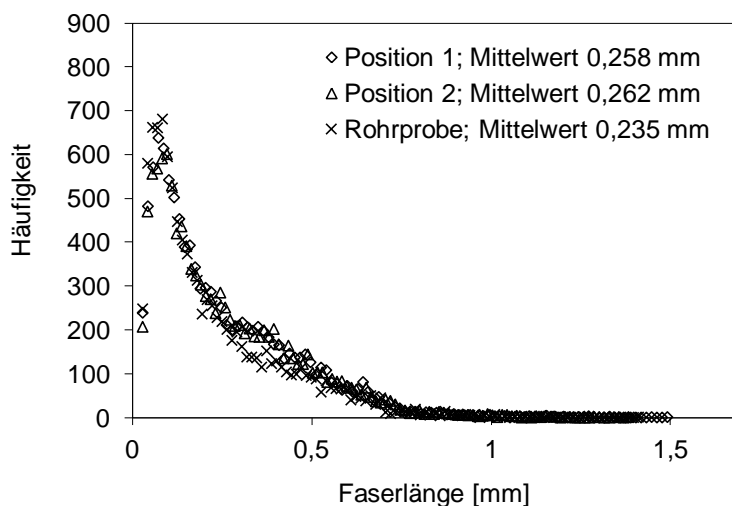


Abbildung 4.36: Auswertung der Faserlängenverteilung für PP-GF

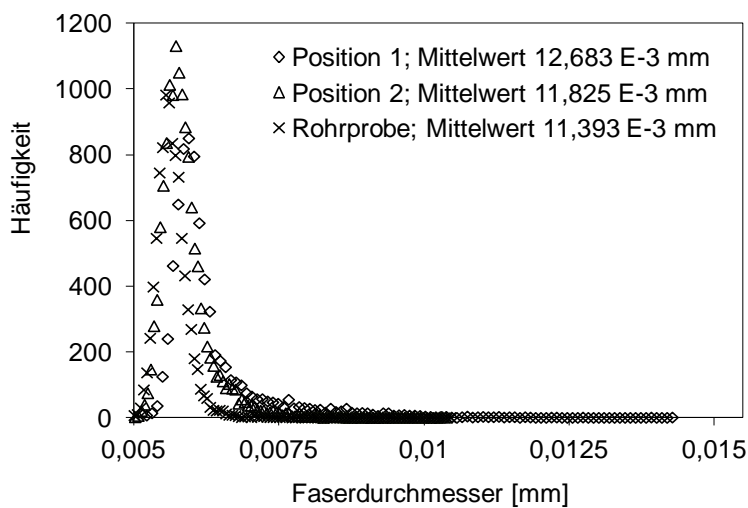


Abbildung 4.37: Auswertung der Faserdurchmesserverteilung für PBT-GF

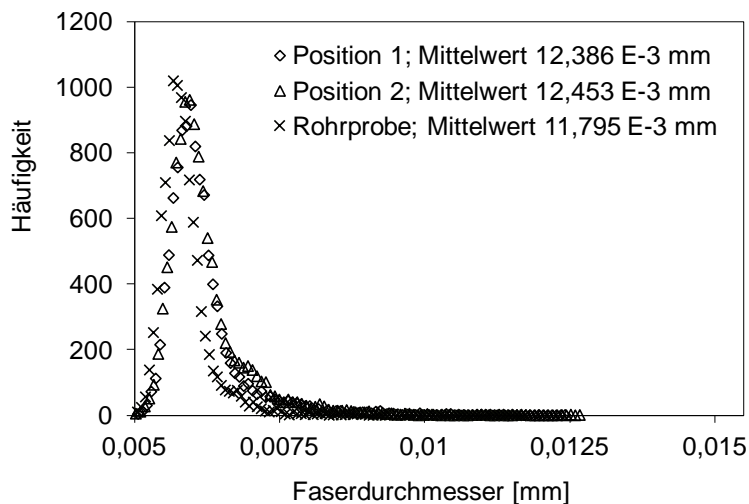


Abbildung 4.38: Auswertung der Faserdurchmesserverteilung für PP-GF

4.3.2 Ergebnisse der Schliffbilderstellung

Zur Erzeugung von Schliffbildern werden der Platte und dem Rohrprüfkörper Proben entnommen. Die betrachteten Querschnitte entsprechen den in Abbildung 4.28 dargestellten Positionen. Bei der Platte wird lediglich Position 2 und beim Rohrprüfkörper zusätzlich eine Probe unter 90° versetzt entnommen. Die Proben werden eingebettet (CitoFix Kit der Firma Struers) und durch Schleifen und Polieren aufbereitet. Die Aufbereitungsparameter können aus Tabelle 4.6 entnommen werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.39 für PBG-GF und in Abbildung 4.40 für PP-GF abgebildet.

Körnung:	Zeit:	Anpresskraft:
P 320	1 min	80 N
P 500	1 min	80 N
P 1000	2 min	80 N
9 μm	4 min	50 N
6 μm	6 min	50 N
3 μm	6 min	50 N
1 μm	10 min	50 N

Tabelle 4.6: Parameter des Schleif- und Poliervorgangs (Drehzahl des Tellers 150 U/min)

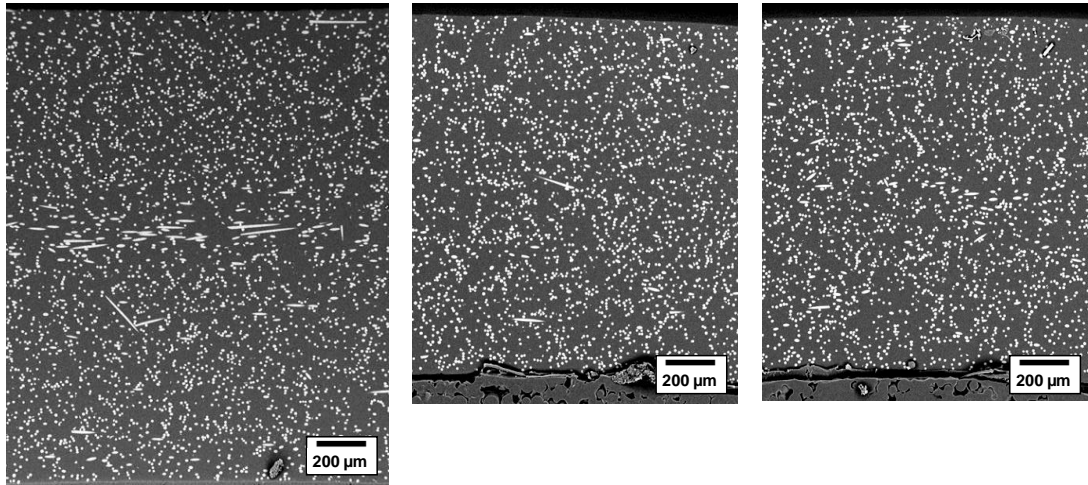


Abbildung 4.39: Schliffbilder der PBT-GF Platten- (links) und der Rohrprüfkörperproben (Mitte und rechts)

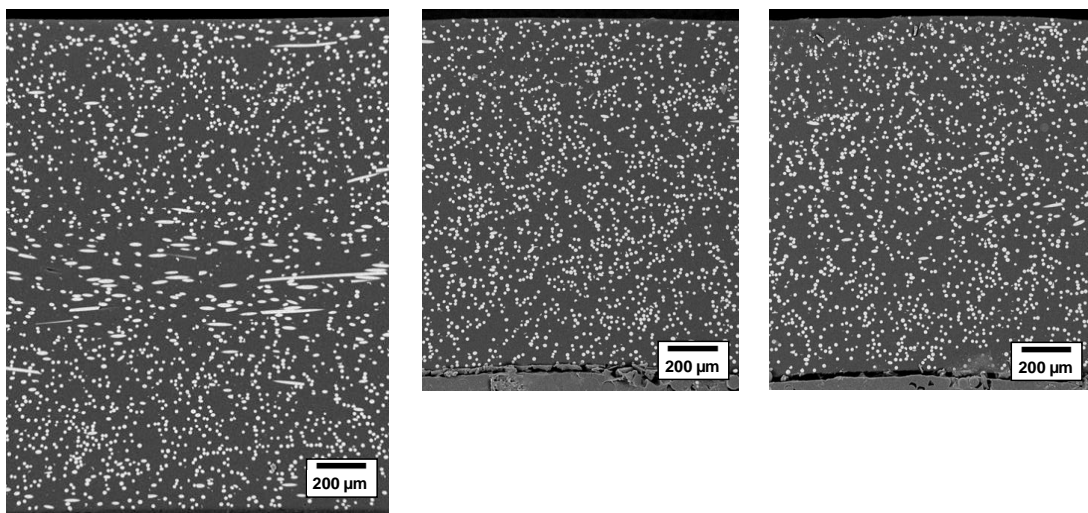


Abbildung 4.40: Schliffbilder der PP-GF Platten- (links) und der Rohrprüfkörperproben (Mitte und rechts)

Die erzeugten Schliffbilder bestätigen die μ CT-Auswertungen der Orientierungstensenoren. Bei den Proben, die der Platte entnommen sind, ist eine Mittelschicht vorhanden. Im Gegensatz hierzu zeigen die Schliffbilder der Proben, die dem Rohrprüfkörper entnommen sind, keine Mittelschicht. Mit Hinblick auf die Kalibrierung von Dimensionierungskriterien ergibt sich durch den Einsatz des Rohrprüfkörpers hierdurch ein wesentlicher Vorteil. Basierend auf der Voraussetzung der transversalen Isotropie, beispielsweise beim Tsai-Hill- oder Tsai-Wu-Kriterium, ist eine Kalibrierung der Kriterien möglichst mit unidirektionalen Prüfkörpern durchzuführen. Diese Voraussetzung erfüllt der Rohrprüfkörper wesentlich besser als die der Platte entnommenen BZ-Prüfkörper.

4.4 Zusammenfassung und Bewertung der experimentellen Ergebnisse

Ausgehend von der durchgeführten Prüf- und Versuchstechnik liegen die benötigten mechanischen und strukturellen Kennwerte zur Kalibrierung der Fließsimulationen und mikromechanischen Modellierungsansätze vor. Ferner stehen Spannungs-/Dehnungs-Kurven von kurzfaserverstärkten Zug-, Schub- und Rohrprüfkörpern sowie Kraft-/Weg-Kurven als Referenzen zur Evaluierung des entwickelten Ansatzes zur Berechnung kurzfaserverstärkter Kunststoffe zur Verfügung. Die mechanischen Kennwerte, die als Eingabe der zweistufigen Homogenisierung dienen, sind in Tabelle 4.7 zusammengefasst. Die Faservolumenangaben der Hersteller können anhand von Veraschungsversuchen in einem Kammerofen bei 600 °C und 6 h Heizdauer bestätigt werden. Die Ergebnisse weichen nur geringfügig von den Herstellerangaben von 20 bzw. 30 Gew.-% ab. Mit der Durchführung von Archimedes-Messungen ist die Dichte der Matrix bestimmbar. Die gemessenen Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 4.7 aufgeführt. Die Werte stimmen mit den Werten der Datenbank von Autodesk Moldflow Synergy 2012 (Dichte PP: 0,93 g/cm³, PBT 1,28 g/cm³) überein. Die Kennwerte zur Anwendung der Dimensionierungsstrategien sind in Tabelle 4.8 für PBT-GF und in Tabelle 4.9 für PP-GF aufgeführt. Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass in den Tabellen Einträge fehlen. Diese Kennwerte sind mittels der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Prüftechnik nicht ermittelbar.

	PBT-GF	PP-GF
E-Modul Matrix [MPa]	2540	1540
Schubmodul Matrix [MPa]	940	580
Querkontraktionszahl Matrix [-]	0,42	0,40
Dichte Matrix [g/cm ³]	1,29	0,89
Fließgrenze Matrix Zug [MPa]	36	15
Fließgrenze Matrix Schub [MPa]	41	17
Fließgrenze Matrix Druck [MPa]	48	19
E-Modul Faser [MPa] *	72000	72000
Querkontraktionszahl Faser [-] *	0,22	0,22
Dichte Faser [g/cm ³] *	2,54	2,54
Aspektverhältnis l/d Faser [-]	21,31	20,61
Gewichtsprozent Faseranteil [%]	20,33	30,19

* Quelle: Schürmann [113]

Tabelle 4.7: PBT-GF und PP-GF Daten für mikromechanische Modellierungsansätze

Verbund						
max. Spannung [MPa]	108,72 102,54*	140,30	74,41*	-	57,87	-
max. Dehnung [-]	0,019 0,030*	0,029	0,046*	-	0,087	-

Matrix			
max. Spannung [MPa]	58,04 63,04*	67,71	37,34
max. Dehnung [-]	0,064 0,282*	0,063	0,173

* ermittelt an BZ-Probe

Tabelle 4.8: PBT-GF Daten für Versagensmodellierung

Verbund						
max. Spannung [MPa]	49,01 38,99*	63,88	32,13*	-	24,92	-
max. Dehnung [-]	0,013 0,018*	0,016	0,022*	-	0,09	-

Matrix			
max. Spannung [MPa]	33,44 36,69*	40,75	21,46
max. Dehnung [-]	0,092 0,338*	0,078 ⁺	0,263

* ermittelt an BZ-Probe

Tabelle 4.9: PP-GF Daten für Versagensmodellierung

Durch Auftragen der experimentell bestimmten Fließpunkte im $p - \sigma_{eq}$ -Raum und Einsetzen der Werte in die Gleichungen für das Drucker-Prager bzw. das SAMP-Modell ergibt sich für PBT Abbildung 4.41 und für PP Abbildung 4.42. Die Daten sind auf die Versuchswerte unter Zugbelastung normiert. Es wird deutlich, dass das von Mises-Modell nur bedingt dazu geeignet ist, das plastische Verhalten der betrachteten Kunststoffe wiederzugeben.

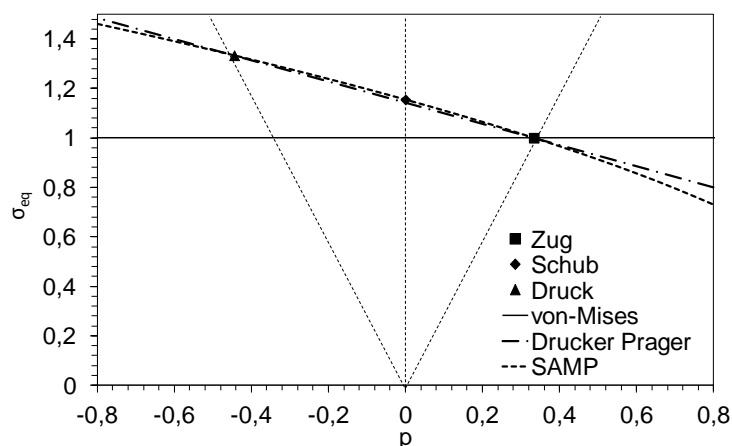


Abbildung 4.41: Fließgrenzen und Fließflächen von PBT für Zug-, Schub- und Druckbelastung

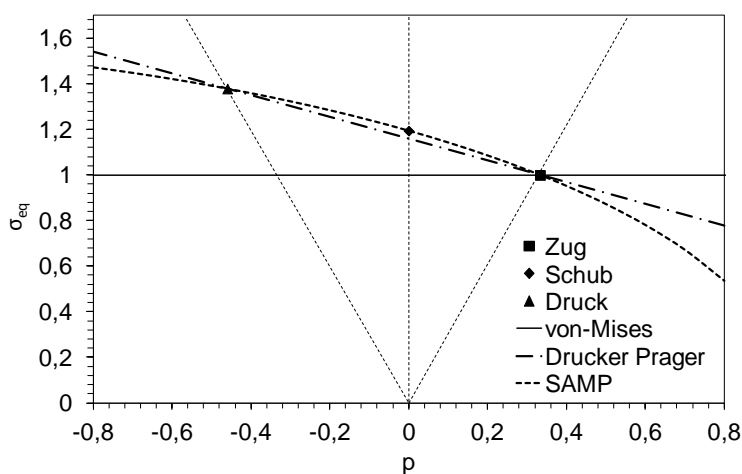


Abbildung 4.42: Fließgrenzen und Fließflächen von PP für Zug-, Schub- und Druckbelastung

Die mittels μ CT-Messungen ermittelten Orientierungstensorwerte zeigen, dass sich bei PBT-GF und PP-GF im Fall der Spritzgussplatte eine Mittelschicht ausbildet. Die erstellten Schlißbilder bestätigen dies. Anhand der μ CT-Messergebnisse und Schlißbilder der Rohrprüfkörperproben ist keine ausgeprägte Mittelschicht detektierbar. Die durch μ CT-Messung gewonnenen Orientierungstensorwerte dienen bei der Durchführung der Fließsimulationen zur Bestimmung des Interaktionskoeffizienten C_I und des RSC-Faktors κ .

5 Finite-Elemente-Simulationen

Mit der Durchführung der Finite-Elemente-Simulationen werden insgesamt vier Zielsetzungen verfolgt. Zunächst gilt es, die Anwendbarkeit der ausgewählten Plastizitätsmodelle aus Abschnitt 2.5 hinsichtlich der Prognosegüte auf die eingesetzten thermoplastischen Kunststoffe zu bewerten (Abschnitt 5.1).

Referenzsimulationen an RMS-Modelle eignen sich zur Absicherung und Bewertung von mikromechanischen Modellierungsansätzen. Demnach wird als zweites Ziel die virtuelle Absicherung der erweiterten Homogenisierungsansätze bzw. die Analyse und Bewertung der Möglichkeiten und Grenzen definiert, die sich durch deren Einsatz ergeben. Die durchgeführten Analysen und resultierenden Ergebnisse sind in Abschnitt 5.2 zu finden.

Ferner können anhand der RMS-Simulationen experimentell nicht durchführbare Versuche simuliert und entsprechende Kennwerte gewonnen werden. Diese Option ermöglicht es, ausstehende Dimensionierungskennwerte virtuell zur Vervollständigung von Tabelle 4.8 bzw. Tabelle 4.9 abzuschätzen. Dies wird als dritte Zielsetzung definiert und ist in Abschnitt 5.3 umgesetzt.

Als vierte Zielsetzung wird die Durchführung von Struktursimulationen unter Verwendung der ermittelten Werkstoffkennwerte definiert (siehe Abschnitt 5.4). Im Rahmen dieser Arbeitsinhalte werden zudem die in den Modellierungsansätzen integrierten Dimensionierungskriterien angewendet. Anschließend gilt es in Abschnitt 5.5 zu bewerten, inwiefern die vorgestellten mikromechanischen Modellierungsansätze bzw. die integrierten Dimensionierungskriterien die experimentellen Prüfergebnisse abbilden können.

Zur Durchführung der genannten Punkte sind zunächst Fließsimulationen zur virtuellen Ermittlung der Faserorientierungen nötig und es ist ein Mapping der Elementorientierungen auf die Struktursimulationselemente auszuführen. Zur Durchführung der Fließsimulationen wird das Softwareprogramm Modlflow 2012 der Firma Autodesk und zum Mapping das Programm Converse 3.4 der PART Engineering GmbH eingesetzt.

5.1 Bewertung der elastisch-plastischen Modellierungsansätze

Die in Abschnitt 2.6 vorgestellten Plastizitätsmodelle unterscheiden sich wesentlich in der Formulierung der jeweiligen Fließfläche. Während diese beim von Mises-Modell unabhängig von der volumetrischen Spannung ist, existiert beim Drucker-Prager-Modell eine lineare und beim SAMP-Modell eine quadratische Abhängigkeit. Das von Mises-Modell (Mises) ist mit einem Zug-, Druck- oder Schubversuch zu kalibrieren, während beim Drucker-Prager-Modell (DP) zwei und beim SAMP-Modell (SAMP) in der Regel drei der genannten Versuche durchzuführen sind. Ausgehend von den technischen bzw. wahren Spannungs-/log. Dehnungs- bzw. Gleitungs-Kurven der unverstärkten Thermoplaste aus Abschnitt 4.2 wird im Folgenden die mit den Modellen erreichbare Simulationsgüte untersucht. Die verwendeten FE-Modelle sind in Abbildung 5.1 abgebildet. Die verwendete Schub-, Zug- und Rohrprüfkörpergeometrie der FE-Modelle weisen jeweils zwei Hexaeder-Elemente über die Dicke auf.

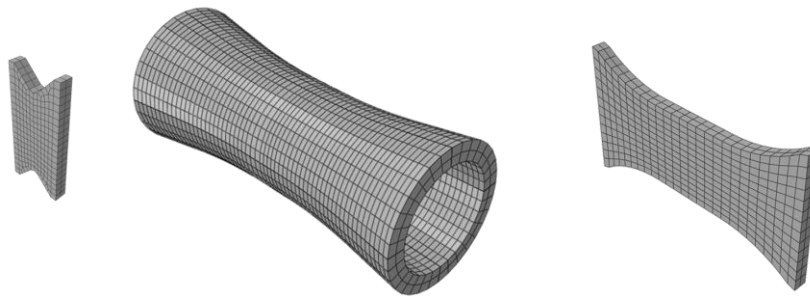


Abbildung 5.1: Eingesetzte FE-Modelle für die Simulationen der unverstärkten Kunststoffe

Anhand von Abbildung 5.2 wird deutlich, dass das von Mises-Modell nicht geeignet ist, die Druckversuche abzubilden. Durch die Möglichkeit der Vorgabe unabhängiger Verfestigungskurven in der SAMP Formulierung und der unterschiedlichen Fließgrenzen unter Zug- und Druckbelastung, lässt sich mit diesem Modell eine höhere Prognosegüte als mit dem Drucker-Prager-Modell erzielen. Die Simulationen mit den Werkstoffdaten von PP bestätigen dies (Abbildung 5.3). In Abbildung 5.4 sind die Ergebnisse des Zugprüfkörpers dargestellt. Eine Unterscheidung zwischen den erzielten Ergebnissen mit den unterschiedlichen Plastizitätsmodellen ist nicht zu erkennen, da das von Mises-Modell am Zugversuch kalibriert ist. Im Gegensatz hierzu wird an den Schubversuchskurven in Abbildung 5.5 deutlich, dass auch bei diesem Belastungsfall das SAMP-Modell die höchste Prognosegüte erzielt.

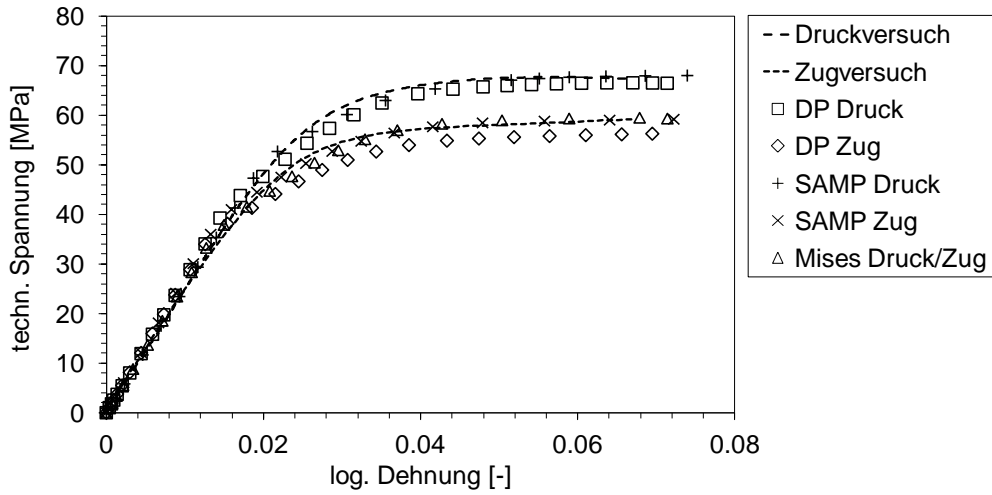


Abbildung 5.2: Rohrprüfkörperergebnisse und die Modelle DP, SAMP und Mises für PBT

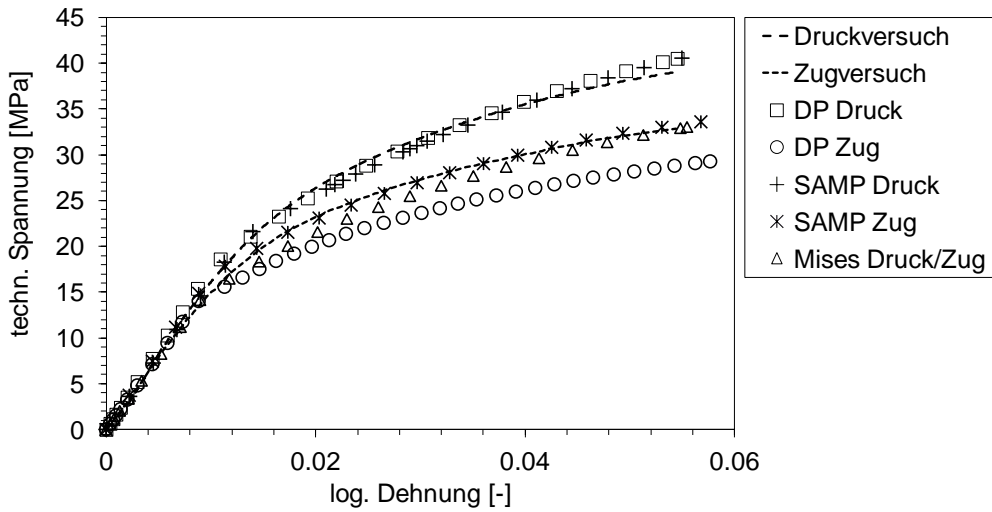


Abbildung 5.3: Rohrprüfkörperergebnisse und die Modelle DP, SAMP und Mises für PP

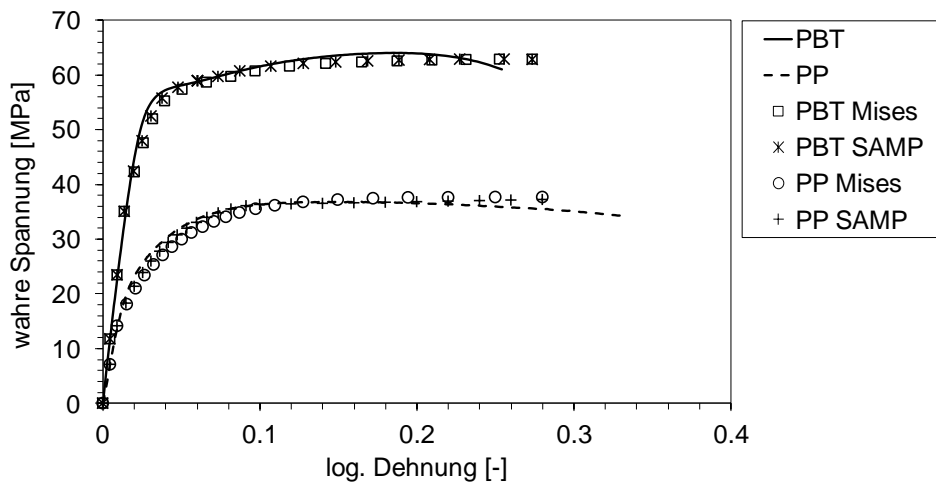


Abbildung 5.4: Zugprüfkörperergebnisse und die Modelle SAMP und Mises für PBT und PP

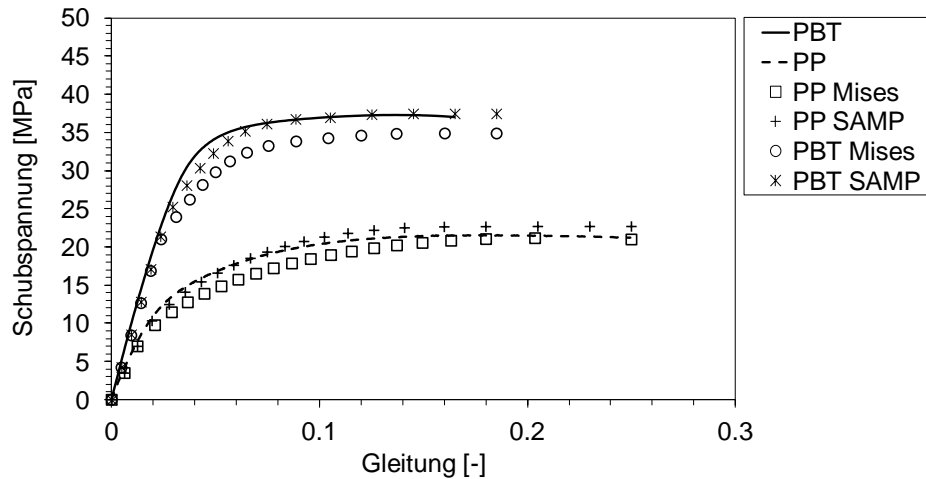


Abbildung 5.5: Schubprüfkörperergebnisse und die Plastizitätsmodelle SAMP und Mises für PBT und PP

Zusammenfassend ist festzustellen, dass die erzielte Simulationsgüte unter Verwendung des SAMP-Plastizitätsmodells am höchsten ist. Die wesentlichen Vorteile des Modells liegen in der unabhängigen Formulierung der Verfestigungskurven für Zug-, Druck- und Schubbelastungen und der quadratischen Fließflächenformulierung, die eine sehr gute Anpassung an die experimentell ermittelten Fließspannungen ermöglicht (vgl. hierzu auch Abbildung 4.41 und Abbildung 4.42). Vor diesem Hintergrund, sowie zur Reduktion des Simulationsaufwandes, werden ausschließlich die mikromechanischen Modellierungsansätze MT-iso-2e und MT-SAMP im weiteren Verlauf eingesetzt.

5.2 Virtuelle Absicherung der erweiterten, zweistufigen Homogenisierung

Anhand von Simulationen an RMS-Modellen sind Möglichkeiten und Grenzen von Homogenisierungsformulierungen aufzeigbar. Wesentliche Vorteile bei dieser Vorgehensweise ist die exakte Kenntnis der Phaseneigenschaften, wie beispielsweise Faservolumengehalt, Faseraspektverhältnis und -orientierung sowie die ideale Faser-Matrix-Haftung. Nachteilig ist der zum Teil hohe Zeitaufwand zur Erstellung eines periodischen RMS-Modells bzw. zur Durchführung der entsprechenden Struktursimulationen.

In den folgenden Abschnitten werden die verwendeten RMS-Modelle vorgestellt und die dazugehörigen Berechnungsergebnisse präsentiert. Eingesetzt werden zwei unterschiedliche RMS-Modelle, die jeweils eine Abmessung von 80 mm x 20 mm x 20 mm und 50 Einschlüsse besitzen. Die beiden Modelle unterscheiden sich lediglich im Aspektverhältnis sowie modellierungsbedingt geringfügig im Volumengehalt der Einschlüsse. Beim RMS20-Modell liegen elliptische Fasern mit einem Aspektverhältnis von 20 bei einem Volumengehalt von

12,56 % vor. Beim RMS1-Modell bilden Kugeln die Einschlüsse mit einem Aspektverhältnis von 1 und einem Volumengehalt von 12,35 %. Das RMS1-Modell besteht aus ca. 151.000 und das RMS20-Modell aus ca. 1.200.000 Tetraeder-Elementen. Der Einfluss der ellipsoiden Approximation der real eher zylindrischen Einschlussgeometrie wird u. a. von Li et al. [114] analysiert. Sie schlagen einen Faktor von 1,25 vor, um aus dem Aspektverhältnis zylindrischer Fasern das Aspektverhältnis sich mechanisch ähnlich verhaltender, ellipsoider Einschlüsse zu errechnen. Dies konnte in Untersuchungen in der Arbeit von Jamart nicht bestätigt werden [115]. Vielmehr konnte ein bei gleichem Aspektverhältnis identisches mechanisches Verhalten nachgewiesen werden. Die modellierten Mikrostrukturen der Einschlüsse sind in Abbildung 5.6 dargestellt. Die äquivalenten Homogenisierungsberechnungen werden ebenfalls mit diesen Modellen (MT-Modelle) ausgeführt, wobei sowohl den Fasern als auch der Matrix als Werkstoff der entsprechende Modellierungsansatz als Routine zugewiesen wird. Sofern nicht anders angegeben, entsprechen die verwendeten Daten für Faser und Matrix den in Gleichung (2.76) angegebenen Werten.

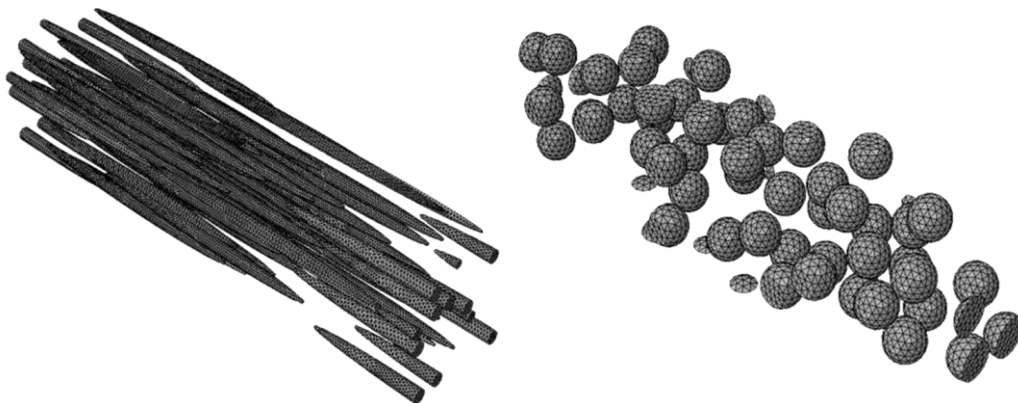


Abbildung 5.6: Periodische Einschlüsse der verwendeten RMS-Modelle

Im Folgenden werden Simulationsergebnisse bzgl. der von Mises-Spannungsverteilung in den RMS- und MT-Modellen betrachtet. Hierzu wird jeweils im belasteten Zustand die von Mises-Spannung in allen Matrix-Elementen berechnet und in 50 Klassen unterteilt. Zunächst werden die Spannungsverteilungen bei Aufbringung einer Last in Faserrichtung (Abbildung 5.7) und quer zur Faserausrichtung (Abbildung 5.8) im RMS20-Modell mit denjenigen im RMS1-Modell verglichen. Als zusätzliches Ergebnis sind die Spannungen der jeweiligen MT-Modelle angegeben. Aufgrund der eingesetzten Homogenisierung ist die von Mises-Spannung in jedem Element gleich und entspricht einer Summenhäufigkeit von eins. Ein Überblick über die verwendeten mikromechanischen Modellierungsansätze ist in Tabelle 5.1 gegeben.

Nr.	Modell:	Anmerkungen:
1.	MT-iso-1	zweistufige Homogenisierung (Abschnitt 2.3.4) mit von Mises-Plastizität (Abschnitt 2.5.2), modifizierter spektraler Isotropierung (Abschnitt 3.2.1) und Momentenformulierung zweiter Ordnung (Abschnitt 2.6.2)
2.	MT-iso-2	wie 1., jedoch mit Momentenformulierung zweiter statt erster Ordnung (Abschnitt 2.6.2)
3.	MT-iso-2e	wie 2., jedoch mit modifizierter Momentenformulierung zweiter Ordnung (Abschnitt 3.2.2)
4.	MT-SAMP	zweistufige Mori-Tanaka-Homogenisierung (siehe Abschnitt 2.3.4) mit SAMP-Plastizität (siehe Abschnitt 2.5.4) und modifizierter allgemeiner Isotropierung (siehe Abschnitt 3.2.1)

Tabelle 5.1: Überblick über die eingesetzten mikromechanischen Modelle

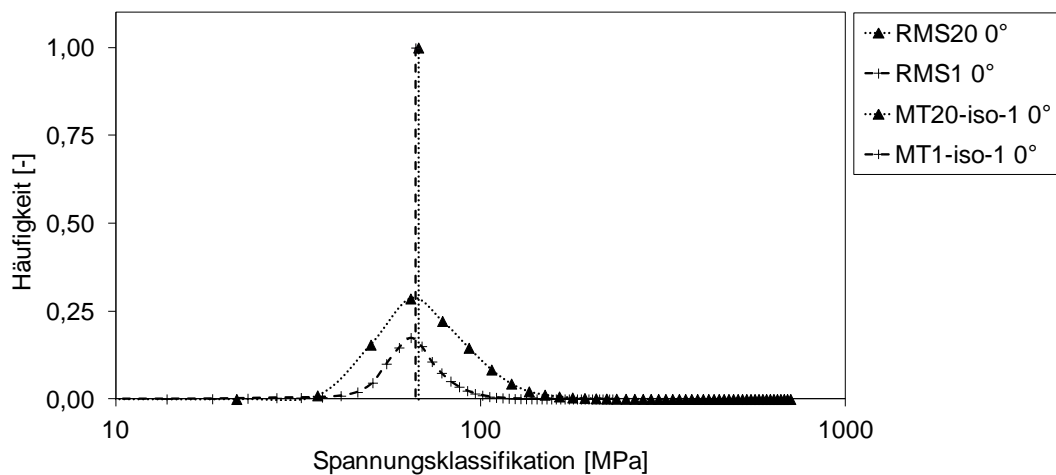


Abbildung 5.7: Spannungen im RMS1- und RMS20-Modell unter Belastung in Faserausrichtung

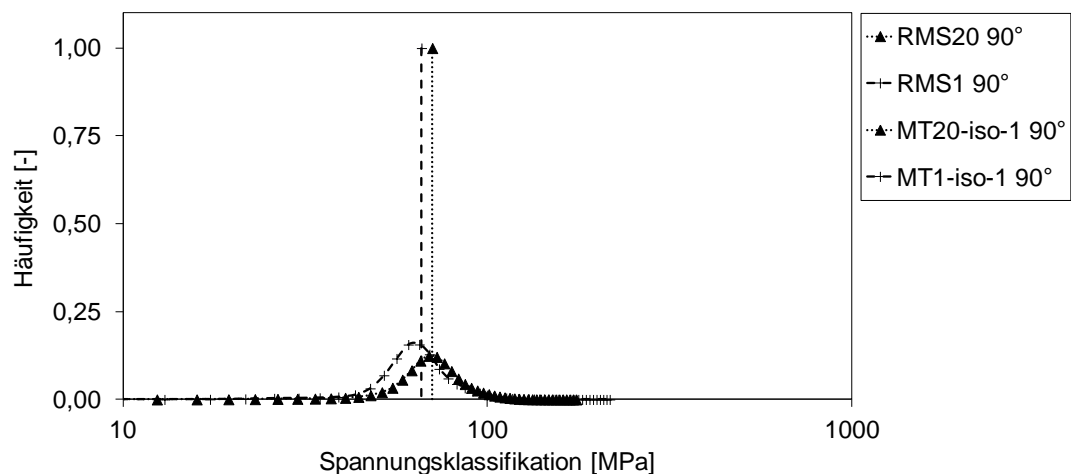


Abbildung 5.8: Spannungen im RMS1- und RMS20-Modell unter Belastung quer zur Faserausrichtung

Das Aspektverhältnis der Einschlüsse hat weder unter 0° noch unter 90° einen wesentlichen Einfluss auf die mittlere von Mises-Spannung der MT-Modelle. Ausgehend von den vorhandenen Daten kann zusätzlich der Mittelwert der von Mises-Spannung in der Matrix der RMS-Modelle berechnet werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

	RMS [MPa]	MT [MPa]
ld 20 0°	70,530	67,499
ld 20 90°	69,998	70,64
ld 1 0°	72,787	68,300
ld 1 90°	73,112	69,043

Tabelle 5.2: Vergleich der auftretenden mittleren von Mises-Spannungen

Die Ergebnisse bestätigen, dass die mittels der MT-Modelle berechneten Werte denen der RMS-Modelle weitestgehend entsprechen. Anhand von Abbildung 5.7 bzw. Abbildung 5.8 ist die Überschätzung des Fließbeginns unter Verwendung der mikromechanischen Modellierungsansätze folgendermaßen interpretierbar. Entgegen der Übereinstimmung der Mittelwerte der von Mises-Spannung zeigt die Spannungsverteilung im RMS20 in Abbildung 5.7 einen Anteil höherer Spannungen. Diese Spannungen führen zu einem frühzeitigen Fließbeginn bzw. zum Versagen und können mittels der gewählten mikromechanischen Modellierung erster Ordnung nicht berücksichtigt werden.

Eine Formulierung zweiter Ordnung führt zu einer Verschiebung der mittleren Spannungen hin zu größeren Werten in Abhängigkeit der transversal isotropen Verbundsteifigkeitsmatrix und somit in Abhängigkeit der Fasergeometrie, -ausrichtung und des Faservolumenanteils. Für den betrachteten Fall mit einem Faseraspektverhältnis von 20, einem Faservolumenanteil von 12,561 % und einer unidirektionalen Faserausrichtung bewirkt die Verwendung der Formulierung zweiter Ordnung einer Erhöhung der Spannung um ca. 5 % bei einer Belastung in Faserausrichtung. Bei einer Belastung quer zur Faserausrichtung ist kein Unterschied festzustellen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.9 für eine Belastung in Faserrichtung und in Abbildung 5.10 für eine Belastung quer zur Faserausrichtung dargestellt, wobei zusätzlich der eingeführte Kalibrierparameter angewendet und variiert wird. Diese grafische Darstellungsweise ermöglicht nun zusätzlich eine Interpretation des eingeführten Kalibrierparameters l_σ , der eine Verschiebung der von Mises-Spannung und somit des Fließbeginns bewirkt.

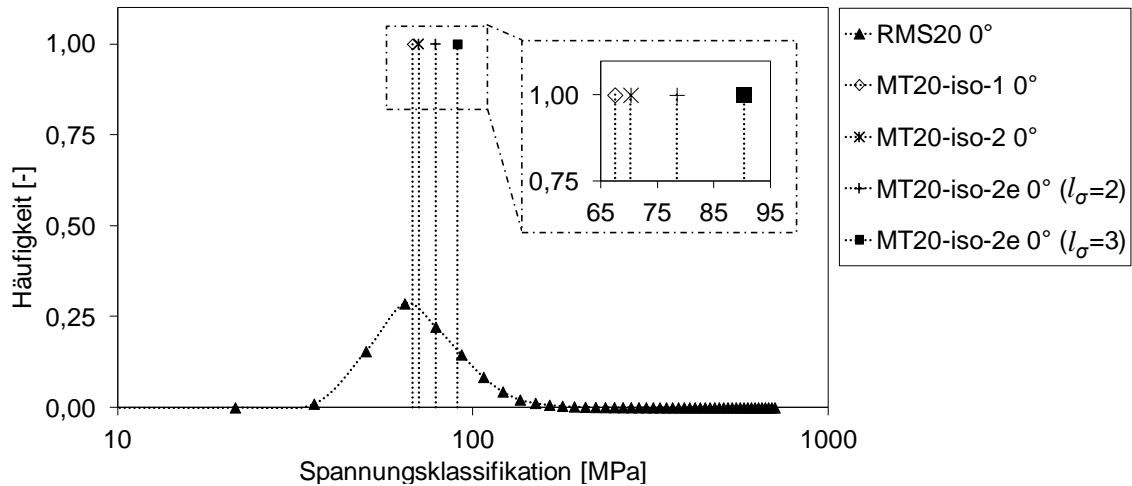


Abbildung 5.9: Einfluss von l_σ auf die von Mises-Spannung im RMS20 bei Belastung in Faserausrichtung

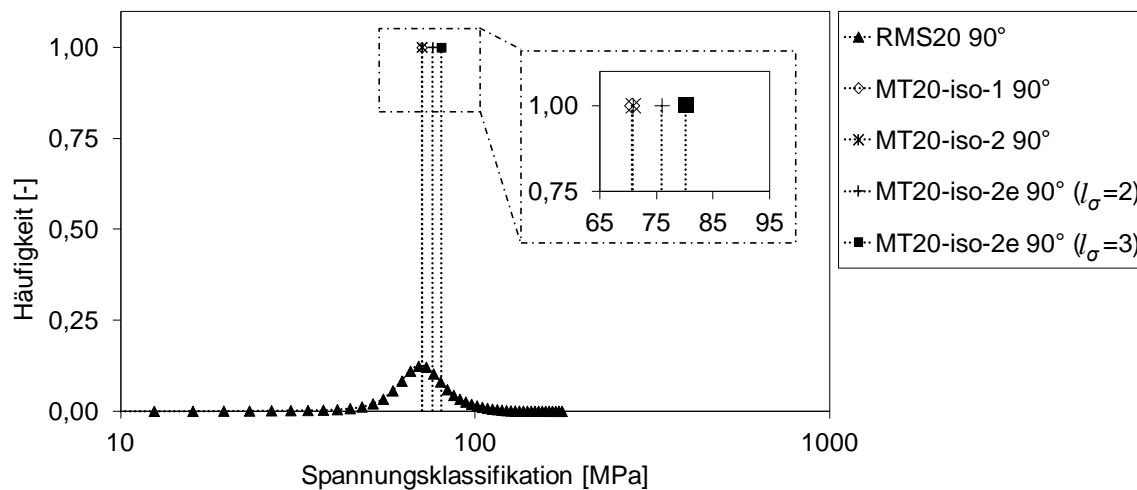


Abbildung 5.10: Einfluss von l_σ auf die von Mises-Spannung im RMS20 bei Belastung quer zur Faserausrichtung

Demnach ist l_σ , in Analogie zur Kerbspannungslehre nach Neuber [116], als Formzahl interpretierbar. Während in der klassischen Kerbspannungslehre die Formzahl in Abhängigkeit der Kerbgeometrie zu wählen ist, muss dies im Fall kurzfaserverstärkter Kunststoffe in Abhängigkeit der Fasergeometrie und des Faservolumenanteils geschehen. Zur Absicherung dieser Annahme werden im Folgenden Simulationen an einem RMS1 Modell unter 0° und 90° betrachtet. Bedingt durch die kugelförmigen Einschlüsse treten keine Unterschiede bzgl. des Fließbeginns unter 0° und 90° auf. Der Fließbeginn des RMS1-Modells entspricht dem des MT1-Modells (Abbildung 5.11). Die Spannungs- bzw. Dehnungsverteilung in der Matrix bei kugelförmigen Einschlüssen sind homogener als bei ellipsoiden Einschlüssen mit einem hohen Aspektverhältnis. Der Einfluss des Parameters l_σ ist demnach ebenfalls gering

(Abbildung 5.12) und vergleichbar mit dem beim RMS20-Modell bei einer Belastung quer zur Faserausrichtung.

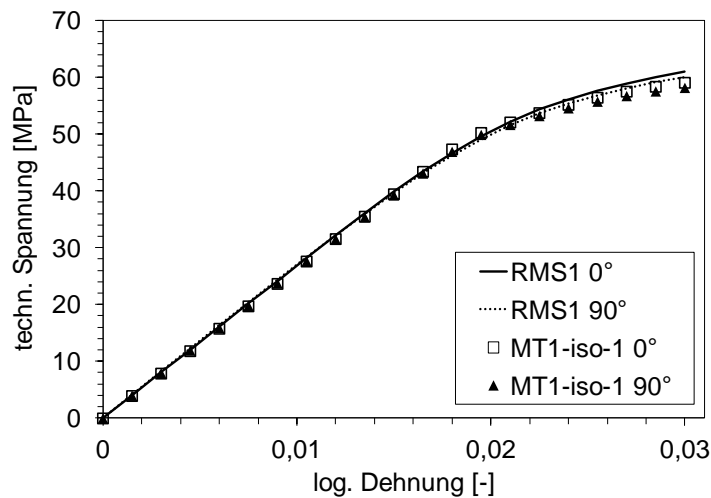


Abbildung 5.11: RMS1- im Vergleich zu MT1-iso-1-Simulationen

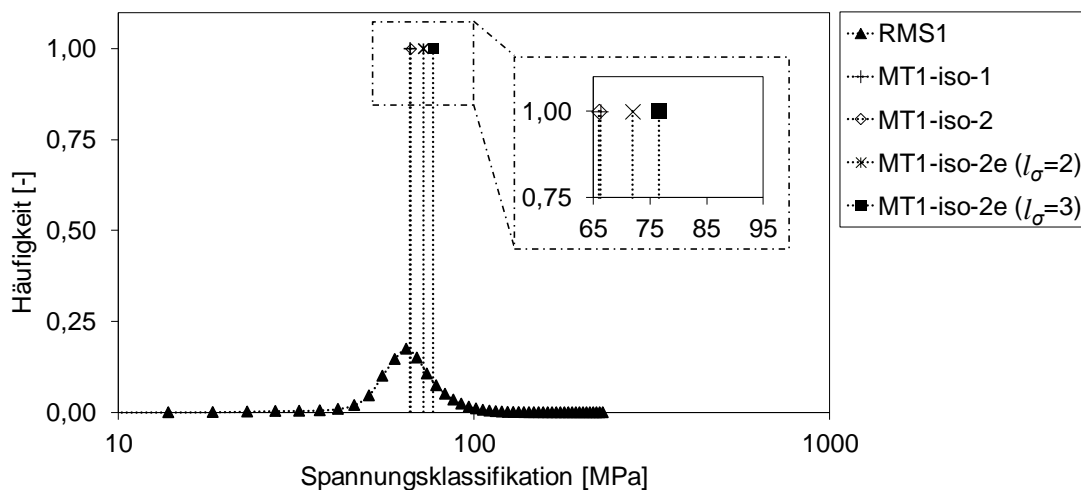


Abbildung 5.12: Einfluss von l_σ auf die von Mises-Spannung im RMS1 (Richtungsunabhängig)

In Abbildung 5.13 und Abbildung 5.14 sind die Ergebnisse unter Anwendung der Modelle MT-iso-1 und MT-iso-2e dargestellt. Mittels der eingeführten Kalibrierparameter l_σ und l_κ ist eine gute Abbildung der experimentell ermittelten Ergebnisse möglich ($l_\sigma = 1,25$; $l_\kappa = 0,9$). Allerdings ist eine Zug-Druck-Unterscheidung mit dieser Formulierung nicht möglich. Die Berechnungsergebnisse unter Verwendung der Modelle MT-SAMP und MT-iso-1 sind in Abbildung 5.15 und Abbildung 5.16 dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Ergebnisse dieser Modellierungsansätze unter Zugbelastung sowohl bei Belastung in als auch quer zur Faserausrichtung im Wesentlichen übereinstimmen.

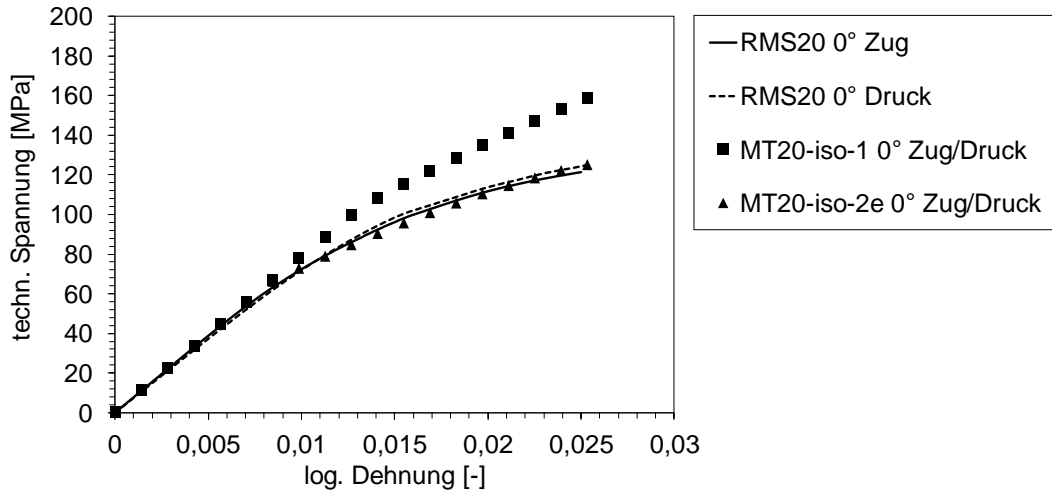


Abbildung 5.13: RMS20-, MT20-iso-1- und MT20-iso-2e-Simulationen bei Belastung in Faserausrichtung

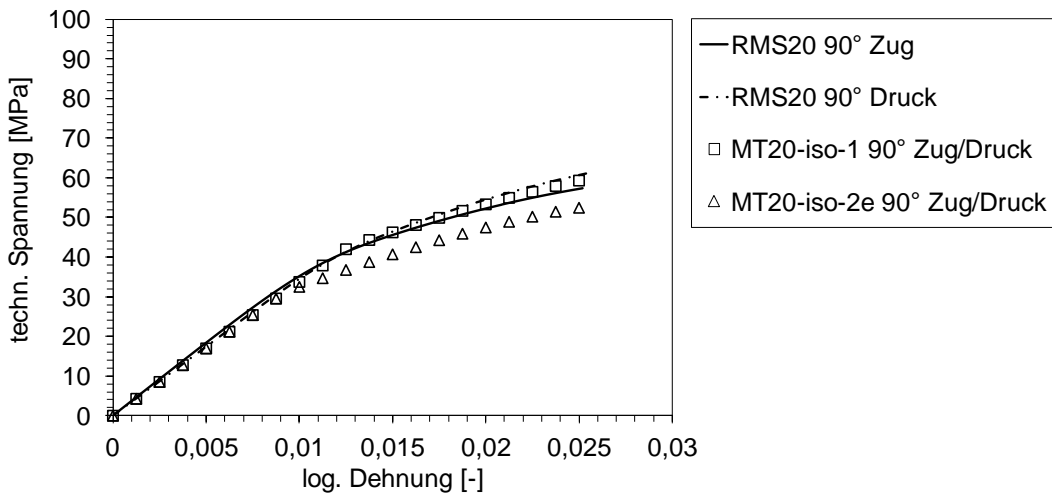


Abbildung 5.14: RMS20-, MT20-iso-1- und MT20-iso-2e-Simulationen bei Belastung quer zur Faserausrichtung

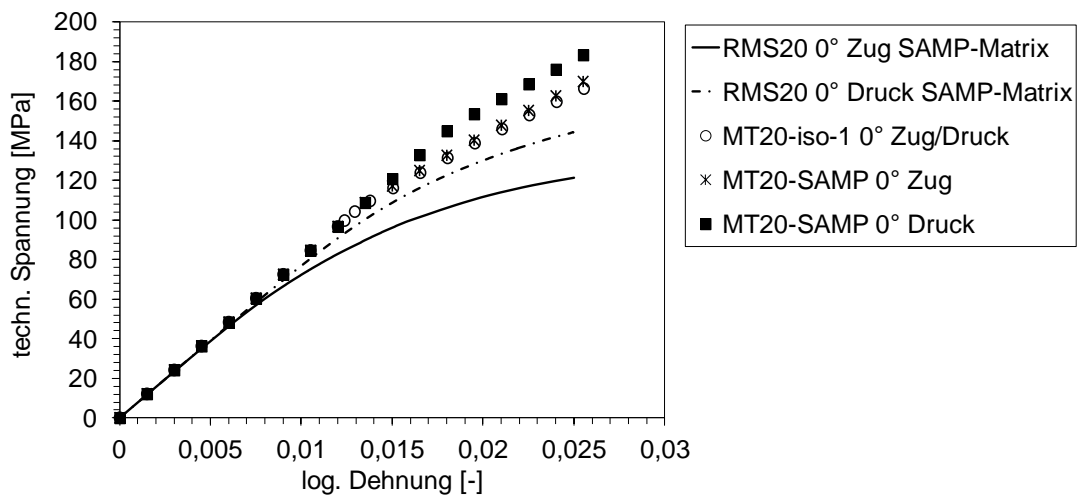


Abbildung 5.15: RMS20-, MT20-iso-1- und MT20-SAMP-Simulationen bei Belastung in Faserausrichtung

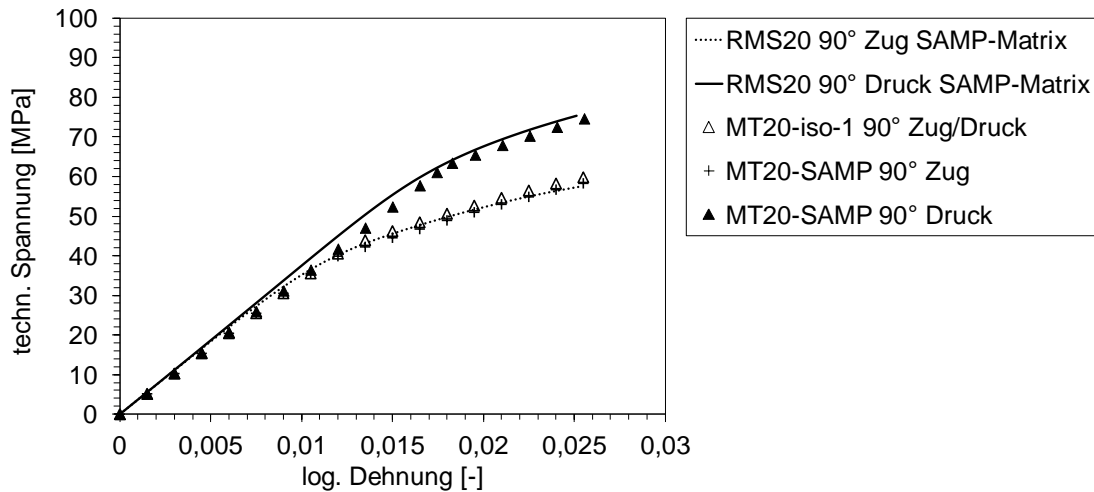


Abbildung 5.16: RMS20-, MT20-iso-1- und MT20-SAMP-Simulationen bei Belastung quer zur Faserausrichtung

Die geringfügige Abweichung unter Zugbelastung zwischen den mikromechanischen Modellen MT-SAMP und MT-iso-1 unter 0° ist bedingt durch die unterschiedlichen Isotropierungsmethoden. Es wird zudem erneut deutlich, dass die Kurven unter 90° im Gegensatz zu den Kurven unter 0° sehr gut mit denen der RMS20-Simulationen übereinstimmen.

Derzeit existiert keine Momentenformulierung zweiter Ordnung, die es erlaubt ein SAMP-Plastizitätsmodell zu berücksichtigen. Vor diesem Hintergrund wird die Erarbeitung einer entsprechenden Formulierung als Herausforderung für nachfolgende Arbeiten angesehen. Im Rahmen dieser Arbeit wird zur Verbesserung der Simulationsgüte (siehe Abbildung 5.15) auf die in der Literatur gängige Methode der Einführung einer virtuellen Matrix zurückgegriffen, wobei jeweils ausschließlich die Fließgrenze und nicht die plastische Verfestigungskurve des Matrixwerkstoffs skaliert wird. In Kombination mit dem eingeführten Kalibrierparameter l_κ reicht dies aus, um die Referenzkurven der RMS20-Modelle mit SAMP-Plastizität abzubilden. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Abbildung 5.17 und Abbildung 5.18 dargestellt. Der Kalibrierparameter l_κ und die Fließgrenzen der virtuellen Matrix sind hierbei wie folgt gewählt: $l_\kappa = 0,8$; $\sigma_{Zug,1} = 30 \text{ MPa}$; $\sigma_{Druck,1} = 41 \text{ MPa}$; $\sigma_{Schub,1} = 36 \text{ MPa}$

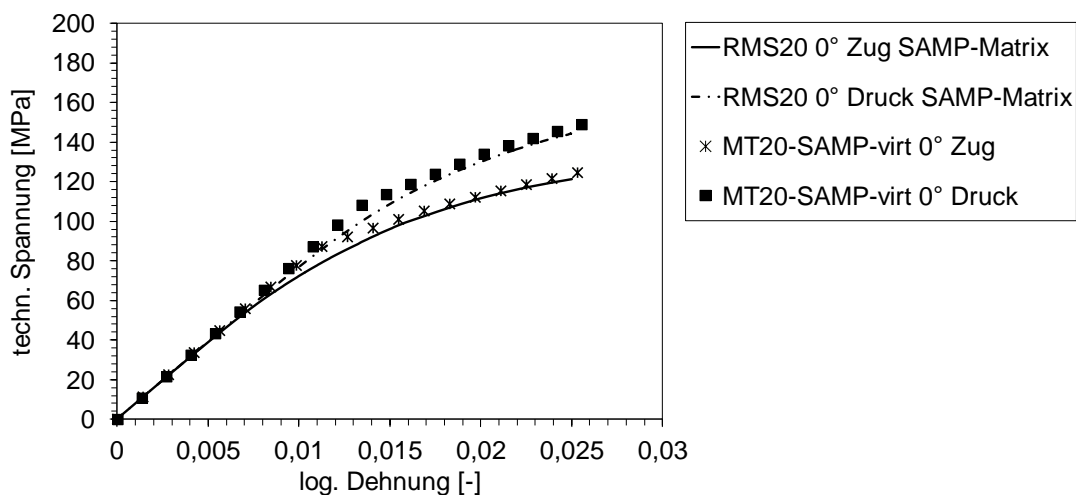


Abbildung 5.17: RMS20-Simulationen mit realer und MT20-SAMP-Simulationen mit virtueller Matrix im Vergleich für PBT-GF bei Belastung in Faserausrichtung

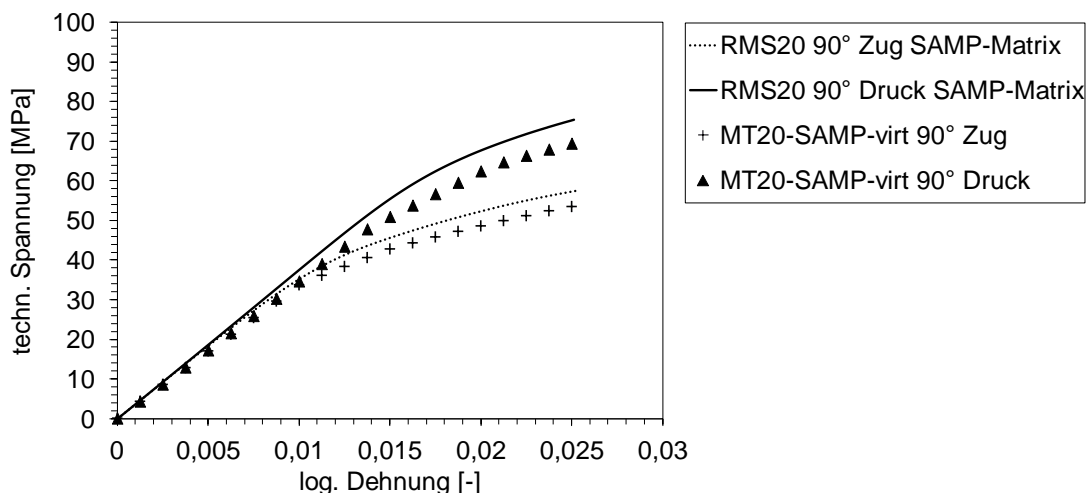


Abbildung 5.18: RMS20-Simulationen mit realer und MT20-SAMP-Simulationen mit virtueller Matrix im Vergleich für PBT-GF bei Belastung quer zur Faserausrichtung

Es sei an dieser Stelle nochmals angemerkt, dass der Kalibrierparameter l_κ lediglich die Steigung der plastischen Verfestigungskurven beeinflusst, während sich der Parameter l_σ , der ausschließlich in Kombination mit dem von Mises-Modell zur Verfügung steht, auf den Beginn des Fließens auswirkt. Zusammenfassend ist der erweiterte, mikromechanische Modellierungsansatz MT-iso-2e mit den eingeführten Kalibrierparametern geeignet, um das elastisch-plastische Verhalten eines kurzfaserverstärkten Kunststoffes abzubilden. Eine Zug-Druck-Unterscheidung ist allerdings nur durch Integration der SAMP-Plastizität und somit mit dem Modell MT-SAMP möglich.

5.3 Virtuelle Ermittlung experimentell unzugänglicher Daten

Aufgrund der hohen Faserausrichtung in den geprüften Rohrprüfkörpern und der Möglichkeit, Berechnungen an MT20-Modellen mit mechanischen Eigenschaften von PBT-GF durchzuführen, werde diese Versuchsergebnisse und Simulationen im Folgenden miteinander verglichen (Abbildung 5.19). Für das MT20-Modell werden die Matrixdaten aus Tabelle 4.7 verwendet, allerdings ist anstelle des von Mises erneut ein SAMP-Plastizitätsmodell hinterlegt. Ferner wird in diesen Berechnungen ebenfalls eine Skalierung der anfänglichen Fließspannung durchgeführt. Die Faserorientierung ist im Volumen auf den jeweiligen Mittelwert der Orientierungstensorskomponente aus Abbildung 4.33 gesetzt (0,78; 0,15; 0,07).

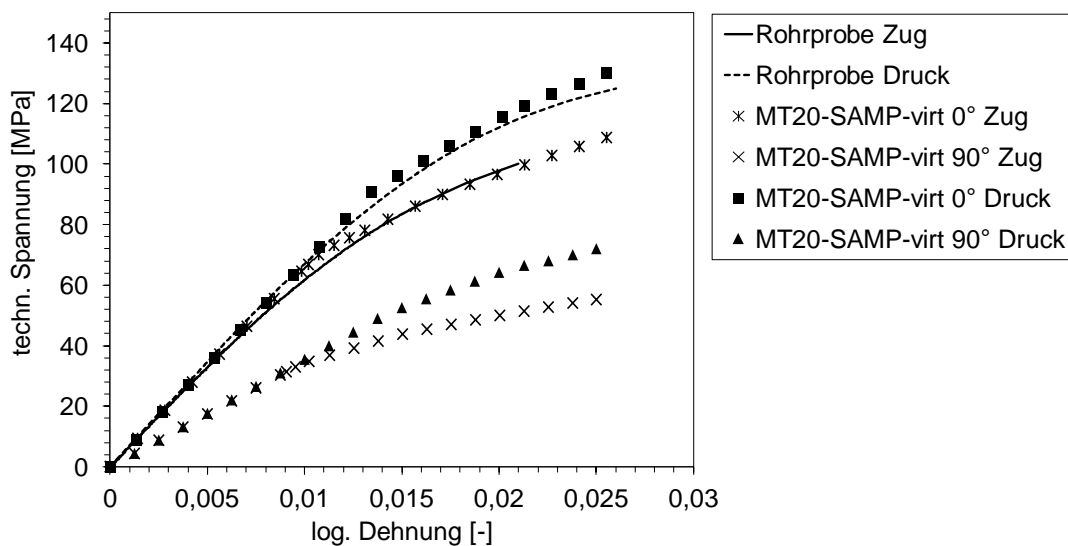


Abbildung 5.19: Rohrprüfkörperergebnisse und virtuelle Versuche an MT20 Modellen (PBT-GF)

Die MT20-Ergebnisse stimmen sehr gut mit den experimentellen Ergebnissen am Rohrprüfkörper überein. Dieses Ergebnis ermöglicht die virtuelle Durchführung der experimentell nicht durchzuführende Zug- bzw. Druckversuch quer zur Faserausrichtung (Y_{Zug} bzw. Y_{Druck}). Die Ergebnisse sind ebenfalls in Abbildung 5.19 dargestellt. Während am Zugprüfkörper ein versagenskritischer Wert von 74,41 MPa bestimmt wird, ergibt sich bei dieser Vorgehensweise für Zugbelastung ein Wert von 52 MPa und für Druckbelastung ein Wert von 72 MPa. Als kritische Dehnung wird der mindestens zu ertragende Wert des Versuchs in Faserrichtung gewählt. Analog wird diese Vorgehensweise auf den Werkstoff PP-GF angewendet (siehe Abbildung 5.20).

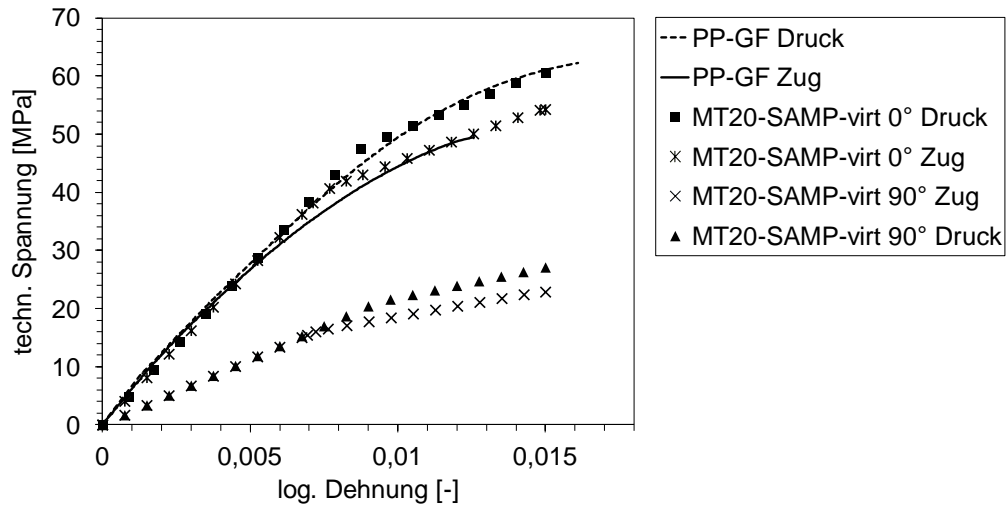


Abbildung 5.20: Rohrprüfkörperergebnisse und virtuelle Versuche an MT20 Modellen (PP-GF)

Die Werte des Faserorientierungstensors werden analog zur Vorgehensweise bei PBT-GF bestimmt und als Ergebnis zu $(0,83; 0,12; 0,05)$ gesetzt. Die Kennwerte für das plastische Werkstoffverhalten der PP Matrix werden ebenfalls analog zur Vorgehensweise bei PBT-GF angepasst und es gilt: $l_{\kappa} = 0,9$; $\sigma_{Zug,1} = 12,5 \text{ MPa}$; $\sigma_{Druck,1} = 16 \text{ MPa}$; $\sigma_{Schub,1} = 15 \text{ MPa}$

Schubversuche in der 2-3 Ebene (vgl. Abbildung 5.21) sind experimentell nicht durchführbar. Allerdings lässt sich dieser Schublastfall am RMS20-Modell virtuell erzeugen und somit der Versagenskennwert S_{23} virtuell bestimmen. Anhand der simulierten Kurven in Abbildung 5.22 wird deutlich, dass die Faserausrichtung bei den betrachteten Schublasten bei kurzfaserverstärkten Kunststoffen keinen Einfluss auf die elastische Steifigkeit und kaum Einfluss auf das plastische Werkstoffverhalten hat. Die Annahme $S_{23} = S_{12}$ ist gerechtfertigt.

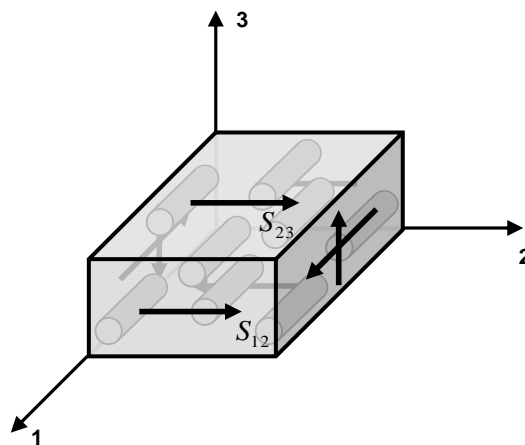


Abbildung 5.21: Schubversuche in der 1-2 und 2-3 Ebene

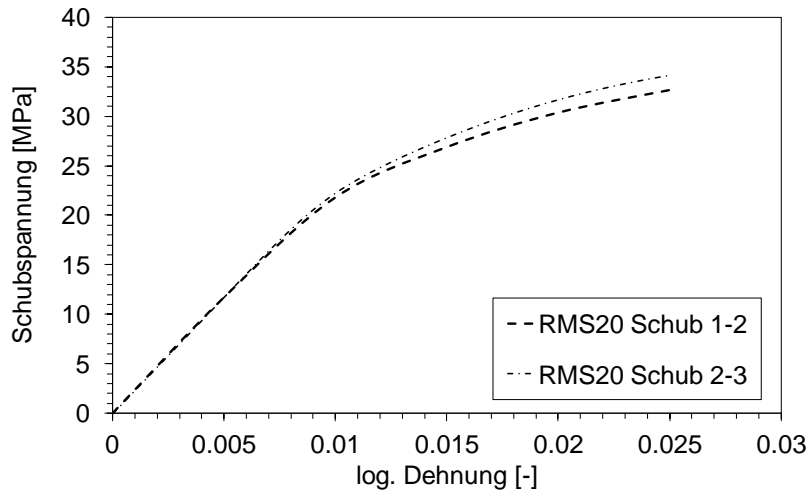


Abbildung 5.22: Schubversuch in der 1-2 bzw. 2-3 Ebene am RMS20-Modell

5.4 Simulationsergebnisse für PBT-GF und PP-GF

Im Folgenden werden die Simulationsergebnisse von PBT-GF und PP-GF vorgestellt. Zur Durchführung der Struktursimulationen ist zunächst der Interaktionskoeffizient C_I und der RSC-Faktor κ zu bestimmen. Anschließend erfolgt das Mapping der Faserorientierungen. Aufgrund der ausgeprägten Faserorientierungsverteilung in den BZ- und Schubprüfkörpern bzw. den Beispielbauteilen ist zunächst die Anzahl der benötigten Mikro-Verbunde über das Winkelinkrement $\Delta\theta$ zu ermitteln (vgl. Abschnitt 2.3.4). Die entsprechenden Struktursimulationsergebnisse werden in Anschluss an Abschnitt 5.4.1 in Abschnitt 5.4.2 und 5.4.3 vorgestellt. Die verwendeten Prüfkörpermodelle in den FE-Simulationen sind in Abbildung 5.23 dargestellt, die eingesetzten FE-Modelle der Beispielbauteile in Abbildung 5.24. Zur Repräsentation der vorliegenden Faserorientierungsverteilung sind bei den Prüfkörpermodellen und beim Beispielbauteil des Bosch-Probekörpers im kritischen Bereich bei allen Kernvarianten fünf Hexaeder-Elemente über die Dicke vorhanden. Zur Reduktion der Berechnungszeit sind es beim Beispielbauteil des Gaspedals lediglich drei Tetraeder-Elemente.

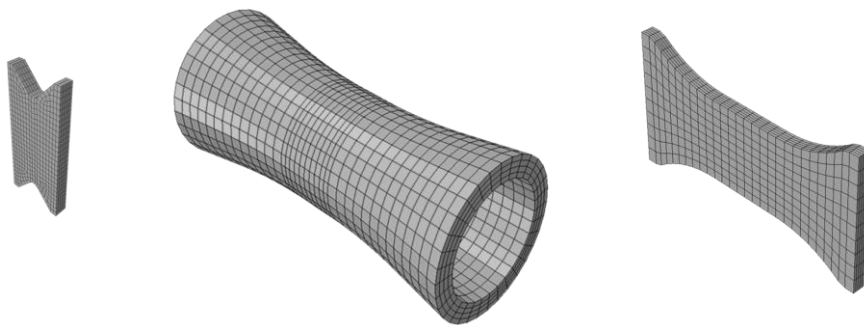


Abbildung 5.23: Eingesetzte FE-Modelle der Prüfkörper für die Simulationen der verstärkten Kunststoffe

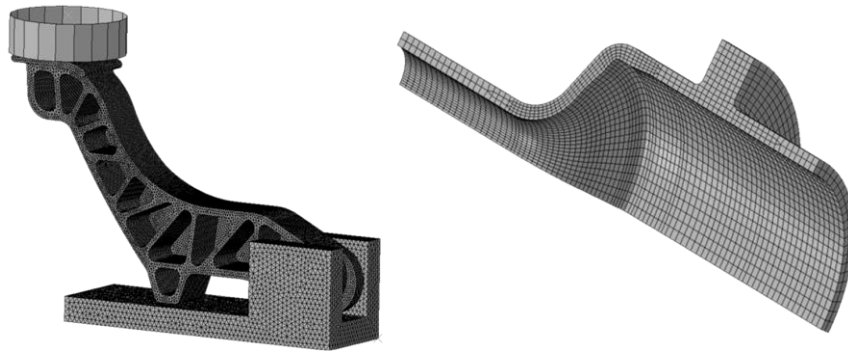


Abbildung 5.24: Eingesetztes FE-Modell der Beispielbauteile für die Simulation der verstärkten Kunststoffe

5.4.1 Modellkalibrierung

In Abbildung 5.25 ist der Einfluss der Größe des Winkelinkrements $\Delta\theta$ auf die Simulationsgüte und in Abbildung 5.26 die sich daraus ergebende Berechnungszeit dargestellt.

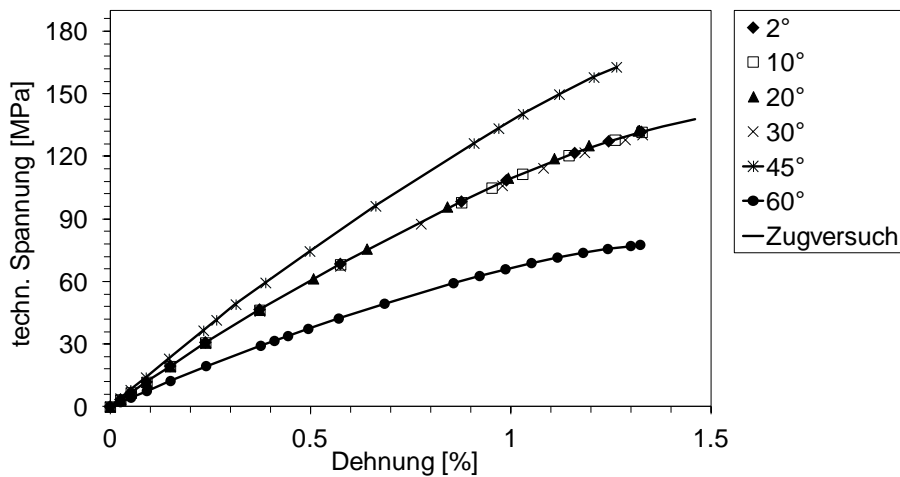


Abbildung 5.25: Einfluss der Winkelinkrementgröße auf die Simulationsgüte

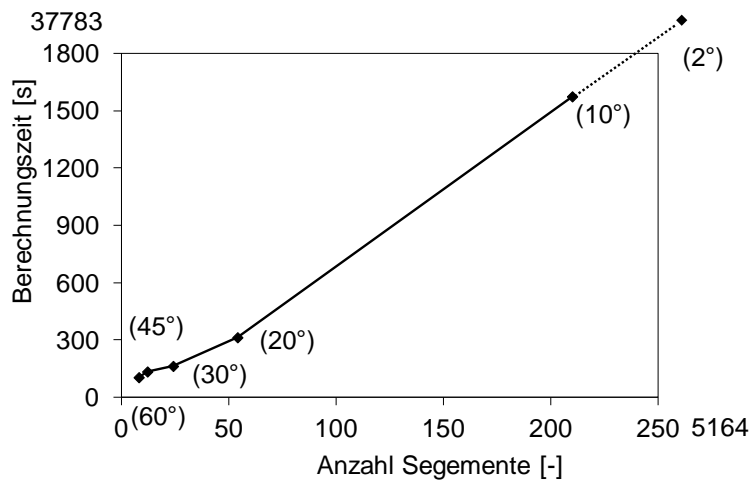


Abbildung 5.26: Einfluss der Winkelinkrementgröße auf die Berechnungszeit (Computer: Intel Xeon 4 CPUs, 32GB RAM)

Die Referenz bildet die in Abbildung 5.25 dargestellte Zugversuchskurve. Ein Kompromiss aus Simulationsgüte und Berechnungszeit stellt ein Winkelinkrement von $\Delta\theta=20^\circ$ dar. Dies entspricht einer Gesamtanzahl von 53 Mikro-Verbunden.

Die μ CT-Messungen als Referenzdaten sind an definierten Orten auf der Platte bzw. des Rohrprüfkörpers vorhanden. Durch Variation der Kalibrierparameter (Interaktionskoeffizient und der RSC-Faktor) ist die in der Software Moldflow (MF) sich einstellende Faserausrichtung iterativ an die Versuchsdaten anzupassen. Der Einfluss der jeweiligen Parameter auf das Endergebnis ist in Abbildung 5.27 bzw. Abbildung 5.28 dargestellt. Zur Auswertung der μ CT-Messungen werden 20 Stützstellen verwendet. Demnach sollte die Anzahl der Elemente über die Dicke ebenfalls 20 betragen. Es zeigt sich, dass die Anzahl der Elemente einen wesentlichen Einfluss auf die Ausprägung des zweistufigen Orientierungstensors hat (Abbildung 5.29) und die in den REM-Aufnahmen detektierte, ausgeprägte Mittelschicht mit 20 Elementen am besten repräsentiert wird.

Die Ergebnisse für PBT-GF sind in Abbildung 5.30 bis Abbildung 5.32 dargestellt. Zur Erzeugung der abgebildeten Ergebnisse wird ein Interaktionskoeffizient $C_I=0,035$ und ein RSC-Faktor $\kappa=0,03$ verwendet. Die Ergebnisse für PP-GF sind in Abbildung 5.33 bis Abbildung 4.31 abgebildet. Hierbei wird ein Interaktionskoeffizient $C_I=0,002$ und ein RSC-Faktor $\kappa=0,01$ verwendet.

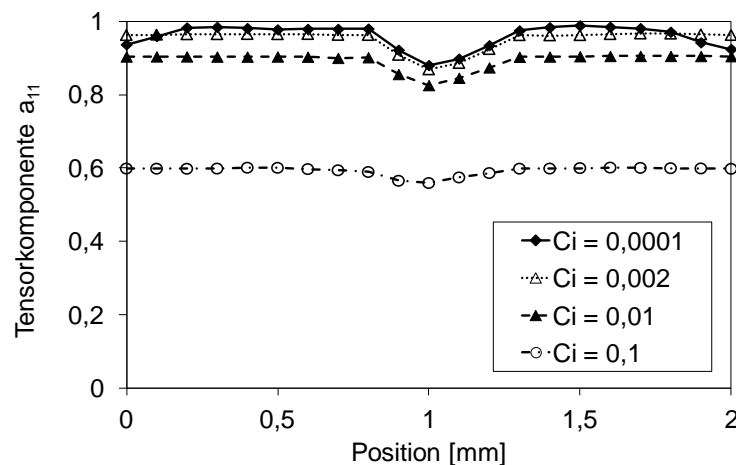


Abbildung 5.27: Einfluss des Interaktionskoeffizienten C_I auf die sich einstellende Faserorientierung

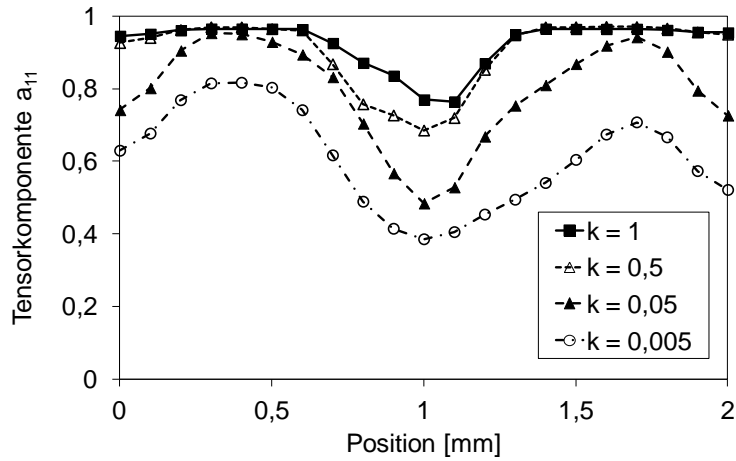


Abbildung 5.28: Einfluss des RSC-Faktors κ auf die sich einstellende Faserorientierung

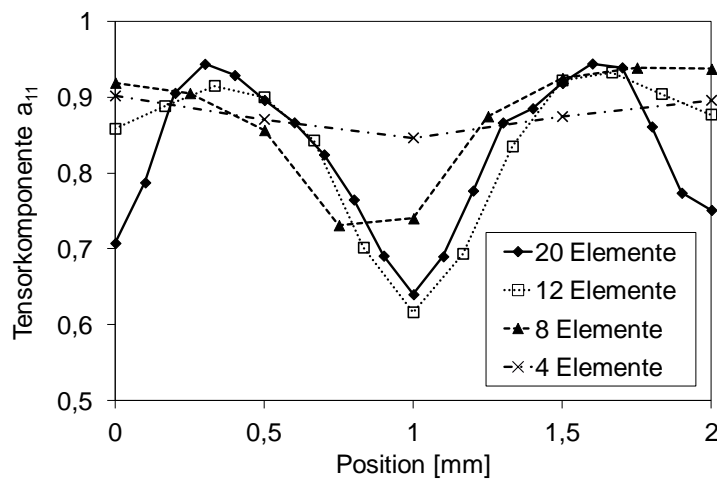


Abbildung 5.29: Einfluss der Elementanzahl über die Profilhöhe auf die sich einstellende Faserorientierung

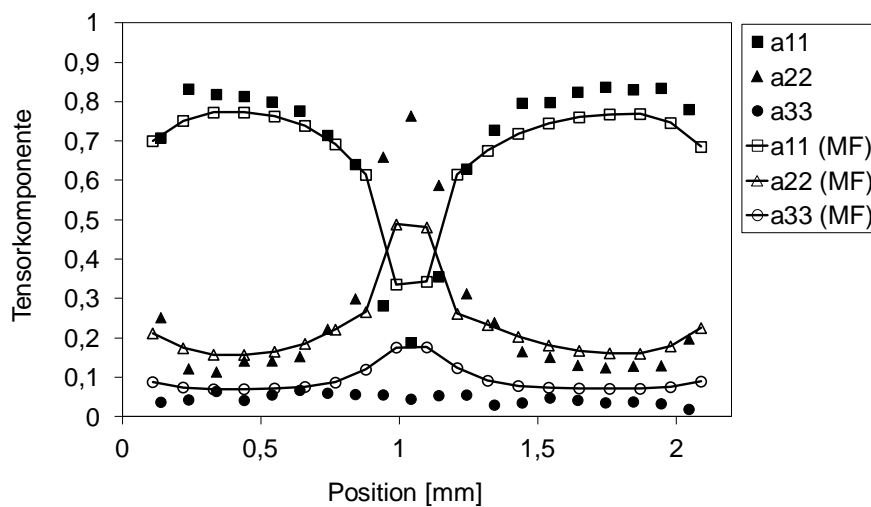


Abbildung 5.30: Experimentelle und simulierte Faserorientierungsverteilung (PBT-GF, Platte Position 1)

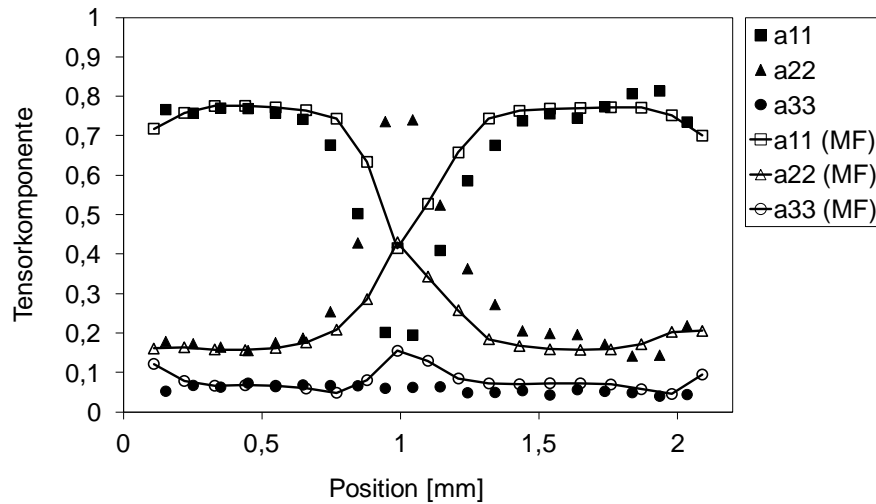


Abbildung 5.31: Experimentelle und simulierte Faserorientierungsverteilung (PBT-GF, Platte Position 2)

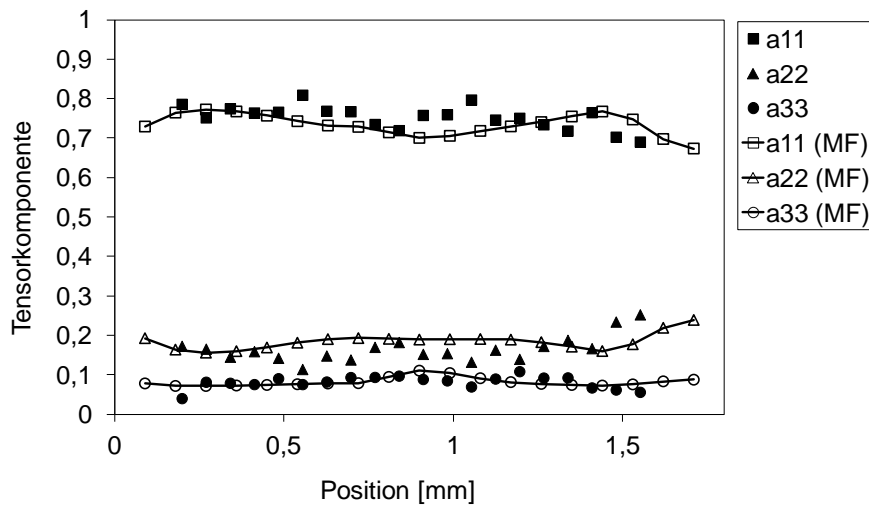


Abbildung 5.32: Experimentelle und simulierte Faserorientierungsverteilung (PBT-GF, Rohrprüfkörper)

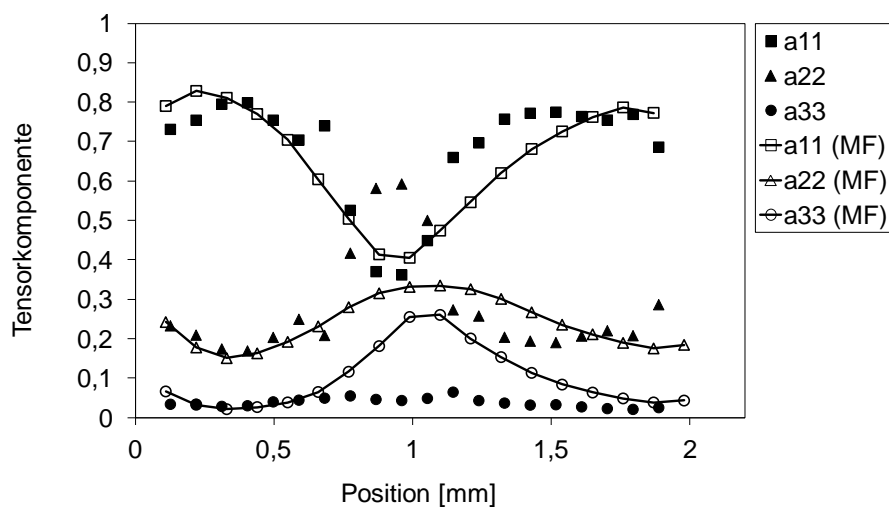


Abbildung 5.33: Experimentelle und simulierte Faserorientierungsverteilung (PP-GF, Platte Position 1)

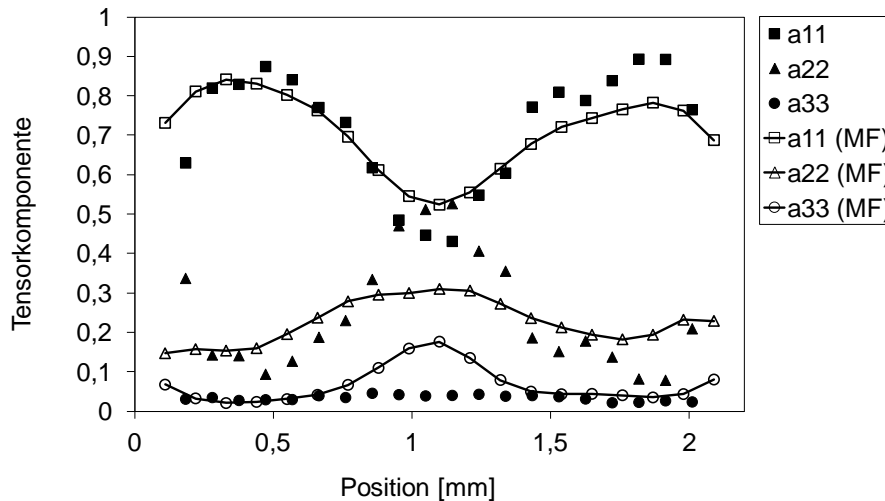


Abbildung 5.34: Experimentelle und simulierte Faserorientierungsverteilung (PP-GF, Platte Position 2)

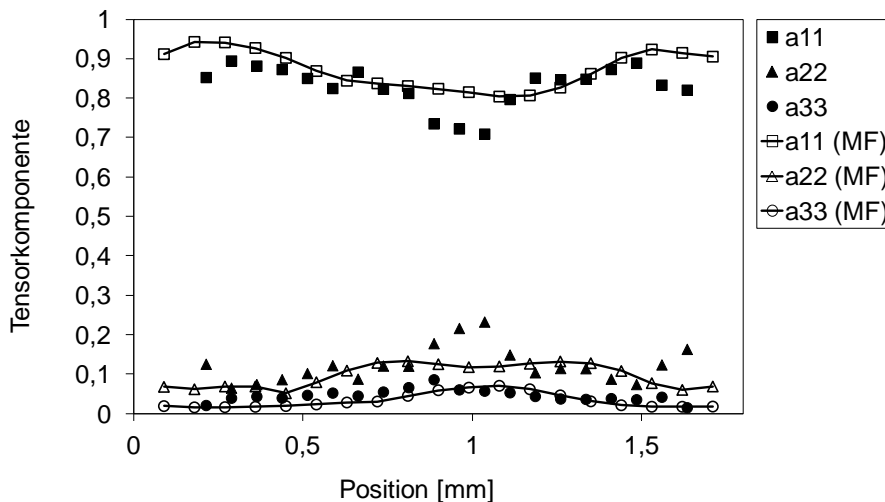


Abbildung 5.35: Experimentelle und simulierte Faserorientierungsverteilung (PP-GF, Rohrprüfkörper)

Diese erzielten Werte bilden die experimentellen Ergebnisse zufriedenstellend ab. Ausgehend von diesem Ergebnis werden die ermittelten Werte für den Interaktionskoeffizienten bzw. RSC-Faktor im Folgenden bei den Fließsimulationen für PBT-GF bzw. entsprechend für PP-GF verwendet.

5.4.2 Prüfkörperversuche

Im Rahmen der Simulationen zur virtuellen Absicherung der erweiterten, zweistufigen Homogenisierungsansätze in Abschnitt 5.2 wird eine Kalibrierung der Modellierungsansätze (MT-iso-2e bzw. MT-SAMP) durchgeführt. Im Folgenden wird überprüft, inwiefern die gewonnenen, experimentellen Daten aus den Zugversuchen bzw. Schubversuchen in FE-

Simulationen abbildbar sind. Die benötigten Daten der sich einstellenden Faserorientierung sind vorhanden und werden in die Struktursimulation eingebunden. Die Simulationsergebnisse unter Verwendung der MT-iso-2e sind für PBT-GF in Abbildung 5.36 und Abbildung 5.37 und die korrespondierenden Ergebnisse für PP-GF sind in Abbildung 5.38 und Abbildung 5.39 dargestellt.

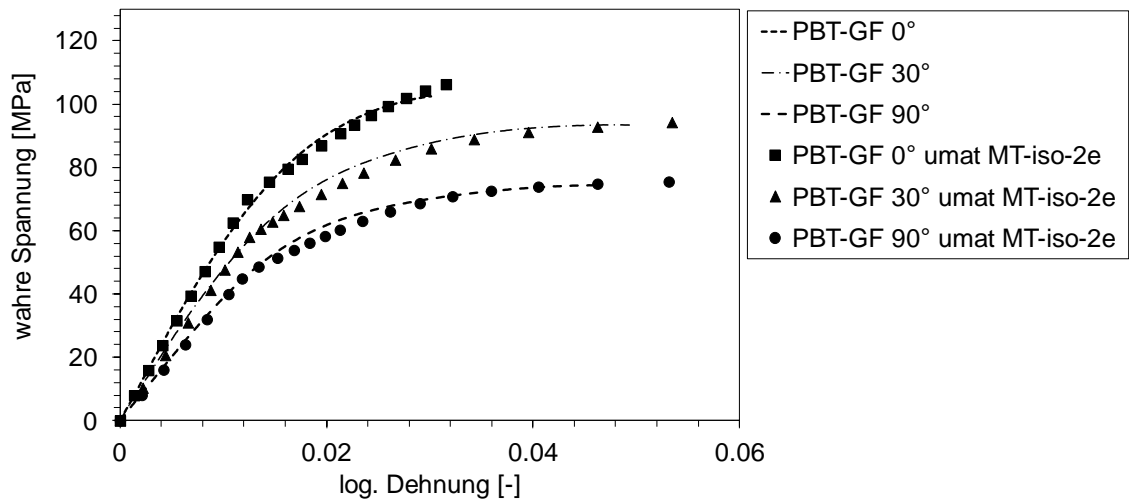


Abbildung 5.36: Simulationsergebnisse Zugprüfkörper (MT-iso-2e, PBT-GF)

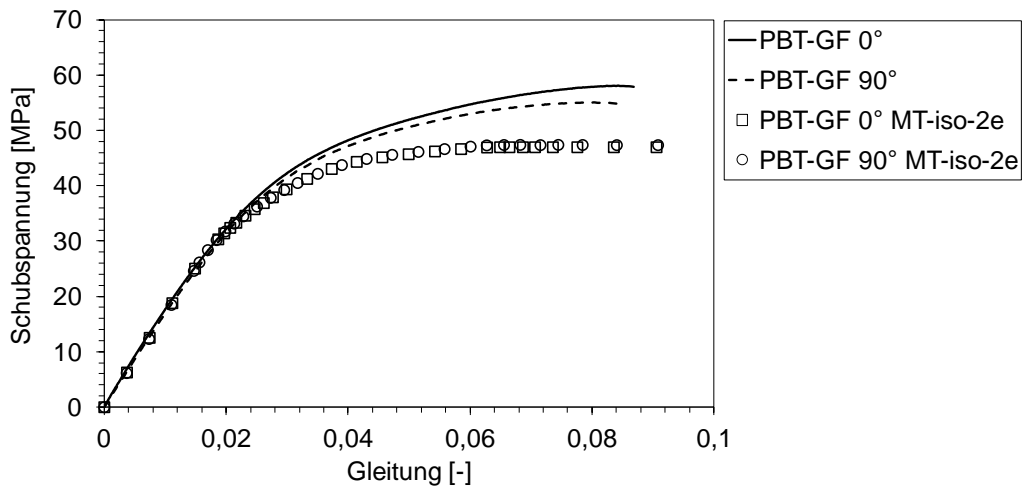


Abbildung 5.37: Simulationsergebnisse Schubprüfkörper (MT-iso-2e, PBT-GF)

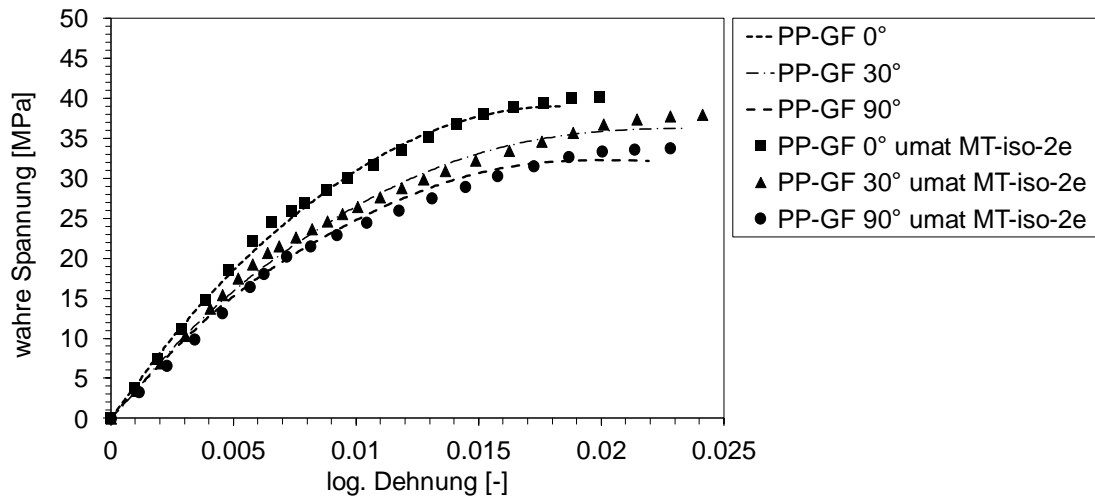


Abbildung 5.38: Simulationsergebnisse Zugprüfkörper (MT-iso-2e, PP-GF)

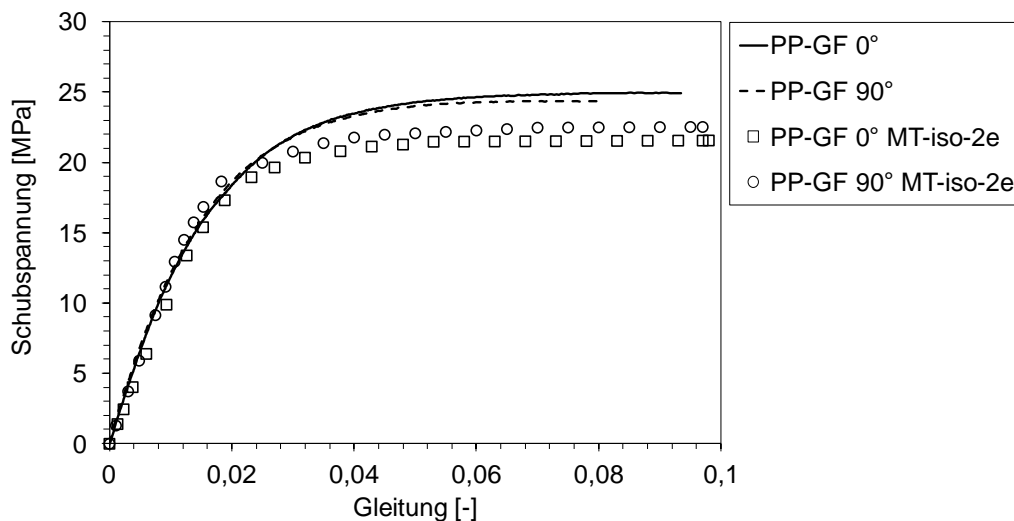


Abbildung 5.39: Simulationsergebnisse Schubprüfkörper (MT-iso-2e, PP-GF)

Während die Zugversuche mit einer hohen Prognosegüte wiedergegeben werden, zeigen die Schubversuche bei hohen plastischen Deformationen eine Abweichung von maximal ca. 15 % bei PBT-GF und von ca. 12 % bei PP-GF. Dies ist auf die sich im Versuch einstellende Überlagerung der Schubbelastung mit einer Zugbelastung bei hohen Deformationen durch eine Verdrehung des Prüfkörpers in der Aufnahme um den Winkel α zurückzuführen (siehe Abbildung 5.40).

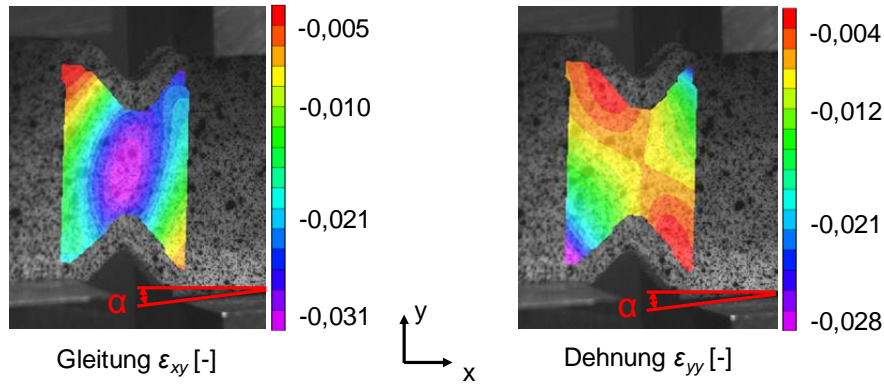


Abbildung 5.40: Auswertung der Schubversuche an kurzfaserverstärkten Thermoplasten

Die Berechnungsergebnisse unter Verwendung des Modells MT-SAMP für PBT-GF und PP-GF sind in Abbildung 5.41 bis Abbildung 5.44 dargestellt, wobei die jeweils zuvor kalibrierten, virtuellen Matrixdaten zum Einsatz kommen. Die erzielte Prognosegüte ist vergleichbar mit derjenigen unter Verwendung des Modells MT-iso-2e. Es ist allerdings zu berücksichtigen, dass zur Durchführung der Berechnungen mit diesem Modell die virtuelle Matrix aus Abschnitt 5.2 verwendet wird.

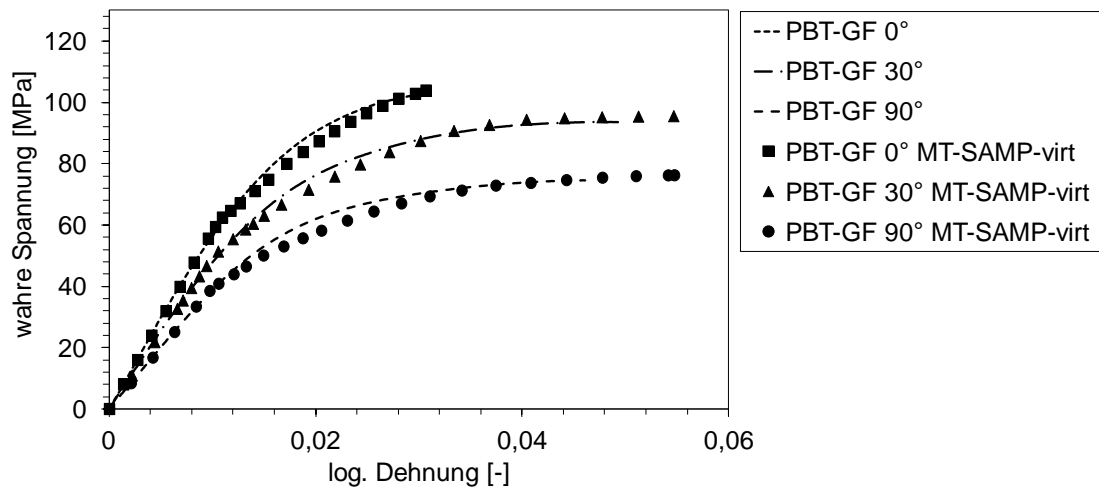


Abbildung 5.41: Simulationsergebnisse Zugprüfkörper (MT-SAMP-virt, PBT-GF)

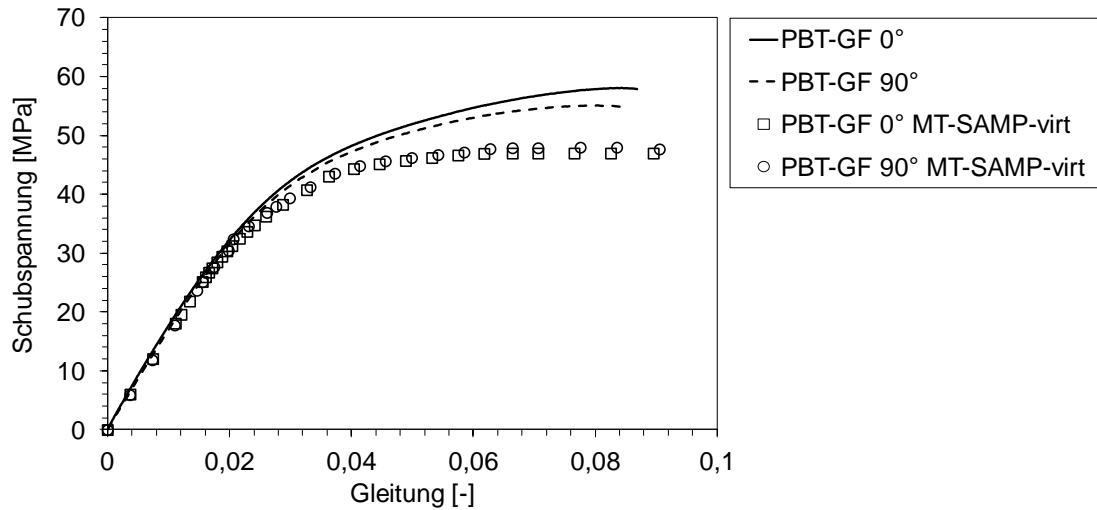


Abbildung 5.42: Simulationsergebnisse Schubprüfkörper (MT-SAMP-virt, PBT-GF)

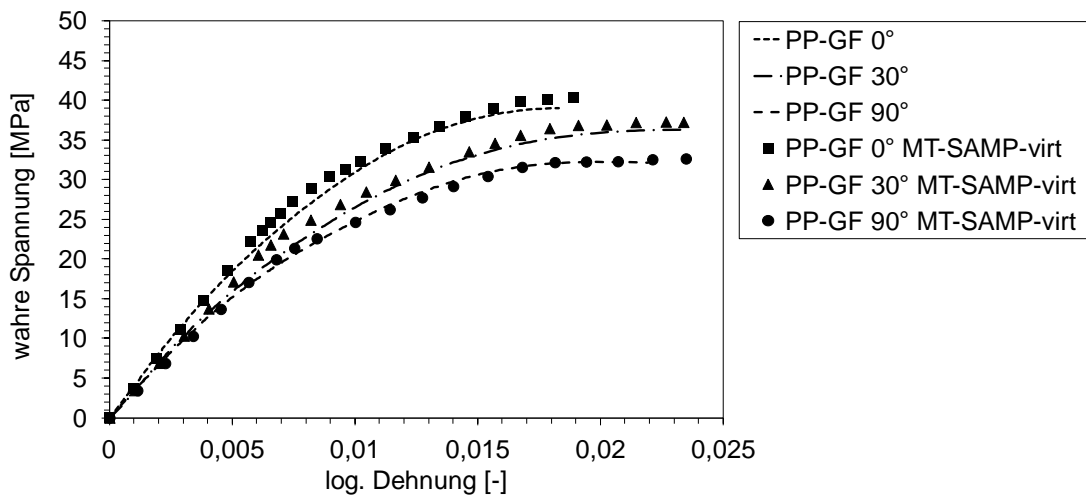


Abbildung 5.43: Simulationsergebnisse BZ-Prüfkörper (MT-SAMP-virt, PP-GF)

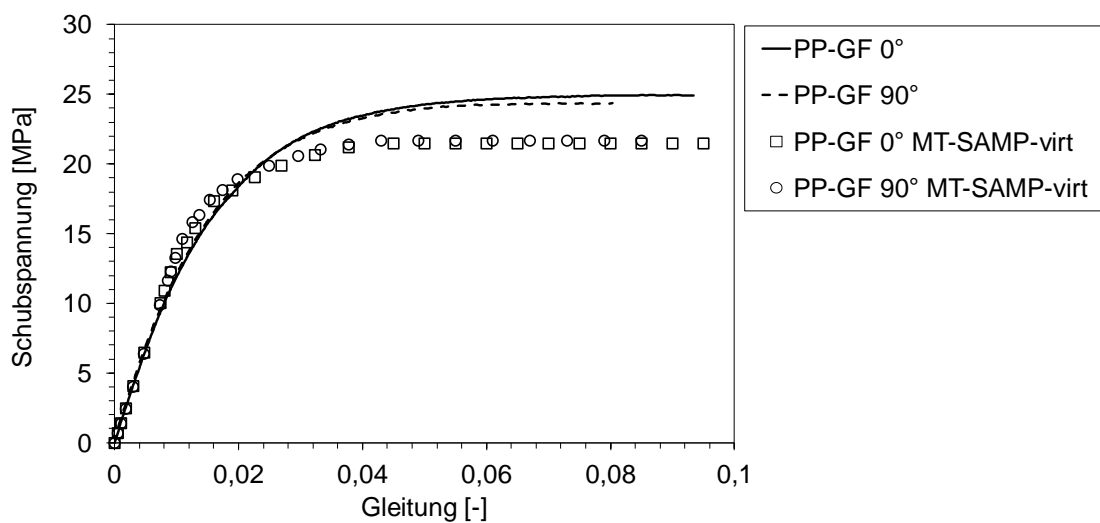


Abbildung 5.44: Simulationsergebnisse Schubprüfkörper (MT-SAMP, PP-GF)

5.4.3 Bauteilversuche

Im Folgenden werden zur Vervollständigung der vierten Zielsetzung die definierten Dimensionierungskriterien angewendet. Es stehen insgesamt zwei Werkstoffe sowie zwei Beispielbauteile zur Verfügung, wobei der Bosch-Probekörper in drei Ausführungsvarianten und ausschließlich in PBT-GF vorliegt. Bei Durchführung der Struktursimulationen des Pedals wird zwischen Halterung und Pedal bzw. Stempel und Pedal jeweils eine Gleitreibungszahl von $\mu = 0,1$ angesetzt [117].

Die erzielten Ergebnisse unter Anwendung des Modells MT-iso-2e sind für PBT-GF in Abbildung 5.45 bis Abbildung 5.48 dargestellt. Die Ergebnisse für PP-GF folgen in Abbildung 5.49. Anschließend werden die Ergebnisse für das Modell MT-SAMP-virt in Abbildung 5.50 bis Abbildung 5.53 für PBT-GF und schließlich die Ergebnisse für das PP-GF Pedal in Abbildung 5.54 präsentiert. Dargestellt sind jeweils die Versuchskurve sowie der Punkt des einsetzenden Versagens unter Anwendung des entsprechenden Dimensionierungskriteriums.

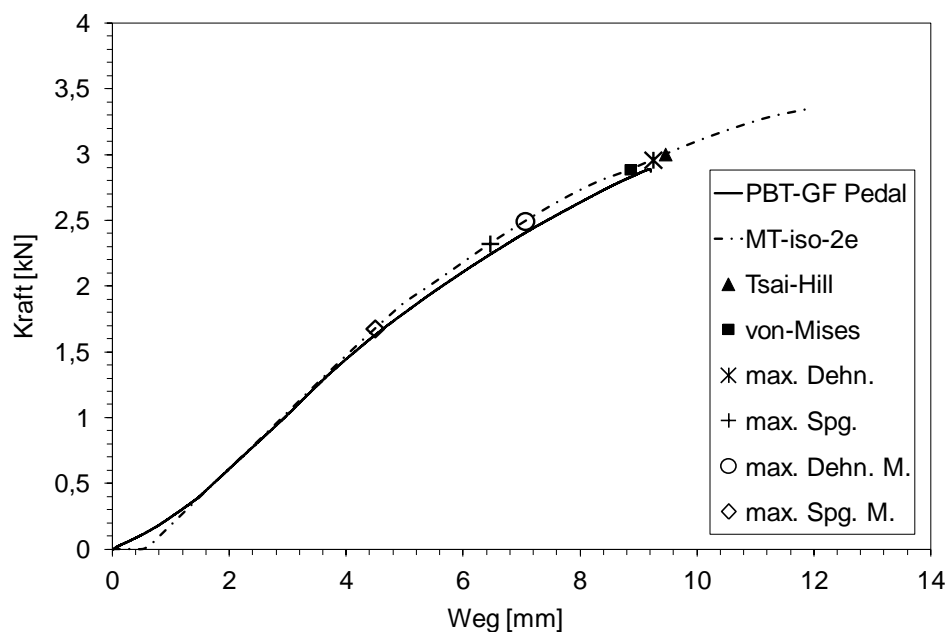


Abbildung 5.45: Ergebnisse des Pedals (MT-iso-2e, PBT-GF)

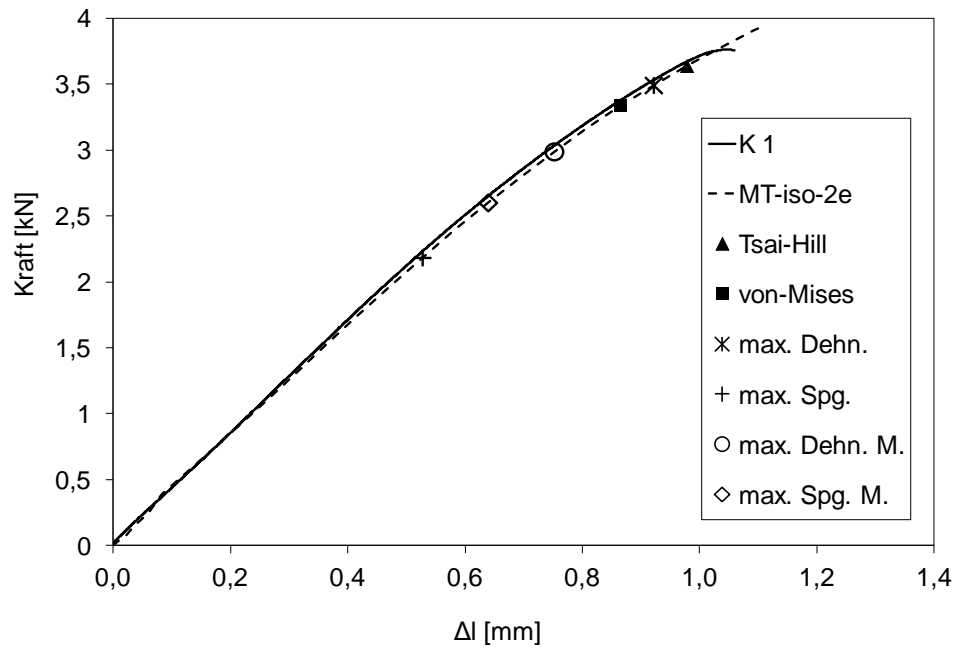


Abbildung 5.46: Ergebnisse des Bosch-Probekörpers Variante Kern 1 (MT-iso-2e, PBT-GF)

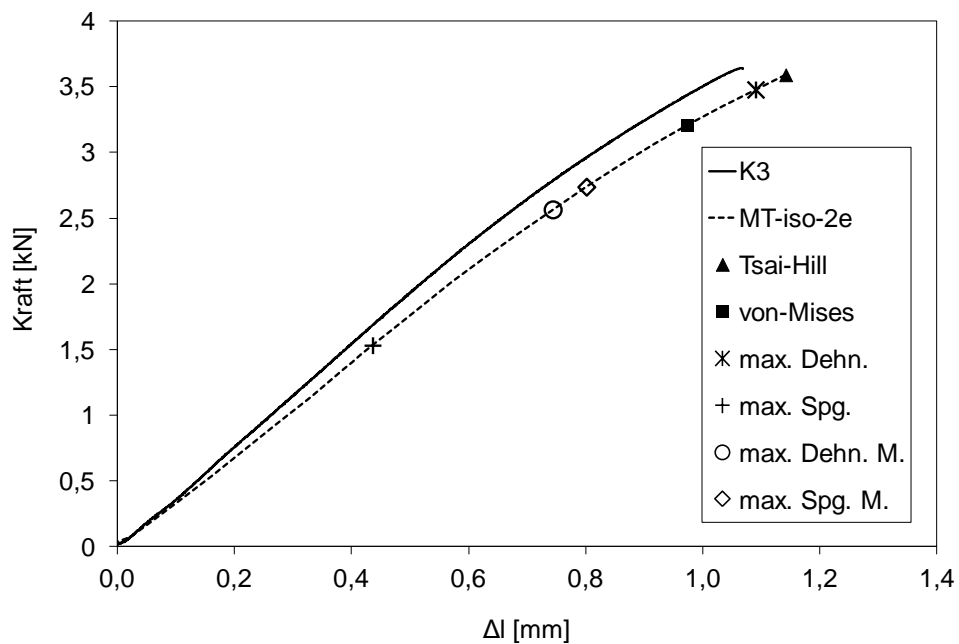


Abbildung 5.47: Ergebnisse des Bosch-Probekörpers Variante Kern 3 (MT-iso-2e, PBT-GF)

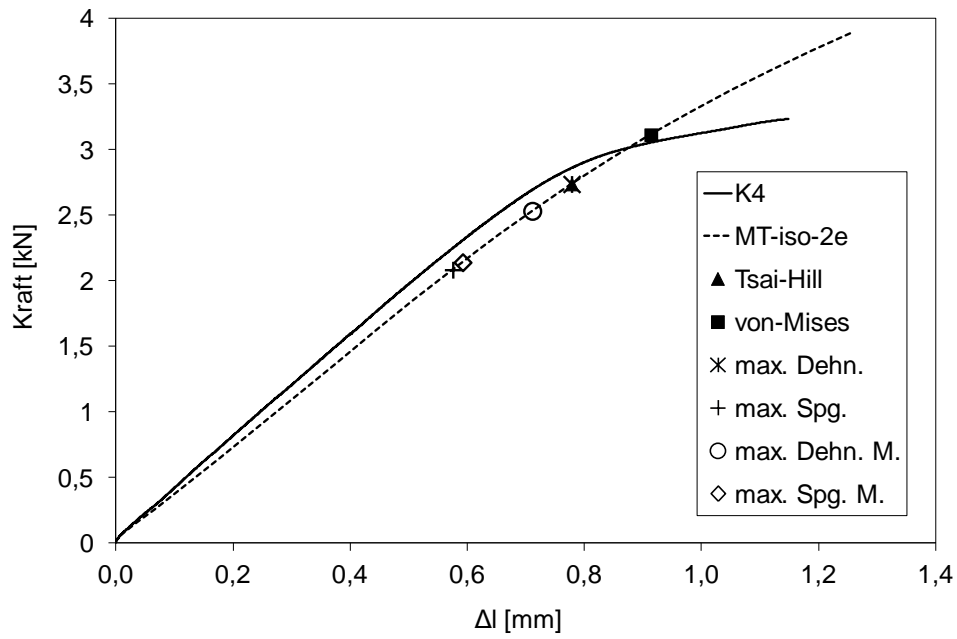


Abbildung 5.48: Ergebnisse des Bosch-Probekörpers Variante Kern 4 (MT-iso-2e, PBT-GF)

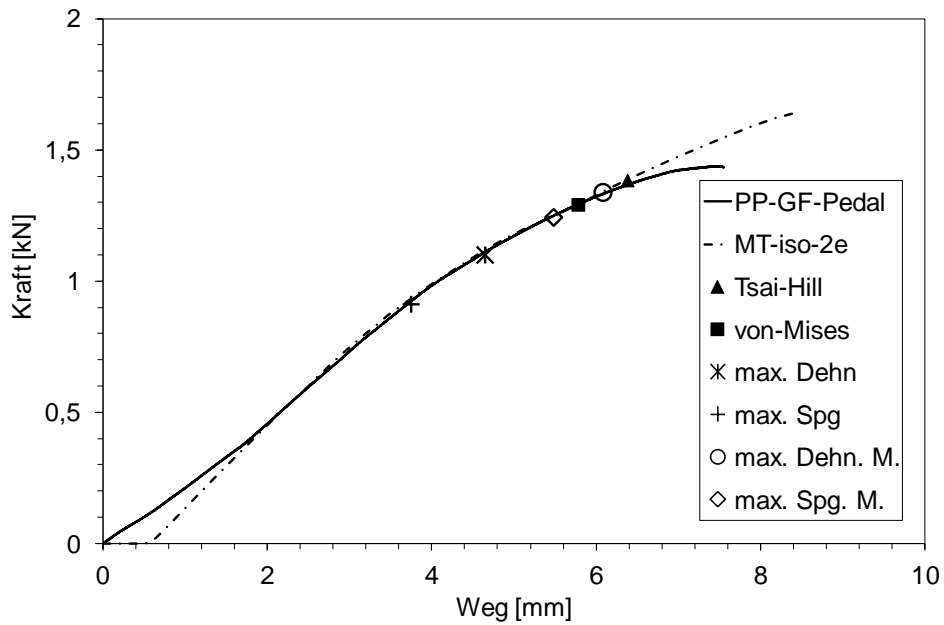


Abbildung 5.49: Ergebnisse des Pedals (MT-iso-2e, PP-GF)

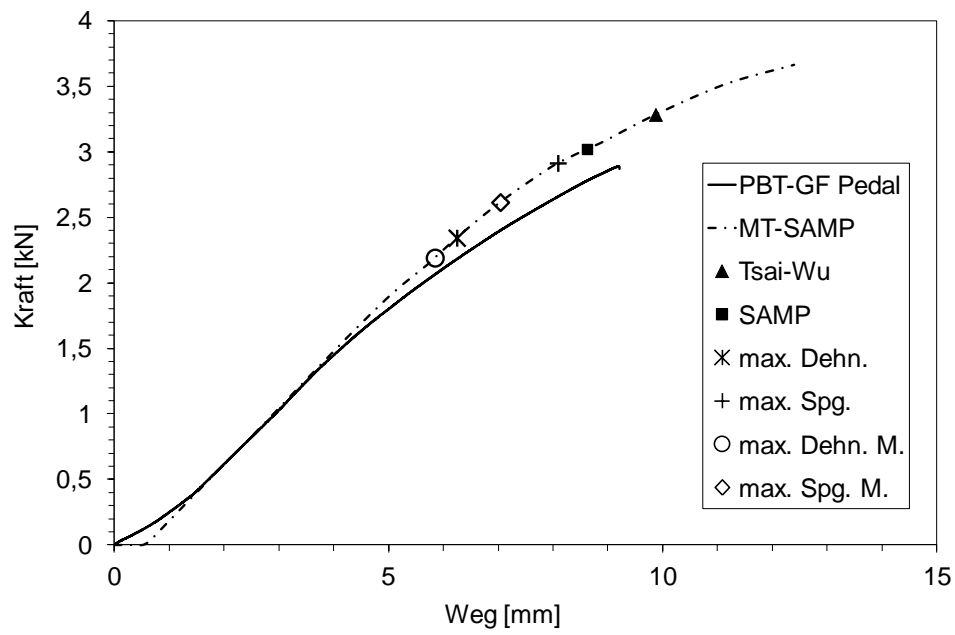


Abbildung 5.50: Ergebnisse des Pedals (MT-SAMP, PBT-GF)

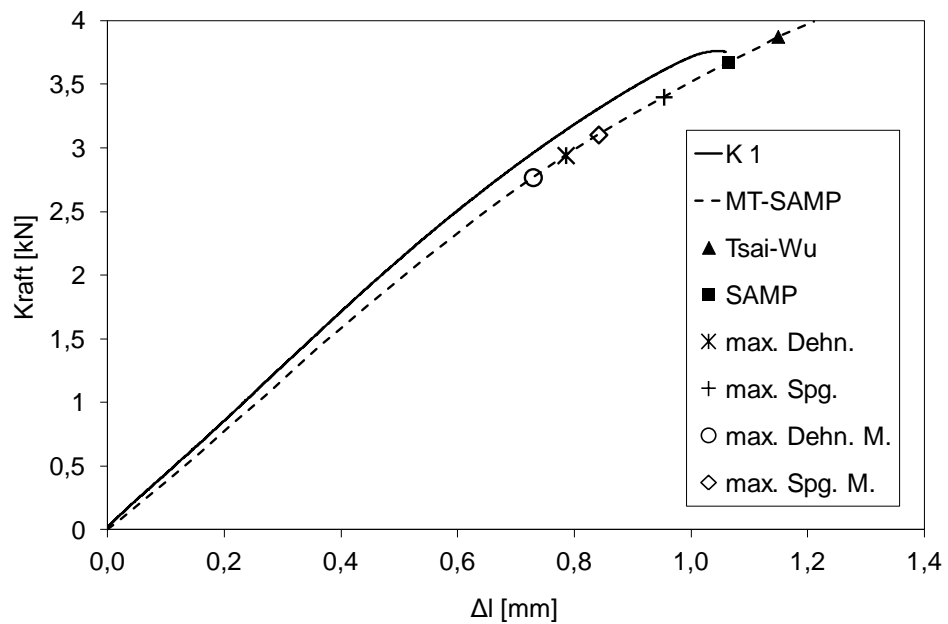


Abbildung 5.51: Ergebnisse des Bosch-Probestkörpers Variante Kern 1 (MT-SAMP, PBT-GF)

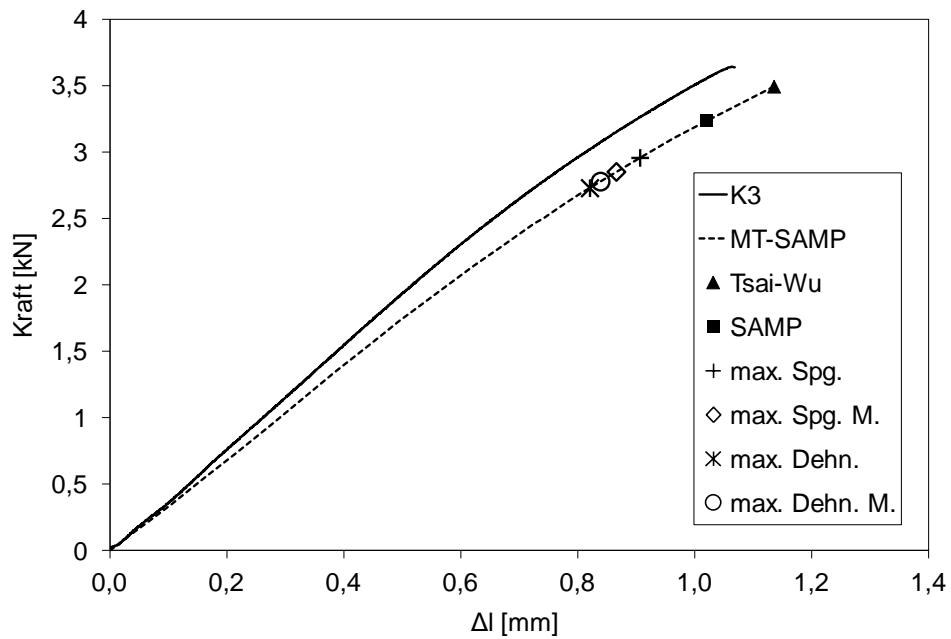


Abbildung 5.52: Ergebnisse des Bosch-Probekörpers Variante Kern 3 (MT-SAMP, PBT-GF)

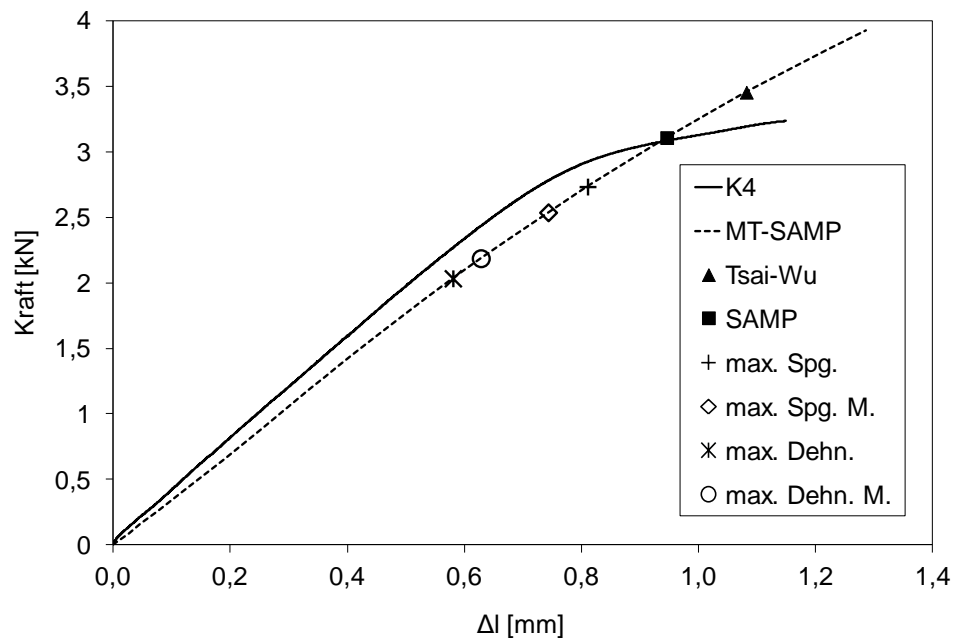


Abbildung 5.53: Ergebnisse des Bosch-Probekörpers Variante Kern 4 (MT-SAMP, PBT-GF)

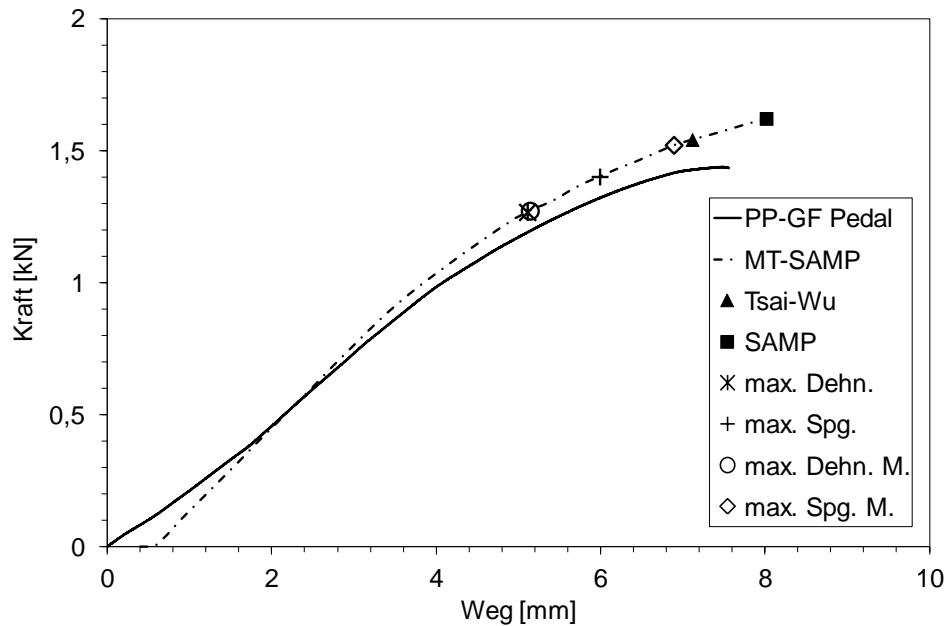


Abbildung 5.54: Ergebnisse des Pedals (MT-SAMP, PP-GF)

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass die Prognosegüte der angewendeten Kriterien variiert. Das quadratische Tsai-Wu- bzw. Tsai-Hill-Kriterium liefert durchweg gute bis sehr gute Ergebnisse auf der Mikro-Verbund-Ebene. Auf der Makro-Verbund-Ebene liefert das von Mises bzw. das SAMP-Kriterium angewendet auf die isotropierte Matrix ebenfalls gute bis sehr gute Versagensprognosen. Im Gegensatz hierzu ergibt die Anwendung der linearen Kriterien nicht zufriedenstellende Ergebnisse, mit Ausnahme des maximalen Dehnungskriteriums in Kombination mit der Mikro-Verbund-Ebene und dem Modell MT-iso-2e. Eine Übersicht über die Kombination der eingesetzten Kriterien, Modellierungsansätze, Beispielbauteile, Werkstoffe und die prozentuale Abweichung des erzielten Ergebnisses von der experimentellen Kraft bzw. dem Weg ist in Tabelle 5.3 gegeben.

Zudem wird eine technisch-wirtschaftliche Bewertung durchgeführt, bei der neben der Prognosegüte auch der experimentelle Aufwand zur Kalibrierung des entsprechenden Kriteriums in die Bewertung mit einfließt. Eine Bewertung ist in Tabelle 5.4 gegeben. Hierbei wird das kleinste Fehlerquadrat der einzelnen Versuche bezogen auf ein Kriterium berechnet und gemittelt, mit der Anzahl an benötigten Kalibrierversuchen multipliziert und entsprechend den Notenstufen sehr gut (0 – 1,4) bis mangelhaft (4,5 – 5,5) zugeordnet.

			Pedal		B-P K1	B-P K3	B-P K4	
			PBT-GF	PP-GF	PBT-GF	PBT-GF	PBT-GF	
Versuchsergebnis Kraft			2,72 kN	1,43 kN	3,76 kN	3,64 kN	3,23 kN	
Versuchsergebnis Weg			9,30 mm	7,56 mm	1,06 mm	1,07 mm	1,15 mm	
MT-iso-2e	Mikro-Verbund-Ebene	Tsai-Hill	10,51 %	15,59 %	3,11 %	1,27 %	15,21 %	
			1,82 %	3,32 %	7,64 %	6,83 %	32,33 %	
		max. Dehn.	8,91 %	38,53 %	7,03 %	4,33 %	15,20 %	
			0,44 %	23,12 %	12,98 %	2,01 %	32,39 %	
		max. Spg.	14,50 %	50,44 %	41,85 %	57,83 %	35,55 %	
			30,46 %	36,24 %	50,21 %	59,21 %	49,98 %	
	Makro-Verbund-Ebene	von Mises	6,23 %	23,53 %	11,22 %	11,89 %	36,43 %	
			4,64 %	9,80 %	18,32 %	8,82 %	20,57 %	
		max. Dehn.	8,22 %	19,56 %	20,44 %	29,44 %	21,60 %	
			24,00 %	6,49 %	28,99 %	30,47 %	38,01 %	
		max. Spg.	38,27 %	27,50 %	30,74 %	24,71 %	33,79 %	
			51,64 %	13,13 %	39,64 %	25,03 %	48,51 %	
	MT-SAMP	Mikro-Verbund-Ebene	Tsai-Wu	14,50 %	7,45 %	3,17 %	3,97 %	6,79 %
				7,21 %	3,73 %	8,46 %	6,28 %	5,90 %
max. Dehn.			18,30 %	11,66 %	21,67 %	24,99 %	37,11 %	
			32,16 %	30,88 %	25,87 %	23,17 %	49,53 %	
max. Spg.			1,61 %	2,30 %	9,47 %	18,72 %	15,46 %	
			12,14 %	18,95 %	10,01 %	15,15 %	29,51 %	
Makro-Verbund-Ebene		SAMP	5,31 %	13,02 %	2,28 %	11,11 %	3,90 %	
			6,35 %	8,45 %	0,48 %	4,54 %	17,75 %	
		max. Dehn.	23,60 %	11,34 %	26,29 %	23,63 %	32,37 %	
			36,51 %	30,45 %	31,18 %	21,48 %	45,38 %	
		max. Spg.	8,83 %	6,06 %	17,36 %	21,63 %	21,54 %	
			23,55 %	6,77 %	20,57 %	18,94 %	35,37 %	

Tabelle 5.3: Überblick über die durchgeführten Bauteilsimulationen und prozentuale Fehler

			mittlere Fehler- quadratsumme	Anzahl Versuche	Gesamtbewertung
MT-iso-2e	Mikro- Verbund- Ebene	Tsai-Hill	0,44	3	1,32
		max. Dehn.	0,96	3	2,88
		max. Spg.	1,79	3	5,38
	Makro- Verbund- Ebene	von Mises	0,62	1	0,62
		max. Dehn.	0,93	1	0,93
		max. Spg.	1,79	1	1,79
MT-SAMP	Mikro- Verbund- Ebene	Tsai-Wu	0,22	5	1,10
		max. Dehn.	0,98	5	4,90
		max. Spg.	0,60	5	3,00
	Makro- Verbund- Ebene	SAMP	0,25	3	0,75
		max. Dehn.	0,93	3	2,79
		max. Spg.	0,72	3	2,16

Tabelle 5.4: Technisch-wirtschaftliche Bewertung der Dimensionierungskriterien

5.5 Zusammenfassung und Bewertung der Simulationsergebnisse

Insgesamt werden vier Zielsetzungen definiert. Zunächst werden in Abschnitt 5.1 die ausgewählten Plastizitätsmodelle angewendet und die Prognosegüte bewertet. Hierzu stehen experimentelle Daten aus Zug-, Druck- und Schubversuchen an unverstärktem PBT bzw. PP zur Verfügung. Die beste Prognosegüte ist mit dem SAMP-Plastizitätsmodell erzielbar. Im Gegensatz zum von Mises-Kriterium berücksichtigt dieses Fließkriterium, ebenso wie das Drucker-Prager-Kriterium, den volumetrischen Spannungszustand. Die erzielten Ergebnisse stimmen mit den Untersuchungen von Rui Melro [44] bzw. Kolling et al. [48] überein. Die durchgeführten Zug- und Druckversuche werden in den FE-Simulationen mit dem SAMP-Modell besser wiedergegeben als mit dem Drucker-Prager-Modell.

Als zweite Zielsetzung wird die Absicherung der Modellierungsansätze bzw. deren Erweiterungen anhand von repräsentativen Mikrostrukturmodellen definiert (Abschnitt 5.2). Beim Ansatz MT-iso-2e ist ein von Mises-Plastizitätsmodell hinterlegt. Wesentlicher Vorteil dieser Formulierung bildet die Anwendung der Momentenformulierung zweiter Ordnung in Anlehnung an [62] und somit die Einführung des Kalibrierparameters l_σ als Formzahl zur Skalierung der Fließspannung. Zudem ist eine Skalierung der Verfestigung über den Parameter l_κ

möglich. Anhand der erzielten Ergebnisse ist zu erkennen, dass insgesamt eine gute Prognosegüte (vgl. Abbildung 5.13) erzielt wird.

Im Modellierungsansatz MT-SAMP ist das SAMP-Plastizitätsmodell hinterlegt, wodurch der Fließbeginn in Abhängigkeit des volumetrischen Spannungszustandes berechnet wird. Die korrespondierenden, virtuellen Zug- bzw. Druckversuche an RMS-Modellen sind gut abbildbar (siehe Abbildung 5.17). Im Gegensatz zu diesem Vorteil steht der Nachteil, dass die Möglichkeit der Einführung eines Kalibrierparameters l_σ die Umsetzung einer Momentenformulierung zweiter Ordnung erfordert. Dies wiederum setzt die Kenntnis des folgenden Zusammenhangs voraus:

$$\Delta p^z = 3K \sqrt{3\mathbf{I}^{vol} :: \langle \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \Delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} \quad (5.1)$$

Wie in [118] angedeutet und von Doghri et al. [62] für die von Mises-Plastizität aufgezeigt, ist anschließend eine analoge Herleitung und Adaption der benötigten Berechnungsschritte erforderlich. Die Erarbeitung der benötigten Formulierung wird aufgrund des zusätzlichen Aufwandes im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht umgesetzt und von daher als Motivation zur Durchführung weiterführender Arbeiten auf diesem Gebiet angesehen. Eine Alternative zum Einsatz der Momentenformulierung zweiter Ordnung zur Kalibrierung des Fließbeginns stellt die Einführung einer virtuellen Matrix und die Hinnahme der damit verbundenen Nachteile dar. Hierzu zählt die Unterschätzung des Fließbeginns bei einer Belastung in einem Winkel ungleich 0° zur Faserausrichtung, sowie die fehlerbehaftete Annahme des Spannungszustandes in der Matrix bei der Anwendung entsprechender Dimensionierungskriterien.

In Abschnitt 4.4 sind in Tabelle 4.8 die experimentellen Ergebnisse für PBT bzw. PBT-GF und in Tabelle 4.9 diejenigen für PP bzw. PP-GF zusammengefasst. Die Kennwerte Y_{Druck} bzw. S_{23} fehlen in der Zusammenfassung, da sie experimentell mit den eingesetzten Prüfkörpern nicht bestimmbar sind. Aus diesem Grund werden die Werte im Rahmen der definierten, dritten Zielsetzung virtuell mit RMS-Simulationen abgeschätzt und im Rahmen der Simulationen mit den Modellen MT-SAMP und MT-iso-2e in Abschnitt 5.4 angewendet. Die hiermit erzielten Simulationsergebnisse sind zufriedenstellend. Diese virtuell erzeugten Werte sind in Zukunft experimentell abzusichern.

Als vierte Zielsetzung wird die Anwendung und Evaluierung der Dimensionierungskriterien definiert. Die erzielten Ergebnisse sind in Tabelle 5.3 aufgeführt und eine Bewertung wird in

Tabelle 5.4 präsentiert. Eine grafische Zusammenfassung der technisch-wirtschaftlichen Bewertung der eingesetzten Dimensionierungskriterien ist in Abbildung 5.55 dargestellt.

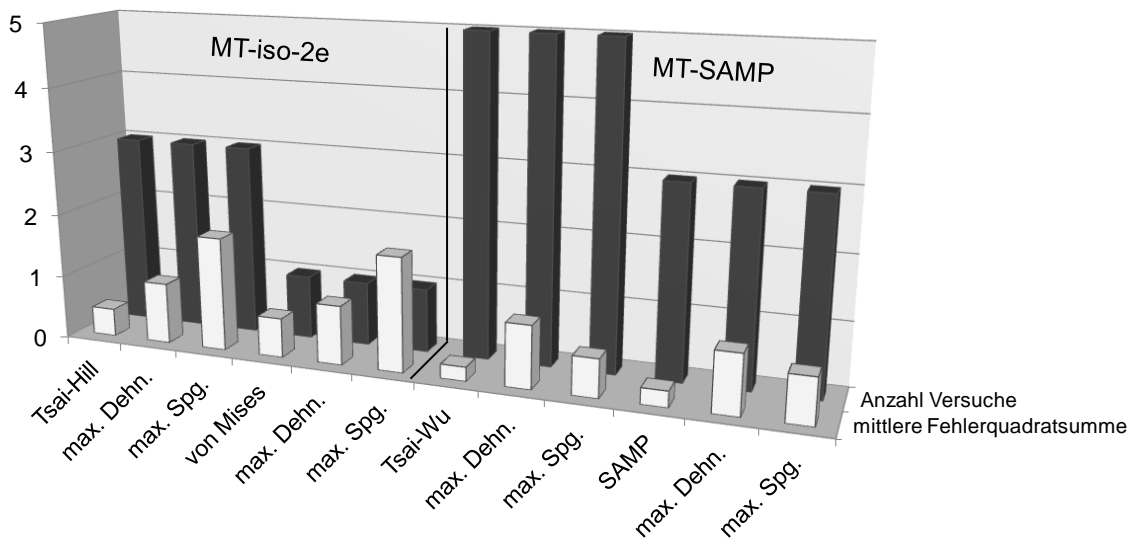


Abbildung 5.55: Grafische Darstellung der technisch-wirtschaftlichen Bewertung

Die durchgeführte Bewertung bestätigt die Aussage aus Abschnitt 5.4.3, dass insbesondere der Einsatz von quadratischen Kriterien sehr gute Ergebnisse liefert. Vor dem Hintergrund des benötigten Versuchsaufwands zur Kalibrierung eines Kriteriums zeigt sich zudem, dass das von Mises-Kriterium eine sehr gute Gesamtbewertung erzielt. Dieses Resultat kann beispielsweise zur vereinfachten Abschätzung des Bauteilversagensverhaltens genutzt werden, auch wenn die Abhängigkeit der Fließgrenze vom volumetrischen Spannungszustand nicht berücksichtigt wird.

Basierend auf den durchgeführten Simulationen besteht des Weiteren die Möglichkeit, den Versagensort zu ermitteln und zu analysieren. Dies ist insbesondere zur Optimierung von Bauteilstrukturen nützlich. Exemplarisch sind die Ergebnisse zur Vorhersage des Versagensortes in Abbildung 5.56 für das Beispielbauteil Pedal unter Anwendung des maximalen Dehnungskriteriums auf der Makro-Verbund-Ebene dargestellt. In Abbildung 5.57 sind die Ergebnisse entsprechend für den Bosch-Probekörper (Variante Kern 1) unter Anwendung des Tsai-Hill-Kriteriums auf der Mikro-Verbund-Ebene zu sehen.

Dargestellt ist zum einen das Bruchbild aus den Experimenten. Zum anderen ist das Simulationsergebnis für das gewählte Dimensionierungskriterium abgebildet. Sobald der versagenskritische Grenzwert für ein Element erreicht wird, wird diese schwarz eingefärbt. Diese Vorgehensweise ermöglicht die Lokalisierung möglicher Versagensorte. In beiden Fällen stimmt der berechnete Ort des Versagens mit dem Bruchbild überein. Beim Beispielbauteil des Pe-

dals ist anhand der Bruchbilder zu erkennen, dass eine eindeutige, ortsbezogene Zuordnung des Versagens nicht möglich ist. Dieser Sachverhalt ist ebenfalls anhand der Berechnungsergebnisse ableitbar. Insgesamt bleibt zu prüfen, ob diese Vorgehensweise systematisch zur Bauteiloptimierung eingesetzt werden kann.

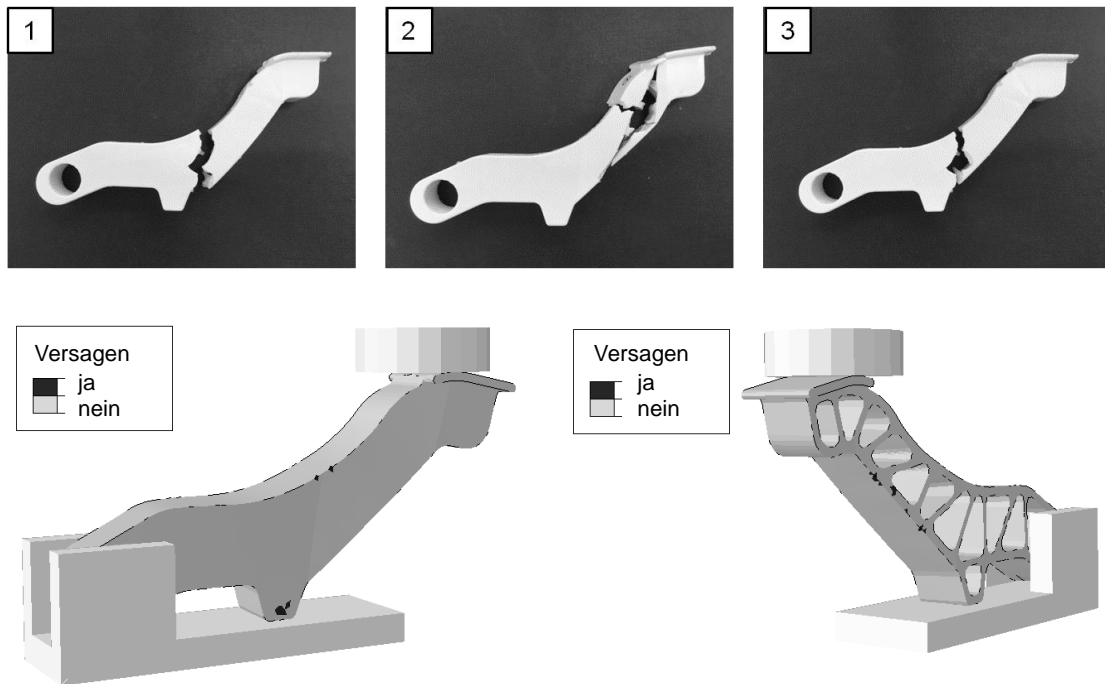


Abbildung 5.56: Auswertung des Versagensortes (MT-iso-2e, PBT-GF „max. Dehnung“)

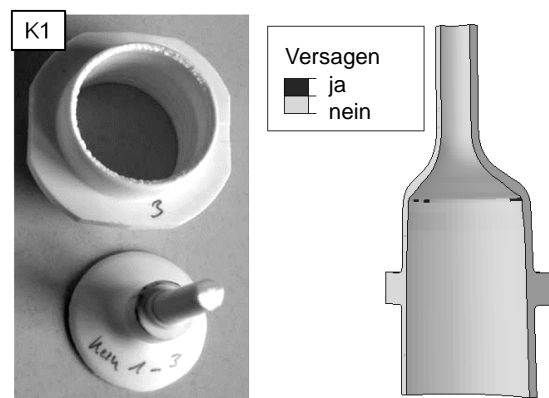


Abbildung 5.57: Auswertung des Versagensortes (MT-iso-2e, PBT-GF „Tsai-Hill“)

6 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden bestehende Ansätze analysiert, die eine mikro-mechanische Modellierung von kurzfaserverstärkten Kunststoffen unter expliziter Berücksichtigung der Mikrostruktur ermöglichen. Die wesentliche Zielvorgabe ist die Umsetzung einer verlässlichen und effizienten, computergestützten Methode, die sowohl die Berechnung des elastisch-plastischen Deformationsverhaltens, als auch die Integration von Dimensionierungskriterien zur Versagensvorhersage ermöglicht. Die Effektive-Feld-Theorie der zweistufigen Homogenisierung erfüllt diese Voraussetzungen. Es zeigen sich allerdings bei den bestehenden Formulierungen zwei wesentliche Defizite. Zum einen ist die Problematik der Überschätzung der Fließgrenze bei Belastungen in Faserrichtung bzw. die als zu hoch angenommene Verfestigung im plastischen Bereich unzureichend gelöst. Zum anderen wird derzeit in der Regel ein von Mises-Modell für die Matrixplastizität eingesetzt. Dieses ist nachweislich für Kunststoffe ungeeignet, da eine Abhängigkeit des Fließbeginns von der volumetrischen Spannung nicht vorhanden ist.

Ausgehend von diesen Ergebnissen erfolgt die Entwicklung von zwei unterschiedlichen Modellierungsansätzen. Zum einen wird ein bestehender Ansatz, der eine Momentenformulierung zweiter Ordnung beinhaltet, aufgegriffen und gemäß den definierten Anforderungen erweitert. Als Ergebnis liegt der Modellierungsansatz MT-iso-2e vor, der eine Skalierung der Fließgrenze durch den Parameter l_σ und eine Kalibrierung der Verfestigung durch einen weiteren Parameter l_κ ermöglicht. Zum anderen wird das SAMP-Plastizitätsmodell in den Ansatz der zweistufigen Homogenisierung integriert. Der hieraus resultierende Modellierungsansatz MT-SAMP beinhaltet ebenfalls den Parameter l_κ zur Kalibrierung der Verfestigung und ermöglicht, bedingt durch das hinterlegte Plastizitätsmodell, zudem die Berücksichtigung der volumetrischen Spannung bei der Berechnung des Fließbeginns. Zur Vermeidung einer Überschätzung des Fließbeginns bei Belastungen in Faserrichtung erfolgt eine Skalierung der experimentell ermittelten Fließgrenze.

Anhand von Simulationen an RMS-Modellen erfolgt eine Verifizierung der umgesetzten Modellierungsansätze. In Abhängigkeit vom eingesetzten Plastizitätsmodell in den RMS-Simulationen liefern die Ansätze jeweils eine hohe Prognosegüte. Zur weiteren Verifizierung der Modelle stehen unterschiedliche, experimentelle Versuchsdaten zur Verfügung. Die durchgeführten Zug- und Schubversuche sind von beiden Modellen mit hoher Prognosegüte

abbildbar. Es zeigt sich allerdings bedingt durch das hinterlegte Plastizitätsmodell, dass der Ansatz MT-iso-2e die Druckversuche am Rohrprüfkörper nur unzureichend abbilden kann. Eine gute Prognosegüte lässt sich nur durch den Einsatz des Modells MT-SAMP erzielen. Diesem Vorteil steht der erhöhte experimentelle Aufwand zur Kalibrierung der SAMP-Plastizität gegenüber. Zudem ist derzeit eine Momentenformulierung zweiter Ordnung nur für eine von Mises-Plastizitätsformulierung vorhanden. Die Umsetzung einer solchen Formulierung im Rahmen der SAMP-Plastizität erscheint lohnenswert, denn erst dann könnte auf eine Veränderung der experimentellen Matrixversuchsdaten verzichtet werden und eine von der Faserausrichtung abhängige Kalibrierung der Fließgrenze wäre möglich.

Auf experimenteller Seite zeigt sich, dass die Schubprüfkörper im elastischen Bereich gute Referenzdaten liefern. Bei hohen Deformationen kommt es allerdings bei den Versuchen an kurzglasfaserverstärkten Thermoplasten zur Überlagerung von Belastungen und es stellt sich ein mehraxialer Spannungszustand ein. In diesem Zusammenhang erscheint es lohnenswert, die Versuchstechnik bzgl. der Rohrprüfkörper zu erweitern mit der Zielvorgabe, anhand von einer Prüfkörpergeometrie Zug-, Druck- und Torsionsversuche durchzuführen und dabei die wahre Spannung auszuwerten. Wesentlicher Vorteil des entwickelten Rohrprüfkörpers im Vergleich zu aus Platten gefrästen Prüfkörpern ist die hohe Faserausrichtung in Schmelzflussrichtung, die einen nahezu transversal isotropen Zustand darstellt. Allerdings sind Versuchsdaten quer zur Faserausrichtung mittels des Rohrprüfkörpers nicht erzeugbar. Dies stellt ein weiteres Problemfeld und somit eine Motivation für fortführende Forschungsarbeiten dar, insbesondere in Bezug auf den Einsatz von Dimensionierungskriterien. Denn während eine elastisch-plastische Modellierung bei Vorhandensein einer Momentenformulierung zweiter Ordnung auf Versuche unter 90° zur Faserausrichtung verzichten kann, ist dies für die Versagensmodellierung nicht möglich.

Unabhängig vom gewählten, zweistufigen Homogenisierungsansatz erfolgt die Integration von Dimensionierungskriterien im Rahmen dieser Arbeit auf zwei unterschiedliche Art und Weisen. Nach der ersten Homogenisierungsstufe liegt ein transversal isotroper Mikro-Verbund vor und demnach ist die Anwendung von transversal isotropen Dimensionierungskriterien auf Verbundebene gerechtfertigt. Andererseits liegt nach der zweiten Homogenisierungsstufe, der Makro-Verbundebene, eine isotropierte Matrix vor. Dies wiederum erlaubt die Anwendung isotroper Kriterien auf Matrixebene mit reduziertem experimentellem Aufwand. Beide Strategien werden erfolgreich, jeweils in Kombination mit den unterschiedlichen mikro-mechanischen Modellierungsansätzen, auf Beispielbauteile angewendet. Bei der Auswer-

tung der Ergebnisse wird nicht allein die Prognosegüte als Qualitätsindex herangezogen, sondern zudem der zur Anwendung eines Modellierungsansatzes bzw. einer Dimensionierungsstrategie erforderliche Versuchsaufwand. Insgesamt zeigt sich, dass in der Regel quadratisch formulierte Dimensionierungskriterien auf Verbundebene eine höhere Prognosegüte als lineare Formulierungen erzielen. Als interessante Alternative zu den quadratischen Kriterien auf der Mikro-Verbund-Ebene erweist sich die Anwendung des SAMP- bzw. von Mises-Dimensionierungskriteriums auf der Makro-Verbund-Ebene. Unter der Voraussetzung, dass die notwendigen Kalibrierversuche einmalig für den reinen Matrixwerkstoff durchgeführt sind, können diese Kriterien ohne zusätzlichen experimentellen Aufwand z. B. auf Verbundwerkstoffe mit unterschiedlichen Faservolumengehalt zur Umsetzung einer Versagensmodellierung angewendet werden. In weiterführenden Untersuchungen bleibt zu prüfen, ob die am Ende von Abschnitt 5.5 vorgestellte Vorgehensweise zur systematischen Lokalisierung von möglichen Versagensorten zur Bauteiloptimierung eingesetzt werden kann.

Bei den hier betrachteten Werkstoffen handelt es sich ausschließlich um kurzglasfaserverstärkte, thermoplastische Kunststoffe mit unterschiedlicher polymerer Matrix und unterschiedlichem Faservolumengehalt. Die Anwendung und Erweiterung der entwickelten Modellierungsansätze auf Verbundwerkstoffe, beispielsweise mit hygroskopischer, polymerer Matrix erscheint aufgrund der industriellen Relevanz äußerst lohnenswert. Hygroskopische Thermoplaste besitzen, neben den bereits aufgeführten Abhängigkeiten der mechanischen Verbundeigenschaften vom Faservolumengehalt, Aspektverhältnis der Faser etc., durch die mögliche Wasseraufnahme einen weiteren, ausgeprägten Einflussfaktor. Dieser Einfluss ist beispielhaft in Abbildung 6.1 anhand einer wahren Spannungs-/log. Dehnungs-Kurve von Polyamid (PA) dargestellt.

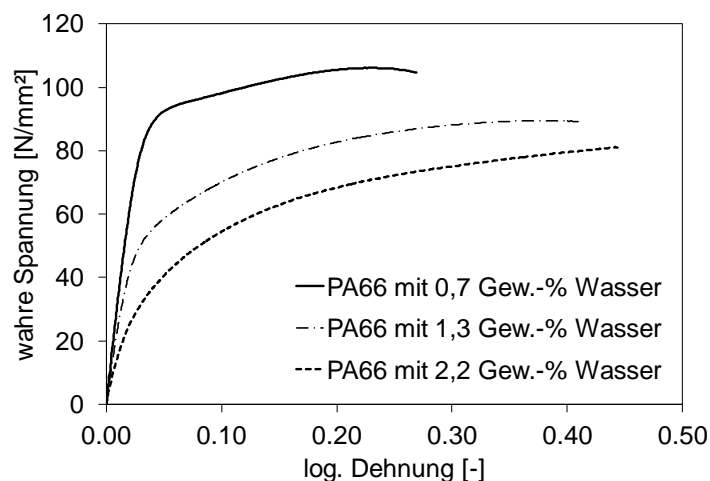


Abbildung 6.1: Einfluss des Wassergehalts auf die elastisch-plastischen Eigenschaften von PA

In diesem Zusammenhang sollten auch weiterführende Forschungsarbeiten bzgl. der Anwendung der zweistufigen Homogenisierung auf unverstärkte, thermoplastische Kunststoffe erfolgen. Diese Werkstoffe weisen in der Regel zwar isotrope, mechanische Eigenschaften auf, besitzen aber dennoch eine Verbundmikrostruktur, bestehend aus kristallinen Lamellen, die in eine amorphe Matrix, z. B. zu Sphärolithen, angeordnet sind. Diese teilkristalline Mikrostruktur thermoplastischer Kunststoffe wird durch polieren und anschließendes ätzen im REM sichtbar, wie in Abbildung 6.2 zu sehen.

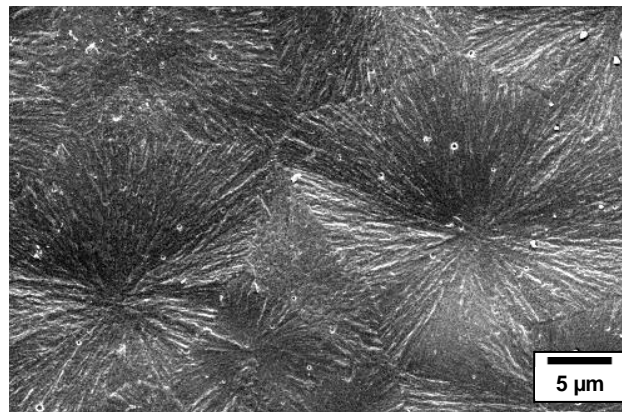


Abbildung 6.2: REM-Aufnahme der Sphärolithe einer aufbereiteten, teilkristallinen Polypropylenprobe

Die mechanischen Eigenschaften sind direkt abhängig von dem prozessbedingt sich einstellenden Kristallisationsgrad. In [119] konnte bereits erfolgreich die zweistufige Homogenisierung zur inversen Bestimmung unbekannter mechanischen Phaseneigenschaften eingesetzt werden. Aufgrund der vorliegenden, einer der polykristallinen Metallen ähnlichen Mikrostruktur erscheint es sinnvoll in diesem Zusammenhang eine zweistufige Formulierung zu testen, in der anstelle eines Voigt-Modells ein selbstkonsistentes Modell in der zweiten Homogenisierungsstufe Anwendung findet.

7 Symbole und Abkürzungen

a	zweistufiger Orientierungstensor
A	vierstufiger Orientierungstensor
C_I	Interaktionskoeffizient
E	Eshelby-Tensor
f	Fließfunktion
g	plastisches Potential
G	Schubmodul
I	vierstufiger Einheitstensor
I_{dev}	deviatorische Anteil des vierstufigen Einheitstensors
I_{vol}	volumetrische Anteil des vierstufigen Einheitstensors
k	Reduced-Strain-Closure-Faktor
K	Kompressionsmodul
l_k	eingeführter Parameter zur Kalibrierung des Fließbeginns
l_σ	eingeführter Parameter zur Kalibrierung der plastischen Verfestigung
p	Orientierungsvektor
P	Hill-Tensor
p	volumetrische Spannung
S	Steifigkeitsmatrix
S^{el}	elastische Steifigkeitsmatrix
S^{tg}	Tangentensteifigkeitsmatrix
v_0	Volumenanteil Matrix
v_1	Volumenanteil Faser

δ	Kronecker-Delta
ε	Dehnung
ε^{el}	elastische Dehnung
ε^{pl}	plastische Dehnung
ε^{pl}	äquivalente, plastische Dehnung
κ	Verfestigungsfunktion
λ	plastischer Multiplikator
σ	Spannung
σ_{eq}	von Mises-Vergleichsspannung
σ_y	Fließgrenze
$dev(\sigma)$	deviatorische Spannung
ψ	Orientierungsverteilungsfunktion
CT	Computer Tomographie
DP	Drucker-Prager
FEM	Finite-Elemente-Methode
MT	Mori-Tanaka
PBC	Periodic Boundary Condions
PBT	Polybutylenterephthalat
PBT-GF	glasfaserverstärktes Polybutylenterephthalat
PP	Polypropylen
PP-GF	glasfaserverstärktes Polypropylen
RMS	repräsentatives Mikrostrukturmodell
SAMP	Semi-Analytical Model for the Simulation of Polymers

8 Literaturverzeichnis

- [1] Menges, G., Geisbüsch, P.: Die Glasfaserorientierung und ihr Einfluss auf die mechanischen Eigenschaften thermoplastischer Spritzgießteile - Eine Abschätzungsmethode, *Colloid & Polymer Science* 260 (1982) 73-81.
- [2] Hegler, R. P., Altstädt, V., Ehrenstein, G.W., Mennig, G., Scharschmidt, J., Weber, G.: Einfluss stofflicher Parameter auf die Faserorientierung beim Verarbeiten kurzfaserverstärkter Thermoplaste, *Kunststoffe* 76 (1986) 766-771.
- [3] Bubb, S. L.: Fibre orientation in injection moulded composites. Universität Leeds, Dissertation 2001.
- [4] Advani, S. G., Tucker, C. L.: The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites, *Journal of Rheology* 31 (1987) 751-784.
- [5] Lusti, H. R.: Property predictions for short fiber and platelet filled materials by finite element calculations. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Dissertation 2003.
- [6] Bay, R. S., Tucker, C. L.: Fiber orientation in simple injection moldings 1. Theory and numerical method, *Polymer Composites* 13 (1992) 317-331.
- [7] Bay, R. S., Tucker, C. L.: Fiber orientation in simple injection moldings 2. Experimental results, *Polymer Composites* 13 (1992) 332-341.
- [8] Folgar, F., Tucker, C. L.: Orientation behavior of fibers in concentrated suspensions, *Journal of Rheology* 26 (1982) 98-119.
- [9] Wang, J., O'Gara, J. F., Tucker, C. L.: An objective model for slow orientation kinetics in concentrated fiber suspensions: Theory and rheological evidence, *Journal of Rheology* 52 (2008) 1179-1200.
- [10] Wang, J., Jin, X: Comparison of recent fiber orientation models in Autodesk Moldflow Insight simulations with measured fiber orientation data. Proceedings of the Polymer Processing Society 26th Annual Meeting, Banff, Kanada 2010.
- [11] Phelps, J. H., Tucker, C. L.: An anisotropic rotary diffusion model for fiber orientation in short- and long-fiber thermoplastics, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* 156 (2009) 165-176.
- [12] Onat, E. T., Lecki, F.A.: Representation of mechanical behavior in the presence of changing internal structure, *Journal of Applied Mechanics* 55 (1988) 1-11.
- [13] Doghri, I., Tinel, L.: Micromechanics of inelastic composites with misaligned inclusions: Numerical treatment of orientation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006) 1387-1406.
- [14] Advani, S. G., and Tucker, C. L.: Closure approximations for 3-dimensional structure tensors, *Journal of Rheology* 34 (1990) 367-386.
- [15] Cintra, J. S., Tucker, C. L.: Orthotropic closure approximation for flow-induced fiber orientation, *Journal of Rheology* 39 (1995) 1095-1122.
- [16] Regnier, G., Dray, D., Gilormini, P.: Assessment of thermoelastic properties of an injection molded short-fiber composite: Experimental modelling, *International Journal of Materials Forming* 1 (2008) 787-790.

-
- [17] Pflamm-Jonas, T.: Auslegung und Dimensionierung kurzfaserverstärkter Spritzgussbauteile. Technische Universität Darmstadt, Dissertation 2001.
- [18] Grote, F.: Schaumstoffe mit CT charakterisieren, *Kunststoffe* 89 (1999) 110.
- [19] Mönnich, S., Glöckner, R., Becker, F.: Analysis of fibre orientation using μ CT data. 8th European LS-DYNA Users Conference, Strasbourg 2011.
- [20] Schwarz, P.: Einfluss der Faserlänge und der Faserorientierung auf die Elastizität und die Wärmeausdehnung von Kurzfaserverbundwerkstoffen. Universität Stuttgart, Dissertation 1993.
- [21] Böhm, H. J.: A short introduction into basic aspects of continuum micromechanics. Wien: Institute of Lightweight Design and Structural Biomechanics (ILSB), 2008.
- [22] Nemat-Nasser, S., Hori, M.: *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials* Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1999.
- [23] Pierard, O.: *Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity modeling and computation*. Katholische Universität Löwen, Louvain, Dissertation 2006.
- [24] Hill, R.: Properties of reinforced solids: Some theoretical aspect, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963) 357-372.
- [25] Reuss, A.: Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 9 (1929) 49-58.
- [26] Voigt, W.: Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper, *Annalen der Physik* 274 (1889) 573-587.
- [27] Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proceedings of the Royal Society of London* 241 (1957) 376-396.
- [28] Mura, T.: *Micromechanics of defects in solids*. New York: Kluwer Academic, 1987.
- [29] Gavazzi, A. C., Lagoudas, D. C.: On the numerical evaluation of Eshelby's tensor and its application to elastoplastic fibrous composites, *Computational Mechanics* 7 (1990) 13-19.
- [30] Mori, T., Tanaka, K.: Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica* 21 (1973) 571-574.
- [31] Tandon, G. P., Weng, G. J.: The effect of aspect ratio on the elastic properties of unidirectionally aligned composites, *Polymer Composites* 5 (1984) 327-333.
- [32] Benveniste, Y.: A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mechanics of Materials* 6 (1987) 147-157.
- [33] Christensen, R. M.: A critical evaluation for a class of micro-mechanics models, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (1990) 379-404.
- [34] Hill, R.: A self consistent mechanics of composite material, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965) 213-222.
- [35] Camacho, C. W., Tucker, C. L., Yalvac, S., McGee, R. L.: Stiffness and thermal expansion predictions for hybrid short fiber composites, *Polymer Composites* 11 (1990) 229-239.

-
- [36] Lielens, G.: Micro-macro modeling of structured materials. Katholische Universität Löwen, Dissertation 1999.
- [37] Pierard, O., Friebel, C., Doghri, I.: Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: a general framework and its validation, *Composites Science and Technology* 64 (2004) 1587-1603.
- [38] Weber, B., Kenmeugne, B., Clement, J. C., Robert, J. L.: Improvements of multiaxial fatigue criteria computation for a strong reduction of calculation duration, *Computational Materials Science* 15 (1999) 381-399.
- [39] Doghri, I., Tinel, L.: Micromechanical modeling and computation of elasto-plastic materials reinforced with distributed-orientation fibers, *International Journal of Plasticity* 21 (2005) 1919-1940.
- [40] Kammoun, S.: Micromechanical modeling of the progressive failure in short glass-fiber reinforced thermoplastics. Katholische Universität Löwen, Dissertation 2011.
- [41] Tucker, C. L., Liang, E.: Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation, *Composites Science and Technology* 59 (1999) 655-671.
- [42] Pierard, O., Gonzalez, C., Segurado, J., Llorca, J., Doghri, I.: Micromechanics of elasto-plastic materials reinforced with ellipsoidal inclusions, *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 6945-6962.
- [43] Herboth, T.: Entwicklung und Anwendung eines fließflächenfreien elastoplastischen Materialmodells für faserverstärkte Kunststoffe. Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Diplomarbeit 2010.
- [44] Rui Melro, A.: Analytical and numerical modelling of damage and fracture of advanced composites. Universität Porto, Dissertation 2011.
- [45] Hoffmann, S.: Computational homogenization of short fiber reinforced thermoplastics materials. Technische Universität Kaiserslautern, Dissertation 2012.
- [46] von Mises, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 1913 (1913) 582 - 592.
- [47] Drucker, D. C., Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis for limit design, *Quarterly of Applied Mathematics* 10 (1952) 157-165.
- [48] Kolling, S., Haufe, A., Feucht, M., Du Bois, P. A.: SAMP-1: A semi-analytical model for the simulation of polymers. 4. LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg 2005.
- [49] Ghorbel, E.: A viscoplastic constitutive model for polymeric materials, *International Journal of Plasticity* 24 (2008) 2032-2058.
- [50] Doghri, I., Ouair, A.: Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures - Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithms, *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003) 1681-1712.
- [51] Doghri, I., Friebel, C.: Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response, *Mechanics of Materials* 37 (2005) 45-68.
- [52] Pettermann, H. E., Plankensteiner, A. F., Bohm, H. J., Rammerstorfer, F. G.: A thermo-elasto-plastic constitutive law for inhomogeneous materials based on an incremental Mori-Tanaka approach, *Computers & Structures* 71 (1999) 197-214.

-
- [53] Batra, R. C., Gopinath, G., and Zheng, J. Q.: Material parameters for pressure-dependent yielding of unidirectional fiber-reinforced polymeric composites, *Composites Part B: Engineering im Druck* (2012).
- [54] Pettermann, H. E., Böhm, H. J., Rammerstorfer, F. G.: Some direction-dependent properties of matrix-inclusion type composites with given reinforcement orientation distributions, *Composites Part B: Engineering* 28 (1997) 253-265.
- [55] Jiang, T., Shao, J. F.: On the incremental approach for nonlinear homogenization of composite and influence of isotropization, *Computational Materials Science* 46 (2009) 447-451.
- [56] de Souza Neto, E. A., Peric, D., Owen, D. R. J.: *Computational methods for plasticity: Theory and applications*. West Sussex: John Wiley & Sons, 2008.
- [57] Doghri, I.: *Mechanics of deformable solids: Linear, nonlinear, analytical and computational aspects*. Berlin: Springer, 2000.
- [58] Haufe, A., Du Bois, P. A., Kolling, S.: A semi-analytical model for Polymers subjected to high strain rates. 5th European LS-DYNA Users Conference, Birmingham 2005.
- [59] Stommel, M., Stojek, M., Korte, W.: *FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen*. München: Carl Hanser Verlag, 2011.
- [60] Rolfes, R., Ernst, G., Vogler, M., Hühne, C.: Material and failure models for textile composites, *Mechanical Response of Composites - Computational Methods in Applied Sciences* 10 (2008) 27-56.
- [61] Kaiser, J.-M., Stommel, M.: An extended mean-field homogenization model to predict the strength of short-fiber polymer composites, *Technische Mechanik* 32 (2012) 307 - 320.
- [62] Doghri, I., Brassart, L., Adam, L., Gerard, J. S.: A second-moment incremental formulation for the mean-field homogenization of elasto-plastic composites, *International Journal of Plasticity* 27 (2011) 352-371.
- [63] Bornert, M.: *Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations*, *Hermès Science* 1 (2001) 133–221.
- [64] Ponte Castaneda, P.: Exact second-order estimates for the effective mechanical properties of nonlinear composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996) 827-862.
- [65] Selmi, A., Doghri, I., Adam, L.: Micromechanical simulations of biaxial yield, hardening and plastic flow in short glass fiber reinforced polyamide, *International Journal of Mechanical Sciences* 53 (2011) 696-706.
- [66] Kammoun, S., Brassart, L., Robert, G., Doghri, I., Delannay, L.: Micromechanical modeling of short glass-fiber reinforced thermoplastics – Isotropic damage of pseudograins. The 14th International ESAFORM Conference on Material Forming, Belfast, United Kingdom 2011.
- [67] Chaboche, J. L., Kanoute, P., Roos, A.: On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites, *International Journal of Plasticity* 21 (2005) 1409-1434.
- [68] Pierard, O., Doghri, I.: Study of various estimates of the macroscopic tangent operator in the incremental homogenization of elastoplastic composites, *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 4 (2006) 521-543.

-
- [69] Suquet, P.: Effective properties of nonlinear composites. New-York: Springer, 1997.
- [70] Ponte Castaneda, P., Suquet, P.: Nonlinear composites. San Diego: Elsevier Academic Press Inc, 1998.
- [71] Bobeth, M., Diener, G.: Static elastic and thermoelastic field fluctuations in multiphase composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 35 (1987) 137-149.
- [72] Buryachenko, V. A.: Multiparticle effective field and related methods in micromechanics of random structure components, *Mathematics and Mechanics of Solids* 6 (2001) 577-612.
- [73] Ponte Castaneda, P.: The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 39 (1991) 45-71.
- [74] Suquet, P.: Overall properties of non-linear composites: A modified secant moduli theory and its link with Ponte Castaneda's non-linear variational procedure, *Comptes rendus de l'Academie des Sciences IIB* 320 (1995) 563-571.
- [75] Brenner, R., Castelnau, O., and Badea, L.: Mechanical field fluctuations in polycrystals estimated by homogenization techniques, *Proceedings of the Royal Society A - Mathematical Physical and Engineering Sciences* 460 (2004) 3589-3612.
- [76] Castaneda, P. P.: Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations: I - theory, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 50 (2002) 737-757.
- [77] Hill, R.: Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965) 89-101.
- [78] Tandon, W.: A Theory of particle-reinforced plasticity, *Transaction of the ASME* 55 (1988) 10.
- [79] Zhou, Y. X., Mallick, P. K.: A non-linear damage model for the tensile behavior of an injection molded short E-glass fiber reinforced polyamide-6,6, *Materials Science and Engineering A - Structural Materials Properties Microstructure and Processing* 393 (2005) 303-309.
- [80] Mir, H., Fafard, M., Bissonnette, B., Dano, M. L.: Damage modeling in random short glass fiber reinforced composites including permanent strain and unilateral effect, *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme* 72 (2005) 249-258.
- [81] Günzel, S., Trappe, V., Rudolph, H.-V.: Betriebsfestigkeit kurzfaserverstärkter Thermoplaste - Ein neues faserverbundorientiertes Auslegungskonzept unter Berücksichtigung des Schädigungsmechanismus. 37. Tagung DVM-Arbeitskreis Betriebsfestigkeit 2010.
- [82] Meraghni, F., Benzeggagh, M. L.: Micromechanical modeling of matrix degradation in randomly oriented discontinuous-fiber composites, *Composites Science and Technology* 55 (1995) 171-186.
- [83] Desrumaux, F., Meraghni, F., Benzeggagh, M. L. Benzeggagh, M. L.: Micromechanical modelling coupled to a reliability approach for damage evolution prediction in composite materials, *Applied Composite Materials* 7 (2000) 231-250.
- [84] Van Hattum, F. W. J., Bernardo, C. A.: A model to predict the strength of short fiber composites, *Polymer Composites* 20 (1999) 524-533.
- [85] Laspalas, M., Crespo, C. Jimenez, M. A., Garcia, B., Pelegay, J. L.: Application of micromechanical models for elasticity and failure to short fibre reinforced composites.

- Numerical implementation and experimental validation, *Computers & Structures* 86 (2008) 977-987.
- [86] Nguyen, B. N., Bapanapalli, S. K., Kunc, V., Phelps, J. H., Tucker, C. L.: Prediction of the elastic-plastic stress/strain response for injection-molded long-fiber thermoplastics, *Journal of Composite Materials* 43 (2009) 217-246.
- [87] Nguyen, B. N., Khaleel, M. A.: A mechanistic approach to damage in short-fiber composites based on micromechanical and continuum damage mechanics descriptions, *Composites Science and Technology* 64 (2004) 607-617.
- [88] Nguyen, B. N., Kunc, V.: An elastic-plastic damage model for long-fiber thermoplastics, *International Journal of Damage Mechanics* 19 (2010) 691-725.
- [89] Azzi, V., Tsai, S.: Anisotropic strength of composites, *Experimental Mechanics* 5 (1965) 283-288.
- [90] Tsai, S. W., Wu, E. M.: A general theory of strength for composite anisotropic materials, *Journal of Composite Materials* 5 (1971) 58-80.
- [91] Kollár, L. P., Springer, G. S.: *Mechanics of composite structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [92] Staab, G. H.: *Laminar composites*. Woburn: Butterworth Heinemann 1999.
- [93] Altenbach, H., Altenbach, J. W., Kissing, W.: *Mechanics of composite structural elements*. Berlin: Springer, 2004.
- [94] Hörmann, M.: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*. Universität Stuttgart, Dissertation 2002.
- [95] Hill, R.: *The mathematical theory of plasticity*. New York: Oxford University Press, 1950.
- [96] Ashkenazi, E. K., Pekker, F. P.: Experimental testing of the applicability of a fourth degree polynomial in describing surfaces of equicritical planar stress distributions in glass-reinforced plastics, *Mechanics of Composite Materials* 6 (1970) 251-258.
- [97] Gol'denblat, I. I., Kopnov, V. A.: Strength of glass-reinforced plastics in the complex stress state, *Mechanics of Composite Materials* 1 (1965) 54-59.
- [98] Dowling, N. E.: *Mechanical behavior of materials*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.
- [99] Pierard, O., Llorca, J., Segurado, J., Doghri, I.: Micromechanics of particle-reinforced elasto-viscoplastic composites: Finite element simulations versus affine homogenization, *International Journal of Plasticity* 23 (2007) 1041-1060.
- [100] Doghri, I., Adam, L., Bilger, N.: Mean-field homogenization of elasto-viscoplastic composites based on a general incrementally affine linearization method, *International Journal of Plasticity* 26 (2010) 20.
- [101] Brassart, L., Inglis, H. M., Delannay, L., Doghri, I., Geubelle, P. H.: An extended Mori-Tanaka homogenization scheme for finite strain modeling of debonding in particle-reinforced elastomers, *Computational Materials Science* 45 (2009) 611-616.
- [102] Kaiser, J.-M., Stommel, M.: Micromechanical modeling and strength prediction of short fiber reinforced polymers, *Journal of Polymer Engineering* 32 (2012) 43-52.
- [103] Kaiser, J.-M., Stommel, M.: Vorhersage der Festigkeit von kurzfaserverstärkten Kunststoffen, *Journal of Plastics Technology* 3 (2012) 278-300.

-
- [104] Haufe, A., Kösters, M., DuBois, P., Feucht, M., Kolling, S.: On the development, verification and validation of a semi-analytical model for polymers subjected to dynamic loading. International Conference on Adaptive Modeling and Simulation, Barcelona, Spanien 2005.
- [105] Becker, F.: Entwicklung einer Beschreibungsmethodik für das mechanische Verhalten unverstärkter Thermoplaste bei hohen Deformationsgeschwindigkeiten. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Dissertation 2009.
- [106] Naumann, T.: Beitrag zur Beschreibung des mechanischen Langzeitdeformationsverhaltens von thermoplastischen Kunststoffen. Universität des Saarlandes, Dissertation 2012.
- [107] Kraatz, A.: Anwendung der Invariantentheorie zur Berechnung des dreidimensionalen Versagens- und Kriechverhaltens von geschlossenzelligen Schaumstoffen unter Einbeziehung der Mikrostruktur. Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Dissertation 2007.
- [108] Darkow, A., Spiro, G.: Festigkeitslehre. Moskau: Wisschaja Schkola, 1965.
- [109] Greif, H., Limper, A., Fattmann, G., Seibel, S.: Technologie der Extrusion. München: Hanser, 2004.
- [110] Mönnich, S.: Nichtlineare anisotrope Strukturberechnung kurzfaserverstärkter Spritzgussbauteile. Technische Universität Darmstadt, Diplomarbeit 2009.
- [111] Williams, J. G.: Stress analysis of polymers. New York: Wiley, 1973.
- [112] Meinel, G., Peterlin, A.: Plastic deformation of polyethylene II. Change of mechanical properties during drawing, *Journal of Polymer Science Part A-2 - Polymer Physics* 9 (1971) 67-83.
- [113] Schürmann, H.: Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden. Berlin: Springer, 2007.
- [114] Li, G., Ponte Castaneda, P.: Variational estimates for the elastoplastic response of particle-reinforced metal-matrix composites, *Applied Mechanics Reviews* 47 (1994) 77-94.
- [115] Jamart, J.: Application and validation of failure criteria in short fiber reinforced polymers. Universität des Saarlandes, Saarbrücken, Studienarbeit 2011.
- [116] Neuber, H.: Kerbspannungslehre: Theorie der Spannungskonzentration Berlin: Springer, 2001.
- [117] Wittel, H.: Roloff/Matek Maschinenelemente: Normung, Berechnung, Gestaltung: mit 711 Abbildungen, 75 vollständig durchgerechneten Beispielen und einem Tabellenbuch mit 282 Tabellen. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [118] Kaiser, J.-M., Stommel, M.: Modified mean-field formulations for the improved simulation of the elastic-plastic behavior of short fiber reinforced thermoplastics, *International Journal of Plasticity*, eingereicht (2013).
- [119] Kaiser, J.-M., Stommel, M.: Inverse determination of modeling parameters to consider inhomogeneities of semicrystalline thermoplastics in structure simulations, *Archive of Applied Mechanics*, im Druck (2013).