

**Effiziente Methoden der parametrischen Ordnungsreduktion für  
affin und nicht-affin parametrisierte Modelle mit Anwendungen in  
der Finite-Elemente-Simulation von Mikrowellenstrukturen**

Dissertation  
zur Erlangung des Grades  
des Doktors der Ingenieurwissenschaften  
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II  
- Physik und Mechatronik -  
der Universität des Saarlandes

von

Stefan Burgard

Saarbrücken

2013

Tag des Kolloquiums: 11.03.2014

Dekan: Univ.-Prof. Dr. C. Wagner

Mitglieder des  
Prüfungsausschusses: Univ.-Prof. Dr. rer. nat. R. Pelster  
Univ.-Prof. Dr. techn. R. Dyczij-Edlinger  
Univ.-Prof. Dr. rer. nat. h.c. A. K. Louis  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. B. Lohmann  
Dr. T. Sauerwald

# Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Saarbrücken, 08.04.2014



# Danksagungen

Zunächst bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. techn. Romanus Dyczij-Edlinger sowohl für die Bereitstellung der spannenden Aufgabenstellung als auch für die fachliche Betreuung während meines Promotionsstudiums. Insbesondere die eingeräumten Freiräume bei der Bearbeitung der Thematik und das mir damit entgegengebrachte Vertrauen habe ich als sehr angenehm wahrgenommen. Darüber hinaus gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. rer. nat. h.c. Alfred K. Louis sowie Herrn Prof. Dr.-Ing. Boris Lohmann für das Interesse an meiner Arbeit und die Begutachtung.

Ebenfalls möchte ich den Mitarbeitern des Lehrstuhls für Theoretische Elektrotechnik für die stets angenehme und ebenso produktive Arbeitsatmosphäre meinen Dank aussprechen. Besonders bedanke ich mich auch bei meinen Eltern, Ute Burgard und Dr. med. Werner Burgard, die mein Studium der Mechatronik erst ermöglicht haben. Ein ganz besonderer Dank geht abschließend an Frau Susanne Weigel für die weitreichende Unterstützung und Toleranz während meiner Promotionsphase.



# Kurzfassung

Numerische Diskretisierungsverfahren sind in der Lage, technische Bauteile mit hoher Genauigkeit anhand numerischer Modelle zu charakterisieren. Der computergestützte Bauteilentwurf erfordert, solche Modelle wiederholt für verschiedene Parameterkonfigurationen auszuwerten, wobei für jede Auswertung ein lineares Gleichungssystem hoher Dimension gelöst werden muss. Insbesondere Parameterstudien und Methoden der mathematischen Optimierung benötigen eine sehr große Anzahl an Modellauswertungen. In diesem Kontext führen Verfahren der parametrischen Modellordnungsreduktion (PMOR) zu einer signifikanten Minderung des numerischen Aufwands.

Die vorliegende Arbeit entwickelt ein neuartiges Rahmenwerk zur Erzeugung von parametrischen reduzierten Modellen, die um Größenordnungen schneller ausgewertet werden können als die ursprünglichen numerischen Modelle und dennoch sehr genau sind. Auf diesem Rahmenwerk aufbauend werden zwei konkrete PMOR-Verfahren vorgestellt. Beide verwenden Tensorgitter zur Diskretisierung des Parameterraums. Während das erste Verfahren eine gleichmäßige Verfeinerung des Tensorgitters benutzt, handelt es sich bei dem zweiten um ein auf ungleichmäßiger Verfeinerung beruhendes selbst-adaptives Verfahren. Eine Anwendung der vorgeschlagenen PMOR-Ansätze zur Geometrieoptimierung von Mikrowellenstrukturen rundet die Arbeit ab. Numerische Beispiele untermauern die Effektivität, Zuverlässigkeit und Praxisrelevanz der vorgeschlagenen Methodik.





# Abstract

Numerical discretization methods are able to characterize technical devices very accurately by means of numerical models. The computer-aided design of such structures requires such models to be evaluated repeatedly for different parameter configurations, where for each evaluation a high-dimensional system of linear equations has to be solved. Especially parametric studies and methods of mathematical optimization require very large numbers of model evaluations. In this context, methods of parametric model order reduction (PMOR) lead to a significant reduction of computational costs.

The present work develops a novel framework for the generation of parametric reduced-order models, which can be evaluated by orders of magnitude faster than the original numerical models and are still very accurate. Based on this framework, two concrete PMOR methods are presented. Both employ tensor grids for discretizing the parameter space. While the first method uses uniform grid refinement, the second one is a self-adaptive approach based on non-uniform refinement. An application of the suggested PMOR approaches to shape optimization of microwave structures completes the work. Numerical examples confirm the efficiency, reliability, and practical relevance of the proposed methodology.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modellbetrachtungen</b>	<b>5</b>
2.1	Einleitung . . . . .	5
2.2	Abstrakte Struktur der parametrischen Ausgangsmodelle . . . . .	6
2.2.1	Affin parametrisierte Ausgangsmodelle . . . . .	8
2.2.2	Polynomiell parametrisierte Ausgangsmodelle . . . . .	9
2.3	Parametrische Finite-Elemente-Modelle von Mikrowellenstrukturen . . . . .	9
2.3.1	Mathematische Modellierung . . . . .	10
2.3.2	Finite-Elemente-Modell . . . . .	15
2.3.3	Ableitung des parametrischen Modells . . . . .	17
2.4	Abstrakte Struktur der parametrischen reduzierten Modelle . . . . .	29
2.4.1	Affin parametrisierte reduzierte Modelle . . . . .	31
2.4.2	Polynomiell parametrisierte reduzierte Modelle . . . . .	31
2.5	Zusammenfassung . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Modelle</b>	<b>33</b>
3.1	Einleitung . . . . .	33
3.2	Unterräume . . . . .	34
3.3	Eine Klasse von Einpunktverfahren . . . . .	36

3.4	Eine Klasse von Mehrpunktverfahren . . . . .	38
3.5	Zusammenfassung . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Rahmenwerk zur parametrischen Modellordnungsreduktion</b>	<b>41</b>
4.1	Einleitung und Konzeption . . . . .	41
4.1.1	Stand der Forschung . . . . .	43
4.2	Rekonstruktion einer affinen Parametrierung . . . . .	45
4.3	Parameterabhängige Unterräume . . . . .	46
4.4	Erzeugung parameterabhängiger Unterräume . . . . .	47
4.4.1	Versagensmechanismus bei direkter Interpolation der Basen . . .	48
4.4.2	Vorgeschlagener Lösungsansatz . . . . .	50
4.5	Diskussion des Rahmenwerkes . . . . .	54
4.5.1	Interpolationseigenschaften . . . . .	54
4.5.2	Numerischer Aufwand . . . . .	55
4.6	Zusammenfassung . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion</b>	<b>59</b>
5.1	Ein nicht-adaptives Verfahren . . . . .	60
5.1.1	Einleitung und Konzeption . . . . .	60
5.1.2	Diskrete Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter .	60
5.1.3	Interpolationsfunktionen . . . . .	63
5.1.4	Numerische Beispiele . . . . .	65
5.2	Ein adaptives Verfahren . . . . .	80
5.2.1	Einleitung und Konzeption . . . . .	80
5.2.2	Diskrete Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter .	81
5.2.3	Stufe I: Darstellung der von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume . . . . .	84

5.2.4	Stufe II: Darstellung der affinen Parameterrekonstruktion . . . . .	87
5.2.5	Stufe III: Assemblierung des parametrischen reduzierten Modells	91
5.2.6	Numerisches Beispiel . . . . .	91
5.3	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen . . . . .	97
<b>6</b>	<b>Geometrieoptimierung von Mikrowellenstrukturen</b>	<b>101</b>
6.1	Einleitung . . . . .	101
6.2	Das Optimierungsproblem . . . . .	102
6.3	Das parametrische reduzierte Modell . . . . .	102
6.4	Optimierung mit parametrischen reduzierten Modellen . . . . .	103
6.4.1	Eine Klasse lokaler Optimierungsverfahren . . . . .	103
6.4.2	Eine Klasse globaler Optimierungsverfahren . . . . .	106
6.5	Numerisches Beispiel: Optimierung eines Wellenleiter-Filters . . . . .	108
6.6	Zusammenfassung . . . . .	112
<b>7</b>	<b>Abschließender Teil</b>	<b>115</b>
7.1	Wesentliche Beiträge und Erkenntnisse . . . . .	115
7.2	Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen . . . . .	117
	<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>119</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>121</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>123</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>125</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

Sowohl die Entwicklungszeiten anspruchsvoller technischer Bauteile als auch deren Qualität können durch den Einsatz computergestützter Entwurfsmethodiken während des Designprozesses entscheidend verbessert werden. Häufig ist für den Entwurfsprozess nicht der Verlauf von Feldgrößen innerhalb der Struktur von primärem Interesse, sondern das *Übertragungsverhalten* der Struktur bezüglich relevanter integraler Kenngrößen. In diesem Fall ist eine Bauteilbeschreibung auf Systemebene durch *mathematische Modelle* mit definierten Schnittstellen zielführend. Da eine analytische Bauteilcharakterisierung aufgrund der oftmals hohen Komplexität nur in Ausnahmefällen möglich ist, werden *numerische Computermodelle* der physikalischen Struktur herangezogen. In vielen Disziplinen der Ingenieurwissenschaften haben sich *numerische Diskretisierungsverfahren*, wie die *Finite-Elemente(FE)-Methode* [Mon03], [ZT00], die *Methode der Finiten Differenzen* [TH05], [FP02], die *Finite Integrationstechnik* [CW01], oder *Integralgleichungsverfahren* [Har93] etabliert, um derartige Modelle zu erzeugen. Kann von linearen Rahmenbedingungen, insbesondere Materialeigenschaften ausgegangen werden, so führen die genannten Diskretisierungsverfahren auf ein lineares Gleichungssystem (LGS) hoher Dimension. Angesichts der heute verfügbaren Computer-Hardware ist es unter Einsatz effizienter direkter [SG04] und iterativer [HFDE03] Lösungsverfahren auch für komplexe Bauteilgeometrien und Materialverteilungen möglich, derart hochdimensionale Modelle mit vertretbarem Rechenaufwand auszuwerten.

Im Rahmen des Entwurfsprozesses sind bestimmte *Designparameter*, zu denen sowohl geometrische Parameter als auch Materialparameter zählen, innerhalb gewisser Grenzen derart zu bestimmen, dass das Bauteil ein gewünschtes Verhalten aufweist. Hierzu werden häufig *automatisierte Optimierungsverfahren* [Sch81], [Fle01], [NW06] eingesetzt. Ungeachtet dessen, wie der computergestützte Entwurfsprozess im Detail durchgeführt wird, ist jedenfalls eine wiederholte Auswertung der numerischen Modelle für verschiedene Parameterwerte erforderlich. In vielen Fällen ist die Anzahl der notwendigen Modellauswertungen beachtlich, speziell dann, wenn viele Designparameter zu bestimmen sind, das Übertragungsverhalten der Struktur sehr sensitiv auf Änderungen in den Parameterwerten reagiert, oder ein breiter Parameterbereich betrachtet

wird. Wenngleich eine einzelne Modellauswertung keine Herausforderung hinsichtlich des numerischen Aufwandes darstellt, so kann dieser aufgrund der vorangegangenen Überlegungen für den gesamten Designprozess zu einem erheblichen Problem werden.

Mit dem Ziel, das Übertragungsverhalten einer physikalischen Struktur effizient in Abhängigkeit verschiedener Designparameter zu beschreiben, sind eine Reihe von verschiedenartigen Verfahren entwickelt worden. Eine erste Einteilung kann anhand der Art der Daten, auf welchen die Verfahren operieren, vorgenommen werden.

*Vektor-Fitting-Algorithmen* ([DDD08], [TNGT07], [TNGT10], [FKD09], [FKD11]) sowie *Response Surface Modeling* [DLM<sup>+</sup>99] oder *Kriging-Modelle* [LMCC04] operieren auf einer Menge von über dem Parameterraum verteilten Instanziierungen der Übertragungsfunktion. Dabei ist es unerheblich, wie die Instanziierungen bestimmt worden sind. Es kann sich um Simulationsergebnisse oder auch Messwerte handeln. Mittels dieser Daten werden die Koeffizienten einer rationalen Modell-Übertragungsfunktion bestimmt.

Methoden der *parametrischen Modellordnungsreduktion* (PMOR) konstituieren eine Verfahrensklasse, welche auf der Kenntnis eines numerischen Modells der physikalischen Struktur basieren. Sie unterscheiden sich damit fundamental von der zuvor genannten Verfahrensklasse. Das Ziel solcher Verfahren ist die Konstruktion eines *parametrischen reduzierten Modells* (*Englisch: parametric reduced order model*) (PROM), welches innerhalb des relevanten Parameterbereiches die Übertragungscharakteristik des hochdimensionalen numerischen Ausgangsmodells näherungsweise darstellt, aber erheblich weniger Freiheitsgrade aufweist. Das PROM ist daher um Größenordnungen schneller auswertbar als das Ausgangsmodell. *Projektionsbasierte* PMOR-Ansätze erreichen dies, indem das Ausgangsmodell in einen geeigneten Unterraum projiziert wird. Obwohl in den letzten Jahren eine Reihe von PMOR-Verfahren wie [DEF09], [Phi04], [LE09] oder [AF08] in der Fachliteratur vorgestellt wurden, weisen diese nach wie vor Defizite in mindestens einem der folgenden Punkte auf: effektive Berücksichtigung von geometrischen Parametern, Gewährleistung einer niedrigen Dimension des Unterraums auch für mehrere Parameter, Vermeidung von Rechenoperationen mit Größen des hochdimensionalen Ausgangssystems zur Auswertung des PROMs, hohe Konvergenz des PMOR-Verfahrens und damit geringe Anzahl an Instanziierungen und Lösungen des Ausgangsmodells zur Konstruktion eines PROMs.

Die vorliegende Dissertation ist im Bereich der projektionsbasierten parametrischen Modellordnungsreduktion angesiedelt. Die allgemeine Struktur der betrachteten Ausgangsmodelle sowie der PROMs wird in Abschnitt 2 eingeführt. Es wird gezeigt, dass Finite-Elemente-Modelle von Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich diese Struktur aufweisen. Ebenfalls wird eine Klassifikation der Designparameter durchgeführt. Dabei wird zwischen solchen Parametern unterschieden, bezüglich derer eine explizite Parametrierung der systemrelevanten Matrizen bekannt ist und solchen, die implizit in den Modellgleichungen enthalten sind. Projektionsbasierte Verfahren der Modellordnungsreduktion (MOR) für die Klasse der expliziten Parameter sind Gegenstand von Kapitel 3. Kapitel 4 stellt ein neuartiges Rahmenwerk zur Behandlung von Ausgangsmodellen



---

mit beliebiger Parametrierung vor. Dieses basiert zum einen auf der Rekonstruktion einer vollständig expliziten Parametrierung der modellrelevanten Matrizen und zum anderen auf einer parameterabhängigen Darstellung von Unterräumen, in die das Ausgangsmodell projiziert wird. Die mittels des gewählten Ansatzes erzeugten PROMs sind auch für viele geometrische Parameter von niedriger Dimension und können sehr schnell ausgewertet werden. Darüber hinaus ermöglicht das vorgestellte Rahmenwerk die Konstruktion von besonders gut konvergierenden Verfahren. Derer werden zwei in Kapitel 5 explizit entwickelt, ein auf gleichmäßiger Gitterverfeinerung basierendes Verfahren in Abschnitt 5.1 sowie ein selbst-adaptives Teilbereichsverfahren in Abschnitt 5.2. Eine Anwendung im Kontext der automatisierten Bauteil-Optimierung ist Gegenstand von Kapitel 6. Die theoretischen Betrachtungen werden begleitend durch numerische Beispiele aus dem Bereich der elektromagnetischen Strukturen ergänzt.



# Kapitel 2

## Modellbetrachtungen

### 2.1 Einleitung

Die Methoden und Verfahren, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt werden, basieren auf numerischen Modellen, im weiteren Verlauf *Ausgangsmodelle* genannt, welche physikalische Systeme abbilden. Numerische Diskretisierungsverfahren, wie die FE-Methode [Mon03], [ZT00] sind weit verbreitet und gut geeignet, um derartige Modelle zu erzeugen. Unter Voraussetzung linearer Bedingungen resultiert der Diskretisierungsschritt häufig in einem LGS hoher Dimension mit dünn besetzter Systemmatrix. Dabei weist das Gleichungssystem aufgrund der gewählten mathematischen Formulierung oftmals eine natürliche Parametrierung bezüglich ausgezeichneter Parameter auf, wie beispielsweise die Frequenz im Rahmen von zeitharmonischen FE-Simulationen mechanischer oder elektromagnetischer Strukturen. Formal ist für derartige Parameter, im weiteren Verlauf *explizite Parameter* genannt, eine *affine Zerlegung* der auftretenden Matrizen  $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  nach Definition 2.1 bekannt.

**Definition 2.1** (Affine Zerlegung). *Die affine Zerlegung einer Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  ist durch*

$$\mathbf{M}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{s} = [s_1, \dots, s_Q]^T \quad (2.1)$$

*gegeben, wobei  $\mathbf{M}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$  matrixwertige Koeffizienten sind,  $s_q \in \mathbb{R}$  die Komponenten des Parametervektors  $\mathbf{s}$  bezeichnen, und  $\theta_i : \mathbb{C}^Q \mapsto \mathbb{C}$ .*

Darüber hinaus gibt es Parameter, die implizit in das LGS eingehen und entsprechend als *implizite Parameter* bezeichnet werden. Im Rahmen von FE-Simulationen erweist es sich häufig als zielführend, geometrische Parameter als implizit zu betrachten, da die Darstellung einer affinen Zerlegung nach (2.1) hierfür im Allgemeinen sehr unhandlich und daher wenig praktikabel ist. Details hierzu sind Gegenstand von Abschnitt 2.3.3.

Die Unterscheidung von impliziten und expliziten Parametern motiviert die Einteilung des Raumes der Designparameter  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^D$  in den Raum  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^Q$  der expliziten Parameter und den Raum  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^P$  der impliziten Parameter. Es gilt somit

$$\mathcal{D} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{P}. \quad (2.2)$$

## 2.2 Abstrakte Struktur der parametrischen Ausgangsmodelle

Alle weiteren Betrachtungen in dieser Arbeit setzen unter Verwendung der Parameterklassifikation nach (2.2) eine spezielle Struktur der Ausgangsmodelle voraus. Die folgenden Definitionen und Sätze führen die benötigten Modellstrukturen ein.

**Definition 2.2** (Lineares Modell). *Ein von den Parametern  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$  und  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  abhängiges lineares Modell mit  $p$  Eingängen sowie  $q$  Ausgängen hat die Form*

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}, \mathbf{p})\mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{B}(\mathbf{s}, \mathbf{p})\mathbf{u}, \quad (2.3a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{C}^T(\mathbf{s}, \mathbf{p})\mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (2.3b)$$

Darin sind  $\mathbf{A}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$  die Systemmatrix,  $\mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^N$  der Lösungsvektor,  $\mathbf{B}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{N \times p}$  die Eingangsmatrix,  $\mathbf{C}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{N \times q}$  die Ausgangsmatrix,  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$  der Eingangsvektor und  $\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^q$  der Ausgangsvektor.

**Definition 2.3** (Ausgangsmodell). *Ein von den Parametern  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$  und  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  abhängiges Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  mit  $p$  Eingängen sowie  $q$  Ausgängen hat die Form*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \mathbf{u}, \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (2.4b)$$

Darin sind  $\mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{B}_j \in \mathbb{C}^{N \times p}$  und  $\mathbf{C}_k \in \mathbb{C}^{N \times q}$  matrixwertige Koeffizienten,  $\mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^N$  der Lösungsvektor,  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$  der Eingangsvektor und  $\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^q$  der Ausgangsvektor.

**Satz 2.1.** *Bei dem Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  handelt es sich um ein lineares Modell nach Definition 2.2, wobei sowohl die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}$  als auch die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}$  ausschließlich eine Abhängigkeit von den expliziten Parametern  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$  aufweisen.*

*Beweisskizze.* Durch Einsetzen von (2.1) in (2.3) für die Matrizen  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  folgt Satz 2.1.  $\square$

**Definition 2.4** (Transponiertes Ausgangsmodell). *Das zu  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3 gehörige transponierte Ausgangsmodell  $\Sigma'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  hat die Form*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i^T(\mathbf{p}) \right) \mathbf{x}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right) \mathbf{u}', \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{y}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right)^T \mathbf{x}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (2.5b)$$

*Darin sind  $\mathbf{A}_i(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{B}_j$  und  $\mathbf{C}_k$  die matrixwertigen Koeffizienten von  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  aus Definition 2.3,  $\mathbf{x}' \in \mathbb{C}^N$  der Lösungsvektor,  $\mathbf{u}' \in \mathbb{C}^q$  der Eingangsvektor sowie  $\mathbf{y}' \in \mathbb{C}^p$  der Ausgangsvektor des transponierten Ausgangsmodells.*

Das Übertragungsverhalten der Ausgangsmodelle ist von zentraler Bedeutung für die Simulation auf Systemebene und wird mathematisch mit *Übertragungsmatrizen* beschrieben. Diese sind für die vorangegangenen Modelle wie folgt definiert:

**Definition 2.5** (Übertragungsmatrix). *Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  eines linearen Modells nach Definition 2.2 ist über den Eingangsvektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$  und den Ausgangsvektor  $\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^q$  als*

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \mathbf{u} \quad (2.6)$$

*definiert.*

**Korollar 2.1.** *Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  des Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3 ist durch*

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \quad (2.7)$$

*bestimmt.*

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (2.4a) nach dem Lösungsvektor  $\mathbf{x}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und Einsetzen in (2.4b) folgt unmittelbar die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ .  $\square$

**Korollar 2.2.** *Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des transponierten Ausgangsmodells  $\Sigma'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.4 ist die Transponierte der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3:*

$$\mathbf{H}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (2.8)$$

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (2.5a) nach dem Lösungsvektor  $\mathbf{x}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und Einsetzen in (2.5b) folgt die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ . Ein Vergleich mit Korollar 2.1 liefert die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.6** (Symmetrisches Ausgangsmodell). *Ein Modell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  heißt symmetrisch, wenn dessen Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  symmetrisch und damit identisch mit der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des zugehörigen transponierten Modells  $\Sigma'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  ist.*

Modelle vom Typ (2.4) treten in vielen verschiedenen Disziplinen der computergestützten Bauteilsimulation auf. Unter anderem bei der Analyse von elektrischen Hochgeschwindigkeitsschaltungen [Rue74] mittels Integralgleichungsverfahren [Bal89], in der dynamischen Simulation von mechanischen Strukturen [TM01] oder bei der FE-Simulation von elektromagnetischen Bauteilen [WP86]. Auf Letztere wird in Abschnitt 2.3 näher eingegangen.

Ausgangssysteme  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  mit von den impliziten Parametern  $\mathbf{p}$  abhängigen Eingangs- und Ausgangsmatrizen  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  sind im Rahmen der vorliegenden Dissertation nicht untersucht worden. Der Autor strebt eine dahingehende Erweiterung der Methodiken dieser Arbeit an.

## 2.2.1 Affin parametrisierte Ausgangsmodelle

Einen Spezialfall der Ausgangsmodelle  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  stellen *affin parametrisierte Ausgangsmodelle*  $\Sigma(\mathbf{s})$  dar, die ausschließlich eine Abhängigkeit bezüglich der expliziten Parameter  $\mathbf{s}$  aufweisen.

**Definition 2.7** (Affin parametrisiertes Ausgangsmodell). *Ein in den expliziten Parametern  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$  affin parametrisiertes Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s})$  mit  $p$  Eingängen sowie  $q$  Ausgängen hat die Form*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \mathbf{u}, \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \mathbf{x}(\mathbf{s}). \quad (2.9b)$$

Darin sind  $\mathbf{A}_i \in \mathbb{C}^{N \times N}$ ,  $\mathbf{B}_j \in \mathbb{C}^{N \times p}$  und  $\mathbf{C}_k \in \mathbb{C}^{N \times q}$  matrixwertige Koeffizienten,  $\mathbf{x}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^N$  ist der Lösungsvektor,  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$  der Eingangsvektor und  $\mathbf{y}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^q$  der Ausgangsvektor.

**Korollar 2.3.** *Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  des affin parametrisierten Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s})$  nach Definition 2.7 ist durch*

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \quad (2.10)$$

bestimmt.

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (2.9a) nach dem Lösungsvektor  $\mathbf{x}(\mathbf{s})$  und Einsetzen in (2.9b) folgt unmittelbar die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s})$ .  $\square$

**Satz 2.2.** *Ein affin parametrisiertes Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s})$  nach Definition 2.7 kann durch Fixieren des impliziten Parametervektors  $\mathbf{p}$  aus dem Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  entsprechend Definition 2.3 erzeugt werden. Für einen Punkt  $\hat{\mathbf{p}}_k \in \mathcal{P}$  gilt*

$$\hat{\Sigma}_k(\mathbf{s}) := \Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \Big|_{\mathbf{p}=\hat{\mathbf{p}}_k}. \quad (2.11)$$

*Beweisskizze.* Durch Einsetzen von  $\hat{\mathbf{p}}_k \in \mathcal{P}$  in Definition 2.3 und Vergleich mit Definition 2.7 folgt Satz 2.2.  $\square$

## 2.2.2 Polynomiell parametrisierte Ausgangsmodelle

Affin parametrisierte Ausgangsmodelle  $\Sigma(\mathbf{s})$  können durch Einschränken der Funktionen  $\theta_n$  weiter spezialisiert werden. Entsprechend führt Definition 2.8 *polynomiell parametrisierte Ausgangsmodelle*  $\Sigma^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  ein.

**Definition 2.8** (Polynomiell parametrisiertes Ausgangsmodell). *Ein in den expliziten Parametern  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$  polynomiell parametrisiertes Ausgangsmodell  $\Sigma^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  ist durch Einschränkung des affin parametrisierten Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s})$  nach Definition 2.7 auf Funktionen*

$$\theta_n \in \mathbb{P}(O, Q) \quad (2.12)$$

*gegeben. Darin bezeichnet  $\mathbb{P}(O, Q)$  den Raum der Polynome mit maximalem Grad  $O$  in  $Q$  Variablen.*

**Korollar 2.4.** *Die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}^{\mathbb{P}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  des polynomiell parametrisierten Ausgangsmodells  $\Sigma^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.8 ist durch (2.10) bestimmt.*

## 2.3 Parametrische Finite-Elemente-Modelle von Mikrowellenstrukturen

Bei der FE-Methode handelt es sich um ein in vielen ingenieurwissenschaftlichen Disziplinen verbreitetes numerisches Diskretisierungsverfahren. In der Elektrodynamik wird die FE-Methode vor allem zur Simulation von elektromagnetischen Strukturen im Frequenzbereich herangezogen. Da sie auf *unstrukturierten Netzen* operiert und ein hohes Maß an Flexibilität bezüglich der Materialmodellierung aufweist, ist sie vielseitig einsetzbar. Im vorliegenden Kapitel werden *FE-Modelle* von passiven Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich abgeleitet, die eine Modellstruktur entsprechend Definition 2.3 aufweisen und somit als Ausgangsmodelle geeignet sind.

### 2.3.1 Mathematische Modellierung

In der klassischen Elektrodynamik dienen die *Maxwell-Gleichungen*

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t}, \quad (2.13a)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{H}} = \boldsymbol{\mathcal{J}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t}, \quad (2.13b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{D}} = \varrho, \quad (2.13c)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}} = 0 \quad (2.13d)$$

als Grundlage zur Beschreibung sämtlicher elektromagnetischer Phänomene und sind somit auch Ausgangspunkt der Betrachtungen in diesem Kapitel. Darin bezeichnen  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  die *elektrische Feldstärke*,  $\boldsymbol{\mathcal{H}}$  die *magnetische Feldstärke*,  $\boldsymbol{\mathcal{D}}$  die *elektrische Flussdichte*,  $\boldsymbol{\mathcal{B}}$  die *magnetische Flussdichte*,  $\boldsymbol{\mathcal{J}}$  die *Stromdichte* und  $\varrho$  die *Raumladungsdichte*. Materialbeziehungen vervollständigen das vorliegende Differenzialgleichungssystem. Unter der Annahme von linearen Verhältnissen lauten diese

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \epsilon \boldsymbol{\mathcal{E}} = \epsilon_0 \epsilon_r \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad (2.14a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \mu \boldsymbol{\mathcal{H}} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{\mathcal{H}}, \quad (2.14b)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \sigma \boldsymbol{\mathcal{E}}. \quad (2.14c)$$

Darin bezeichnet  $\epsilon_r$  den *relativen Permittivitätstensor*,  $\mu_r$  den *relativen Permeabilitätstensor* und  $\sigma$  den *Leitfähigkeitstensor*. Die *Permittivität des Vakuums*  $\epsilon_0$  und die *Permeabilität des Vakuums*  $\mu_0$  sind über die Beziehung

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (2.15)$$

mit der *Vakuumllichtgeschwindigkeit*  $c_0$  verknüpft. Mit dem Ziel, die Darlegungen im Verlauf der Arbeit möglichst übersichtlich zu halten, werden o.B.d.A. stets isotrope Materialien und damit skalarwertige Größen  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$  und  $\sigma$  vorausgesetzt.

Sind die Materialeigenschaften zusätzlich zeitinvariant, so kann das System der Maxwell-Gleichungen mit den entsprechenden Phasoren  $\boldsymbol{E}$ ,  $\boldsymbol{H}$ ,  $\boldsymbol{D}$ ,  $\boldsymbol{B}$ ,  $\rho$  und der *Kreisfrequenz*  $\omega$  in zeitharmonischer Form

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -j\omega \boldsymbol{B}, \quad (2.16a)$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + j\omega \boldsymbol{D}, \quad (2.16b)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \quad (2.16c)$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \quad (2.16d)$$

geschrieben werden. Die Materialbeziehungen nehmen entsprechend (2.14) die Darstellung

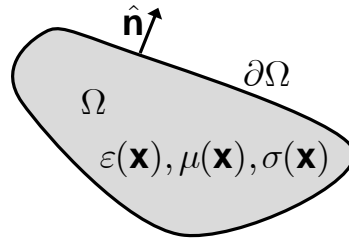
$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \boldsymbol{E}, \quad (2.17a)$$

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H}, \quad (2.17b)$$

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} \quad (2.17c)$$

an.





**Abbildung 2.1:** Schematische Darstellung des Randwertproblems.

### Vektorielle Helmholtzgleichung

Durch Eliminieren der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  in (2.16b) mittels (2.16a) und Ausnutzen der Materialbeziehungen (2.17) ergibt sich die *vektorielle Helmholtzgleichung* zu

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} + j k_0 \eta_0 \sigma \mathbf{E} - k_0^2 \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (2.18)$$

wobei

$$k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \frac{2\pi f}{c_0} \quad (2.19)$$

die mit der Kreisfrequenz  $\omega$  bzw. der *Frequenz*  $f$  linear verknüpfte *Freiraumwellenzahl* und

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (2.20)$$

der *Feldwellenwiderstand des Vakuums* sind.

### Randwertproblem

Das in Abbildung 2.1 skizzierte *Randwertproblem* dient als Grundlage für die FE-Diskretisierung und ist durch die Vorgabe einer Differentialgleichung innerhalb des betrachteten *Feldgebietes*  $\Omega$ , hier die vektorielle Helmholtzgleichung nach (2.18) sowie entsprechender *Randbedingungen* auf dem *Rand*  $\Gamma = \partial\Omega$  definiert. Mit dem Ziel, verschiedene physikalische Effekte modellieren zu können, wird der Rand  $\Gamma$  in die disjunkten Teilränder

$$\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_H \cup \Gamma_Z \cup \Gamma_{WG} \quad (2.21)$$

zerteilt, welche ihrerseits wiederum aus mehreren, nicht zusammenhängenden Komponenten bestehen können:

$$\Gamma_E = \bigcup_i \Gamma_E^i, \quad \Gamma_H = \bigcup_i \Gamma_H^i, \quad \Gamma_Z = \bigcup_i \Gamma_Z^i, \quad \Gamma_{WG} = \bigcup_i \Gamma_{WG}^i. \quad (2.22)$$

Bezeichnet  $\hat{\mathbf{n}}$  den gemäß Abbildung 2.1 gerichteten, normierten Normalenvektor von  $\Gamma$ , so gelten auf den Teilrändern  $\Gamma_E$ ,  $\Gamma_H$ ,  $\Gamma_Z$  sowie  $\Gamma_{WG}$  die Randbedingungen:

$$\Gamma_E : \quad \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (2.23a)$$

$$\Gamma_H : \quad (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{0}, \quad (2.23b)$$

$$\Gamma_Z : \quad \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}) = Z_s \mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (2.23c)$$

$$\Gamma_{WG} : \quad (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{n}} = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_t^v \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.23d)$$

Da auf den Rändern  $\Gamma_E$  und  $\Gamma_H$  die Tangentialkomponenten der entsprechenden Feldgrößen zu Null erzwungen werden, können hiermit perfekte elektrisch bzw. perfekte magnetische Leiter modelliert werden. Gute Leiter hingegen sind durch die Vorgabe von *Oberflächenimpedanzen*  $Z_s$  in der sogenannten *Impedanzrandbedingung* (2.23c) darstellbar [Sen60]. Dabei wird ausgenutzt, dass das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  bei Eindringen in das Innere eines guten Leiters exponentiell gedämpft wird. Dieses Phänomen wird auch als *Skin-Effekt* bezeichnet. Die *Eindringtiefe*

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad (2.24)$$

gibt in diesem Zusammenhang an, nach welcher Strecke normal zur Grenzfläche eines Leiters mit Leitfähigkeit  $\sigma$  die Feldkomponenten um den Faktor  $e$  abgeklungen sind. Sind die geometrischen Abmessungen des Leiters erheblich größer als die Eindringtiefe, so kann der Leiter durch Vorgabe der Oberflächenimpedanz

$$Z_s = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} \quad (2.25)$$

modelliert werden [Har01, S. 50 ff.].

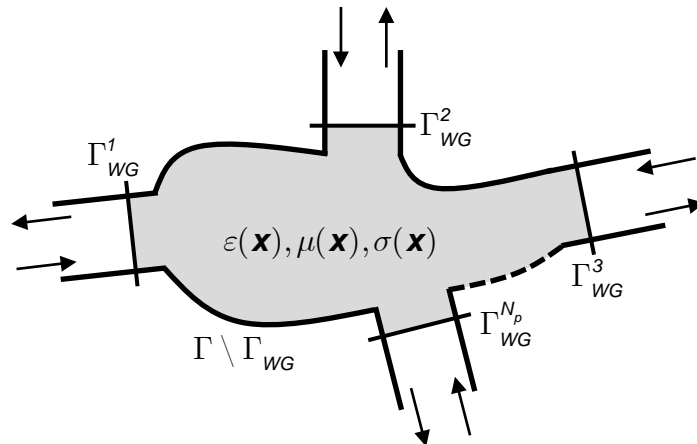
Darüber hinaus ermöglicht es die Impedanzrandbedingung (2.23c), Ränder zu betrachten, durch welche die Struktur ins Unendliche abstrahlt. Dies ist insbesondere für die Modellierung von Antennenstrukturen von Interesse. Häufig werden sogenannte *absorbierende Randbedingungen* erster Ordnung eingesetzt, für welche nach [Per88] der Zusammenhang

$$Z_s = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (2.26)$$

gilt.

Eine besondere Bedeutung kommt den Rändern  $\Gamma_{WG}^i$  zu. Es handelt sich dabei um *Wellenleiter-Tore*, mit denen die Struktur über Wellenleiter mit einem Netzwerk aus Mikrowellenstrukturen verbunden werden kann. An den Rändern  $\Gamma_{WG}^i$  werden die tangentialen Komponenten  $\mathbf{H}_t^v$  des magnetischen Feldes entsprechend den Feldern der angeschlossenen Wellenleiter vorgegeben. Die Wellenleiter-Tore ermöglichen somit eine Beschreibung der Struktur auf Systemebene. Die Vorgehensweise hierfür wird im folgenden Abschnitt skizziert.

Das Randwertproblem ist somit vollständig bestimmt und kann mittels numerischer Diskretisierungsverfahren, wie in Abschnitt 2.3.2 gezeigt, gelöst werden.



**Abbildung 2.2:** Schematische Darstellung einer Mikrowellenstruktur mit Wellenleiter-Toren.

### Beschreibung auf Systemebene

Abbildung 2.2 stellt schematisch eine Mikrowellenstruktur mit  $N_p$  physikalischen Wellenleiter-Toren dar. Jedes dieser Tore ist dabei mit einem *axial homogenen Wellenleiter* verbunden. Bei diesen handelt es sich um Wellenleiter, deren Materialeigenschaften, Randbedingungen und Geometrie sich entlang einer ausgezeichneten Richtung nicht verändern. Dazu gehören unter anderem koaxiale Wellenleiter, Rundhohlleiter oder auch Rechteckhohlleiter. Wellenleiter dieser Art weisen für endliche Abmessungen ein diskretes Spektrum an *Wellenformen*  $\mathbf{E}_\xi$  und  $\mathbf{H}_\xi$  auf.

Einen Spezialfall der axial homogenen Wellenleiter stellen *homogene Wellenleiter* dar. Bei diesen sind die Materialien ebenfalls in der zur ausgezeichneten Richtung transversalen Ebene ortsunabhängig. Zusätzlich sind nur perfekt elektrisch leitende und perfekt magnetisch leitende Ränder vom Typ (2.23a) oder (2.23b) zulässig. In homogenen Wellenleitern wird zwischen drei Arten von Wellenformen unterschieden. Dabei handelt es sich um sogenannte *transversal elektrische* (TE), *transversal magnetische* (TM) und *transversal elektromagnetische* (TEM) Wellen. Bei Erstgenannten weist das elektrische Feld  $\mathbf{E}_\xi$  ausschließlich Komponenten transversal zur ausgezeichneten Richtung  $z$  auf, bei TM-Wellenformen gilt dies entsprechend für das magnetische Feld  $\mathbf{H}_\xi$ . Sowohl  $\mathbf{E}_\xi$  als auch  $\mathbf{H}_\xi$  sind bei TEM-Wellenformen rein transversal gerichtet. TEM-Wellenformen sind darüber hinaus genau dann existent, wenn der Wellenleiterquerschnitt mehrere Elektroden aufweist. Eine detaillierte Abhandlung der in diesem Absatz zusammengefassten Erkenntnisse kann [Har01, Kapitel 8.1] entnommen werden.

Axial homogene Wellenleiter besitzen die wesentliche Eigenschaft, dass jedes elektromagnetische Feld innerhalb des Wellenleiters als Superposition der Wellenformen  $\mathbf{E}_\xi$  und  $\mathbf{H}_\xi$  dargestellt werden kann [Col91, S. 426 ff.]. Für die zur ausgezeichneten Richtung  $z$  transversal gerichteten Feldkomponenten  $\mathbf{E}_i^i$  und  $\mathbf{H}_i^i$  des  $i$ -ten Wellenleiters folgen die

Darstellungen

$$\mathbf{E}_t^i(z) = \sum_{\xi=1}^{\infty} a_{\xi}^i \mathbf{E}_{t\xi}^i e^{-\gamma_{\xi}^i z} + b_{\xi}^i \mathbf{E}_{t\xi}^i e^{+\gamma_{\xi}^i z}, \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{H}_t^i(z) = \sum_{\xi=1}^{\infty} a_{\xi}^i \mathbf{H}_{t\xi}^i e^{-\gamma_{\xi}^i z} - b_{\xi}^i \mathbf{H}_{t\xi}^i e^{+\gamma_{\xi}^i z}. \quad (2.27b)$$

Dabei ist  $\gamma_{\xi}^i$  der komplexe *Ausbreitungskoeffizient* der  $\xi$ -ten Wellenform am  $i$ -ten Wellenleiter-Tor,  $a_{\xi}^i \in \mathbb{C}$  und  $b_{\xi}^i \in \mathbb{C}$  sind Gewichtungskoeffizienten der vor- und rücklaufenden Wellen und  $\mathbf{E}_{t\xi}^i, \mathbf{H}_{t\xi}^i$  sind die Transversalkomponenten der Wellenformen  $\mathbf{E}_{\xi}^i, \mathbf{H}_{\xi}^i$ . Durch Wahl der lokalen Koordinatensysteme der Wellenleiter derart, dass die Wellenleiter-Tore  $\Gamma_{WG}^i$  in der Ebene  $z = 0$  liegen, ergeben sich die Transversalkomponenten der Felder in dieser Ebene als

$$\mathbf{E}_t^i = \sum_{\xi=1}^{\infty} (a_{\xi}^i + b_{\xi}^i) \mathbf{E}_{t\xi}^i, \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{H}_t^i = \sum_{\xi=1}^{\infty} (a_{\xi}^i - b_{\xi}^i) \mathbf{H}_{t\xi}^i. \quad (2.28b)$$

Durch Einführung *modaler Spannungen*  $V_{\xi}^i$  und *modaler Ströme*  $I_{\xi}^i$  entsprechend

$$V_{\xi}^i := a_{\xi}^i + b_{\xi}^i, \quad (2.29a)$$

$$I_{\xi}^i := a_{\xi}^i - b_{\xi}^i, \quad (2.29b)$$

folgen für die Transversalkomponenten der Felder in der Ebene  $z = 0$  die Entwicklungen

$$\mathbf{E}_t^i = \sum_{\xi=1}^{\infty} V_{\xi}^i \mathbf{E}_{t\xi}^i, \quad (2.30a)$$

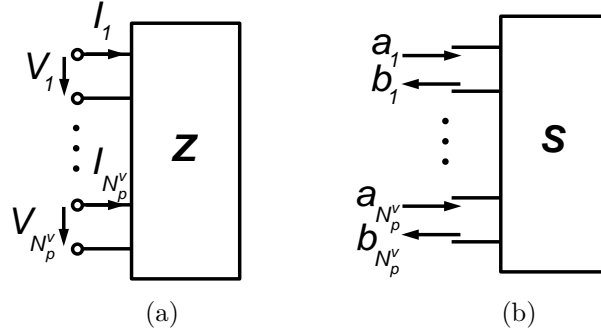
$$\mathbf{H}_t^i = \sum_{\xi=1}^{\infty} I_{\xi}^i \mathbf{H}_{t\xi}^i. \quad (2.30b)$$

Die darin enthaltenen modalen Spannungen  $V_{\xi}^i$  und modalen Ströme  $I_{\xi}^i$  werden erst durch Einbeziehung einer zusätzlichen Normierungsbedingung eindeutig, da soweit noch keine Aussage über die Amplituden der modalen Feldgrößen  $\mathbf{E}_{t\xi}^i$  und  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  getroffen wurde. In dieser Arbeit werden  $\mathbf{E}_{t\xi}^i$  und  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  durch die Orthogonalitätsbeziehung [Van07, S. 865 ff.]

$$\int_{\Gamma_{WG}^i} (\mathbf{E}_{t\xi}^i \times \mathbf{H}_{t\zeta}^i) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma = \delta_{\xi\zeta} \quad (2.31)$$

normiert, wobei  $\delta_{\xi\zeta}$  das Kronecker-Delta bezeichnet. Darüber hinaus bedeutet (2.31), dass unterschiedliche Wellenformen nicht miteinander verkoppelt sind. Dies ermöglicht es, jeder durch  $\xi$  identifizierten Wellenform eines physikalischen Tores  $\Gamma_{WG}^i$  formal ein *verallgemeinertes Wellenleiter-Tor*  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  zuzuordnen [Har01, Kapitel 8.3].

Für praktische Anwendungen ist die Charakterisierung des Übertragungsverhaltens einer Mikrowellenstruktur nur innerhalb eines vorgegebenen Frequenzbereiches erforderlich, innerhalb dessen eine gewisse Anzahl an Wellenformen an den verallgemeinerten



**Abbildung 2.3:** Schematische Darstellung von Mehrporten. (a) Impedanz-Modell, (b) Streuparameter-Modell.

Wellenleiter-Toren ausbreitungsfähig sind. Die nicht ausbreitungsfähigen Wellenformen werden exponentiell gedämpft [Rus03, Kapitel 7]. Folglich genügt in (2.30) die Berücksichtigung einer endliche Anzahl  $N_\xi^i$  an Wellenformen. Die Wellenformen selbst können für strukturell einfache axial homogene Wellenleiter oftmals analytisch berechnet werden [Col01, Kapitel 3]. Ist dies nicht möglich, so sind  $\mathbf{E}_{t\xi}^i$  und  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  durch Lösen eines zweidimensionalen Eigenwertproblems zu bestimmen [FHDE04].

Als Nächstes werden mittels der modalen Spannungen  $V_\xi^i$  und Ströme  $I_\xi^i$  *verallgemeinerte Impedanzmatrizen* eingeführt, mit deren Hilfe das Eingangs- und Ausgangsverhalten der in Abbildung 2.2 skizzierten Struktur auf Systemebene durch ein Mehrtor entsprechend Abbildung 2.3(a) charakterisiert wird. Das Mehrtor weist dabei  $N_p^v$  verallgemeinerte Wellenleiter-Tore  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  auf, an denen jeweils nur eine Wellenform anliegt. Unter Vernachlässigung des zur Identifikation der physikalischen Wellenleiter-Tore verwendeten Indexes  $i$  werden die Komponenten der verallgemeinerten Impedanzmatrix  $\mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{N_p^v \times N_p^v}$  entsprechend

$$Z_{\xi\zeta} := V_\xi(I_\zeta = \delta_{\xi\zeta}) \quad (2.32)$$

definiert [Poz05, Kapitel 4].

Eine andere, weit verbreitete Beschreibungsmöglichkeit von Mikrowellenstrukturen auf Systemebene bieten die *Streuparameter*. Als Grundlage hierfür dienen die Amplitudenverhältnisse aus vor- und rücklaufenden Wellenformen an den verallgemeinerten Wellenleiter-Toren. Das zugehörige Netzwerkelement ist in Abbildung 2.3(b) skizziert. Die Komponenten der Streumatrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N_p^v \times N_p^v}$  sind folgendermaßen definiert [Poz05, Kapitel 4]:

$$S_{\xi\zeta} := b_\xi(a_\zeta = \delta_{\xi\zeta}). \quad (2.33)$$

### 2.3.2 Finite-Elemente-Modell

Mit Hilfe der FE-Methode wird im vorliegenden Abschnitt ein numerisches Modell, das FE-Modell, basierend auf der mathematischen Modellierung aus Abschnitt 2.3.1,

abgeleitet. Die Lösung des FE-Modells stellt dabei eine Näherungslösung des Randwertproblem nach Abbildung 2.1, bestehend aus der vektoriellen Helmholtzgleichung (2.18) sowie den zugehörigen Randbedingungen (2.23) dar. Somit ist das FE-Modell zur Charakterisierung passiver Mikrowellenstrukturen geeignet.

Die FE-Methode setzt zunächst eine Diskretisierung des Feldgebietes  $\Omega$  durch ein *FE-Netz*  $\mathcal{M}$  voraus. Darauf aufbauend werden die Feldgrößen unter Verwendung geeigneter *Ansatzfunktionen* dargestellt. In der vorliegenden Dissertation kommen eine *elektrische Feldformulierung* [Far07] sowie  $\mathcal{H}(\text{rot})$ -konforme Ansatzfunktionen  $\mathbf{w}_i$  entsprechend [Ing06] zur Anwendung. Obwohl die elektrische Feldformulierung für niedrige Frequenzen Instabilitäten aufweist, ist sie für Hochfrequenz-Simulationen dennoch weit verbreitet. Neben der elektrischen Feldformulierung existieren wesentlich robustere Formulierungen, wie die Potentialformulierung aus [HFDE03]. Beide Formulierungen führen auf FE-Modelle, die in das Rahmenwerk der vorliegenden Arbeit passen.

Zur Extraktion der Netzwerkparameter aus FE-Simulationen von Mikrowellenstrukturen sind Impedanz- und Admittanzformulierungen, wie z.B. [WP86] oder [RAZ01] geeignet. Mittels eines passenden Ausgangsfunktional wird zunächst die verallgemeinerte Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}$  bestimmt, woraus bei Bedarf in einem nachgelagerten Berechnungsschritt die Streumatrix  $\mathbf{S}$  errechnet werden kann. Die Umrechnung zwischen Streu- und Impedanzparametern ist in der einschlägigen Fachliteratur hinlänglich beschrieben. Siehe hierzu [Rus03, Kapitel 10], [Col01, Kapitel 4] oder auch [Poz05, Kapitel 4]. Zur Bestimmung der Komponenten  $Z_{kl}$  von  $\mathbf{Z}$  nach (2.32) wird die Transversalkomponente des magnetischen Feldes  $\mathbf{H}_t^v$  in (2.23d) auf dem verallgemeinerten Wellenleiter-Tor  $\Gamma_{WG}^{i,\zeta}$  als

$$\mathbf{H}_t^v = \mathbf{H}_{t\zeta}^i \quad (2.34)$$

vorgegeben und mittels der Orthogonalitätsbeziehung (2.31) nach

$$Z_{\xi\zeta} = V_\xi(\mathbf{E}) = \int_{\Gamma_{WG}^{i,\xi}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}_{t\xi}^i) \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (2.35)$$

berechnet.

Nach Einführen von Vektoren modaler Spannungen  $V_n$  und Ströme  $I_n$  gemäß

$$\mathbf{v} = [V_1, \dots, V_{N_p^v}]^T, \quad (2.36)$$

$$\mathbf{i} = [I_1, \dots, I_{N_p^v}]^T. \quad (2.37)$$

lautet das resultierende FE-Modell  $\Sigma_{FE}$  entsprechend [FLDE10]:

$$\underbrace{(\mathbf{S} + jk_0\mathbf{F} - k_0^2\mathbf{T})}_{=:\mathbf{A}} \mathbf{x} = jk_0\eta_0\mathbf{B}\mathbf{i}, \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{x}. \quad (2.38b)$$

Darin ist  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  die *Steifigkeitsmatrix* mit den Komponenten

$$S_{kl} = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega, \quad (2.39)$$

$\mathbf{F} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  die *Dämpfungsmatrix* mit den Komponenten

$$F_{kl} = \int_{\Omega} \eta_0 \mathbf{w}_k \cdot \sigma \mathbf{w}_l \, d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \eta_0 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_k \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_l \, d\Gamma, \quad (2.40)$$

$\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  die *Massenmatrix* mit den Komponenten

$$T_{kl} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_k \cdot \epsilon_r \mathbf{w}_l \, d\Omega, \quad (2.41)$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  die *Systemmatrix*,  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N \times N_p}$  die *Eingangsmatrix* bzw. *Ausgangsmatrix* mit den Komponenten

$$B_{kl} = \int_{\Gamma_{WG}^{i,l}} (\mathbf{H}_{tl}^i \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{w}_k \, d\Gamma. \quad (2.42)$$

Die Übertragungsmatrix des FE-Modells (2.38) liefert unmittelbar die verallgemeinerten Impedanzparameter. Es gilt:

$$\mathbf{Z} = jk_0 \eta_0 \mathbf{B}^T (\mathbf{S} + jk_0 \mathbf{F} - k_0^2 \mathbf{T})^{-1} \mathbf{B}. \quad (2.43)$$

Um die Netzwerkparameter  $\mathbf{Z}$  oder  $\mathbf{S}$  mittels des FE-Modells  $\Sigma_{FE}$  konkret zu berechnen, ist es erforderlich, nach Assemblierung der FE-Matrizen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{B}$  das lineare Gleichungssystem (2.38a) zu lösen. Die Matrizen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{B}$  sind dabei häufig von hoher Dimension, weisen aber eine dünne Besetzungsstruktur auf. Für Gleichungssysteme dieser Art existieren leistungsfähige direkte [SG04] und iterative [HFDE03] Lösungsverfahren. Direkte Löser faktorisieren die Systemmatrix  $\mathbf{A} = \mathbf{S} + jk_0 \mathbf{F} - k_0^2 \mathbf{T}$  und verwenden Vor- und Rückeinsetzen zum Lösen des Gleichungssystems. Die Faktorisierungen weisen allerdings eine dichtere Besetzungsstruktur auf als die ursprüngliche Systemmatrix und benötigen daher mitunter erheblich mehr Arbeitsspeicher. Für große Strukturen ist daher der Einsatz iterativer Löser, die ohne eine solche Faktorisierung auskommen, unumgänglich.

### 2.3.3 Ableitung des parametrischen Modells

Das im vorangegangenen Abschnitt eingeführte FE-Modell  $\Sigma_{FE}$  weist Abhängigkeiten von verschiedenartigen Parametern auf. Konkret handelt es sich dabei um die Betriebsfrequenz  $f \in \mathbb{R}$ , die Materialparameter  $d_m \in \mathbb{R}$  sowie die geometrischen Parameter  $d_g \in \mathbb{R}$ . Eine Untersuchung dieser Abhängigkeiten ist Gegenstand der folgenden Ausführungen. Dazu wird formal der Raum der Materialparameter

$$\mathcal{D}_m \subset \mathbb{R}^{D_m} \quad (2.44)$$

sowie der Raum der geometrischen Parameter

$$\mathcal{D}_g \subset \mathbb{R}^{D_g} \quad (2.45)$$

eingeführt und die Material- und Geometrieparameter in Vektoren

$$\mathbf{d}_m = [d_m^1, \dots, d_m^{D_m}]^T \in \mathcal{D}_m, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{d}_g = [d_g^1, \dots, d_g^{D_g}]^T \in \mathcal{D}_g \quad (2.47)$$

gruppiert. Die Untersuchungen finden unter Berücksichtigung folgender Rahmenbedingungen statt:

- An den Wellenleiter-Toren  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  ist die Mikrowellenstruktur mit homogenen Wellenleitern verbunden.
- Die Materialeigenschaften  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma_r$  und die Oberflächenimpedanz  $Z_S$  sind frequenzunabhängig.
- Die Materialeigenschaften  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma_r$  sind an den Wellenleiter-Toren  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  nicht von den Materialparametern  $d_m$  abhängig.
- Die Geometrieparameter  $d_g$  beeinflussen die Ränder  $\Gamma_Z$  und  $\Gamma_{WG}$  nicht.

Darüber hinaus wird gezeigt, dass  $\Sigma_{FE}$  durch ein abstraktes Ausgangsmodell nach Abschnitt 2.2 darstellbar ist und daher in das Rahmenwerk dieser Dissertation passt.

## Betriebsfrequenz

Die Frequenz  $f \in [f_{min}, f_{max}]$  ist durch (2.19) linear mit der Freiraumwellenzahl  $k_0$  verknüpft. Da das FE-Modell  $\Sigma_{FE}$  entsprechend der Darstellung (2.38) in  $k_0$  formuliert ist, werden die weiteren Untersuchungen der Frequenzabhängigkeit anhand von  $k_0$  erfolgen.

Zunächst ist festzustellen, dass sich die Frequenzparametrierung der Systemmatrix  $\mathbf{A}$  aufgrund der Struktur der vektoriellen Helmholtzgleichung (2.18) auf natürliche Weise entsprechend (2.38a) als Matrixpolynom zweiter Ordnung ergibt. Die Matrizen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{T}$  weisen nach ihren Definitionen (2.39), (2.40) und (2.41) für frequenzunabhängige Materialien und Oberflächenimpedanz gemäß den Rahmenbedingungen keine weitere Frequenzabhängigkeiten auf und daher folgt

$$\mathbf{S} = \text{const}(k_0), \quad (2.48a)$$

$$\mathbf{F} = \text{const}(k_0), \quad (2.48b)$$

$$\mathbf{T} = \text{const}(k_0). \quad (2.48c)$$

Für die Eingangs- und Ausgangsmatrix  $\mathbf{B}$  nach (2.42) ist die Situation hingegen eine andere. Zu deren Berechnung gehen die Transversalkomponenten  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  der magnetischen Feldstärke von am verallgemeinerten Wellenleiter-Tor  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  anliegenden Wellenformen ein. Im Falle von homogenen Wellenleitern sind für TE- und TM-Wellen die Amplituden der Wellenformen  $\mathbf{E}_{t\xi}^i$  und  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  frequenzabhängig, TEM-Wellen hingegen sind dispersionsfrei. Es gilt nach [Har01, S. 385] die Impedanzbeziehung

$$\mathbf{E}_{t\xi}^i = Z_W^{\xi,i} \mathbf{H}_{t\xi}^i \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (2.49)$$



Darin ist  $\hat{\mathbf{z}}$  die Ausbreitungsrichtung der Wellenformen und  $Z_W^{\xi,i}$  die Feldwellenimpedanz. Letztere ist mit der Grenzwellenzahl  $k_c^{\xi,i}$  der  $\xi$ -ten Wellenform durch

$$Z_W^{\xi,i} = \begin{cases} \frac{jk_0\eta_0}{\sqrt{(k_c^{\xi,i})^2 - k_0^2}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} & \text{für TE-Wellen,} \\ \frac{\eta_0\sqrt{(k_c^{\xi,i})^2 - k_0^2}}{jk_0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} & \text{für TM-Wellen,} \\ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} & \text{für TEM-Wellen.} \end{cases} \quad (2.50)$$

am  $i$ -ten Wellenleiter-Tor bestimmt. Für die Frequenzabhängigkeit der Eingangs- und Ausgangsmatrix  $\mathbf{B}$  ergibt sich damit folgende Herleitung: Zunächst wird die transversal gerichtete magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  bei einer Wellenzahl  $k_0$  durch die transversal gerichtete magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}_{t\xi}^i$  bei einer Referenz-Wellenzahl  $\hat{k}_0 \neq k_c^{\xi,i}$  entsprechend

$$\mathbf{H}_{t\xi}^i(k_0) = \sqrt{p_\xi^i(k_0)} \mathbf{H}_{t\xi}^i(\hat{k}_0) \quad (2.51)$$

dargestellt [FLDE10]. Die von der Wellenzahl  $k_0$  abhängige Skalierungsfunktion  $p_\xi^i$  folgt unter Verwendung der Feldwellenimpedanzen  $Z_W^{\xi,i}(k_0)$  nach (2.50) dem Zusammenhang

$$p_\xi^i(k_0) = \frac{Z_W^{\xi,i}(\hat{k}_0)}{Z_W^{\xi,i}(k_0)}. \quad (2.52)$$

Durch Einsetzen von (2.51) in (2.42) folgen die Umformungen

$$B_{kl}(k_0) = \int_{\Gamma_{WG}^{i,l}} (\mathbf{H}_{tl}^i(k_0) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{w}_k \, d\Gamma \quad (2.53a)$$

$$= \sqrt{p_l^i(k_0)} \int_{\Gamma_{WG}^{i,l}} (\mathbf{H}_{tl}^i(\hat{k}_0) \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{w}_k \, d\Gamma \quad (2.53b)$$

$$= \sqrt{p_l^i(k_0)} B_{kl}(\hat{k}_0) \quad (2.53c)$$

$$= \sqrt{p_l^i(k_0)} \hat{B}_{kl}. \quad (2.53d)$$

Nach Gruppierung der Skalierungsfunktionen  $p_\xi^i(k_0)$  in eine wellenzahlabhängige Diagonalmatrix

$$\mathbf{P}(k_0) = \begin{bmatrix} \sqrt{p_1^1(k_0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{p_{N_\xi}^{N_p}(k_0)} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

lässt sich die Eingangs- und Ausgangsmatrix bei einer Wellenzahl  $k_0$  mittels der Diagonalmatrix  $\mathbf{P}(k_0)$  sowie der Referenzmatrix  $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\hat{k}_0)$  darstellen.

Die Frequenzabhängigkeit des FE-Modells  $\Sigma_{FE}$  folgt somit der Darstellung

$$(\mathbf{S} + jk_0\mathbf{F} - k_0^2\mathbf{T})\mathbf{x} = jk_0\eta_0\hat{\mathbf{B}}\mathbf{P}(k_0)\mathbf{i}, \quad (2.55a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}(k_0)\hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{x}. \quad (2.55b)$$

## Materialparameter

Materialparameter  $\mathbf{d}_m \in \mathbb{R}^{D_m}$  ermöglichen es, Einfluss auf die Materialeigenschaften

$$\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{d}_m) > 1, \quad (2.56a)$$

$$\mu_r = \mu_r(\mathbf{d}_m) > 1, \quad (2.56b)$$

$$\sigma_r = \sigma_r(\mathbf{d}_m) \geq 0 \quad (2.56c)$$

und somit auf die Übertragungscharakteristik einer Mikrowellenstruktur zu nehmen. Durch Einführung einer Partitionierung des Parametervektors  $\mathbf{d}_m$  nach

$$\mathbf{d}_m = [(\mathbf{d}_m^\epsilon)^T, (\mathbf{d}_m^\mu)^T, (\mathbf{d}_m^\sigma)^T]^T \quad (2.57)$$

mit  $\mathbf{d}_m^\epsilon \in \mathbb{R}^{D_m^\epsilon}$ ,  $\mathbf{d}_m^\mu \in \mathbb{R}^{D_m^\mu}$  und  $\mathbf{d}_m^\sigma \in \mathbb{R}^{D_m^\sigma}$ , wobei

$$D_m = D_m^\epsilon + D_m^\mu + D_m^\sigma \quad (2.58)$$

gilt, lassen sich die Abhängigkeiten der Materialeigenschaften von den Materialparametern in entkoppelter Form schreiben:

$$\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{d}_m^\epsilon), \quad (2.59a)$$

$$\mu_r = \mu_r(\mathbf{d}_m^\mu), \quad (2.59b)$$

$$\sigma_r = \sigma_r(\mathbf{d}_m^\sigma). \quad (2.59c)$$

Für die FE-Matrizen in (2.38) ergeben sich unmittelbar die Abhängigkeiten

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{d}_m^\mu) = \text{const}(\mathbf{d}_m^\epsilon, \mathbf{d}_m^\sigma), \quad (2.60a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}(\mathbf{d}_m^\sigma) = \text{const}(\mathbf{d}_m^\epsilon, \mathbf{d}_m^\mu), \quad (2.60b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{S}(\mathbf{d}_m^\epsilon) = \text{const}(\mathbf{d}_m^\mu, \mathbf{d}_m^\sigma). \quad (2.60c)$$

Da sich gemäß den Rahmenbedingungen die Materialparameter  $\mathbf{d}_m$  nicht auf die Materialeigenschaften an den Rändern  $\Gamma_{WG}^i$  auswirken, ist die Eingangs- und Ausgangsmatrix unabhängig von  $\mathbf{d}_m$ . Es gilt

$$\mathbf{B} = \text{const}(\mathbf{d}_m^\epsilon, \mathbf{d}_m^\mu, \mathbf{d}_m^\sigma). \quad (2.61)$$

Im Folgenden wird die Parameterabhängigkeit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}(\mathbf{d}_m^\mu)$  näher untersucht. Dazu erfolgt formal eine Unterteilung des Feldgebietes  $\Omega$  in  $D_m^\mu + 1$  nicht überlappende Teilgebiete  $\Omega_i$  nach

$$\Omega = \Omega_0 \cup \bigcup_{n=1}^{D_m^\mu} \Omega_n. \quad (2.62)$$

Während jedes der Teilgebiete  $\Omega_n$  für  $n > 0$  von genau einer Komponente des Parametervektors  $\mathbf{d}_m^\mu$  beeinflusst wird, sind die Materialeigenschaften in  $\Omega_0$  konstant. Für jede Komponente der Steifigkeitsmatrix gilt folglich

$$S_{kl} = \int_{\Omega_0} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega + \sum_{n=1}^{D_m^\mu} \int_{\Omega_n} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \mu_{r,n}^{-1}([\mathbf{d}_m^\mu]_n) \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega. \quad (2.63)$$

Der Operator  $[\cdot]_n$  extrahiert darin die  $n$ -te Komponente eines Vektors. Unter der Annahme, dass die Parameterabhängigkeit der inversen relativen Permeabilität durch das Polynom

$$\mu_{r,n}^{-1}(d, \mathbf{x}) = \hat{\mu}_{r,n}^{-1}(\mathbf{x}) \sum_{p=0}^P c_p^\mu d^p, \quad \mathbf{x} \in \Omega_n \quad (2.64)$$

mit den skalarwertigen Koeffizienten  $c_p^\mu$  sowie dem ortsabhängigen Referenzwert  $\hat{\mu}_{r,n}^{-1}(\mathbf{x})$  dargestellt werden kann, ergibt sich für das parameterabhängige Integral in (2.63)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_n} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \mu_{r,n}^{-1}([\mathbf{d}_m^\mu]_n, \mathbf{x}) \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega \\ &= \sum_{p=0}^{P_n} c_p^\mu ([\mathbf{d}_m^\mu]_n)^p \int_{\Omega_n} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \hat{\mu}_{r,n}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Auf Matrix-Ebene folgt die Parametrierung der Steifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{S}(\mathbf{d}_m^\mu) = \mathbf{S}_0 + \sum_{n=1}^{D_m^\mu} \sum_{p=0}^{P_n^\mu} c_{pn}^\mu ([\mathbf{d}_m^\mu]_n)^p \mathbf{S}_n. \quad (2.66)$$

Für die Komponenten  $[\mathbf{S}_i]_{kl}$  der Teilmatrizen  $\mathbf{S}_i$  gilt

$$[\mathbf{S}_n]_{kl} = \int_{\Omega_n} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \hat{\mu}_{r,n}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega \quad (2.67)$$

mit

$$\hat{\mu}_{r,0}^{-1} = \mu_r^{-1}. \quad (2.68)$$

Die Parameterabhängigkeiten von Dämpfungs- und Massenmatrix in (2.60) werden auf analoge Weise hergeleitet. Eine polynomielle Parameterabhängigkeit der Materialeigenschaften gemäß

$$\epsilon_{r,n}(d, \mathbf{x}) = \hat{\epsilon}_{r,n}(\mathbf{x}) \sum_{p=0}^P c_p^\epsilon d^p, \quad (2.69a)$$

$$\sigma_n(d, \mathbf{x}) = \hat{\sigma}_n(\mathbf{x}) \sum_{p=0}^P c_p^\sigma d^p \quad (2.69b)$$

führt auf eine polynomielle Parametrierung der Matrizen

$$\mathbf{F}(\mathbf{d}_m^\sigma) = \mathbf{F}_0 + \sum_{n=1}^{D_m^\sigma} \sum_{p=0}^{P_n^\sigma} c_{pn}^\sigma ([\mathbf{d}_m^\sigma]_n)^p \mathbf{F}_n, \quad (2.70a)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{d}_m^\epsilon) = \mathbf{T}_0 + \sum_{n=1}^{D_m^\epsilon} \sum_{p=0}^{P_n^\epsilon} c_{pn}^\epsilon ([\mathbf{d}_m^\epsilon]_n)^p \mathbf{T}_n \quad (2.70b)$$

mit den Komponenten

$$[\mathbf{F}_n]_{kl} = \int_{\Omega_n} \eta_0 \mathbf{w}_k \cdot \hat{\sigma}_n(\mathbf{x}) \mathbf{w}_l \, d\Omega + \delta_{n0} \int_{\Gamma_Z} \eta_0 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_k \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_l \, d\Gamma, \quad (2.71a)$$

$$[\mathbf{T}_n]_{kl} = \int_{\Omega_n} \mathbf{w}_k \cdot \hat{\epsilon}_{r,n}(\mathbf{x}) \mathbf{w}_l \, d\Omega \quad (2.71b)$$

sowie den skalaren Referenzwerten

$$\hat{\epsilon}_{r,0}(\mathbf{x}) = \epsilon_r(\mathbf{x}), \quad (2.72a)$$

$$\hat{\sigma}_0(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}). \quad (2.72b)$$

Häufig genügen Polynome niedriger Ordnung in (2.64) und (2.69), wodurch sich die Darstellungen (2.66) und (2.70) wesentlich übersichtlicher gestalten. Beispiele hierfür sind in [DEF09] enthalten.

## Geometrieparameter

Geometrieparameter  $\mathbf{d}_g$  erlauben eine Modifikation der Bauteilgeometrie und haben somit unmittelbaren Einfluss auf das FE-Netz

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbf{d}_g). \quad (2.73)$$

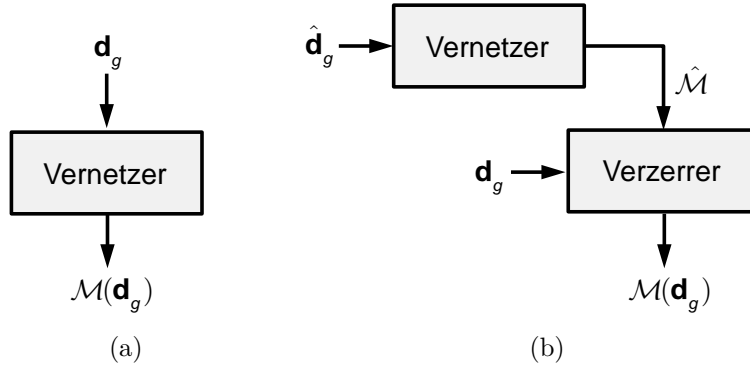
Bei der *Topologie*  $\mathcal{O}$  eines FE-Netzes  $\mathcal{M}$  handelt es sich um eine Darstellungsform unter Verwendung verschiedener Objekte wie hier Tetraeder  $T$ , Dreiecke  $D$ , Kanten  $K$  und Knoten  $N$  sowie deren Nachbarschaftsbeziehungen zueinander. Hierfür existieren verschiedene Ansätze, wie die knotenbasierte Beschreibung oder die Randdarstellung [Mor97], [Hil06].

Eine zentrale Frage in Bezug auf die Geometrieparameter  $\mathbf{d}_g$  besteht darin, ob diese neben ihrem Einfluss auf das FE-Netz eine Änderung der Netztopologie  $\mathcal{O}$  erforderlich machen und

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbf{d}_g) \quad (2.74)$$

zusätzlich zu (2.73) gilt. Hierbei ist es entscheidend zu klären, auf welche Art die Behandlung der Geometrieparameter erfolgt. Mögliche Ansätze sind in Abbildung 2.4 skizziert. Die in Abbildung 2.4(a) dargestellte, naheliegende Vorgehensweise besteht darin, für jeden Vektor  $\mathbf{d}_g$  von Geometrieparametern das Feldgebiet  $\Omega$  neu zu vernetzen. Da hierfür im Allgemeinen weder die Anzahl der für die Topologie  $\mathcal{O}$  relevanten Objekte noch deren Nachbarschaftsbeziehungen erhalten bleiben, ist die Netztopologie  $\mathcal{O}$  als veränderlich anzusehen. Abbildung 2.4(b) zeigt hingegen eine Möglichkeit auf, mit der topologische Änderungen des FE-Netzes  $\mathcal{M}$  weitestgehend vermieden werden können. Dazu wird zunächst für einen Referenzvektor  $\hat{\mathbf{d}}_g$  ein Referenz-FE-Netz

$$\hat{\mathcal{M}} := \mathcal{M}(\hat{\mathbf{d}}_g) \quad (2.75)$$



**Abbildung 2.4:** Erzeugung eines parametrischen FE-Netzes. (a) Ansatz Neuvernetzung, (b) Ansatz Netzverzerrung.

instanziiert, welches mittels eines *topologieerhaltenden Netzverzerrungsverfahrens* gemäß  $\mathbf{d}_g$  modifiziert wird. Verfahren dieser Art wurden durch den Autor im Rahmen der Studienarbeit [Bur08] behandelt. Auf eine nähere Erläuterung der Verzerrungsverfahren wird daher an dieser Stelle verzichtet. Wenngleich das Vorgehen nach Abbildung 2.4(b) für eine Vielzahl an praktischen Problemstellungen eine parameterabhängige Topologie vermeidet, so gibt es dennoch Fälle, für die eine Topologieänderung des FE-Netzes unumgänglich ist. Ein Beispiel hierfür ist eine Anordnung aus zwei Elektroden, deren Abstand zueinander von Null weg parametrisiert ist. Auch können zu große Geometrieänderungen den Einsatz der Netzverzerrungsverfahren mit nur einem Referenz-FE-Netz  $\hat{\mathcal{M}}$  vereiteln.

Diese Arbeit beschränkt sich auf die Problemklasse, für die eine parameterabhängige Netztopologie durch den Einsatz topologieerhaltender Netzverzerrungsverfahren umgangen werden kann, und folglich die Voraussetzung

$$\mathcal{O} = \text{const}(\mathbf{d}_g) \quad (2.76)$$

stets erfüllt ist. Da bei einem Topologiewechsel weder die Position der Freiheitsgrade in den Systemmatrizen noch deren Anzahl als konstant angenommen werden kann, ist es nicht ohne weiteres möglich, das FE-Modell in einer geschlossenen Form entsprechend (2.4) darzustellen.

Die Parameterabhängigkeit des FE-Netzes  $\mathcal{M}(\mathbf{d}_g)$  induziert unter den getroffenen Voraussetzungen parameterabhängige FE-Matrizen

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{d}_g), \quad (2.77a)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{d}_g), \quad (2.77b)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{d}_g). \quad (2.77c)$$

Da sich die geometrischen Parameter entsprechend den Rahmenbedingungen vom Beginn des Abschnitts 2.3.3 nicht auf den Rand  $\Gamma_{WG}$  auswirken, gilt für die Eingangs- bzw. Ausgangsmatrix

$$\mathbf{B} = \text{const}(\mathbf{d}_g). \quad (2.78)$$

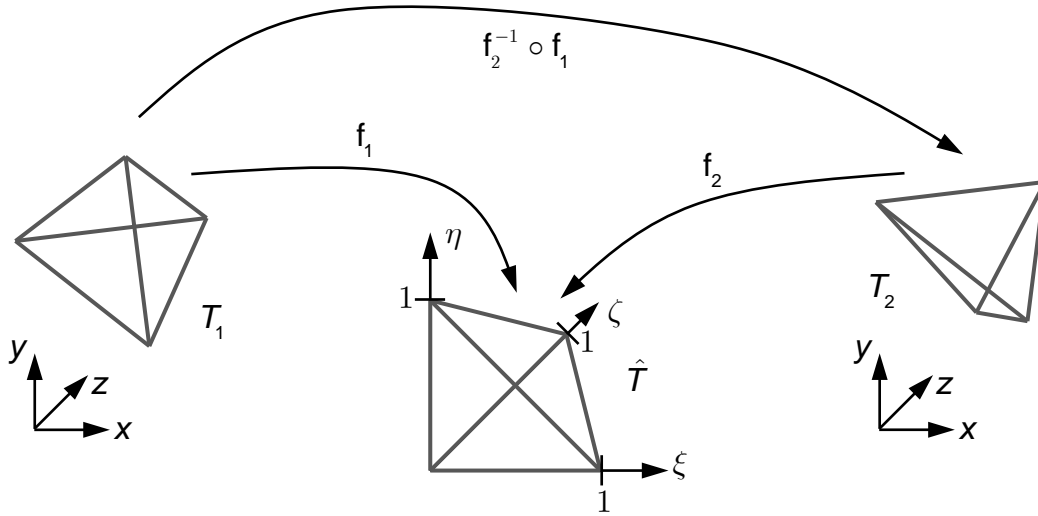


Abbildung 2.5: Tetraeder-Deformation mit affinen Abbildungen.

Im Folgenden wird die Parameterabhängigkeit der Matrizen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{T}$  von  $\mathbf{d}_g$  näher untersucht. Dazu wird exemplarisch ein Tetraeder  $T$  des FE-Netzes  $\mathcal{M}(\mathbf{d}_g)$  betrachtet, der infolge des Übergangs eines Parametervektors  $\mathbf{d}_g^1$  in einen Parametervektor  $\mathbf{d}_g^2 \neq \mathbf{d}_g^1$  eine Änderung erfährt. Die affine Abbildung  $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  beschreibt diese Änderung. Zusätzlich wird ein normierter Referenztetraeder  $\hat{T}$  entsprechend Abbildung 2.5 sowie die auf diesen wirkenden affinen Abbildungen  $f_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  und  $f_2 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$  eingeführt, sodass

$$g = f_2^{-1} \circ f_1 \quad (2.79)$$

gilt. Für das Tetraeder  $T_1$  im Zustand  $\mathbf{d}_g^1$  sind die Element-Matrizen  $\mathbf{S}_{el}$ ,  $\mathbf{F}_{el}$  und  $\mathbf{T}_{el}$  entsprechend (2.39), (2.41) und (2.40) durch

$$[\mathbf{S}_{el}^{(1)}]_{kl} = \int_{T_1} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega, \quad (2.80a)$$

$$[\mathbf{F}_{el}^{(1)}]_{kl} = \int_{T_1} \eta_0 \mathbf{w}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}_l \, d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \eta_0 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_k \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_l \, d\Gamma, \quad (2.80b)$$

$$[\mathbf{T}_{el}^{(1)}]_{kl} = \int_{T_1} \mathbf{w}_k \cdot \epsilon_r \mathbf{w}_l \, d\Omega \quad (2.80c)$$

bestimmt. Analog gilt für  $T^2$  zum Zustand  $\mathbf{d}_g^2$ :

$$[\mathbf{S}_{el}^{(2)}]_{kl} = \int_{T_2} \nabla \times \mathbf{w}_k \cdot \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{w}_l \, d\Omega, \quad (2.81a)$$

$$[\mathbf{F}_{el}^{(2)}]_{kl} = \int_{T_2} \eta_0 \mathbf{w}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{w}_l \, d\Omega + \int_{\Gamma_Z} \eta_0 \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_k \cdot \frac{1}{Z_s} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{w}_l \, d\Gamma, \quad (2.81b)$$

$$[\mathbf{T}_{el}^{(2)}]_{kl} = \int_{T_2} \mathbf{w}_k \cdot \epsilon_r \mathbf{w}_l \, d\Omega. \quad (2.81c)$$

Neben der Transformation der Ansatzfunktionen  $\mathbf{w}_k$  und deren Ableitungen ist insbesondere die Transformation der Flächen- und Volumenelemente  $d\Gamma$  und  $d\Omega$  zur

Beschreibung der Parameterabhängigkeiten in den FE-Matrizen relevant. Die erforderlichen Transformationen werden mit Hilfe der *Jacobi-Matrix*

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

entsprechend [Jin02], [Pet05] durchgeführt. An dieser Stelle wird exemplarisch das Volumenelement betrachtet. Nach [Jin02, S. 302] transformiert sich  $d\Omega$  unter den affinen Abbildungen  $f_1$  und  $f_2$  zu

$$d\Omega^{(1)} = \det \mathbf{J}^{(1)} d\xi d\eta d\zeta \quad (2.83)$$

und

$$d\Omega^{(2)} = \det \mathbf{J}^{(2)} d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.84)$$

Für den Übergang von Tetraeder  $T_1$  in Tetraeder  $T_2$  ist somit das Verhältnis

$$\frac{\det \mathbf{J}^{(1)}}{\det \mathbf{J}^{(2)}} \quad (2.85)$$

maßgeblich, welches anhand folgender Fallunterscheidung weiter analysiert wird.

**Fall 1:** Die affine Abbildung  $g$  ist eine *affine Isometrie* oder eine *Starrkörperbewegung* und als solche längenerhaltend. Nach [Gal01, Kapitel 7.4] lässt sich jede affine Isometrie als Komposition einer Translation und einer linearen Isometrie darstellen. Anhand der Struktur der Jacobi-Matrix (2.82) ist ersichtlich, dass  $\mathbf{J}$  und folglich auch (2.85) invariant unter einer translatorischen Abbildung sind. Die lineare Isometrie wird durch ein Element  $\mathbf{Q}$  aus der Gruppe der orthogonalen Matrizen  $\mathbf{O}(3)$ , für die

$$\mathbf{O}(N) := \left\{ \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \right\} \quad (2.86)$$

gilt, repräsentiert. Damit lassen sich die Jacobi-Matrizen via

$$\mathbf{J}^{(2)} = \mathbf{Q} \mathbf{J}^{(1)}, \quad \mathbf{Q} \in \mathbf{O}(3) \quad (2.87)$$

in Bezug setzen. Für deren Determinanten ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$\det \mathbf{J}^{(2)} = \det \mathbf{Q} \det \mathbf{J}^{(1)} = \pm \det \mathbf{J}^{(1)}. \quad (2.88)$$

Darin gilt das Plus-Zeichen, wenn es sich bei der linearen Isometrie um eine Drehung handelt. Andernfalls liegt eine Spiegelung vor. Hierbei ist anzumerken, dass die Spiegelung eine Änderung der Topologie  $\mathcal{O}$  des FE-Netzes  $\mathcal{M}$  induziert und somit im Rahmen topologieerhaltender Netzverzerrung ausgeschlossen ist.

**Fall 2:** Die affine Abbildung  $g$  beschreibt eine *Koordinatenachsen-Skalierung*. Wird die Abbildung  $g$  durch die Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_z \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

mit den positiven Skalierungen  $\alpha_x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_y \in \mathbb{R}$  und  $\alpha_z \in \mathbb{R}$  dargestellt, so gilt für die Jacobi-Matrizen

$$\mathbf{J}^{(2)} = \mathbf{D}\mathbf{J}^{(1)} \quad (2.90)$$

und deren Determinanten

$$\det \mathbf{J}^{(2)} = \det \mathbf{D} \det \mathbf{J}^{(1)} = \alpha_x \alpha_y \alpha_z \det \mathbf{J}^{(1)}. \quad (2.91)$$

**Fall 3:** Die affine Abbildung  $g$  kann nicht weiter eingeschränkt werden. Es liegt eine *Formänderung* vor. In diesem Fall wird die Abbildung  $g$  durch ein Element  $\mathbf{M}$  aus der linearen Gruppe  $\mathbf{Gl}(3)$ , für die

$$\mathbf{Gl}(N) := \left\{ \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid \det(\mathbf{M}) \neq 0 \right\} \quad (2.92)$$

gilt, dargestellt. Der Ausdruck

$$\mathbf{J}^{(2)} = \mathbf{M}\mathbf{J}^{(1)}, \quad \mathbf{M} \in \mathbf{Gl}(3) \quad (2.93)$$

bzw.

$$\det \mathbf{J}^{(2)} = \det \mathbf{M} \det \mathbf{J}^{(1)}, \quad \mathbf{M} \in \mathbf{Gl}(3) \quad (2.94)$$

kann hierfür im Allgemeinen nicht weiter vereinfacht werden.

Die Parameterabhängigkeit der Element-Matrizen  $\mathbf{S}_{el}(\mathbf{d}_g)$ ,  $\mathbf{F}_{el}(\mathbf{d}_g)$  und  $\mathbf{T}_{el}(\mathbf{d}_g)$  ist also unter Anderem auf die Parameterabhängigkeit der beschriebenen Transformationsmatrizen  $\mathbf{Q}(\mathbf{d}_g)$ ,  $\mathbf{D}(\mathbf{d}_g)$  oder  $\mathbf{M}(\mathbf{d}_g)$  zurückzuführen. Das Volumenelement verhält sich invariant bezüglich auf Drehungen und Translationen basierender Starrkörperbewegungen. Für einfache Achsenskalierungen ergibt sich eine skalare Transformationsvorschrift. Im allgemeinen Fall hingegen sind durch die Determinante der Transformationsmatrix  $\mathbf{M}$  weitaus komplexere funktionale Zusammenhänge zwischen  $\mathbf{d}_g$  und den Element-Matrizen  $\mathbf{S}_{el}(\mathbf{d}_g)$ ,  $\mathbf{F}_{el}(\mathbf{d}_g)$  und  $\mathbf{T}_{el}(\mathbf{d}_g)$  zu berücksichtigen. Zudem werden während des Assemblierungsprozesses Komponenten von Element-Matrizen verschiedener Elemente summiert, was die Komplexität der Zusammenhänge zusätzlich erhöht.

Abschließend können folgende Schlussfolgerungen getroffen werden: Für einen Großteil praxisrelevanter Geometrieparameter ergeben sich komplexe Abhängigkeiten der Systemmatrizen von den geometrischen Parametern. Die explizite Darstellung der Parameterabhängigkeit resultiert durch die Summation der Element-Beiträge während des Assemblierungsprozesses in sehr vielen matrixwertigen Koeffizienten. Sie ist daher unhandlich sowie ungeeignet für die Konstruktion eines effizienten numerischen Verfahrens, das auf dieser Parametrierung direkt operiert. Im Sinne der Parameterklassifikation aus Abschnitt 2.1 schlägt der Autor daher vor, geometrische Parameter als implizit anzunehmen.



### Ableitung der abstrakten Darstellung

Basierend auf den vorangegangenen Überlegungen wird im folgenden Satz das parametrische FE-Modell  $\Sigma_{FE}(f, \mathbf{d}_g, \mathbf{d}_m)$  auf ein Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  der Form (2.4) zurückgeführt.

**Satz 2.3.** *Gegeben ist ein FE-Modell  $\Sigma_{FE}$  einer durch das mathematische Modell aus Abschnitt 2.3.1 beschreibbaren Mikrowellenstruktur nach (2.38) sowie die zugehörigen FE-Matrizen  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{B}$  entsprechend den Definitionen (2.39), (2.40), (2.41) und (2.42). Das FE-Modell sei von der Wellenzahl  $k_0 \in \mathbb{R}$ , den Materialparametern  $\mathbf{d}_m \in \mathcal{D}_m$  und den Geometrieparametern  $\mathbf{d}_g \in \mathcal{D}_g$  abhängig. Der Modellierung liegen folgende Annahmen zugrunde:*

- *An den Wellenleiter-Toren  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  ist die Mikrowellenstruktur mit homogenen Wellenleitern verbunden.*
- *Die Materialeigenschaften  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma_r$  sowie die Oberflächenimpedanz  $Z_S$  sind frequenzunabhängig.*
- *Die Materialeigenschaften  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma_r$  sind an den Wellenleiter-Toren  $\Gamma_{WG}^{i,\xi}$  nicht von den Materialparametern  $\mathbf{d}_m$  abhängig.*
- *Die Abhängigkeit der Materialeigenschaften  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma_r$  von den Materialparametern  $\mathbf{d}_m$  ist polynomiell im Sinne von (2.64) und (2.69).*
- *Die Geometrieparameter  $\mathbf{d}_g$  sind durch ein parametrisches FE-Netz  $\mathcal{M}(\mathbf{d}_g)$  konstanter Topologie beschreibbar.*
- *Die Geometrieparameter  $\mathbf{d}_g$  beeinflussen die Ränder  $\Gamma_Z$  und  $\Gamma_{WG}$  nicht.*

Die von den Parametern  $k_0$ ,  $\mathbf{d}_m$ ,  $\mathbf{d}_g$  abhängige Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}_{FE}(k_0, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_g)$  des FE-Modells  $\Sigma_{FE}(k_0, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_g)$  lässt sich durch Berechnung der Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(k_0, \mathbf{s}, \mathbf{p})$  eines Modells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  der Form (2.4) mit geeigneten Parametervektoren  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$ ,  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  und einer Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbf{Gl}(N_p^v)$  darstellen als

$$\mathbf{H}_{FE}(k_0, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_g) = \mathbf{M}^T(k_0) \mathbf{H}(k_0, \mathbf{s}, \mathbf{p}) \mathbf{M}(k_0). \quad (2.95)$$

*Beweis.* Ausgangspunkt des Beweises ist das in der Wellenzahl parametrisierte FE-Modell nach (2.55):

$$(\mathbf{S} + jk_0 \mathbf{F} - k_0^2 \mathbf{T}) \mathbf{x} = jk_0 \eta_0 \hat{\mathbf{B}} \mathbf{P}(k_0) \mathbf{i}, \quad (2.96a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}(k_0) \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{x}. \quad (2.96b)$$

Dessen Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}_{FE}(k_0) = jk_0 \eta_0 \mathbf{P}(k_0) \hat{\mathbf{B}}^T (\mathbf{S} + jk_0 \mathbf{F} - k_0^2 \mathbf{T})^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{P}(k_0) \quad (2.97)$$

ist durch Lösen eines Ersatz-Modells  $\Sigma'(k_0)$  der Form

$$(\mathbf{S} + jk_0\mathbf{F} - k_0^2\mathbf{T})\mathbf{x}' = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{i}', \quad (2.98a)$$

$$\mathbf{v}' = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{x}' \quad (2.98b)$$

mit zugehöriger Übertragungsmatrix

$$\mathbf{H}'(k_0) = \hat{\mathbf{B}}^T (\mathbf{S} + jk_0\mathbf{F} - k_0^2\mathbf{T})^{-1} \hat{\mathbf{B}} \quad (2.99)$$

darstellbar durch

$$\mathbf{H}_{FE}(k_0) = jk_0\eta_0\mathbf{P}(k_0)\mathbf{H}'(k_0)\mathbf{P}(k_0). \quad (2.100)$$

Mit den Gleichungen der bezüglich der Materialparameter  $\mathbf{d}_m$  polynomiell parametrisierten Systemmatrizen nach (2.66), (2.70a) und (2.70b) folgt für das Ersatz-Modell  $\Sigma'(k_0, \mathbf{d}_m)$ :

$$\left( \left[ \mathbf{S}_0 + \sum_{n=1}^{D_m^\mu} \sum_{p=0}^{P_n^\mu} c_{pn}^\mu ([\mathbf{d}_m^\mu]_n)^p \mathbf{S}_n \right] + jk_0 \left[ \mathbf{F}_0 + \sum_{n=1}^{D_m^\sigma} \sum_{p=0}^{P_n^\sigma} c_{pn}^\sigma ([\mathbf{d}_m^\sigma]_n)^p \mathbf{F}_n \right] - k_0^2 \left[ \mathbf{T}_0 + \sum_{n=1}^{D_m^\epsilon} \sum_{p=0}^{P_n^\epsilon} c_{pn}^\epsilon ([\mathbf{d}_m^\epsilon]_n)^p \mathbf{T}_n \right] \right) \mathbf{x}' = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{i}', \quad (2.101a)$$

$$\mathbf{v}' = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{x}'. \quad (2.101b)$$

Die Berücksichtigung von Geometrieparametern erfolgt entsprechend der Diskussion aus dem vorangegangenen Abschnitt nicht explizit, sondern ausschließlich implizit. Daher gilt für  $\Sigma'_{FE}(k_0, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_g)$ :

$$\left( \left[ \mathbf{S}_0(\mathbf{d}_g) + \sum_{n=1}^{D_m^\mu} \sum_{p=0}^{P_n^\mu} c_{pn}^\mu ([\mathbf{d}_m^\mu]_n)^p \mathbf{S}_n(\mathbf{d}_g) \right] + jk_0 \left[ \mathbf{F}_0(\mathbf{d}_g) + \sum_{n=1}^{D_m^\sigma} \sum_{p=0}^{P_n^\sigma} c_{pn}^\sigma ([\mathbf{d}_m^\sigma]_n)^p \mathbf{F}_n(\mathbf{d}_g) \right] - k_0^2 \left[ \mathbf{T}_0(\mathbf{d}_g) + \sum_{n=1}^{D_m^\epsilon} \sum_{p=0}^{P_n^\epsilon} c_{pn}^\epsilon ([\mathbf{d}_m^\epsilon]_n)^p \mathbf{T}_n(\mathbf{d}_g) \right] \right) \mathbf{x}' = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{i}' \quad (2.102a)$$

$$\mathbf{v}' = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{x}'. \quad (2.102b)$$

Als Nächstes wird der Übergang zu den abstrakten Parametern  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{p}$  vorgenommen. Der Vektor der expliziten Parameter wird als

$$\mathbf{s} := [k_0, \mathbf{d}_m^T]^T = [k_0, (\mathbf{d}_m^\epsilon)^T, (\mathbf{d}_m^\mu)^T, (\mathbf{d}_m^\sigma)^T]^T \quad (2.103)$$

und der Vektor der impliziten Parameter als

$$\mathbf{p} := \mathbf{d}_g \quad (2.104)$$

definiert. Ein Koeffizientenvergleich zwischen (2.102) und (2.4) liefert die Darstellbarkeit von  $\Sigma'_{FE}(k_0, \mathbf{d}_m, \mathbf{d}_g)$  durch  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach (2.95): Für die Systemmatrix  $\mathbf{A}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  in (2.4) gelten die Identifikationen:

$$n = 1 : \quad \theta_1(\mathbf{s}) = 1, \quad \mathbf{A}_1(\mathbf{p}) = \mathbf{S}_0(\mathbf{d}_g), \quad (2.105a)$$

$$n = 2 : \quad \theta_2(\mathbf{s}) = k_0, \quad \mathbf{A}_2(\mathbf{p}) = j\mathbf{F}_0(\mathbf{d}_g), \quad (2.105b)$$

$$n = 3 : \quad \theta_3(\mathbf{s}) = k_0^2, \quad \mathbf{A}_3(\mathbf{p}) = -\mathbf{T}_0(\mathbf{d}_g), \quad (2.105c)$$

$$n \in \{4, \dots, D_m^\mu + 3\} :$$

$$\theta_n(\mathbf{s}) = \sum_{p=0}^{P_{n-3}^\mu} c_{p(n-3)}^\mu ([\mathbf{d}_m^\mu]_{n-3})^p, \quad \mathbf{A}_n = \mathbf{S}_{n-3}(\mathbf{d}_g), \quad (2.105d)$$

$$n \in \{D_m^\mu + 4, \dots, D_m^\mu + D_m^\sigma + 3\} :$$

$$\theta_n(\mathbf{s}) = k_0 \sum_{p=0}^{P_{n-D_m^\sigma-3}^\mu} c_{p(n-D_m^\mu-3)}^\sigma ([\mathbf{d}_m^\sigma]_{n-D_m^\mu-3})^p, \quad \mathbf{A}_n = j\mathbf{F}_{n-D_m^\mu-3}(\mathbf{d}_g), \quad (2.105e)$$

$$n \in \{D_m^\mu + D_m^\sigma + 4, \dots, D_m^\mu + D_m^\sigma + D_m^\epsilon + 3\} :$$

$$\theta_n(\mathbf{s}) = k_0^2 \sum_{p=0}^{P_{n-D_m^\mu-D_m^\sigma-3}^\mu} c_{p(n-D_m^\mu-D_m^\sigma-3)}^\sigma ([\mathbf{d}_m^\sigma]_{n-D_m^\mu-D_m^\sigma-3})^p, \quad (2.105f)$$

$$\mathbf{A}_n = -\mathbf{T}_{n-D_m^\mu-D_m^\sigma-3}(\mathbf{d}_g).$$

Für die Eingangsmatrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  in (2.4) gilt:

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad (2.106a)$$

$$J = K = 1, \quad (2.106b)$$

$$\theta_1 = 1, \quad (2.106c)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{C}_1 = \hat{\mathbf{B}}. \quad (2.106d)$$

Außerdem folgt für  $\mathbf{M}(k_0)$  die Darstellung

$$\mathbf{M}(k_0) = \sqrt{jk_0\eta_0} \mathbf{P}(k_0). \quad (2.107)$$

□

## 2.4 Abstrakte Struktur der parametrischen reduzierten Modelle

Das in Abschnitt 2.2 eingeführte Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  ermöglicht zwar die Beschreibung der zugrunde liegenden physikalischen Struktur auf Systemebene in Abhängigkeit der Designparameter  $\mathbf{s}$  und  $\mathbf{p}$ , dennoch verhindert in vielen Fällen die hohe Anzahl an Freiheitsgraden und der damit verbundene Rechenaufwand den unmittelbaren Einsatz

solcher Modelle während des Designprozesses. Als Lösungsansatz schlägt der Autor die Konstruktion eines parametrischen reduzierten Modells vor, welches von erheblich geringerer Dimension ist, dadurch schnell ausgewertet werden kann, und innerhalb eines vorgegebenen Parameterbereiches die Übertragungsmatrix des Ausgangsmodells mit einem hohen Maß an Genauigkeit approximiert. In diesem Unterkapitel wird das parametrische reduzierte Modell formal eingeführt. Dessen Konstruktion ist Gegenstand von Kapitel 4 sowie Kapitel 5.

**Definition 2.9** (Parametrisches reduziertes Modell). *Das auf dem parametrischen Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3 basierende parametrische reduzierte Modell  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  weist die Struktur*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p}) \right) \mathbf{u}, \quad (2.108a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{C}}_k(\mathbf{p}) \right)^T \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \quad (2.108b)$$

auf. Darin enthaltenen sind die reduzierten matrixwertigen Koeffizienten  $\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{n \times p}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_k(\mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{n \times q}$ , der reduzierte Lösungsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^n$ , der Eingangsvektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$  sowie der Ausgangsvektor  $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^q$ .

**Korollar 2.5.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.9 lautet*

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{C}}_k(\mathbf{p}) \right)^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p}) \right). \quad (2.109)$$

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (2.108a) nach dem reduzierten Lösungsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und Einsetzen in (2.108b) folgt unmittelbar die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ .  $\square$

**Definition 2.10** (Transponiertes parametrisches reduziertes Modell). *Das zu  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.9 gehörige transponierte parametrische reduzierte Modell  $\tilde{\Sigma}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  lautet*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{A}}_i^T(\mathbf{p}) \right) \tilde{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{C}}_k(\mathbf{p}) \right) \mathbf{u}' \quad (2.110a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p}) \right)^T \tilde{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (2.110b)$$

Darin sind  $\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}_k(\mathbf{p})$  die reduzierten matrixwertigen Koeffizienten von  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  aus Definition 2.9,  $\tilde{\mathbf{x}}' \in \mathbb{C}^n$  der reduzierte Lösungsvektor,  $\mathbf{u}' \in \mathbb{C}^q$  der Eingangsvektor sowie  $\tilde{\mathbf{y}}' \in \mathbb{C}^p$  der Ausgangsvektor.

**Satz 2.4.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des transponierten parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.10 ist die Transponierte der Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.9:*

$$\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{H}}^T(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (2.111)$$

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (2.110a) nach dem reduzierten Lösungsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und Einsetzen in (2.110b) folgt die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ . Ein Vergleich mit Korollar 2.5 liefert die Behauptung.  $\square$

Damit das parametrische reduzierte Modell  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  deutlich schneller auszuwerten ist als das Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ , ist  $n \ll N$  erforderlich.

### 2.4.1 Affin parametrisierte reduzierte Modelle

Analog zu den affin parametrisierten Ausgangsmodellen führt die folgende Definition *affin parametrisierte reduzierte Modelle*  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  formal ein:

**Definition 2.11** (Affin parametrisiertes reduziertes Modell). *Das auf dem affin parametrisierten Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s})$  nach (2.9) basierende, affin parametrisierte reduzierte Modell  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  weist die Struktur*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{A}}_i \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{B}}_j \right) \mathbf{u}, \quad (2.112a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{C}}_k \right)^T \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}) \quad (2.112b)$$

auf. Darin enthalten sind die reduzierten matrixwertigen Koeffizienten  $\tilde{\mathbf{A}}_i \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_j \in \mathbb{C}^{n \times p}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_k \in \mathbb{C}^{n \times q}$ , der reduzierte Lösungsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^n$ , der Eingangsvektor  $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$  und der Ausgangsvektor  $\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^q$ .

**Korollar 2.6.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  des affin parametrisierten reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.11 ist durch*

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{C}}_k \right)^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{A}}_i \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{B}}_j \right) \quad (2.113)$$

bestimmt.

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (2.112a) nach dem reduzierten Lösungsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s})$  und Einsetzen in (2.112b) folgt unmittelbar die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s})$ .  $\square$

### 2.4.2 Polynomiell parametrisierte reduzierte Modelle

*Polynomiell parametrisierte reduzierte Modelle* genügen folgender Definition:

**Definition 2.12** (Polynomiell parametrisiertes reduziertes Modell). *Ein in den expliziten Parametern  $\mathbf{s} \in \mathcal{Q}$  polynomiell parametrisiertes reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  ist durch Einschränkung des affin parametrisierten reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.11 auf Funktionen  $\theta_i$  nach (2.12) gegeben.*

**Korollar 2.7.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}^{\mathbb{P}}(\mathbf{s}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  des polynomiell parametrisierten reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.12 ist durch (2.113) bestimmt.*

## 2.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst eine Klassifikation von Designparametern eingeführt. Es wurde zwischen solchen Parametern, die explizit in den Modellgleichungen auftauchen und solchen, die darin nur implizit enthalten sind, unterschieden. Darauf aufbauend wurde die abstrakte Struktur von Ausgangsmodellen, die den weiteren Betrachtungen zugrunde liegen, definiert. Es wurde gezeigt, unter welchen Rahmenbedingungen parametrische FE-Modelle von Mikrowellenstrukturen durch Ausgangsmodelle dieser Struktur beschrieben werden können. Als Parameter wurden hierbei die Frequenz sowie Material- und Geometrieparameter betrachtet. Abschließend wurde die Form parametrischer reduzierter Modelle eingeführt.

# Kapitel 3

## Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Modelle

### 3.1 Einleitung

Gegenstand des vorliegenden Kapitels sind projektionsbasierte Ordnungsreduktionsverfahren [WSW06], mit denen affin parametrisierte Ausgangsmodelle in strukturgleiche reduzierte Modelle überführt werden können. Bewerkstelligt wird dies durch Projektion des affin parametrisierten Ausgangsmodells in einen geeigneten Unterraum. Dabei sind folgende Anforderungen an den Unterraum zu stellen: Zum einen ist eine niedrige Dimension erforderlich, sodass reduzierte Modelle schnell auszuwerten sind. Zum anderen ist zu gewährleisten, dass das Übertragungsverhalten des reduzierten Modells innerhalb eines vorgegebenen Parameterbereiches jenes des Ausgangsmodells hinreichend gut annähert.

Grundsätzlich ist eine Klassifikation projektionsbasierter Ordnungsreduktionsverfahren anhand der Art, wie die Konstruktion der Unterräume erfolgt, als *Einpunktverfahren* (EP-Verfahren) oder *Mehrpunktverfahren* (MP-Verfahren) möglich. Bei Einpunktverfahren wird in einem Entwicklungspunkt die Übertragungsmatrix des Ausgangsmodells sowie deren Ableitungen mit denen des reduzierten Modells bis zu einer vorgegebenen Ordnung zur Übereinstimmung gebracht. Ordnungsreduktionsverfahren mit dieser Eigenschaft werden als *momentenabgleichend* bezeichnet. Entscheidend für die Qualität des reduzierten Modells ist neben der Wahl des Entwicklungspunktes eine numerisch robuste Berechnung der die Unterräume repräsentierenden Basen. Dies trifft insbesondere dann zu, wenn weite Parameterbereiche abzudecken sind und somit eine hohe Ordnung der abzugleichenden Ableitungen erforderlich ist. Siehe hierzu [BS05], [SL06], [SLL03] oder [FDE10]. Einpunktverfahren sind besonders in Kombination mit auf Matrix-Faktorisierungen beruhenden direkten Lösern attraktiv. Sobald die Faktorisierung der Systemmatrix des Ausgangsmodells im Entwicklungspunkt zur Verfügung steht, genügen Matrix-Vektor-Multiplikationen sowie Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen

zur Erzeugung der Basen [Far07].

Im Gegensatz zu Einpunktverfahren sind Mehrpunktverfahren momentenabgleichend an einer Menge von Entwicklungspunkten. Dabei erweisen sich Mehrpunktverfahren niedrigster Ordnung [Gri97] als numerisch besonders robust. Bei diesen setzen sich die Unterräume ausschließlich aus Lösungsvektoren des Ausgangssystems an den Entwicklungspunkten zusammen. Zur Bestimmung einer geeigneten Verteilung der Entwicklungspunkte bieten sich adaptive Strategien, wie in [SFDE09] oder [KV10] dargelegt, an. Neben dem hohen Grad an Robustheit führen Mehrpunktverfahren häufig auf besonders niedrigdimensionale Unterräume [Sch13].

Die Methoden dieses Kapitels dienen als Grundlage zur Entwicklung des Rahmenwerkes in Kapitel 4 sowie der Verfahren aus Kapitel 5 für Ausgangsmodelle mit beliebiger Parametrierung. In Abschnitt 3.2 werden die Unterräume zur Konstruktion affin parametrisierter reduzierter Modelle zunächst formal eingeführt. Die Erzeugung der Unterräume im Rahmen einer Klasse momentenabgleichender Einpunktverfahren ist Gegenstand von Abschnitt 3.3. In Abschnitt 3.4 wird eine Klasse von Mehrpunktverfahren beleuchtet.

## 3.2 Unterräume

Projektionsbasierte Ordnungsreduktionsverfahren für affin parametrisierte Ausgangsmodelle konstruieren ausgehend von  $\Sigma(\mathbf{s})$  nach Definition 2.7 ein affin parametrisiertes reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  entsprechend Definition 2.11. Dies geschieht entweder durch Restriktion des Lösungsvektors  $\mathbf{x}(\mathbf{s})$  des Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s})$  auf den Unterraum  $\mathcal{V}$  und Testen des Gleichungssystems mit einer Basis  $\mathbf{W}$  des Unterraumes  $\mathcal{W}$  im Sinne der *Petrov-Galerkin-Methode* [Ant05, S. 279] oder alternativ durch Restriktion des Lösungsvektors  $\mathbf{x}'(\mathbf{s})$  des transponierten Ausgangsmodells  $\Sigma'(\mathbf{s})$  auf den Unterraum  $\mathcal{W}$  und Testen mit einer Basis  $\mathbf{V}$  des Unterraumes  $\mathcal{V}$ . Der mathematische Rahmen zur formalen Einführung der Unterräume  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  wird im Folgenden mittels geeigneter *Matrix-Mannigfaltigkeiten* [AMS08, Kapitel 3] konstruiert.

**Definition 3.1** (Stiefel-Mannigfaltigkeit). *Die Menge der reellen  $N \times n$  Matrizen mit Spaltenrang  $n$ , wobei  $N \geq n$  gilt, wird durch die Stiefel-Mannigfaltigkeit*

$$\mathbf{St}(N, n) = \left\{ \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{N \times n} \mid \text{rank}(\mathbf{M}) = n \right\} \quad (3.1)$$

*repräsentiert.*

**Definition 3.2** (Grassmann-Mannigfaltigkeit). *Die Menge der  $n$ -dimensionalen linearen Unterräume des  $\mathbb{R}^N$  wird durch die Grassmann-Mannigfaltigkeit  $\mathbf{Gr}(N, n)$  repräsentiert.*

Die Grassmann-Mannigfaltigkeit  $\mathbf{Gr}(N, n)$  kann mit Hilfe der Stiefel-Mannigfaltigkeit  $\mathbf{St}(N, n)$  dargestellt werden. Dazu wird eine Äquivalenzrelation mit zwei Elementen  $\mathbf{U} \in \mathbf{St}(N, n)$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbf{St}(N, n)$  der Stiefel-Mannigfaltigkeit entsprechend

$$\mathbf{U} \sim \mathbf{V} \Leftrightarrow \text{range}(\mathbf{U}) = \text{range}(\mathbf{V}) \quad (3.2)$$



eingeführt. Diese definiert die Äquivalenzklasse

$$[\mathbf{V}] = \{ \mathbf{VM} \mid \mathbf{M} \in \mathbf{Gl}(N), \mathbf{V} \in \mathbf{St}(N, n) \}. \quad (3.3)$$

Somit entspricht ein Element  $\mathcal{V}$  der Grassmann-Mannigfaltigkeit  $\mathbf{Gr}(n, N)$  genau einer Äquivalenzklasse  $[\mathbf{V}]$  und es gilt

$$\mathbf{Gr}(N, n) = \{ [\mathbf{V}] \mid \mathbf{V} \in \mathbf{St}(N, n) \}. \quad (3.4)$$

Unter Verwendung der Stiefel- und Grassmann-Mannigfaltigkeiten führt Definition 3.3 die im Rahmen der Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Modelle benötigten Unterräume ein. Darauf aufbauend ist für die Matrizen des reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  Definition 3.4 maßgeblich. Für die Lösungsvektoren des affin parametrisierten Ausgangsmodells und des reduzierten Modells folgt damit der in Korollar 3.1 hergestellte Zusammenhang.

**Definition 3.3** (Lösungsunterräume). *Die Unterräume zur Konstruktion affin parametrisierter reduzierter Modelle lauten*

$$\mathcal{V} \in \mathbf{Gr}(N, n), \quad (3.5a)$$

$$\mathcal{W} \in \mathbf{Gr}(N, n). \quad (3.5b)$$

Mit den zugehörigen Basen

$$\mathbf{V} \in \mathbf{St}(N, n), \quad (3.6a)$$

$$\mathbf{W} \in \mathbf{St}(N, n) \quad (3.6b)$$

gelten die Zusammenhänge

$$\mathcal{V} = \text{range}(\mathbf{V}), \quad (3.7a)$$

$$\mathcal{W} = \text{range}(\mathbf{W}). \quad (3.7b)$$

**Definition 3.4.** *Die reduzierten Matrizen  $\tilde{\mathbf{A}}_i$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_j$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_k$  des affin parametrisierten reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.11 werden mit den Basen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  nach Definition 3.3 als*

$$\tilde{\mathbf{A}}_i = \mathbf{W}^T \mathbf{A}_i \mathbf{V}, \quad (3.8a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_j = \mathbf{W}^T \mathbf{B}_j, \quad (3.8b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_k = \mathbf{V}^T \mathbf{C}_k \quad (3.8c)$$

definiert.

**Korollar 3.1.** *Unter Verwendung der reduzierten Matrizen nach Definition 3.4 gelten für die Lösungsvektoren die Näherungen*

$$\mathbf{x}(\mathbf{s}) \approx \mathbf{x}_{\mathcal{V}}(\mathbf{s}) = \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}), \quad (3.9a)$$

$$\mathbf{x}'(\mathbf{s}) \approx \mathbf{x}'_{\mathcal{W}}(\mathbf{s}) = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}). \quad (3.9b)$$

Darin bezeichnen  $\mathbf{x}_{\mathcal{V}}(\mathbf{s})$  und  $\mathbf{x}'_{\mathcal{W}}(\mathbf{s})$  die auf die Unterräume  $\mathcal{V}$  bzw.  $\mathcal{W}$  restringierten Lösungsvektoren des Ausgangsmodells.

Die Qualität des reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  mit Bezug auf dessen Übertragungsverhalten ist maßgeblich von den Unterräumen  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  abhängig. In den folgenden beiden Abschnitten werden Methoden für eine geeignete Konstruktion von  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  vorgeschlagen.

### 3.3 Eine Klasse von Einpunktverfahren

Momentenabgleichende Einpunktverfahren setzen eine polynomielle Modellstruktur entsprechend Definition 2.8 voraus. Unter Verwendung von Multi-Indices  $\alpha$  mit den Konventionen

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_Q), \quad \alpha_i \geq 0, \quad (3.10a)$$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^Q \alpha_i, \quad (3.10b)$$

$$\alpha! = \prod_{i=1}^Q \alpha_i!, \quad (3.10c)$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial s_1^{\alpha_1} \dots \partial s_Q^{\alpha_Q}}, \quad (3.10d)$$

$$\mathbf{s}^\alpha = \prod_{i=1}^Q s_i^{\alpha_i} \quad (3.10e)$$

werden die Funktionen  $\theta_i(\mathbf{s})$  in (2.12) als

$$\theta_i(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^\alpha \quad (3.11)$$

konkretisiert. Damit lässt sich das Modell  $\Sigma^{\mathbb{P}}(\mathbf{p})$  durch

$$\left( \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{s}^\alpha \mathbf{A}_\alpha \right) \mathbf{x}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq M_J} \mathbf{s}^\beta \mathbf{B}_\beta \right) \mathbf{u}, \quad (3.12a)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{|\gamma|=0}^{|\gamma| \leq M_K} \mathbf{s}^\gamma \mathbf{C}_\gamma \right)^T \mathbf{x}(\mathbf{s}) \quad (3.12b)$$

darstellen. Die folgenden Definitionen 3.5 und 3.7 führen momentenabgleichende Näherungsverfahren allgemein ein. Definition 3.7 definiert anschließend eine Klasse von Einpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren.

**Definition 3.5** (Momente). *Die Momente  $\mathbf{H}_\alpha$  einer Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s})$  werden durch deren Entwicklung in eine Taylor-Reihe*

$$\mathbf{H}(\mathbf{s}) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha \mathbf{H}(\mathbf{s}) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}_0} (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \mathbf{H}_\alpha (\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) \quad (3.13)$$

um den Entwicklungspunkt  $\mathbf{s}_0$  eingeführt.

### 3.3. Eine Klasse von Einpunktverfahren

**Definition 3.6** (Momentenabgleichendes Näherungsverfahren). *Ein Näherungsverfahren, welches die Übertragungsmatrix  $\mathbf{H}(\mathbf{s})$  durch  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s})$  approximiert, wird genau dann als momentenabgleichend der Ordnung  $m$  bezeichnet, wenn die Momente nach Definition 3.5 von  $\mathbf{H}(\mathbf{s})$  mit denen von  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s})$  für  $|\alpha| \leq m$  im Entwicklungspunkt  $\mathbf{s}_0$  übereinstimmen.*

**Definition 3.7** (Einpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren). *Ein Einpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren konstruiert ein reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.12 mit den in Definition 3.4 eingeführten reduzierten Matrizen auf Basis des Ausgangsmodells  $\Sigma^{\mathbb{P}}(\mathbf{s})$  nach Definition 2.8 unter Einsatz der Unterräume*

$$\mathcal{V} \supseteq \text{span} \left\{ \bigcup_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq q} \mathbf{X}_{\beta} \mid \mathbf{X}_{\beta} := \mathbf{A}_0^{-1} \left( \mathbf{B}_{\beta} - \sum_{|\alpha|=1}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{A}_{\alpha} \mathbf{X}_{\beta-\alpha} \right) \right\}, \quad (3.14a)$$

$$\mathcal{W} \supseteq \text{span} \left\{ \bigcup_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq p} \mathbf{Z}_{\beta} \mid \mathbf{Z}_{\beta} := \mathbf{A}_0^{-T} \left( \mathbf{C}_{\beta} - \sum_{|\alpha|=1}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{A}_{\alpha}^T \mathbf{Z}_{\beta-\alpha} \right) \right\}, \quad (3.14b)$$

wobei für die Basen

$$\mathbf{W}^T \mathbf{A}_0 \mathbf{V} \in \mathbf{Gl}(n) \quad (3.15)$$

gilt.

**Satz 3.1.** *Ein Einpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren gemäß Definition 3.7 ist momentenabgleichend der Ordnung  $p+q+1$  im Sinne von Definition 3.6 mit Entwicklungspunkt  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ .*

*Beweis.* Siehe [FDE10] oder [Far07]. □

**Korollar 3.2.** *Ein Ordnungsreduktionsverfahren nach Definition 3.7 ist für symmetrische Modelle entsprechend Definition 2.6 für die Wahl*

$$\mathcal{V} = \mathcal{W} \quad (3.16)$$

sowie

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \quad (3.17)$$

mit  $\mathcal{V}$  oder  $\mathcal{W}$  nach (3.14a) bzw. (3.14b) momentenabgleichend der Ordnung

$$2p+1 = 2q+1. \quad (3.18)$$

*Beweis.* Siehe [Far07]. □

Die Rekursionen (3.14a) und (3.14b) zur Bestimmung der Unterräume verdeutlichen, warum Verfahren dieser Art als Einpunktverfahren bezeichnet werden. Die Wirkung der inversen Systemmatrix wird ausschließlich im Entwicklungspunkt  $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$  benötigt. Ein von  $\mathbf{0}$  verschiedener Entwicklungspunkt  $\mathbf{s}_0 \neq \mathbf{0}$  kann mittels der Transformation

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{s} - \mathbf{s}_0 \quad (3.19)$$

und Betrachten des Modells  $\Sigma^{\mathbb{P}}(\hat{\mathbf{s}})$  berücksichtigt werden.

Einpunktverfahren, welche die Basen  $\mathbf{V}$  und  $\mathbf{W}$  entsprechend der in den Definitionen (3.14a) sowie (3.14b) gegebenen Rekursionen direkt berechnen, sind Gegenstand der Publikationen [GKN02], [DSC<sup>+</sup>06] und werden als *explizit momentenabgleichend* bezeichnet. Diese haben sich allerdings als numerisch nicht robust erwiesen [Far07]. Infolgedessen können für praktischen Anwendungen nur wenige Momente abgeglichen werden. *Implizit momentenabgleichende* Methoden hingegen, wie [Cod05], [SLL03] oder [FDE10] weisen eine höhere numerische Robustheit auf. Dabei wird ausgenutzt, dass die Unterräume  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{W}$  nach Definition 3.7 die Struktur von *Krylov-Räumen* aufweisen, für die Verfahren zur stabilen Konstruktion von Basen existieren.

### 3.4 Eine Klasse von Mehrpunktverfahren

Mehrpunktverfahren konstruieren die Unterräume nach Definition 3.3 unter Verwendung einer Menge

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{s}_l \mid l \in \{1, \dots, L\} \right\} \quad (3.20)$$

an Entwicklungspunkten. Definition 3.8 führt eine Klasse von Mehrpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren niedrigster Ordnung ein. Eine Verallgemeinerung zur Berücksichtigung von Momenten höherer Ordnung in den Entwicklungspunkten  $\mathbf{s}_l$  wird in den Arbeiten [SLL02], [SCNZ94] sowie [Far07] dargelegt.

**Definition 3.8** (Mehrpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren). *Ein Mehrpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren niedrigster Ordnung konstruiert ausgehend von einem polynomiell parametrisierten Ausgangsmodell  $\Sigma^{\mathbb{P}}$  nach Definition 2.8 ein reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}^{\mathbb{P}}$  nach Definition 2.12 mit den in Definition 3.4 eingeführten reduzierten Matrizen unter Einsatz der Unterräume*

$$\mathcal{V} \supseteq \text{span} \left\{ \left( \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{s}^\alpha \mathbf{A}_\alpha \right)^{-1} \left( \sum_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq M_J} \mathbf{s}^\beta \mathbf{B}_\beta \right) \mid \mathbf{s} \in \mathcal{S} \right\}, \quad (3.21a)$$

$$\mathcal{W} \supseteq \text{span} \left\{ \left( \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{s}^\alpha \mathbf{A}_\alpha \right)^{-T} \left( \sum_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq M_K} \mathbf{s}^\beta \mathbf{C}_\beta \right) \mid \mathbf{s} \in \mathcal{S} \right\}, \quad (3.21b)$$

wobei für die Basen

$$\sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{s}_l^\alpha \mathbf{W}^T \mathbf{A}_\alpha \mathbf{V} \in \mathbf{Gl}(n) \quad (3.22)$$

gilt.

**Satz 3.2.** *Ein Mehrpunkt-Ordnungsreduktionsverfahren gemäß Definition 3.8 ist in den Entwicklungspunkten  $\mathbf{s}_l \in \mathcal{S}$  momentenabgleichend der Ordnung 1.*

*Beweis.* Es gilt

$$\mathcal{V} = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{V}_l, \quad (3.23a)$$

$$\mathcal{W} = \bigcup_{l=1}^L \mathcal{W}_l \quad (3.23b)$$

mit

$$\mathcal{V}_l \supseteq \text{span} \left\{ \left( \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{s}^\alpha \mathbf{A}_\alpha \right)^{-1} \left( \sum_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq M_J} \mathbf{s}^\beta \mathbf{B}_\beta \right) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}_l} \right\}, \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{W}_l \supseteq \text{span} \left\{ \left( \sum_{|\alpha|=0}^{|\alpha| \leq M_I} \mathbf{s}^\alpha \mathbf{A}_\alpha \right)^{-T} \left( \sum_{|\beta|=0}^{|\beta| \leq M_K} \mathbf{s}^\beta \mathbf{C}_\beta \right) \Big|_{\mathbf{s}=\mathbf{s}_l} \right\}. \quad (3.24b)$$

Durch die Transformation

$$\hat{\mathbf{s}} := \mathbf{s} - \mathbf{s}_l \quad (3.25)$$

kann der  $l$ -te Entwicklungspunkt in den Nullpunkt verschoben werden. Durch diese Verschiebung sind die Teilunterräume  $\mathcal{V}_l$  und  $\mathcal{W}_l$  vom Typ (3.14a) und (3.14b) mit  $p = q = 0$ , womit die Behauptung folgt.  $\square$

## 3.5 Zusammenfassung

In dem abgehandelten Kapitel wurden Verfahren zur projektionsbasierten Modellordnungsreduktion für affin parametrisierte Ausgangsmodelle vorgestellt. Es wurden sowohl momentenabgleichende Einpunktverfahren als auch Mehrpunktverfahren besprochen. Implizite Designparameter können mit diesen Verfahren nicht ohne weiteres berücksichtigt werden.



# Kapitel 4

## Rahmenwerk zur parametrischen Modellordnungsreduktion für affin und nicht-affin parametrisierte Modelle

### 4.1 Einleitung und Konzeption

In dem vorliegenden Kapitel wird ein neuartiges Rahmenwerk zur Erzeugung von parametrischen reduzierten Modellen nach Abschnitt 2.4 aus Ausgangsmodellen entsprechend Definition 2.3 entwickelt. Mit Hilfe des Rahmenwerkes ist es möglich, sowohl explizite Parameter, wie Frequenz oder Materialparameter, als auch implizite Parameter, beispielsweise geometrische Parameter, effizient zu berücksichtigen. Dabei wird eine Klassifikation der Designparameter, wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, vorausgesetzt. Es werden somit die Methoden aus Kapitel 3 für affin parametrisierte Modelle um eine Problemklasse mit hoher praktischer Relevanz erweitert. Dieses sowie das folgende Kapitel stellen den methodischen Kern der Dissertation dar. Das Rahmenwerk wird dabei bewusst sehr allgemein formuliert, um so als Basis zur Entwicklung konkreter Ordnungsreduktionsverfahren zu dienen. Beispiele für konkrete Algorithmen werden in Kapitel 5 vorgestellt.

Dem parametrischen Ordnungsreduktions-Rahmenwerk liegt folgende Konzeption zugrunde: Zunächst wird in Abschnitt 4.2 eine Technik zur Rekonstruktion einer vollständig affinen Parametrisierung der sowohl von expliziten als auch von impliziten Parametern abhängigen Matrizen des Ausgangsmodells nach [DEF09] oder [FBDE11] dargelegt. Mit diesem Ansatz wird das Ausgangsmodell in eine für projektionsbasierte Ordnungsreduktionsverfahren geeignete Form gebracht. Die *affine Parameterrekonstruktion* bedient sich dabei üblicher Interpolationsmethoden [Dav75] basierend auf Instanziierungen des Ausgangsmodells an Punkten im Raum der impliziten Parameter. Obwohl aus der

Literatur speziell für geometrische Parameter Verfahren bekannt sind, mit denen eine explizite Parametrierung analytisch und damit frei von zusätzlichen Interpolationsfehlern erzeugt werden kann, siehe hierzu die Arbeiten [RHP08], [PS10] sowie [BBG<sup>+</sup>11], bietet der Rekonstruktionsansatz eine Reihe von Vorteilen: Wo die Verfahren, die auf einer analytischen Extraktion der geometrischen Parameter beruhen, tiefgreifende Eingriffe in den Kern des Diskretisierungsverfahrens notwendig machen, bietet der Rekonstruktionsansatz in vielen Fällen die Möglichkeit, das Diskretisierungsverfahren komplett vom Ordnungsreduktionsprozess zu entkoppeln. Somit können Standard-Diskretisierungsalgorithmen zur Erzeugung der für die Ordnungsreduktion notwendigen Daten herangezogen werden, ohne dass eine Anpassung derselben erforderlich ist. Davon abgesehen führen geometrische Parameter unter Verwendung der analytischen Ansätze oftmals auf eine sehr hohe Anzahl an matrixwertigen Koeffizienten, selbst für wenige geometrische Parameter [PS10]. Obwohl das Problem für einfache Strukturänderungen, wie die in Abschnitt 2.3.3 diskutierten Achsen-Skalierungen, beherrschbar bleibt [BBG<sup>+</sup>11], limitiert es doch die generische Anwendbarkeit des Verfahrens. Des Weiteren lässt sich der durch den Interpolationsansatz hervorgerufene Modellfehler durch Wahl eines geeigneten Interpolationsverfahrens sehr gut kontrollieren. Falls erforderlich kann der Modellfehler soweit reduziert werden, dass dieser sich unterhalb des durch das Diskretisierungsverfahren hervorgerufenen Fehlers bewegt und somit den Gesamtfehler nur marginal beeinflusst.

Die zweite Komponente des Rahmenwerkes besteht aus der Konstruktion von den impliziten Parametern abhängigen Unterräumen, in die das Ausgangsmodell projiziert wird. Dies ist Gegenstand von Abschnitt 4.3. Ausgangspunkt hierfür ist die Beobachtung in Satz 2.2: Das sowohl von impliziten als auch von expliziten Parametern abhängige Ausgangsmodell nach Definition 2.3 weist an diskreten Punkten im Raum der impliziten Parameter formal die Struktur eines affin parametrisierten Ausgangsmodelles nach Definition 2.7 auf. Somit können an diesen Punkten die in Kapitel 3 vorgestellten Ordnungsreduktionsmethoden für affin parametrisierte Modelle Anwendung finden, um Instanziierungen von niedrigdimensionalen Unterräumen zu erzeugen. Die Parameterabhängigkeit der Unterräume wird darauf aufbauend mittels eines speziellen Interpolationsverfahrens dargestellt. Es wird gezeigt, dass eine einfache Interpolation der Unterräume an den Instanzierungspunkten repräsentierenden Basen zu keinem zufriedenstellenden Ergebnis führt. Stattdessen schlägt der Autor vor, orthogonale Projektionen auf die instanziierten Unterräume zu interpolieren. Dieser Ansatz wurde erstmals in [BFDE12a] und [BFDE12b] vorgestellt. Im Gegensatz zu Verfahren, die einen globalen und konstanten Unterraum aufbauen, wie beispielsweise [DEF09] oder [LK05], führt der hier verwendete Ansatz aufgrund des durch die Parameterabhängigkeit des Unterraumes höheren Grades an Lokalisierung auf reduzierte Modelle erheblich geringerer Dimension. Dieser ist zudem unabhängig von der Dimension des Raums der impliziten Parameter, wodurch die Auswertungsgeschwindigkeit der reduzierten Modelle nahezu ideal mit der Anzahl der impliziten Parameter skaliert.

Eine abschließende Diskussion des Rahmenwerkes mit Hinblick auf Interpolationseigenschaften der reduzierten Modelle sowie dem numerische Aufwand zur Modellerzeugung und -auswertung findet sich in Abschnitt 4.5.2.



### 4.1.1 Stand der Forschung

Der vorliegende Abschnitt gibt einen Überblick über den Stand der Forschung im Bereich der parametrischen Modellordnungsreduktion und ordnet die Verfahren dieser Dissertation ein. Die dem Autor bekannten PMOR-Ansätze lassen sich in eine der folgenden Kategorien einordnen:

#### Auf Störungsrechnung basierende Verfahren

Unter den ersten Ansätzen zur PMOR befinden sich Methoden, die bekannte Verfahren der univariaten Modellordnungsreduktion mit Techniken aus der Störungsrechnung [SS90] erweitern, um so Einflüsse weiterer Designparameter zu modellieren. In [LPS99] werden *Krylov-Unterraumverfahren* betrachtet und in [HP01] *balanciertes Abschneiden* [RP99]. Da die Ansätze von kleinen Änderungen in den Designparametern ausgehen, sind sie für breitbandige Charakterisierungen ungeeignet.

#### Verfahren zur Interpolation von Übertragungsmatrizen affin parametrierter reduzierter Modelle

Eine Möglichkeit zur Erzeugung einer über dem gesamten Designparameterraum gültigen Übertragungsmatrix besteht darin, affin parametrisierte reduzierte Modelle mittels klassischer Modellordnungsreduktionsverfahren an Instanziierungspunkten im Raum der impliziten Parameter zu generieren und deren, von affinen Parametern abhängige Übertragungsmatrix über dem Raum der impliziten Parameter zu interpolieren. Diese Herangehensweise wird in [BB09] und [BBG<sup>+</sup>11] für balanciertes Abschneiden verfolgt.

#### Projektionsbasierte Verfahren mit konstantem Unterraum

Projektionsbasierte Verfahren mit konstantem Unterraum erzeugen einen über dem gesamten Raum der Designparameter parameterunabhängigen Unterraum, in den das numerische Ausgangsmodell projiziert wird. Durch den Projektionsansatz wird ein parametrisches reduziertes Modell generiert, welches die gleiche Parametrierung wie das Ausgangsmodell aufweist. Damit das parametrische reduzierte Modell effizient auszuwerten ist, muss die Dimension des Unterraumes und damit des reduzierten Modells erheblich kleiner sein als die des Ausgangsmodells. In [FDE10] wird ein momentenabgleichender Ansatz für affin parametrisierte Modelle vorgestellt. Implizite Parameter sind Gegenstand der Arbeiten [DEF09], [FBDE11] und [BBG<sup>+</sup>11]. Die Autoren von [WPV10] und [WV11] hingegen verwenden den auf balanciertem Abschneiden beruhenden Projektionsansatz aus [WPV09]. Ein weiterer Ansatz mit der Bezeichnung *Poor Man's Truncated Balanced Realization* (PMTBR) wird in [Phi04] vorgestellt. Dabei handelt es sich um ein Mehrpunktverfahren, gefolgt von einer *Singulärwert-Zerlegung* (SVD) [GV96, S. 69ff]. Ein weiteres, auf SVD basierendes Verfahren ist Gegenstand der Publikation [LK05].

Die genannten Verfahren eignen sich sehr gut für Ausgangsmodelle mit wenigen Parametern, allerdings steigt die Dimension des Unterraumes sehr schnell mit der

Anzahl der Designparameter an. Entsprechend nimmt die Auswertungsgeschwindigkeit der parametrischen reduzierten Modelle mit steigender Parameteranzahl stark ab. Die Ursache für dieses grundlegende Problem liegt darin begründet, dass der konstante Unterraum über keinerlei Lokalisierung verfügt.

### **Verfahren zur Interpolation affin parametrierter reduzierter Modelle**

Diese Kategorie beinhaltet alle Verfahren, die Instanziierungen von affin parametrisierten reduzierten Modellen im Raum der impliziten Parameter superponieren, um ein vollständig parametrisiertes Modell reduzierter Dimension zu erzeugen. In diesem Kontext sind die Arbeiten von [LE09] und [PMEL10] zu nennen. Die Autoren bedienen sich einer Zustandstransformation, um die Modell-Instanziierungen in einen für den Superpositionsschritt kompatiblen Zustand zu versetzen. Ein weiterer interessanter Ansatz ist in [ACCF09] beschrieben. Darin wird vorgeschlagen, die systemrelevanten reduzierten Matrizen in den Tangentialraum geeigneter Matrix-Mannigfaltigkeiten zu projizieren und auf diesen Mannigfaltigkeiten entlang der impliziten Parameter zu interpolieren. Die interpolierten Matrizen werden anschließend wieder in die ursprüngliche Matrix-Mannigfaltigkeit abgebildet. Mit den derart interpolierten reduzierten Matrizen wird ein interpoliertes reduziertes Modell aufgebaut. Durch diese Vorgehensweise können spezielle Eigenschaften der Matrizen, wie beispielsweise Definitheit, während der Interpolation erhalten werden. Generell haben Methoden dieser Kategorie den Vorteil, dass die Dimension der reduzierten Modelle nicht mit der Anzahl an impliziten Parametern ansteigt, und somit eine sehr schnelle Modellauswertung gewährleistet ist.

### **Projektionsbasierte Verfahren mit parameterabhängigem Unterraum**

Von den impliziten Parametern abhängige Unterräume bieten die Möglichkeit, ein parametrisches reduziertes Modell aus einem numerischen Ausgangsmodell durch Projektion zu erzeugen. Im Gegensatz zu Verfahren, die einen konstanten Unterraum verwenden, ist die Dimension des reduzierten Modells auch für viele implizite Parameter niedrig und unabhängig von deren Anzahl. Die Herausforderung bei Verfahren dieser Art besteht darin, eine gültige und ebenso effiziente Beschreibung der parameterabhängigen Unterräume, bzw. deren Basen abzuleiten. Die Ansätze aus [AF08] und [Son13] führen dazu eine Interpolation der Unterräume entlang der impliziten Parameter auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten [AMS04], [EAS98] durch. Das Verfahren aus [BFDE13] verwendet Zustandstransformationen ähnlich denen in [LE09] zur Konstruktion parameterabhängiger Basen.

Die Ansätze der vorliegenden Dissertation sind ebenfalls in der Kategorie der projektionsbasierten Verfahren mit parameterabhängigem Unterraum angesiedelt. Entsprechend der Konzeption aus Abschnitt 4.1 basiert die Darstellung der parameterabhängigen Unterräume auf der Interpolation von orthogonalen Projektionen.

## 4.2 Rekonstruktion einer affinen Parametrierung

Ausgangspunkt ist das von den expliziten Parametern  $\mathbf{s}$  und den impliziten Parametern  $\mathbf{p}$  abhängige Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3. Die implizite Parameterabhängigkeit der Teilmatrizen  $\mathbf{A}_i(\mathbf{p})$  wird im Rahmen der affinen Parameterrekonstruktion durch die explizite Darstellung

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) := \sum_{l=1}^L \Gamma_l(\mathbf{p}) \mathbf{A}_{i,l} \quad (4.1)$$

mit matrixwertigen Koeffizienten  $\mathbf{A}_{i,l} \in \mathbb{C}^{N \times N}$  und Interpolationsfunktionen  $\Gamma_l : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$  angenähert. Damit lässt sich unmittelbar ein *interpoliertes Modell*  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  entsprechend der folgenden Definition darstellen:

**Definition 4.1** (Interpoliertes Modell). *Ein durch affine Parameterrekonstruktion aus dem Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3 entstandenes Modell  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  wird interpoliertes Modell genannt. Es hat die Struktur*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \right) \check{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \mathbf{u}, \quad (4.2a)$$

$$\check{\mathbf{y}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \check{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (4.2b)$$

Darin sind, zusätzlich zu den in Definition 2.3 eingeführten Größen,  $\check{\mathbf{x}} \in \mathbb{C}^N$  der Lösungsvektor sowie  $\check{\mathbf{y}} \in \mathbb{C}^q$  der Ausgangsvektor des interpolierten Modells. Für  $\check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p})$  gelten die Näherungen gemäß (4.1).

**Korollar 4.1.** *Die Übertragungsmatrix  $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}^{q \times p}$  des interpolierten Modells  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 4.1 ist durch*

$$\check{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \right)^{-1} \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \quad (4.3)$$

bestimmt.

*Beweisskizze.* Durch Auflösen von (4.2a) nach dem Lösungsvektor  $\check{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und Einsetzen in (4.2b) folgt unmittelbar die Übertragungsmatrix  $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ .  $\square$

**Definition 4.2** (Transponiertes interpoliertes Modell). *Das zu  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 4.1 transponierte interpolierte Modell  $\check{\Sigma}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  hat die Form*

$$\left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \check{\mathbf{A}}_i^T(\mathbf{p}) \right) \check{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right) \mathbf{u} \quad (4.4a)$$

$$\check{\mathbf{y}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right)^T \check{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (4.4b)$$

Darin sind, zusätzlich zu den in Definition 4.1 eingeführten Größen,  $\check{\mathbf{x}}' \in \mathbb{C}^N$  der Lösungsvektor sowie  $\check{\mathbf{y}}' \in \mathbb{C}^q$  der Ausgangsvektor des transponierten interpolierten Modells.

Die matrixwertigen Koeffizienten  $\mathbf{A}_{i,l}$  der affinen Parameterrekonstruktion (4.1) können nach Wahl geeigneter Interpolationsfunktionen  $\Gamma_l$  durch Instanziierungen

$$\mathbb{M}_I := \{\Sigma_1(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{p}}_1), \dots, \Sigma_{M_I}(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{p}}_{M_I})\} \quad (4.5)$$

des Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  an Punkten  $\hat{\mathbf{p}}_k$  einer Menge

$$\mathbb{I} = \{\hat{\mathbf{p}}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{M_I}\} \quad (4.6)$$

von Instanziierungspunkten bestimmt werden. Konkrete Algorithmen sind Gegenstand von Kapitel 5. Der numerische Aufwand sowohl zur Erzeugung parametrischer reduzierter Modelle als auch zum Auswerten derselben ist maßgeblich von den Interpolationsfunktionen  $\Gamma_l$  abhängig. Dies wird unter anderem in Abschnitt 4.5.2 thematisiert.

### 4.3 Parameterabhängige Unterräume

Das vorgeschlagene Ordnungsreduktions-Rahmenwerk konstruiert ausgehend vom interpolierten Modell  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  unter Verwendung von bezüglich der impliziten Parameter  $\mathbf{p}$  abhängigen Unterräumen  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  ein vollständig parametrisiertes reduziertes Modell  $\check{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ . Dazu wird der Lösungsvektor  $\check{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  von  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  auf den Unterraum  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  restringiert und mit einer Basis  $\mathbf{W}(\mathbf{p})$  des Unterraums  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  getestet. Das gleiche Ergebnis kann durch Restriktion des Lösungsvektors  $\check{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des transponierten interpolierten Modells  $\check{\Sigma}'(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  auf den Unterraum  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  und Testen mit einer Basis  $\mathbf{V}(\mathbf{p})$  des Unterraums  $\mathcal{V}$  erzielt werden.

Unter Berücksichtigung der in Abschnitt 3.2 behandelten Stiefel- und Grassmann-Mannigfaltigkeiten führen die folgenden beiden Definitionen parameterabhängige Unterräume ein und konkretisieren die in  $\check{\tilde{\Sigma}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  enthaltenen reduzierte Matrizen.

#### 4.4. Erzeugung parameterabhängiger Unterräume

---

**Definition 4.3** (Parameterabhängige Lösungsunterräume). *Die von den impliziten Parametern  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  abhängigen Unterräume zur Konstruktion eines parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.9 sind über die Abbildungen*

$$\mathcal{V} : \mathcal{P} \mapsto \mathbf{Gr}(N, n), \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{W} : \mathcal{P} \mapsto \mathbf{Gr}(N, n) \quad (4.7b)$$

definiert. Mit den die zugehörigen Basen erzeugenden Funktionen

$$\mathbf{V} : \mathcal{P} \mapsto \mathbf{St}(N, n), \quad (4.8a)$$

$$\mathbf{W} : \mathcal{P} \mapsto \mathbf{St}(N, n) \quad (4.8b)$$

gelten die Zusammenhänge

$$\mathcal{V}(\mathbf{p}) = \text{range}(\mathbf{V}(\mathbf{p})), \quad (4.9a)$$

$$\mathcal{W}(\mathbf{p}) = \text{range}(\mathbf{W}(\mathbf{p})). \quad (4.9b)$$

**Definition 4.4.** *Die reduzierten Matrizen  $\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p})$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p})$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_i(\mathbf{p})$  des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.9 werden mit den Basen  $\mathbf{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathbf{W}(\mathbf{p})$  nach Definition 4.3 sowie den Matrizen  $\check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p})$ ,  $\mathbf{B}_j$  und  $\mathbf{C}_k$  des interpolierten Modells  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 4.1 als*

$$\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{W}(\mathbf{p})^T \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}), \quad (4.10a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_j(\mathbf{p}) = \mathbf{W}(\mathbf{p})^T \mathbf{B}_j, \quad (4.10b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_i(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T \mathbf{C}_k \quad (4.10c)$$

definiert.

**Korollar 4.2.** *Unter Verwendung der reduzierten Matrizen nach Definition 4.4 gelten für die Lösungsvektoren die Näherungen*

$$\check{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{x}}_{\mathcal{V}(\mathbf{p})}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \quad (4.11a)$$

$$\check{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{x}}'_{\mathcal{W}(\mathbf{p})}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \mathbf{W}(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{x}}'(\mathbf{s}, \mathbf{p}). \quad (4.11b)$$

Darin bezeichnen  $\check{\mathbf{x}}_{\mathcal{V}(\mathbf{p})}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und  $\check{\mathbf{x}}'_{\mathcal{W}(\mathbf{p})}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  die auf die Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  bzw.  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  restringierten Lösungsvektoren des interpolierten Modells.

Die Qualität des reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  mit Bezug auf dessen Übertragungsverhalten ist maßgeblich von den Unterräumen  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  abhängig.

## 4.4 Erzeugung parameterabhängiger Unterräume

Nachdem im letzten Abschnitt parameterabhängige Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  formal eingeführt wurden, beschäftigen sich die kommenden Betrachtungen mit deren

Konstruktion. Von zentraler Bedeutung ist hierfür die Aussage von Satz 2.2: Durch Instanziierung eines beliebig parametrisierten Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  an einem Punkt  $\hat{\mathbf{p}}_k$  im Raum  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter ergibt sich formal ein affin parametrisiertes Modell  $\hat{\Sigma}_k(\mathbf{s})$ . Für dieses lassen sich mit Hilfe der Methoden aus Kapitel 3 geeignete Unterräume sowie die zugehörigen Basen nach Definition 3.3 bestimmen. An einer Menge von  $M_J$  Entwicklungspunkten

$$\mathbb{J} = \{\hat{\mathbf{p}}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_{M_J}\} \quad (4.12)$$

erlauben die Modellinstanziierungen

$$\mathbb{M}_J = \{\hat{\Sigma}_1(\mathbf{s}), \dots, \hat{\Sigma}_{M_J}(\mathbf{s})\} \quad (4.13)$$

daher die Berechnung der Datenmengen

$$\mathbb{V} = \{\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_{M_J}\}, \quad (4.14a)$$

$$\mathbb{W} = \{\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_{M_J}\} \quad (4.14b)$$

sowie die Menge der reduzierten Modelle

$$\tilde{\mathbb{M}} = \{\tilde{\Sigma}_1(\mathbf{s}), \dots, \tilde{\Sigma}_{M_J}(\mathbf{s})\}. \quad (4.15)$$

Die Datenmengen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  dienen als Ausgangspunkt für die Entwicklung eines Verfahrens zur Darstellung der parameterabhängigen Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$ .

#### 4.4.1 Versagensmechanismus bei direkter Interpolation der Basen

Ein naheliegender Lösungsansatz könnte darin bestehen, die Basen in den Datenmengen nach (4.14) mittels Interpolationsfunktionen  $\Omega_m : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$  entsprechend

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J} \Omega_m(\mathbf{p}) \mathbf{V}_m, \quad (4.16a)$$

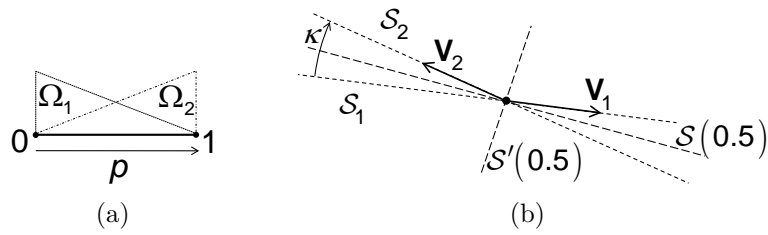
$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J} \Omega_m(\mathbf{p}) \mathbf{W}_m \quad (4.16b)$$

zu interpolieren. Dass eine derartige Vorgehensweise nicht zielführend ist, wird mit Hilfe eines einfachen Beispiels veranschaulicht.

**Beispiel 4.1.** Gegeben ist ein eindimensionaler Raum  $\mathcal{P} = [0, 1]$  der impliziten Parameter  $p \in \mathcal{P}$ . Punkte an den Intervallgrenzen von  $\mathcal{P}$  definieren die Menge  $\mathbb{J} = \{0, 1\}$ . Die Interpolationsfunktionen  $\Omega_m$  sind lineare Funktionen entsprechend

$$\Omega_1 = (1 - p), \quad (4.17a)$$

$$\Omega_2 = p. \quad (4.17b)$$



**Abbildung 4.1:** Beispiel zur direkten Interpolation von Basen. (a) Punktmenge  $\mathbb{J}$  sowie lineare Interpolationsfunktionen  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$ . (b) Konfiguration der Unterräume  $\mathcal{S}$  und Basen  $\mathbf{V}$ .

Sowohl der Parameterraum  $\mathcal{P}$  als auch die Interpolationsfunktionen sind schematisch in Abbildung 4.1(a) dargestellt. Ferner sei die Menge  $\mathbb{V} = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$  durch die Basen

$$\mathbf{V}_1 = [1, 0]^T, \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{V}_2 = [-\cos \kappa, \sin \kappa]^T \quad (4.18b)$$

bestimmt. Die zugehörigen Unterräume  $\mathcal{S}_1 = \text{range}(\mathbf{V}_1)$  und  $\mathcal{S}_2 = \text{range}(\mathbf{V}_2)$  sind durch die Konstruktion (4.18) um den Winkel  $\kappa$  gegeneinander ausgelenkt. Dabei wird von einer kleinen Auslenkung ausgegangen, für die  $\kappa \in [0, \frac{\pi}{2})$  gilt. Ein parameterabhängiger Unterraum  $\mathcal{S}(p)$ , der sich kontinuierlich von  $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}(0)$  nach  $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}(1)$  bewegt sei durch

$$\mathcal{S}(p) = \text{range} \left( p \begin{bmatrix} -\cos \kappa \\ \sin \kappa \end{bmatrix} + (1-p) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.19)$$

gegeben. Die Situation ist schematisch in Abbildung 4.1(b) veranschaulicht. Eine Interpolation nach (4.16a) liefert die Näherung  $\mathcal{S}'(p)$  für  $\mathcal{S}(p)$  der Form

$$\mathcal{S}'(p) = \text{range} \left( p \begin{bmatrix} -\cos \kappa \\ \sin \kappa \end{bmatrix} + (1-p) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (4.20)$$

Auswerten von  $\mathcal{S}'(p)$  sowie  $\mathcal{S}(p)$  in der Mitte des Parameterraumes  $\mathcal{P}$  führt auf zwei orthogonale Unterräume

$$\mathcal{S}'(0.5) = \mathcal{S}^\perp(0.5). \quad (4.21)$$

Der interpolierte Unterraum  $\mathcal{S}'(0.5)$  befindet sich außerhalb des durch  $\mathcal{S}(0)$  und  $\mathcal{S}(1)$  aufgespannten Bereichs, siehe Abbildung 4.1(b). Damit versagt die Interpolation (4.16a) in ihrem Zweck, eine aussagekräftige Basis  $\mathbf{V}(p)$  zu konstruieren.

Zusammenfassend lässt sich der Versagensmechanismus darauf zurückführen, dass die Basisvektoren in den Projektionsmatrizen  $\mathbf{V}_m$  und  $\mathbf{W}_m$  im Allgemeinen weder gegeneinander ausgerichtet sind noch einer Sortierung unterliegen, wodurch eine direkte Interpolation der Basen nach (4.16) gerechtfertigt wäre.

## 4.4.2 Vorgeschlagener Lösungsansatz

Der Autor schlägt zur Darstellung parameterabhängiger Basen und Unterräume einen Lösungsansatz vor, der auf multilinearer Interpolation von orthogonalen Projektoren beruht. Der Ansatz wird im Folgenden abgeleitet.

### Ableitung eines geeigneten Interpolationsansatzes

Zunächst wird der Einfluss der Basen auf das Übertragungsverhalten reduzierter Modelle untersucht.

**Definition 4.5** (Modell-Äquivalenz). *Zwei affin parametrisierte reduzierte Modelle  $\tilde{\Sigma}^{(1)}(\mathbf{s})$  und  $\tilde{\Sigma}^{(2)}(\mathbf{s})$  sind genau dann äquivalent, wenn deren Übertragungsmatrizen  $\tilde{\mathbf{H}}^{(1)}(\mathbf{s})$  und  $\tilde{\mathbf{H}}^{(2)}(\mathbf{s})$  nach Korollar 2.6 gleich sind. Es gilt die Äquivalenzrelation*

$$\tilde{\Sigma}^{(1)}(\mathbf{s}) \sim \tilde{\Sigma}^{(2)}(\mathbf{s}) \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{(1)}(\mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{H}}^{(2)}(\mathbf{s}), \quad (4.22)$$

welche die Modell-Äquivalenzklasse

$$[\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})] \quad (4.23)$$

definiert.

**Satz 4.1.** *Gegeben ist ein affin parametrisiertes reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}_k(\mathbf{s})$  aus der Menge  $\tilde{\mathbb{M}}$  der reduzierten Modelle nach (4.15). Das Modell  $\tilde{\Sigma}_k(\mathbf{s})$  ist invariant unter den Basistransformationen*

$$\mathbf{V}_k \mapsto \mathbf{V}_k \mathbf{G}_k^V, \quad \mathbf{G}_k^V \in \mathbf{GI}(N), \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{W}_k \mapsto \mathbf{W}_k \mathbf{G}_k^W, \quad \mathbf{G}_k^W \in \mathbf{GI}(N). \quad (4.24b)$$

Die Transformationen  $\mathbf{G}^V$  und  $\mathbf{G}^W$  induzieren somit eine Äquivalenzklasse nach Definition 4.5.

*Beweis.* Für ein affin parametrisiertes reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  gilt die Darstellung

$$\mathbf{W}^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}) = \mathbf{W}^T \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \mathbf{u}, \quad (4.25a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \mathbf{V} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}). \quad (4.25b)$$

Unter den Basistransformationen (4.24) folgt das Modell

$$(\mathbf{G}^W)^T \mathbf{W}^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{V} \mathbf{G}^V \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}) = (\mathbf{G}^W)^T \mathbf{W}^T \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right) \mathbf{u}, \quad (4.26a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}) = \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \mathbf{V} \mathbf{G}^V \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}). \quad (4.26b)$$



Dessen Übertragungsmatrix ist nach Definition 2.5 von der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{s}) &= \left( \sum_{k=1}^K \theta_k(\mathbf{s}) \mathbf{C}_k \right)^T \mathbf{V} \mathbf{G}^V \left( (\mathbf{G}^W)^T \mathbf{W}^T \left( \sum_{i=1}^I \theta_i(\mathbf{s}) \mathbf{A}_i \right) \mathbf{V} \mathbf{G}^V \right)^{-1} \\ &\quad \times (\mathbf{G}^W)^T \mathbf{W}^T \left( \sum_{j=1}^J \theta_j(\mathbf{s}) \mathbf{B}_j \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Da nach (4.24)

$$\det \mathbf{G}^V \neq 0, \quad (4.28a)$$

$$\det \mathbf{G}^W \neq 0 \quad (4.28b)$$

gilt, folgt mit der Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s})$  des nicht transformierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s})$  gemäß Korollar 2.6 die Behauptung

$$\tilde{\mathbf{H}}'(\mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}). \quad (4.29)$$

□

Nach Satz 4.1 ist die konkrete Wahl der Basis für das Übertragungsverhalten eines reduzierten Modells irrelevant. Einzig die Unterräume sind von Bedeutung. Daher ist es für ein Verfahren zur Darstellung parameterabhängiger Basen und Unterräume nicht erforderlich, direkt auf den Datenmengen  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  nach (4.14) zu operieren. Stattdessen ist eine Interpolation der Form

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J} \Omega_m^V(\mathbf{p}) \mathbf{V}_m \mathbf{G}_m^V, \quad (4.30a)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J} \Omega_m^W(\mathbf{p}) \mathbf{W}_m \mathbf{G}_m^W, \quad (4.30b)$$

mit Interpolationsfunktionen

$$\Omega_m^V : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}, \quad (4.31a)$$

$$\Omega_m^W : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \quad (4.31b)$$

zulässig, welche auf den modifizierten Datenmengen

$$\mathbb{V}' := \{ \mathbf{V}_1 \mathbf{G}_1^V, \dots, \mathbf{V}_{M_J} \mathbf{G}_{M_J}^V \}, \quad (4.32a)$$

$$\mathbb{W}' := \{ \mathbf{W}_1 \mathbf{G}_1^W, \dots, \mathbf{W}_{M_J} \mathbf{G}_{M_J}^W \} \quad (4.32b)$$

aufbaut. Durch die Transformationsmatrizen  $\mathbf{G}_k^V \in \mathbf{Gl}(N)$  und  $\mathbf{G}_k^W \in \mathbf{Gl}(N)$  sind zusätzliche Freiheitsgrade gegeben, mit deren Hilfe der in Abschnitt 4.4.1 erläuterten Problematik begegnet werden kann.

### Bestimmung der Basis-Transformationen

Die Basis-Transformationen  $\mathbf{G}_k^V$  und  $\mathbf{G}_k^W$  werden in diesem Abschnitt derart bestimmt, dass (4.30) als Interpolation orthogonaler Projektionen einer gemeinsamen Basis  $\mathbf{V}_c \in \mathbf{St}(N, n)$  bzw.  $\mathbf{W}_c \in \mathbf{St}(N, n)$  auf die Unterräume

$$\mathcal{V}_k = \text{range}(\mathbf{V}_k), \quad (4.33a)$$

$$\mathcal{W}_k = \text{range}(\mathbf{W}_k) \quad (4.33b)$$

mit  $k \in \{1, \dots, M_J\}$  interpretiert werden kann. Dazu werden zunächst der auf den Unterraum  $\mathcal{S}$  abbildende orthogonale Projektionsoperator  $\xi_{\mathcal{S}}$  sowie ein Skalierungsoperator  $\theta$  eingeführt. Der Zweck von  $\theta$  besteht darin, die Längen der Basisvektoren nach Anwendung des Projektionsoperators  $\xi$  zu normieren. Es gelten folgende Definitionen:

**Definition 4.6** (Orthogonaler Projektionsoperator). *Der vom Unterraum  $\mathcal{V} \in \mathbf{Gr}(N, n)$  auf  $\mathcal{S} \in \mathbf{Gr}(N, n)$  abbildende, orthogonale Projektionsoperator*

$$\xi_{\mathcal{S}} : \mathbf{St}(N, n) \mapsto \mathbb{R}^{N \times n} \quad (4.34)$$

ist mit den Basen

$$\mathbf{V} \in \mathbf{St}(N, n), \quad \mathcal{V} = \text{range}(\mathbf{V}), \quad (4.35a)$$

$$\mathbf{S} \in \mathbf{St}(N, n), \quad \mathcal{S} = \text{range}(\mathbf{S}) \quad (4.35b)$$

als

$$\xi_{\mathcal{S}}(\mathbf{V}) := \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{V} \quad (4.36)$$

gegeben.

**Definition 4.7** (Skalierungsoperator). *Der Skalierungsoperator*

$$\theta : \mathbf{St}(N, n) \mapsto \mathbf{St}(N, n) \quad (4.37)$$

ist mit Hilfe der diagonalen Skalierungsmatrix  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  durch

$$\mathbf{M} = [\mathbf{m}_1 | \dots | \mathbf{m}_n] \in \mathbf{St}(N, n), \quad (4.38a)$$

$$[\mathbf{D}]_{i,i} = \frac{1}{\|\mathbf{m}_i\|_2}, \quad (4.38b)$$

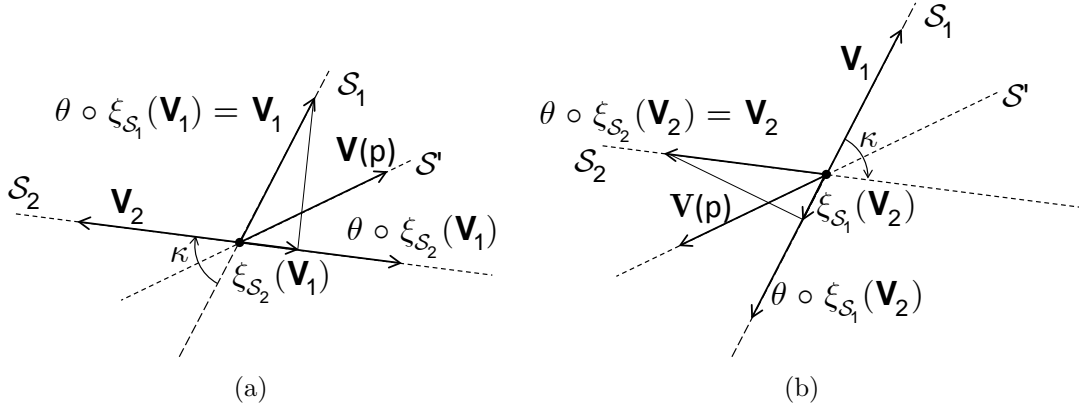
$$\theta(\mathbf{M}) := \mathbf{M} \mathbf{D} \quad (4.38c)$$

definiert.

**Definition 4.8** (Darstellung der Lösungsunterräume). *Eine auf orthogonalen Projektionen basierende Darstellung der von den impliziten Parametern  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  abhängigen Basen  $\mathbf{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathbf{W}(\mathbf{p})$  ist unter Verwendung des orthogonalen Projektionsoperators  $\xi_{\mathcal{S}}$  nach Definition 4.6 sowie des Skalierungsoperators  $\theta$  gemäß Definition 4.7 durch*

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J} \Omega_m^V(\mathbf{p}) \theta \circ \xi_{\mathcal{V}_m}(\mathbf{V}_c), \quad (4.39a)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J} \Omega_m^W(\mathbf{p}) \theta \circ \xi_{\mathcal{W}_m}(\mathbf{W}_c) \quad (4.39b)$$



**Abbildung 4.2:** Veranschaulichung der auf orthogonalen Projektionen basierenden Darstellung von parameterabhängigen Unterräumen. (a)  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_1$ . (b)  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_2$ .

mit den Startbasen

$$\mathbf{V}_c \in \mathbf{St}(N, n), \quad (4.40a)$$

$$\mathbf{W}_c \in \mathbf{St}(N, n) \quad (4.40b)$$

und den Interpolationsfunktionen

$$\Omega_m^V : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}, \quad (4.41a)$$

$$\Omega_m^V(\hat{\mathbf{p}}_k) = \delta_{mk}, \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{J}, \quad (4.41b)$$

$$\Omega_m^W : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}, \quad (4.41c)$$

$$\Omega_m^W(\hat{\mathbf{p}}_k) = \delta_{mk}, \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{J} \quad (4.41d)$$

gegeben. In (4.41) bezeichnet  $\delta_{mk}$  das Kronecker-Delta. Damit es zu keinem Rangabfall in (4.39) kommt, ist

$$\xi_{\mathcal{V}_i}(\mathbf{V}_c) \in \mathbf{St}(N, n) \quad \forall i \in \{1, \dots, M_J\}, \quad (4.42a)$$

$$\xi_{\mathcal{W}_i}(\mathbf{W}_c) \in \mathbf{St}(N, n) \quad \forall i \in \{1, \dots, M_J\} \quad (4.42b)$$

sicherzustellen.

Für eine konkrete Wahl der Startbasen  $\mathbf{V}_c$  und  $\mathbf{W}_c$  in Definition 4.8 bietet sich

$$\mathbf{V}_c \in \mathbb{V}, \quad (4.43a)$$

$$\mathbf{W}_c \in \mathbb{W} \quad (4.43b)$$

an, sofern dadurch (4.42) erfüllt ist. Eine grafische Interpretation der auf orthogonalen Projektionen basierenden Interpolation ist in Abbildung 4.2 für  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_1$  und  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_2$  gegeben. Für beide Startbasen  $\mathbf{V}_c$  ergibt sich der gleiche interpolierte Unterraum  $\mathcal{S}'$ .

**Korollar 4.3.** Für die Transformationsmatrizen  $\mathbf{G}_i^V$  und  $\mathbf{G}_i^W$  aus (4.30) gelten unter Verwendung der auf orthogonalen Projektionen basierenden Darstellung der von den

impliziten Parametern  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  abhängigen Basen  $\mathbf{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathbf{W}(\mathbf{p})$  nach Definition 4.8 die Gleichungen

$$\mathbf{G}_i^V = (\mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_i)^{-1} \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{i,c}^V, \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{G}_i^W = (\mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i)^{-1} \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_c \mathbf{D}_{i,c}^W, \quad (4.44b)$$

mit

$$[\mathbf{D}_{i,c}^V]_{i,i} = \frac{1}{\|(\mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_i)^{-1} \mathbf{V}_i^T \mathbf{V}_c \mathbf{e}_i\|_2}, \quad (4.45a)$$

$$[\mathbf{D}_{i,c}^W]_{i,i} = \frac{1}{\|(\mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i)^{-1} \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_c \mathbf{e}_i\|_2}. \quad (4.45b)$$

*Beweisskizze.* Durch Koeffizientenvergleich von (4.39) mit (4.30) und Ausnutzen der Definitionen 4.6 sowie 4.7.  $\square$

Für das Beispiel aus Abschnitt 4.4.1 ergibt sich unter Verwendung der parameterabhängigen Basen nach (4.39) mit  $\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_1$  der Unterraum

$$\mathcal{S}'(p) = \text{range} \left\{ (1-p) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + p \begin{bmatrix} \cos \kappa^2 \\ -\sin \kappa \cos \kappa \end{bmatrix} \frac{1}{\|[\cos \kappa^2, -\sin \kappa \cos \kappa]^T\|_2} \right\} \quad (4.46)$$

und es gilt  $\mathcal{S}'(0.5) = \mathcal{S}(0.5)$ .

## 4.5 Diskussion des Rahmenwerkes

Auf den folgenden Seiten findet eine Diskussion des vorgeschlagenen Ordnungsreduktions-Rahmenwerkes zur Erzeugung parameterabhängiger reduzierter Modelle  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  mit Hinblick auf die Interpolationseigenschaften von  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  sowie den numerischen Aufwand zur Modellerzeugung und -auswertung statt.

### 4.5.1 Interpolationseigenschaften

**Lemma 4.1.** *Ist die affine Parameterrekonstruktion nach (4.1) interpolierend in dem Sinne, dass*

$$\check{\mathbf{A}}_i(\hat{\mathbf{p}}_k) = \mathbf{A}_i(\hat{\mathbf{p}}_k), \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{I} \quad (4.47)$$

*gilt, so ist die Übertragungsfunktion  $\check{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  des interpolierten Modells  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  an Punkten  $\hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{I}$  mit der des Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  identisch.*

*Beweisskizze.* Durch Einsetzen von (4.47) in Definition 4.1 und Vergleich mit Definition 2.3.  $\square$

**Lemma 4.2.** *Die auf orthogonalen Projektionen basierende Interpolation der Unterräume gemäß Definition 4.8 weist unter Verwendung von Interpolationsfunktionen nach (4.41) die Interpolationseigenschaften*

$$\mathcal{V}(\hat{\mathbf{p}}_k) = \text{range}(\mathbf{V}(\hat{\mathbf{p}}_k)) = \text{range}(\mathbf{V}_k) = \mathcal{V}_k, \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{J}, \quad (4.48a)$$

$$\mathcal{W}(\hat{\mathbf{p}}_k) = \text{range}(\mathbf{W}(\hat{\mathbf{p}}_k)) = \text{range}(\mathbf{W}_k) = \mathcal{W}_k, \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{J} \quad (4.48b)$$

auf.

*Beweisskizze.* Durch Ausnutzen von (4.41) in (4.39) mit Startbasen nach (4.42) folgt die Behauptung.  $\square$

**Satz 4.2.** *Gilt unter Verwendung gleicher Mengen an Interpolationspunkten*

$$\mathbb{I} \equiv \mathbb{J} \quad (4.49)$$

für die Darstellung der parameterabhängigen Basen die Interpolationseigenschaften der Unterräume nach Lemma 4.2 und ist die affine Parameterrekonstruktion interpolierend gemäß Lemma 4.1, so folgt für die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}_k)$  des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  die Interpolationseigenschaft

$$\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{p}}_k) = \tilde{\mathbf{H}}_k(\mathbf{s}), \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{J}. \quad (4.50)$$

Darin ist  $\tilde{\mathbf{H}}_k(\mathbf{s})$  die Übertragungsmatrix des reduzierten affin parametrisierten Modells  $\tilde{\Sigma}_k(\mathbf{s})$  der Menge  $\tilde{\mathbb{M}}$  nach (4.15).

## 4.5.2 Numerischer Aufwand

Der im Rahmen eines parametrischen Ordnungsreduktionsprozesses auftretende numerische Aufwand kann grob unterteilt werden in den Teil, der zur Erzeugung der parametrischen reduzierten Modelle erforderlich ist und in jenen, der für die Modellauswertung erforderlich ist. Dabei ist je nach Anwendungsfall die Relevanz der beiden Teile für den numerischen Gesamtaufwand unterschiedlich zu bewerten. Ist beispielsweise mit einer besonders hohen Anzahl an Modellauswertungen zu rechnen, so kann es sich lohnen, mehr Aufwand in die Modellgenerierung zu investieren mit dem Ziel, ein schneller auswertbares reduziertes Modell zu erhalten.

Grundsätzlich sind zwei Strategien zur Darstellung parametrischer reduzierter Modelle  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  naheliegend. Diese unterscheiden sich darin, ob die systemrelevanten Matrizen reduzierter Dimension erst während der Modellauswertung durch Projektion in die parameterabhängigen Unterräume berechnet werden oder, ob eine *Vor-Assemblierung* der reduzierten Größen bereits in der Phase der Modellerzeugung erfolgt. Der auf Vor-Assemblierung basierende Ansatz weist dabei wesentliche Vorteile auf: Um das

parametrische reduzierte Modell dauerhaft abzuspeichern oder für die Auswertung im Speicher zu halten sind hierfür ausschließlich matrixwertige Koeffizienten der reduzierten Dimension vorzuhalten. Außerdem müssen zur Modellauswertung auch nur solche Matrizen superponiert werden. Folglich sind keinerlei Operationen mit Objekten von unreduzierter Dimension erforderlich.

Satz 4.3 führt die auf Vor-Assemblierung der reduzierten Matrizen beruhende Darstellung von  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  ein.

**Satz 4.3.** *Eine Darstellung des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  gemäß Definitionen 2.9 und 3.4 mit Hilfe der reduzierten matrixwertigen Koeffizienten  $\tilde{\mathbf{A}}_{i,j,k,l} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_{i,m} \in \mathbb{C}^{n \times q}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_{l,n} \in \mathbb{C}^{n \times q}$  ist durch*

$$\left( \sum_{i,j,k,l} \Omega_i^W(\mathbf{p}) \Gamma_j(\mathbf{p}) \theta_k(\mathbf{s}) \Omega_l^V(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{A}}_{i,j,k,l} \right) \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{i,m} \Omega_i^W(\mathbf{p}) \theta_m(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{B}}_{i,m} \right) \mathbf{u}, \quad (4.51a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) = \left( \sum_{l,n} \Omega_l^V(\mathbf{p}) \theta_n(\mathbf{s}) \tilde{\mathbf{C}}_{l,n} \right)^T \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \quad (4.51b)$$

gegeben. Für die reduzierten Matrizen gilt:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{i,j,k,l} = \left( \mathbf{W}_i (\mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i)^{-1} \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_c \mathbf{D}_{i,c}^W \right)^T \mathbf{A}_{j,k} \left( \mathbf{V}_l (\mathbf{V}_l^T \mathbf{V}_l)^{-1} \mathbf{V}_l^T \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{l,c}^V \right), \quad (4.52a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{i,m} = \left( \mathbf{W}_i (\mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i)^{-1} \mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_c \mathbf{D}_{i,c}^W \right)^T \mathbf{B}_m, \quad (4.52b)$$

$$\tilde{\mathbf{C}}_{l,n} = \left( \mathbf{V}_l (\mathbf{V}_l^T \mathbf{V}_l)^{-1} \mathbf{V}_l^T \mathbf{V}_c \mathbf{D}_{l,c}^V \right)^T \mathbf{C}_n. \quad (4.52c)$$

*Beweisskizze.* Nach Einsetzen von (4.30) und (4.1) in (4.10) und anschließend in (2.108), gefolgt von Ausmultiplizieren ergibt die Darstellung von  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  gemäß Satz 4.3.  $\square$

In den kommenden beiden Unterabschnitten wird sowohl die Modellauswertung als auch die Modellerzeugung näher untersucht. Dabei wird herausgearbeitet, welche Einflussmöglichkeiten auf den numerischen Aufwand des vorgestellten Rahmenwerks zur parametrischen Ordnungsreduktion bestehen. Viele der hier dargelegten Erkenntnisse beeinflussen die Konstruktion der konkreten Verfahren in Kapitel 5. Aufgrund der Vorteile der Darstellung nach Satz 4.3 werden die weiteren Betrachtungen stets von einer entsprechenden Vor-Assemblierung der reduzierten Matrizen ausgehen.

## Modellauswertung

Die Modellauswertung besteht aus einem Assemblierungsschritt und einem Lösungsschritt. Der Assemblierungsschritt führt die gewichteten Superpositionen der matrixwertigen reduzierten Koeffizienten  $\tilde{\mathbf{A}}_{i,l,k,l}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_{i,m}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_{l,n}$  durch. Im anschließenden

Lösungsschritt wird das lineare Gleichungssystem sowie der Ausgang  $\tilde{\mathbf{y}}$  berechnet. Da die Dimension der parameterabhängigen Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  unabhängig von der Anzahl der impliziten Parameter ist, gilt dies ebenfalls für die Dimension der reduzierten matrixwertigen Koeffizienten. Einzig deren Anzahl steigt mit zunehmender Dimensionalität des Parameterraumes  $\mathcal{P}$ . Der genaue Zusammenhang ist dabei abhängig von der konkreten Form der beteiligten Interpolationen. Interpolationsfunktionen mit stark lokalisiertem Träger reduzieren die Gesamtanzahl der matrixwertigen Koeffizienten und erhöhen damit die Geschwindigkeit, mit der das parametrische reduzierte Modell assembliert werden kann. Der numerische Aufwand im Lösungsschritt hingegen wird lediglich durch die Dimension des reduzierten Gleichungssystems beeinflusst.

### Modellgenerierung

Die Modellerzeugung wird als dreistufiger Prozess aufgefasst:

- (i) Aufbauen der Datenmengen  $\mathbb{M}_I$ ,  $\mathbb{M}_J$ ,  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  entsprechend (4.5), (4.13) und (4.14).
- (ii) Berechnung der matrixwertigen Koeffizienten voller Dimension  $\mathbf{A}_{j,k}$  gemäß (4.1) sowie der Transformationsmatrizen  $\mathbf{G}_m^V$  und  $\mathbf{G}_m^W$  nach (4.44).
- (iii) Vor-Assemblierung der matrixwertigen Koeffizienten reduzierter Dimension  $\tilde{\mathbf{A}}_{i,l,k,l}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_{i,m}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_{l,n}$  entsprechend (4.52).

Der numerische Aufwand für die Berechnung der Modell-Instanziierungen  $\mathbb{M}_I$ ,  $\mathbb{M}_J$  in Teil (i) kann durch Wahl gleicher Instanziierungspunkte  $\mathbb{I} = \mathbb{J}$  sowohl für die affine Parameterrekonstruktion als auch für die Darstellung der parameterabhängigen Basen reduziert werden. Es gilt

$$\mathbb{I} = \mathbb{J} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{M}_I = \mathbb{M}_J. \quad (4.53)$$

Zusätzlich wird die Gesamtlaufzeit der Modellgenerierung durch die Berechnung der Basen in  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  maßgeblich beeinflusst. Hierfür ist die Wahl des Ordnungsreduktionsverfahrens aus Kapitel 3 ausschlaggebend.

Die Laufzeit von Stufe (ii) ist wesentlich von den Interpolationsfunktionen der affinen Parameterrekonstruktion abhängig. Für

$$\Gamma_l(\hat{\mathbf{p}}_k) = \delta_{lk}, \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{I} \quad (4.54)$$

sind die matrixwertigen Koeffizienten  $\mathbf{A}_{i,l}$  unmittelbar bekannt:

$$\mathbf{A}_{i,l} = \mathbf{A}_i(\hat{\mathbf{p}}_l), \quad \forall \hat{\mathbf{p}}_l \in \mathbb{I}. \quad (4.55)$$

In Stufe (iii) wird die Anzahl der zu berechnenden matrixwertigen Koeffizienten reduzierter Dimension  $\tilde{\mathbf{A}}_{i,l,k,l}$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_{i,m}$  und  $\tilde{\mathbf{C}}_{l,n}$  durch die Träger der Interpolationsfunktionen  $\Omega_i^V$ ,  $\Omega_i^W$  und  $\Gamma_j$  maßgeblich beeinflusst. Solche mit kompaktem Träger können zu einer erheblichen Reduktion der benötigten Matrizen führen.

## 4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde ein neuartiges Rahmenwerk zur parametrischen Modellordnungsreduktion für sowohl affin als auch nicht-affin parametrisierte Ausgangsmodelle entwickelt. Dieses besteht im Wesentlichen aus zwei Komponenten: Die affine Parameterrekonstruktion macht Ausgangsmodelle zugänglich für projektionsbasierte Reduktionsansätze und resultiert in einem interpolierten Modell. Die zweite Komponente umfasst die Darstellung der von den nicht-affinen Parametern abhängigen Unterräume, auf welche der Lösungsvektor des interpolierten Modells restringiert wird. Die Dimension der Unterräume ist dabei völlig unabhängig von der Anzahl der nicht-affinen Parameter. Abschließend enthält das Kapitel eine Diskussion des Rahmenwerkes mit Hinblick auf die Interpolationseigenschaften der parametrischen reduzierten Modelle sowie eine Bewertung des numerischen Aufwands.



# Kapitel 5

## Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion für affin und nicht-affin parametrisierte Modelle

Aufbauend auf dem parametrischen Ordnungsreduktions-Rahmenwerk aus Kapitel 4 werden im vorliegenden Kapitel zwei konkrete Verfahren zur parametrischen Modellordnungsreduktion für affin und nicht-affin parametrisierte Ausgangsmodelle entwickelt. Dies geschieht unter Berücksichtigung der den numerischen Gesamtaufwand betreffenden Erkenntnisse aus Abschnitt 4.5.2, wonach folgende Rahmenbedingungen festgesetzt werden:

- Sowohl für die affine Parameterrekonstruktion als auch für die Darstellung der Unterräume werden die gleichen Instanziierungspunkte verwendet, daher gilt  $\mathbb{I} = \mathbb{J}$ .
- Für die Interpolationsfunktionen der affinen Parameterrekonstruktion gilt (4.54), sodass die matrixwertigen Koeffizienten der Interpolation unmittelbar verfügbar sind.
- Um eine effiziente Modellauswertung zu gewährleisten, findet eine Vor-Assemblierung des parametrischen reduzierten Modells gemäß Satz 4.3 statt.

Das in Abschnitt 5.1 präsentierte Verfahren verwendet zum einen globale polynomielle Interpolation für die affine Parameterrekonstruktion und zum anderen ein auf multilinearer Interpolation beruhendes Teilbereichsverfahren zur Darstellung der Unterräume. Die multivariaten Interpolationen basieren dabei auf einem Tensorgitter, welches zur Reduktion der Modellfehler gleichmäßig verfeinert werden kann. Ein selbst-adaptives Verfahren ist Gegenstand von Abschnitt 5.2. Dieses verwendet sowohl für die affine

Parameterrekonstruktion als auch für die Darstellung der Unterräume einen Teilbereichs-ansatz konstanter Ordnung. Mittels eines selbst-adaptiven Prozesses ist die Steuerung der Modellfehler möglich.

Numerische Beispiele untermauern die Leistungsfähigkeit und Zuverlässigkeit der vorgeschlagenen Ansätze.

## 5.1 Ein nicht-adaptives Verfahren

### 5.1.1 Einleitung und Konzeption

Das Verfahren basiert auf dem Rahmenwerk aus Kapitel 4. Es besteht dementsprechend aus einer affinen Parameterrekonstruktion nach Abschnitt 4.2 sowie der in Abschnitt 4.4.2 abgeleiteten Darstellung parameterabhängiger Unterräume. Um die beteiligten Interpolationen zu konkretisieren, erfolgt zunächst in Abschnitt 5.1.2 eine Diskretisierung des Raums der impliziten Parameter mit Hilfe eines *Tensorgitters*  $\mathcal{G}$  sowie *Hyperkuben*  $\mathcal{H}$ . Die Punkte des Tensorgitters  $\mathcal{G}$  entsprechen dabei den Instanziierungspunkten  $\hat{\mathbf{p}}_k \in \mathbb{I}$ . Anschließend schlägt der Autor in Abschnitt 5.1.3 die Verwendung von Lagrange-Polynomen mit globalem Träger für die affine Parameterrekonstruktion sowie auf den Hyperkuben  $\mathcal{H}$  lokal definierte multilineare Funktionen zur Darstellung der von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume vor. Die Fehler derart erzeugter parametrischer reduzierter Modelle  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  können durch gleichmäßige Verfeinerung des Tensorgitters  $\mathcal{G}$  beeinflusst werden.

### 5.1.2 Diskrete Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter

Die folgenden Definitionen verleihen dem Raum  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter eine diskrete Struktur.

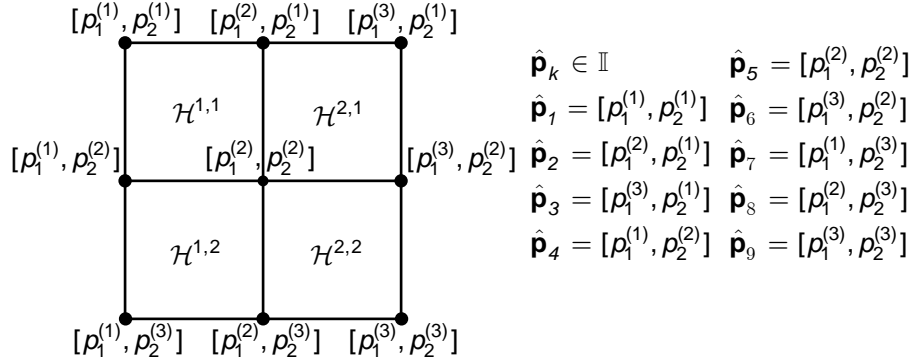
**Definition 5.1** (Tensorgitter). *Das Tensorgitter  $\mathcal{G} \in \mathcal{T}(P)$  über dem Raum  $\mathcal{P}$  wird durch Punktmengen  $\mathcal{N}_i$  gemäß*

$$\mathcal{G} = \mathcal{N}_1 \times \dots \times \mathcal{N}_P, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{N}_i = \{p_i^{(1)}, \dots, p_i^{(K_i)}\} \quad (5.2)$$

erzeugt. Dabei bezeichnet  $\mathcal{T}(P)$  den Raum der Tensorgitter mit Dimension  $P$  und  $K_i$  die Anzahl der Gitterpunkte  $p_i^{(j)}$  entlang des  $i$ -ten impliziten Parameters. Die Gesamtanzahl an Gitterpunkten ist damit durch

$$|\mathcal{G}| = \prod_{i=1}^P K_i \quad (5.3)$$



**Abbildung 5.1:** Strukturierung des Raumes  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter. Zweidimensionales Beispiel mit Tensorgitter  $\mathcal{G}$  und Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$ .

gegeben.

**Definition 5.2** (Hyperkubus). *Der Hyperkubus  $\mathcal{H}^{\alpha}$  ist über die Segmente*

$$\mathcal{L}_i^k = \{p_i^{(k)}, p_i^{(k+1)}\} \quad (5.4)$$

mit dem Multi-Index

$$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_P], \quad \alpha_i \in \{1, \dots, K_i - 1\} \quad (5.5)$$

durch

$$\mathcal{H}^{\alpha} = \mathcal{L}_1^{\alpha_1} \times \dots \times \mathcal{L}_P^{\alpha_P} \quad (5.6)$$

definiert.

**Korollar 5.1.** *Es existiert stets eine Partitionierung des Tensorgitters  $\mathcal{G}$  nach Definition 5.1 in nicht überlappende Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  nach Definition 5.2. Folglich gilt*

$$\mathcal{G} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{H}^{\alpha}, \quad \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_P], \quad \alpha_i \in \{1, \dots, K_i - 1\}. \quad (5.7)$$

*Beweisskizze.* Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Definitionen 5.1 und 5.2.  $\square$

Ein zweidimensionales Beispiel zur Veranschaulichung der Strukturierung von  $\mathcal{P}$  mittels eines äquidistanten Tensorgitters ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die kommenden Definitionen führen Verfeinerungsoperationen auf dem Tensorgitter  $\mathcal{G}$  ein.

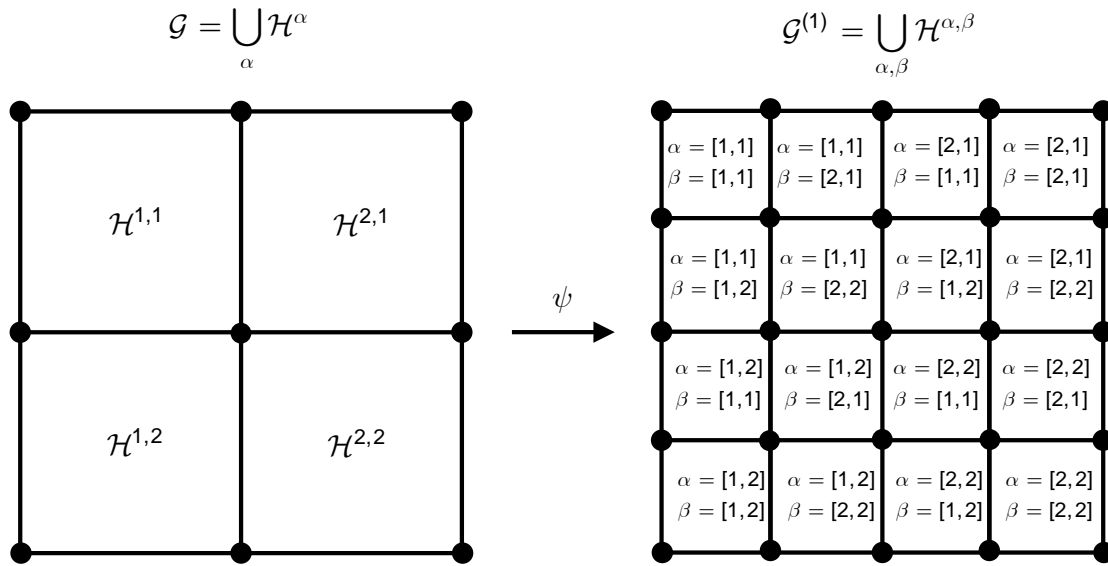
**Definition 5.3** (Verfeinerung). *Gegeben sei ein Tensorgitter  $\mathcal{G}$  nach Definition 5.1 sowie dessen Partitionierung in Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  entsprechend Korollar 5.1. Eine Verfeinerung  $\psi$  von  $\mathcal{G}$  ist durch*

$$\psi : \mathcal{T}(P) \rightarrow \mathcal{T}(P), \quad (5.8)$$

$$\psi(\mathcal{G}) =: \mathcal{G}^{(1)}, \quad (5.9)$$

$$|\mathcal{G}^{(1)}| > |\mathcal{G}| \quad (5.10)$$

definiert. Das verfeinerte Tensorgitter wird mit  $\mathcal{G}^{(1)}$  bezeichnet.



**Abbildung 5.2:** Veranschaulichung der gleichmäßigen Verfeinerung eines zweidimensionalen Tensorgitters  $\mathcal{G}$ .

**Definition 5.4** (Hierarchische Verfeinerung). *Gegeben sei ein Tensorgitter  $\mathcal{G}$  nach Definition 5.1, dessen Zerlegung in Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  entsprechend Korollar 5.1 sowie eine Verfeinerung nach Definition 5.3. Die Verfeinerung ist genau dann hierarchisch, wenn für das verfeinerte Tensorgitter  $\mathcal{G}^{(1)}$*

$$\mathcal{G}^{(1)} \supset \mathcal{G} \quad (5.11)$$

*gilt.*

Die hierarchische Struktur der in Definition 5.4 eingeführten Verfeinerung gewährleistet, dass die zu einem Tensorgitter  $\mathcal{G}$  gehörigen Datenmengen  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{V}$  sowie  $\mathbb{W}$  nach der Verfeinerungsoperation vollständig weiterverwendet werden können.

**Definition 5.5** (Gleichmäßige Verfeinerung). *Gegeben sei ein Tensorgitter  $\mathcal{G}$  nach Definition 5.1, dessen Zerlegung in Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  entsprechend Korollar 5.1 sowie eine Verfeinerung nach Definition 5.3. Die Verfeinerung  $\psi$  ist genau dann gleichmäßig, wenn durch sie alle Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  von  $\mathcal{G}$  in  $2^P$  nicht überlappende Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha, \beta}$  von  $\mathcal{G}^{(1)}$  entsprechend*

$$\mathcal{H}^{\alpha} = \bigcup_{\beta} \mathcal{H}^{\alpha, \beta}, \quad \beta = [\beta_1, \dots, \beta_P], \quad \beta_i \in \{1, 2\}. \quad (5.12)$$

*zerlegt werden. Damit folgt für das verfeinerte Tensorgitter*

$$\mathcal{G}^{(1)} = \bigcup_{\alpha} \bigcup_{\beta} \mathcal{H}^{\alpha, \beta}. \quad (5.13)$$

In Abbildung 5.2 ist die gleichmäßige Verfeinerung am Beispiel eines zweidimensionalen Tensorgitters  $\mathcal{G}$  veranschaulicht.

**Definition 5.6** (Mehrstufige Verfeinerung). *Gegeben sei ein Tensorgitter  $\mathcal{G}$  nach Definition 5.1 und dessen Zerlegung in Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  entsprechend Korollar 5.1. Eine Verfeinerung  $k$ -ter Stufe definiert nach  $k$ -facher Anwendung von Definition 5.3 ein  $k$ -fach verfeinertes Tensorgitter  $\mathcal{G}^{(k)}$ .*

### 5.1.3 Interpolationsfunktionen

Auf Basis der diskreten Struktur des Parameterraumes  $\mathcal{P}$  werden in weiterer Folge die Interpolationsfunktionen sowohl der affinen Parameterrekonstruktion als auch der von den impliziten Parametern abhängigen Darstellung der Lösungsunterräume konkretisiert.

#### Affine Parameterrekonstruktion

Für die affine Parameterrekonstruktion kommen multivariate polynomielle Interpolationsfunktionen  $\Gamma_l$  mit auf dem Tensorgitter  $\mathcal{G}$  globalem Träger  $\text{supp}(\Gamma_l)$  zum Einsatz. Es gilt

$$\Gamma_l \in \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^P (K_i - 1), P\right), \quad (5.14)$$

$$\text{supp}(\Gamma_l) = \text{conv}(\mathcal{G}). \quad (5.15)$$

Darin sind  $\mathbb{P}(k, d)$  der Raum der Polynome in  $d$  Variablen mit höchstem Polynomgrad  $k$  und  $\text{conv}(\mathcal{M})$  die konvexe Hülle einer Menge  $\mathcal{M}$ . Erzeugt werden die Funktionen  $\Gamma_l$  durch univariate Lagrange-Polynome

$$\gamma_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.16a)$$

$$\gamma_{i,j} \in \mathbb{P}(K_j - 1, 1), \quad (5.16b)$$

welche nach [Dav75, S. 33] die explizite Darstellung

$$\gamma_{i,j}(p_j) = \prod_{k=1, k \neq i}^{K_k} \frac{p_j - p_j^{(k)}}{p_j^{(i)} - p_j^{(k)}}, \quad p_j^{(k)} \in \mathcal{N}_i \quad (5.17)$$

besitzen. Mit den Multi-Indizes

$$\beta^{(l)} = [\beta_1^{(l)}, \dots, \beta_P^{(l)}], \quad \beta_i^{(l)} \in \{1, \dots, K_i\} \quad (5.18)$$

gilt

$$\Gamma_l(\mathbf{p}) = \gamma_{\beta_1^{(l)}, 1}(p_1) \cdot \dots \cdot \gamma_{\beta_P^{(l)}, P}(p_P), \quad \mathbf{p} = [p_1, \dots, p_P] \in \text{conv}(\mathcal{G}). \quad (5.19)$$

**Satz 5.1.** *Die multivariaten Interpolationsfunktionen  $\Gamma_l(\mathbf{p})$  nach (5.19) erfüllen die Interpolationseigenschaft (4.54).*

*Beweisskizze.* Nach [Dav75, S. 33] gilt für die univariaten Lagrange-Polynome

$$\gamma_{i,j}(p_j^{(k)}) = \delta_{ik}, \quad p_j^{(k)} \in \mathcal{N}_j. \quad (5.20)$$

Damit ergibt sich die Behauptung durch die Konstruktion (5.19).  $\square$

Nach Satz 5.1 sind die vorgeschlagenen Funktionen  $\Gamma_l(\mathbf{p})$  geeignet im Sinne der zu Beginn von Kapitel 5 definierten Rahmenbedingungen. Die matrixwertigen Koeffizienten der affinen Parameterrekonstruktion stehen unmittelbar zur Verfügung.

### Parameterabhängige Unterräume

Die multivariaten Interpolationen zur Darstellung der von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume nach Definition 4.8 werden für jeden Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  des Gitters  $\mathcal{G}$  separat aufgebaut. Mit den multivariaten Interpolationsfunktionen

$$\Omega_{m,\alpha}^V : \text{supp}(\Omega_{m,\alpha}^V) = \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha), \quad (5.21a)$$

$$\Omega_{m,\alpha}^W : \text{supp}(\Omega_{m,\alpha}^W) = \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha) \quad (5.21b)$$

und den für jeden Hyperkubus konstanten Startbasen  $\mathbf{V}_\alpha$  und  $\mathbf{W}_\alpha$  entsprechend (4.42) gelten die Darstellungen

$$\mathbf{V}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J^\alpha} \Omega_{m,\alpha}^V(\mathbf{p}) \theta \circ \xi_{\mathcal{V}_m}(\mathbf{V}_\alpha), \quad \mathbf{p} \in \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha), \quad (5.22a)$$

$$\mathbf{W}(\mathbf{p}) = \sum_{m=1}^{M_J^\alpha} \Omega_{m,\alpha}^W(\mathbf{p}) \theta \circ \xi_{\mathcal{W}_m}(\mathbf{W}_\alpha), \quad \mathbf{p} \in \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha). \quad (5.22b)$$

Gemäß Korollar 5.1 liefert (5.22) eine über dem kompletten Tensorgitter  $\mathcal{G}$  gültige Beschreibung der von den impliziten Parametern abhängigen Basen. Konkret schlägt der Autor die Verwendung multilinearer Funktionen

$$\Omega_{m,\alpha}^V(\mathbf{p}) = \begin{cases} \omega_{\delta_1^{(m)},1}^\alpha(p_1) \cdot \dots \cdot \omega_{\delta_P^{(m)},P}^\alpha(p_P), & \mathbf{p} \in \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha), \\ 0, & \mathbf{p} \notin \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha), \end{cases} \quad (5.23a)$$

$$\Omega_{m,\alpha}^W(\mathbf{p}) = \begin{cases} \omega_{\delta_1^{(m)},1}^\alpha(p_1) \cdot \dots \cdot \omega_{\delta_P^{(m)},P}^\alpha(p_P), & \mathbf{p} \in \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha), \\ 0, & \mathbf{p} \notin \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha) \end{cases} \quad (5.23b)$$

mit dem Multi-Index  $\alpha$  nach (5.7), den Multi-Indices  $\delta^{(m)}$  nach

$$\delta^{(m)} = [\delta_1^{(m)}, \dots, \delta_P^{(m)}], \quad \delta_i^{(m)} \in \{1, 2\} \quad (5.24)$$

sowie den univariaten linearen Funktionen entsprechend

$$\omega_{1,j}^k(p_j) = \begin{cases} \frac{p_j^{(k+1)} - p_j}{p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)}}, & p_j \in \mathcal{L}_j^k, \\ 0, & p_j \notin \mathcal{L}_j^k, \end{cases} \quad (5.25a)$$

$$\omega_{2,j}^k(p_j) = \begin{cases} \frac{p_j - p_j^{(k)}}{p_j^{(k+1)} - p_j^{(k)}}, & p_j \in \mathcal{L}_j^k, \\ 0, & p_j \notin \mathcal{L}_j^k \end{cases} \quad (5.25b)$$

vor.

**Satz 5.2.** *Die multivariaten Interpolationsfunktionen  $\Omega_{m,\alpha}^V$  und  $\Omega_{m,\alpha}^W$  nach (5.23) erfüllen die Interpolationseigenschaften (4.41b) sowie (4.41d). Daher sind  $\Omega_{m,\alpha}^V$  und  $\Omega_{m,\alpha}^W$  für die Darstellung der parameterabhängigen Unterräume und Basen gemäß Definition 4.8 geeignet.*

*Beweisskizze.* Für die univariaten Interpolationsfunktionen nach (5.25) gilt

$$\omega_{1,j}^k(p_j^{(l)}) = \delta_{kl}, \quad p_j^{(l)} \in \{p_j^{(k)}, p_j^{(k+1)}\}, \quad (5.26a)$$

$$\omega_{2,j}^k(p_j^{(l)}) = \delta_{kl}, \quad p_j^{(l)} \in \{p_j^{(k)}, p_j^{(k+1)}\}, \quad (5.26b)$$

womit nach Konstruktion (5.23) die Behauptung folgt.  $\square$

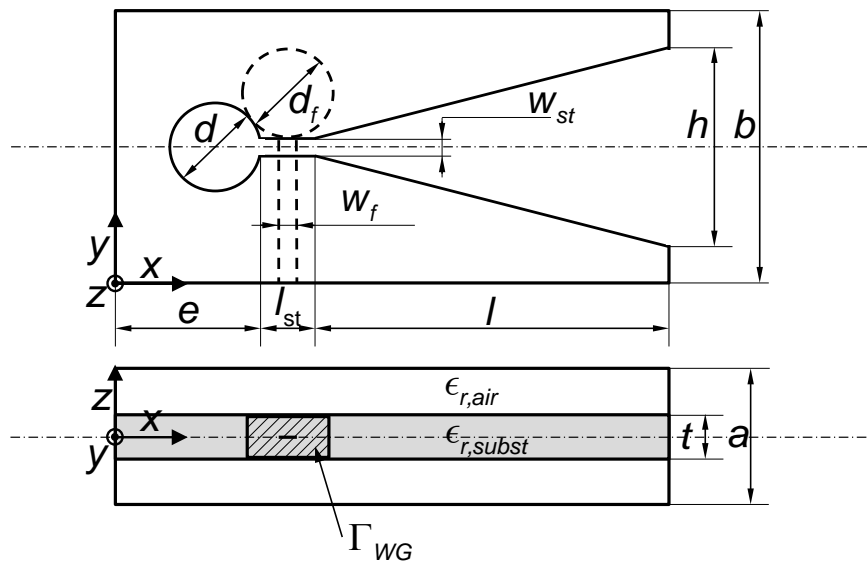
Da die Interpolationsfunktionen in (5.21) über einen lokalen Träger verfügen, verschwinden viele der matrixwertigen Koeffizienten in (4.52) und das parametrische reduzierte Modell benötigt weniger Speicher, als wenn Interpolationsfunktionen mit globalem Träger zum Einsatz kämen.

## 5.1.4 Numerische Beispiele

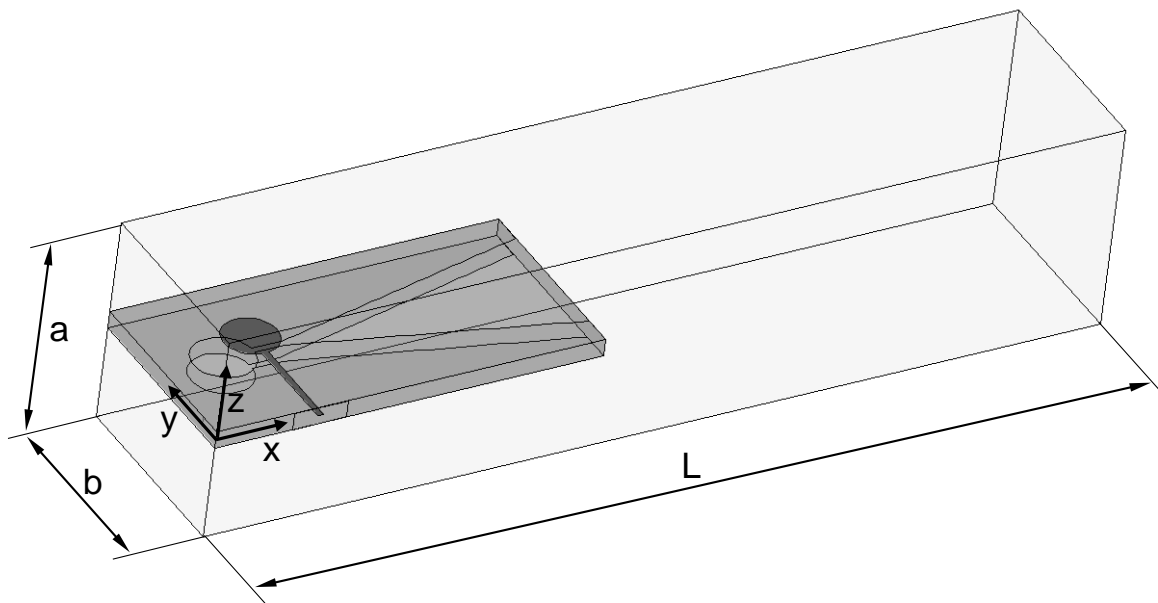
Bei den numerischen Beispielen handelt es sich um elektromagnetische Strukturen, die unter Verwendung der Modellierungsansätze aus Abschnitt 2.3 beschrieben werden. Ausgangspunkt ist somit ein parametrisches FE-Modell nach Abschnitt 2.3.3. Die FE-Diskretisierung erfolgt mit  $H(\text{rot})$ -konformen Ansatzfunktionen zweiter Ordnung. Darüber hinaus kommt, sofern nichts Gegenteiliges genannt wird, ein Einpunkt-MOR-Verfahren nach Abschnitt 3.3 zur Generierung der Projektionsmatrizen zum Einsatz. Die erforderlichen Instanziierungen des FE-Modells werden mittels topologieerhaltender Netzverzerrungsansätze gemäß [Bur08] konstruiert.

### Vivaldi-Antennen-Element

Das erste numerische Beispiel ist ein Vivaldi-Antennen-Element einer in zwei Richtungen periodisch fortgesetzten Antennengruppe nach [SS99]. Die Struktur des in  $x$ -Richtung



(a) Skizze mit Bemaßung.

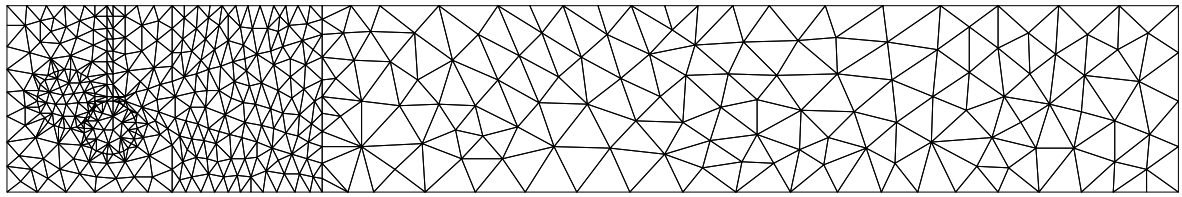


(b) Dreidimensionales Modell.

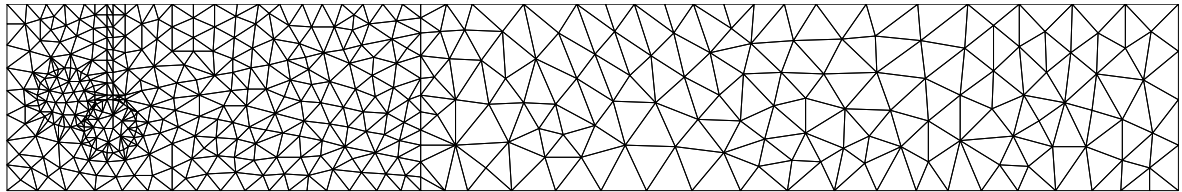
**Abbildung 5.3:** Vivaldi-Antennen-Element: Festgehaltene Parameter:  $e = 1,5$  cm,  $l_{st} = 0,5$  cm,  $w_{st} = 0,1$  cm,  $h = 2,2$  cm,  $d = 1$  cm,  $b = 3,2$  cm,  $t = 0,288$  cm,  $a = 3,45$  cm,  $w_f = 0,2$  cm,  $d_f = 0,9$  cm,  $\epsilon_{r,air} = 1$  und  $\epsilon_{r,subst} = 2,2$ .



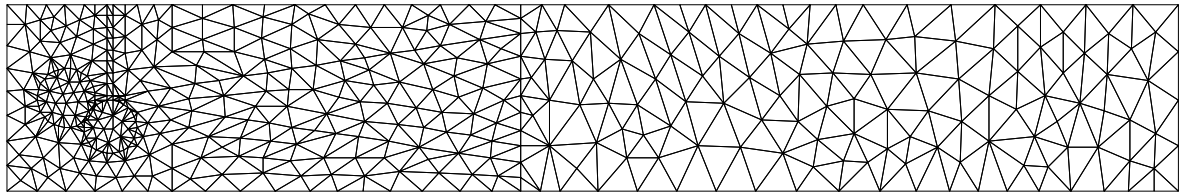
## 5.1. Ein nicht-adaptives Verfahren



(a)  $l = 3,5$  cm.



(b)  $l = 5$  cm.



(c)  $l = 6,5$  cm.

**Abbildung 5.4:** Finite-Elemente-Netze des Vivaldi-Antennen-Elements in der Ebene  $z = 0$  für unterschiedliche Längen des Antennen-Horns.

abstrahlenden Elements ist in Abbildung 5.3(a) skizziert. Darin beschreibt der obere Teil der Abbildung mit durchgezogener Linie die Metallisierung des Substrats in den Ebenen  $z = \pm \frac{t}{2}$  und mit unterbrochener Linie die Metallisierung der Zuleitung in der Mittelebene  $z = 0$ . Im unteren Teil der Abbildung ist die Antenne in der Seitenansicht dargestellt. Gespeist wird die Struktur über das Wellenleiter-Tor  $\Gamma_{WG}$ . Abbildung 5.3(b) zeigt das gesamte Feldgebiet der FE-Simulation. Dabei befinden sich entsprechend der Einteilung (2.23) in den Ebenen  $y = 0$ ,  $y = b$  und  $x = 0$  der Rand  $\Gamma_E$ , in den Ebenen  $z = \pm \frac{a}{2}$  der Rand  $\Gamma_H$  sowie in der Ebene  $x = L$  der absorbierende Rand  $\Gamma_Z$ .

Um die numerischen Eigenschaften des nicht-adaptiven Verfahrens zu analysieren, werden exemplarisch ein expliziter Parameter, die Frequenz  $f$ , sowie ein impliziter Parameter, die Länge  $l$ , betrachtet. Alle weiteren Parameter sind auf die in der Beschriftung von Abbildung 5.3 aufgeführten Werte fixiert. Die durch das PROM abzudeckenden Parameter-Bereiche werden auf

$$f \in \mathcal{Q} = [0, 8, 5, 3] \text{ GHz}, \quad (5.27)$$

$$l \in \mathcal{P} = [3, 5, 6, 5] \text{ cm} \quad (5.28)$$

gesetzt. Abbildung 5.4 zeigt Instanziierungen eines durch topologieerhaltende Netzverzerrungsalgorithmen nach [Bur08] erzeugten zweidimensionalen FE-Netzes zur Visualisierung des Parameterraumes  $\mathcal{P}$ .

Mit den beiden Parametern  $f$  und  $l$  lautet das parametrische Ausgangsmodell  $\Sigma(k_0, l)$  des Vivaldi-Antennen-Elements:

$$(\mathbf{S}(l) + jk_0\mathbf{F}(l) - k_0^2\mathbf{T}(l))\mathbf{x} = jk_0\eta_0\hat{\mathbf{B}}i, \quad (5.29a)$$

$$v = \hat{\mathbf{B}}^T\mathbf{x}, \quad (5.29b)$$

woraus sich die Eingangsimpedanz  $Z^{ref}$  nach

$$Z^{ref} = jk_0\eta_0\hat{\mathbf{B}}^T(\mathbf{S}(l) + jk_0\mathbf{F}(l) - k_0^2\mathbf{T}(l))^{-1}\hat{\mathbf{B}} \quad (5.30)$$

sowie der Reflexionsfaktor zu

$$\rho^{ref} = \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (5.31)$$

bestimmen lassen. Ein entsprechend dem parametrischen Ordnungsreduktions-Rahmenwerk in Kapitel 4 konstruiertes PROM  $\tilde{\Sigma}(k_0, l)$  ist durch

$$(\tilde{\mathbf{S}}(l) + jk_0\tilde{\mathbf{F}}(l) - k_0^2\tilde{\mathbf{T}}(l))\mathbf{x} = jk_0\eta_0\tilde{\mathbf{B}}(l)i, \quad (5.32a)$$

$$v = \tilde{\mathbf{B}}^T(l)\mathbf{x} \quad (5.32b)$$

gegeben, womit die integralen Größen  $Z$  und  $\rho$  analog zum Ausgangsmodell  $\Sigma(k_0, l)$  bestimmt werden können. Da es sich bei  $\Sigma(k_0, l)$  um ein symmetrisches Modell nach Definition 2.6 handelt, folgen unter Beachtung von Korollar 3.2 für die reduzierten Matrizen entsprechend (4.10) die Darstellungen:

$$\tilde{\mathbf{S}}(l) = \mathbf{V}(l)^T\check{\mathbf{S}}(l)\mathbf{V}(l), \quad (5.33a)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(l) = \mathbf{V}(l)^T\check{\mathbf{F}}(l)\mathbf{V}(l), \quad (5.33b)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(l) = \mathbf{V}(l)^T\check{\mathbf{T}}(l)\mathbf{V}(l), \quad (5.33c)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(l) = \mathbf{V}(l)^T\hat{\mathbf{B}}. \quad (5.33d)$$

Die Qualität des PROMs  $\tilde{\Sigma}(k_0, l)$  wird anhand eines auf den Reflexionsfaktor  $\rho$  bezogenen mittleren Fehlers gemäß

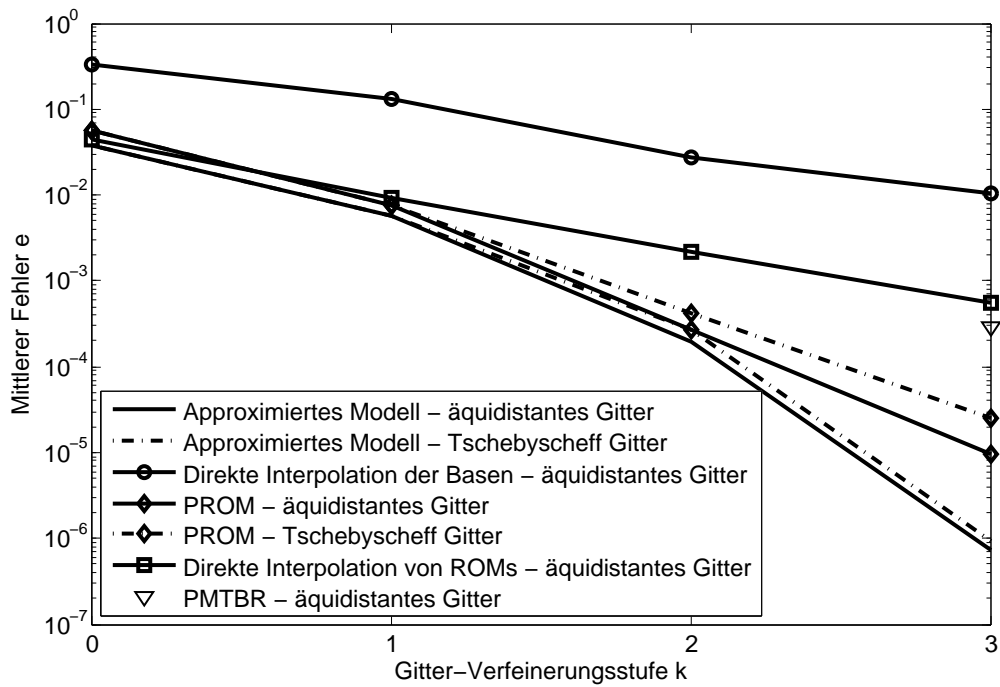
$$e = \frac{1}{N_f N_l} \sum_{n_f=1}^{N_f} \sum_{n_l=1}^{N_l} |\rho^{ref}(f_{n_f}, l_{n_l}) - \rho(f_{n_f}, l_{n_l})| \quad (5.34)$$

beurteilt. Darin sind  $N_f = 101$  die Anzahl der innerhalb von  $\mathcal{Q}$  äquidistant verteilten Frequenzpunkte  $f_{n_f}$  und  $N_l = 101$  die Anzahl der innerhalb  $\mathcal{P}$  äquidistant verteilten Längen  $l_{n_l}$ .

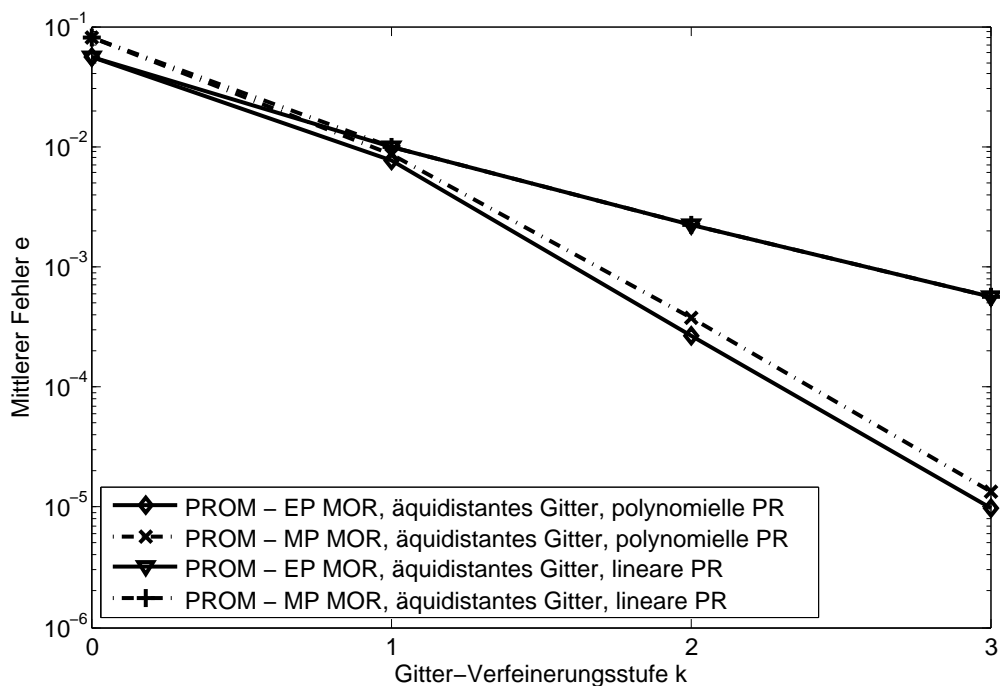
In Abbildung 5.5 ist der mittlere Fehler  $e$  gemäß (5.34), ausgehend von einem Instanzierungs-Gitter  $\mathcal{G}^0$  mit  $|\mathcal{G}^0| = 2$  Gitterpunkten, für verschiedene parametrische Ordnungsreduktionsansätze in Abhängigkeit der Gitter-Verfeinerungsstufe  $k$  dargestellt. Die Verfeinerung ist gleichmäßig im Sinne von Definition 5.5 sowie hierarchisch gemäß Definition 5.4. Für die Anzahl der Gitterpunkte gilt der Zusammenhang

$$|\mathcal{G}^{(k)}| = 2^k + 1. \quad (5.35)$$

## 5.1. Ein nicht-adaptives Verfahren



(a) Verschiedenartige parametrische Ordnungsreduktions-Ansätze.



(b) Verfahren zur parametrischen Ordnungsreduktion basierend auf dem vorgeschlagenen Rahmenwerk.

**Abbildung 5.5:** Konvergenzen verschiedener Ansätze der parametrischen Ordnungsreduktion für Vivaldi-Antennen-Element bei gleicher reduzierter Dimension.

**Tabelle 5.1:** Numerische Daten für das Vivaldi-Antennen-Element<sup>1</sup>. Den PROMs liegt eine Gitter-Verfeinerungsstufe von  $k = 2$  und ein äquidistantes Gitter  $\mathcal{G}$  zugrunde. PROM 1 nutzt ein Einpunkt-MOR-Verfahren und PROM 2 ein Mehrpunkt-MOR-Verfahren zur Erzeugung der Projektionsmatrizen an den Gitterpunkten.

	FE-Modell <sup>2</sup>	PROM 1 <sup>3</sup>	PROM 2 <sup>3</sup>
Dimension	1 045 577	30	20
Modellgenerierung	55,81 s	2 960,76 s	18 238,02 s
Darin enthalten: Erzeugung der Datenmengen $\mathbb{M}$ und ggf. $\mathbb{V}$	55,81 s	2 492,04 s	17 966,54 s
Modellauswertungen pro Sekunde	0,00188	1 934,26	3 268,05
Berechnung von Abbildung 5.6 mit 101101 Punkten	1,71 Jahre <sup>4</sup>	52,23 s	30,96 s
Mittlerer Fehler $e$	-	$2,69 \cdot 10^{-4}$	$3,77 \cdot 10^{-4}$

<sup>1</sup> Gerechnet mit einem Thread auf einem Intel Xeon E5620.

<sup>2</sup> Experimentelle FE-Software in C++ mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

<sup>3</sup> Experimentelles MATLAB-Programm mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

<sup>4</sup> Extrapoliert.

Die Gitterpunkte sind entweder äquidistant im betrachteten Parameterraum  $\mathcal{P}$  oder entsprechend der Extremata geeigneter Tschebyscheff-Polynome verteilt.

Abbildung 5.5(a) stellt Fehler  $e$  eines durch das nicht-adaptive Ordnungsreduktionsverfahren des vorliegenden Kapitels erstellten PROMs, eines interpolierten Modells  $\check{\Sigma}(k_0, l)$  nach Parameterrekonstruktion, eines auf direkter Interpolation von affin parametrisierten reduzierten Modellen basierenden Modells gemäß [LE09] sowie eines durch das PMTBR-Verfahren aus [Phi04] erzeugten Modells dar. Damit alle Modelle, mit Ausnahme des interpolierten Modells, in der Lage sind, Frequenzgänge mit vergleichbarer Geschwindigkeit bereitzustellen, ist die reduzierte Dimension in Abbildung 5.5(a) auf  $n = 30$  festgelegt. Der Fehler des interpolierten Modells  $\check{\Sigma}(k_0, l)$  wird ausschließlich durch die Parameterrekonstruktion hervorgerufen. Da sowohl das PROM als auch das PMTBR-Modell auf dem interpolierten Modell  $\check{\Sigma}(k_0, l)$  basieren, setzen sich deren Fehler sowohl aus der affinen Parameterrekonstruktion als auch aus der Darstellung der Unterräume zusammen. Ein Vergleich der Fehler des Modells  $\check{\Sigma}(k_0, l)$  mit dem Fehler des PROMs bzw. des PMTBR-Modells ermöglicht somit auch die Beurteilung der Qualität der Unterräume. Sofern nichts Gegenteiliges erwähnt wird, verwendet die affine Parameterrekonstruktion stets polynomielle Interpolationsfunktionen entsprechend Abschnitt 5.1.3. Zur Darstellung der Unterräume kommen für die PROMs entsprechend des vorgeschlagenen PMOR-Verfahrens stückweise definierte multilineare Interpolationsfunktionen zum Einsatz. Der PMTBR-Ansatz hingegen benutzt konstante Unterräume, die gemäß [Phi04] mittels einer SVD zu berechnen sind. Der Ansatz aus [LE09] basiert

nicht auf dem interpolierten Modell, sondern interpoliert affin parametrisierte reduzierte Modelle direkt. Von den in Abbildung 5.5(a) gegenübergestellten parametrischen Ordnungsreduktionsverfahren weist der vorgeschlagene Ansatz die höchste Konvergenzrate auf und benötigt somit deutlich weniger Instanziierungspunkte als andere Verfahren, um eine vorgegebene Fehlerschranke zu unterschreiten. Bis zu einer Verfeinerungsstufe von  $k = 2$  ist der Fehler des PROMs sehr ähnlich zu dem des interpolierten Modells. Damit liefert der gewählte Ansatz zur parameterabhängigen Darstellung der Unterräume sehr gute Ergebnisse.

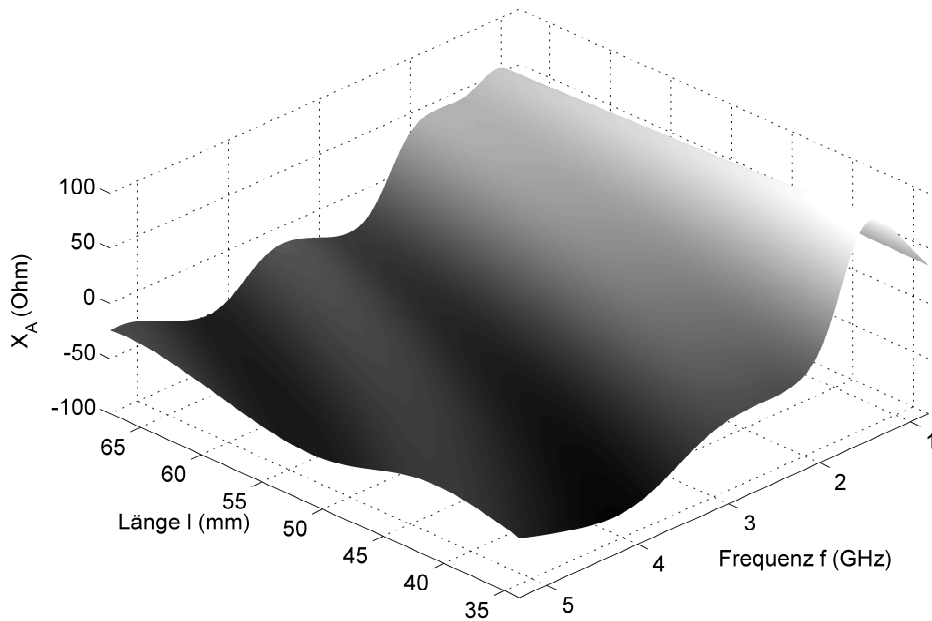
Gegenstand von Abbildung 5.5(b) sind nicht-adaptive Ordnungsreduktionsverfahren zur Erzeugung von PROMs, welche auf dem in Kapitel 4 eingeführten Rahmenwerk basieren. Darin wird validiert, dass unterschiedliche Ordnungsreduktionsverfahren zur Konstruktion der Unterräume an den Instanziierungspunkten herangezogen werden können. Es handelt sich konkret um das Mehrpunkt-Verfahren aus [SFDE09] sowie um das Einpunkt-Verfahren aus [FDE10]. Des Weiteren stellt Abbildung 5.5(b) den Vorteil einer polynomiellen Parameterrekonstruktion gegenüber einer linearen Parameterrekonstruktion grafisch dar.

Mit Hilfe der PROMs ist es möglich, komplette Antwortflächen mit feiner Abtastung, wie in Abbildung 5.6 dargestellt, innerhalb kurzer Zeit zu berechnen. Der numerische Aufwand hierzu sowie der mittlere Fehler  $e$  sind in Tabelle 5.1 für zwei verschiedene PROMs aufgeführt und den entsprechenden Daten des FE-Modells gegenübergestellt. PROM 1 nutzt dabei das Einpunkt-Verfahren und PROM 2 das Mehrpunktverfahren. Im vorliegenden Fall war die Berechnung der Antennen-Resistanz-Flächen sowie der Antennen-Reaktanz-Flächen mit über 100000 Punkten unter Einsatz der PROMs innerhalb von weniger als einer Minute möglich, während die entsprechende Rechnung mit dem FE-Modell extrapoliert mehr als ein Jahr in Anspruch genommen hätte. Aufgrund der enormen Unterschiede in der Anzahl an Modellauswertungen pro Sekunde zwischen dem FE-Modell und den PROMs, amortisieren sich die Rechenzeiten zur Erzeugung der PROMs bereits bei einer erheblich gröberen Abtastung der Antwortflächen. Die für das FE-Modell angegebene Laufzeit zur Modellgenerierung bezieht sich auf eine einzelne Instantiierung des FE-Modells im Raum der Geometrieparameter.

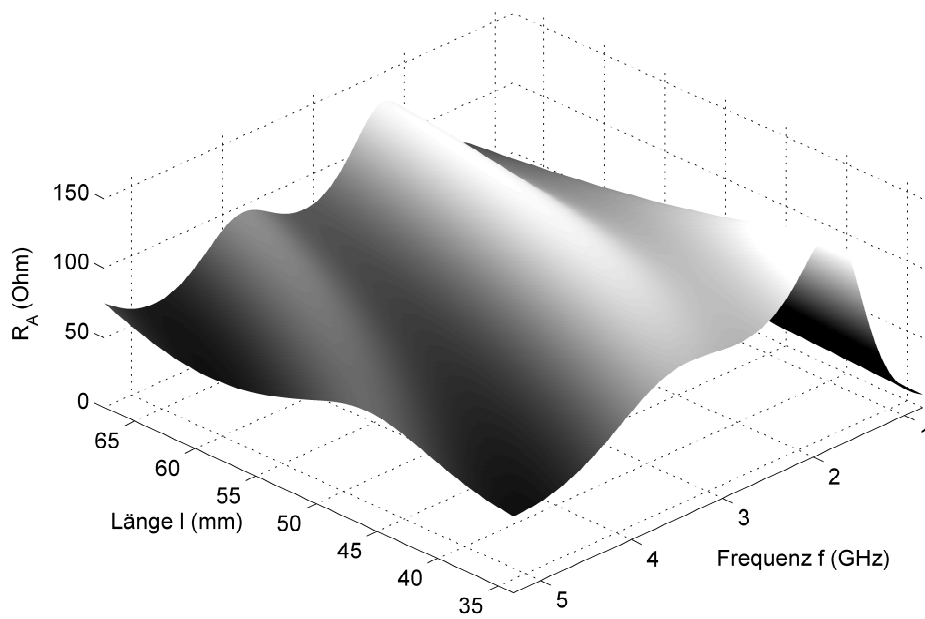
In Abbildung 5.7 sind neben den Antwortflächen zusätzlich Schnitte durch diese sowie Verläufe der Fehler von PROM 2 dargestellt. Dabei bewegen sich die aufgeführten Fehler in einem Bereich, in dem auch die Fehler des zugrundeliegenden Diskretisierungsverfahrens zu erwarten sind.

### **Bandpass-Filter**

Das zweite numerische Beispiel behandelt eine Klasse von Bandpass-Filtern [Che67] in Rechteckhohlleiter(RHL)-Technik, die aus Iris-Blenden aufgebaut sind. Konkret wird ein aus sieben symmetrisch angeordneten Iris-Blenden bestehender Filter betrachtet, bei dem jeweils die erste und die siebte, die zweite und die sechste sowie die dritte und die fünfte Blende gleich sind. Eine dreidimensionale Darstellung des Filters ist in



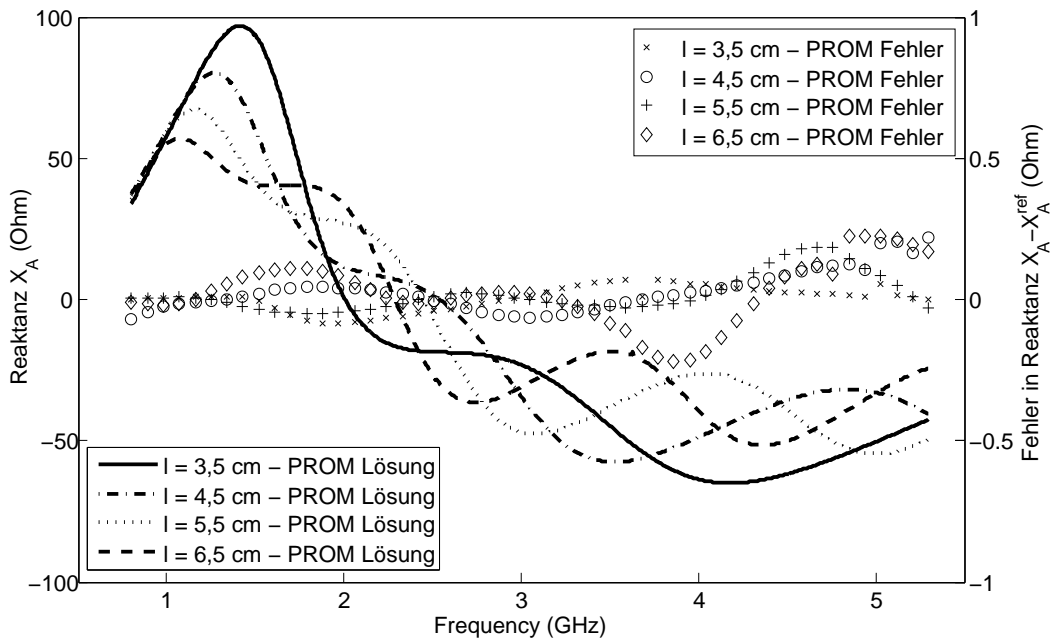
(a) Reaktanz-Fläche.



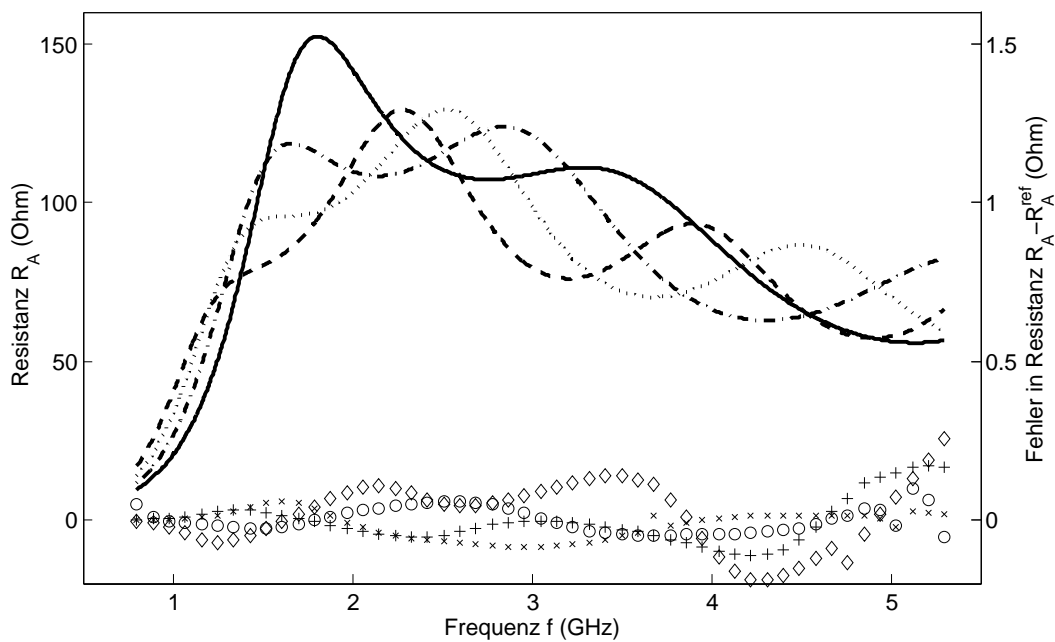
(b) Resistanz-Fläche.

**Abbildung 5.6:** Antwortflächen des Vivaldi-Antennen-Element berechnet mit Hilfe eines PROMs mit äquidistantem Gitter und Gitter-Verfeinerungsstufe  $k = 3$ . Ein Mehrpunkt-MOR-Verfahren erzeugt die Projektionsmatrizen an den Gitterpunkten.

## 5.1. Ein nicht-adaptives Verfahren



(a) Reaktanzen und zugehörige Fehler.



(b) Resistenzen und zugehörige Fehler.

**Abbildung 5.7:** Reaktanzen und Resistenzen des Vivaldi-Antennen-Elements für verschiedene Längen  $l$  berechnet mit Hilfe eines PROMs mit äquidistantem Gitter und Gitterverfeinerungsstufe  $k = 3$  sowie Fehler des PROMs.

Abbildung 5.8(a) gegeben. Schematisch kann der Filter entsprechend Abbildung 5.8(b) als Kaskadierung von Iris-Blenden und leeren RHL-Abschnitten dargestellt werden. Nach Festlegen der Wellenleiterabmessungen  $a$  und  $b$  weist jede Iris-Blende, wie in Abbildung 5.8(c) gezeigt, drei geometrische Parameter auf: die Fensterbreite  $w$ , die Fensterhöhe  $h$  sowie die Fensterdicke  $t$ . Damit ergeben sich für den kompletten Iris-Filter neben der Frequenz insgesamt zwölf geometrische Parameter der Iris-Blenden sowie vier Abstandsparameter.

Mit dem Ziel, das Übertragungsverhalten des gesamten Filters effizient in Abhängigkeit seiner Parameter zu beschreiben, wird folgender Modellierungsansatz gewählt: Zunächst wird ein einzelnes PROM erstellt, welches in der Lage ist, alle Iris-Blenden in Abhängigkeit der Blenden-Parameter  $w$ ,  $h$  und  $t$  darzustellen. Anschließend erfolgt eine Kaskadierung dieses PROM für unterschiedliche Parameter-Konfigurationen entsprechend Abbildung 5.8(b). Die Berücksichtigung der RHL-Abschnitte erfolgt analytisch mittels Wellenleiter-Netzwerk-Theorie [Poz05, Kapitel 3]. Für den gesamten Filter ist damit zu rechnen, dass die Abstände der Iris-Blenden sehr gering werden können [Che67]. Infolgedessen muss das PROM die Übertragungscharakteristik nicht nur der dominanten Wellenform, sondern auch von Wellenformen höherer Ordnung beschreiben. Für den vorliegenden Fall wird der minimale Abstand zwischen zwei Iris-Blenden auf 5 mm gesetzt und die ersten sieben relevanten Wellenformen werden für die Konstruktion des PROMs berücksichtigt.

Unter Verwendung der Parametrierung

$$f \in \mathcal{Q} = [8, 16] \text{ GHz}, \quad (5.36)$$

$$w = (1 + p_1) \cdot 14.5 \text{ mm} \quad p_1 \in [-0.3, 0.3], \quad (5.37)$$

$$h = (1 + p_2) \cdot 2 \text{ mm}, \quad p_2 \in [-0.5, 0.5], \quad (5.38)$$

$$t = (1 + p_3) \cdot 1 \text{ mm}, \quad p_3 \in [-0.5, 0.5], \quad (5.39)$$

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T \quad (5.40)$$

gilt für das parametrische Ausgangsmodell  $\Sigma(k_0, \mathbf{p})$  des Iris-Elements die Darstellung

$$(\mathbf{S}(\mathbf{p}) - k_0^2 \mathbf{T}(\mathbf{p})) \mathbf{x} = j k_0 \eta_0 \hat{\mathbf{B}} \mathbf{i}, \quad (5.41a)$$

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{x}, \quad (5.41b)$$

woraus sich die Impedanzmatrix  $\mathbf{Z}^{ref}$  nach

$$\mathbf{Z}^{ref} = j k_0 \eta_0 \mathbf{P}(k_0) \hat{\mathbf{B}}^T (\mathbf{S}(\mathbf{p}) - k_0^2 \mathbf{T}(\mathbf{p}))^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{P}(k_0) \quad (5.42)$$

sowie die Streumatrix  $\mathbf{S}^{ref}$  entsprechend [Rus03, Kapitel 10] zu

$$\mathbf{S}^{ref} = (\mathbf{Z}^{ref} + \mathbf{I})^{-1} (\mathbf{Z}^{ref} - \mathbf{I}) \quad (5.43)$$

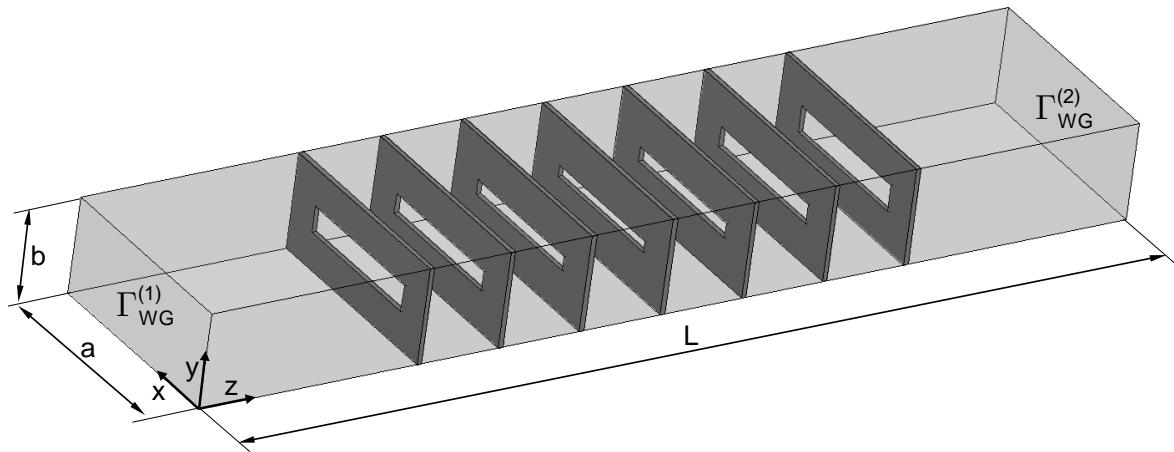
bestimmen lassen. Das entsprechende PROM  $\tilde{\Sigma}(k_0, \mathbf{p})$  ist gemäß Kapitel 4 durch

$$(\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) - k_0^2 \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{p})) \tilde{\mathbf{x}} = j k_0 \eta_0 \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) \mathbf{i}, \quad (5.44a)$$

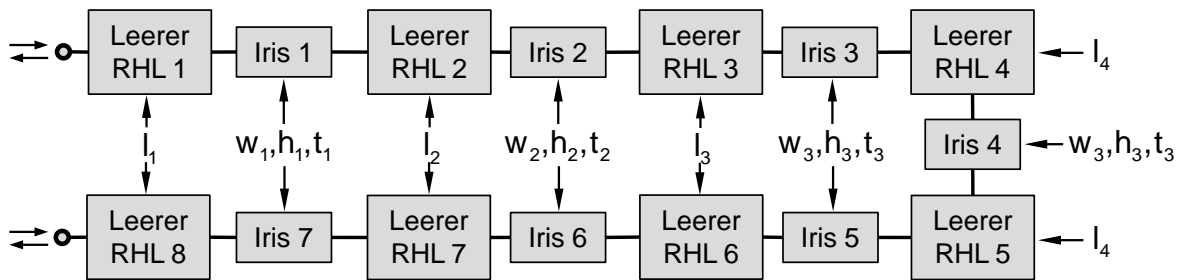
$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{x}}, \quad (5.44b)$$



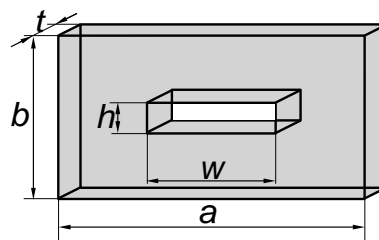
## 5.1. Ein nicht-adaptives Verfahren



(a) Dreidimensionales Modell.



(b) Schematischer Aufbau.



(c) Bemaßung einer Iris-Blende.

**Abbildung 5.8:** Iris-Filter: Abmessungen des Rechteckhohlleiters:  $a = 25,4$  mm,  $b = 12,7$  mm.

gegeben, woraus analog zum Ausgangsmodell  $\Sigma(k_0, \mathbf{p})$  die integralen Größen  $\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{S}$  berechnet werden. Da es sich bei dem Ausgangsmodell  $\Sigma(k_0, \mathbf{p})$  um ein symmetrisches Modell handelt, folgt unter Beachtung von Korollar 3.2 für die reduzierten Matrizen entsprechend (4.10) die Darstellung:

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T \check{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}), \quad (5.45a)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T \check{\mathbf{T}}(\mathbf{p}) \mathbf{V}(\mathbf{p}), \quad (5.45b)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T \hat{\mathbf{B}}. \quad (5.45c)$$

Die Qualität der PROMs wird anhand eines mittleren Fehlers  $e$  in der Streumatrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{N_e \times N_e}$  beurteilt. Dazu werden diskrete Parameterwerte  $f^{(\alpha_1)}, p_1^{(\alpha_2)}, p_2^{(\alpha_3)}, p_3^{(\alpha_4)}$  entsprechend

$$\mathbf{d}_\alpha = [f^{(\alpha_1)}, p_1^{(\alpha_2)}, p_2^{(\alpha_3)}, p_3^{(\alpha_4)}] \quad (5.46)$$

in einem Vektor zusammengefasst, worin  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_4]$  einen von  $\alpha = [1, 1, 1, 1]$  bis  $\alpha = [N_f, N_p, N_p, N_p]$  laufenden Multi-Index bezeichnet. Für den mittlere Fehler  $e$  gilt damit

$$e = \frac{1}{N_e^2 N_f N_p^3} \sum_{\alpha} \sum_{i,j} |S_{i,j}^{ref}(\mathbf{d}_\alpha) - S_{i,j}(\mathbf{d}_\alpha)|, \quad (5.47)$$

worin  $N_e = 14$  die Dimension der Streumatrix,  $N_f = 101$  die Anzahl der äquidistant verteilten Frequenzwerte,  $N_p = 6$  die Anzahl der äquidistant verteilten geometrischen Parameterwerte entlang einer jeden geometrischen Parameterrichtung,  $S_{i,j}^{ref}(\mathbf{d}_\alpha)$  die Komponenten der Referenz-Streumatrix  $\mathbf{S}^{ref}$  und  $S_{i,j}(\mathbf{d}_\alpha)$  die Komponenten der Streumatrix  $\mathbf{S}$  darstellen.

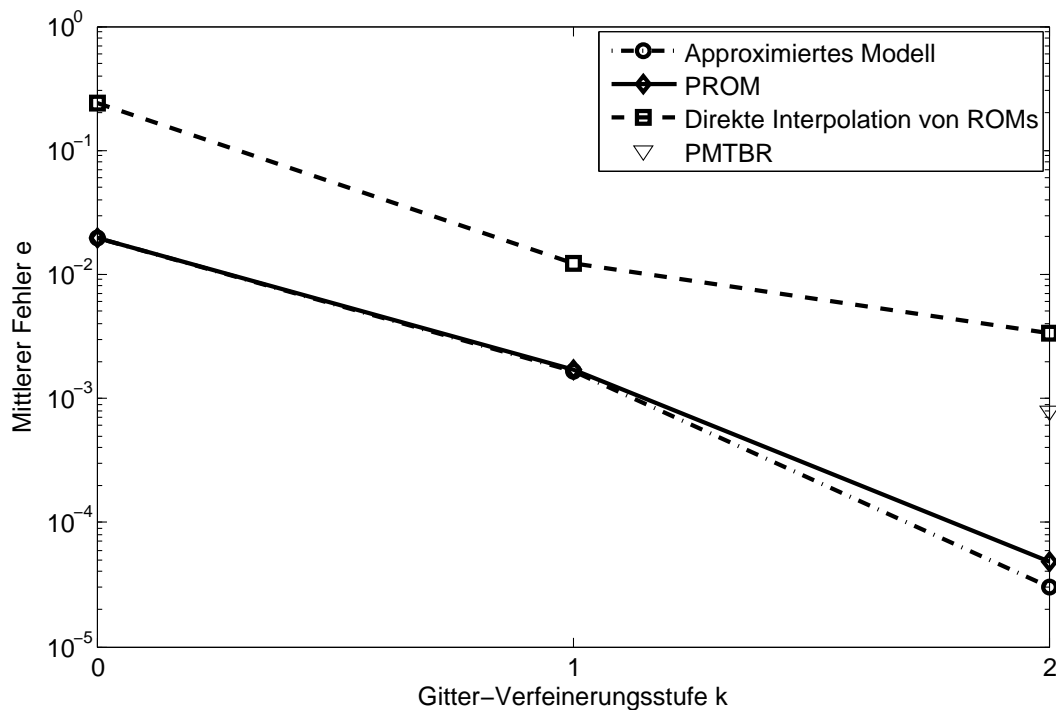
Abbildung 5.9 zeigt den mittleren Fehler  $e$  nach (5.47), ausgehend von einem Gitter  $\mathcal{G}^{(0)}$  mit  $|\mathcal{G}^{(0)}| = 8$  Gitterpunkten, verschiedener parametrischer Ordnungsreduktionsansätze in Abhängigkeit der Gitter-Verfeinerungsstufe  $k$ . Die Verfeinerung ist gleichmäßig und hierarchisch, sodass für die Anzahl der äquidistant verteilten Gitterpunkte

$$|\mathcal{G}^{(k)}| = (2^k + 1)^3 \quad (5.48)$$

gilt. Bei den verglichenen PMOR-Ansätzen handelt es sich um das nicht-adaptive PMOR-Verfahren aus Abschnitt 5.1, die PMTBR-Methode aus [Phi04] sowie dem auf direkter Interpolation von affin parametrisierten reduzierten Modellen basierenden Ansatz [LE09]. Zusätzlich ist der Fehler des interpolierten Modells  $\check{\Sigma}(k_0, \mathbf{p})$  enthalten. Es zeigt sich ein ähnliches Bild wie bereits im Falle des Vivaldi-Antennen-Elements. Der vorgeschlagene Ansatz liefert bei einer Gitter-Verfeinerungsstufe von  $k = 1$ , was  $|\mathcal{G}| = 27$  Instanziierungspunkten entspricht, eine ähnliche Genauigkeit wie die Vergleichsverfahren bei  $k = 2$  mit  $|\mathcal{G}| = 125$  Instanziierungspunkten. Außerdem ist der Fehler des vorgeschlagenen PMOR-Verfahrens vergleichbar mit jenem des interpolierten Modells, womit die vorgeschlagene Darstellung der Unterräume erneut ihre Leistungsfähigkeit demonstriert.

Numerische Daten werden für das vorgeschlagene PMOR-Verfahren in Tabelle 5.2 mit dem FE-Modell verglichen. Den Daten zur Modellauswertung liegt die Annahme

## 5.1. Ein nicht-adaptives Verfahren



**Abbildung 5.9:** Konvergenzen verschiedener Ansätze zur parametrischen Ordnungsreduktion für ein Iris-Element.

**Tabelle 5.2:** Numerische Daten für das Iris-Element<sup>1</sup>. Dem PROM liegt eine Gitter-Verfeinerungsstufe von  $k = 1$  und ein äquidistantes Gitter  $\mathcal{G}$  zugrunde. Es kommt ein Einpunkt-MOR-Verfahren zur Erzeugung der Projektionsmatrizen an den Gitterpunkten zum Einsatz.

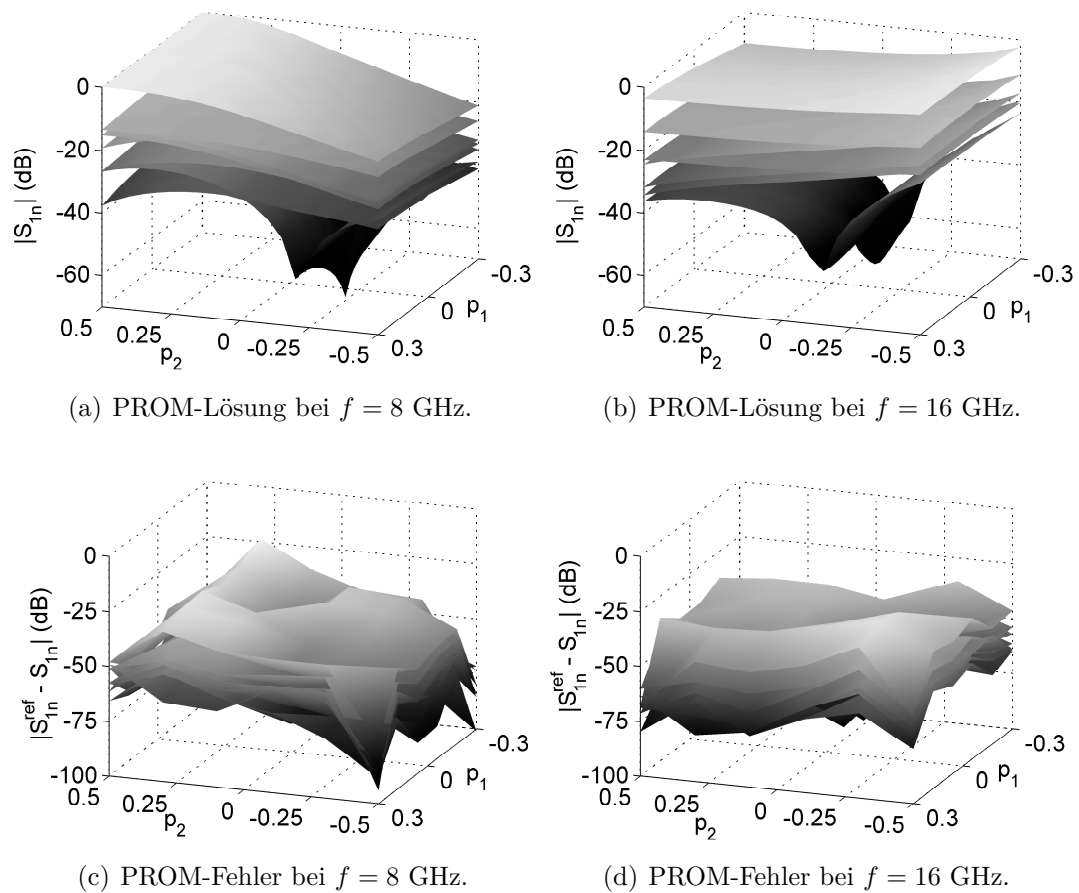
	FE-Modell <sup>2</sup>	PROM <sup>3</sup>
Dimension	124 370	98
Modellgenerierung	19,90 s	11 815,16 s
Darin enthalten: Erzeugung der Datenmengen $\mathbb{M}$ und ggf. $\mathbb{V}$	19,90 s	1 611,13 s
Modellauswertungen pro Sekunde	0,052	438,60
Berechnung einer Antwortflächen mit $11^4$ Punkten	78,84 Std. <sup>4</sup>	33,38 s
Mittlerer Fehler $e$	-	$1,79 \cdot 10^{-3}$

<sup>1</sup> Gerechnet mit einem Thread auf einem Intel Xeon E5620.

<sup>2</sup> Experimentelle FE-Software in C++ mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

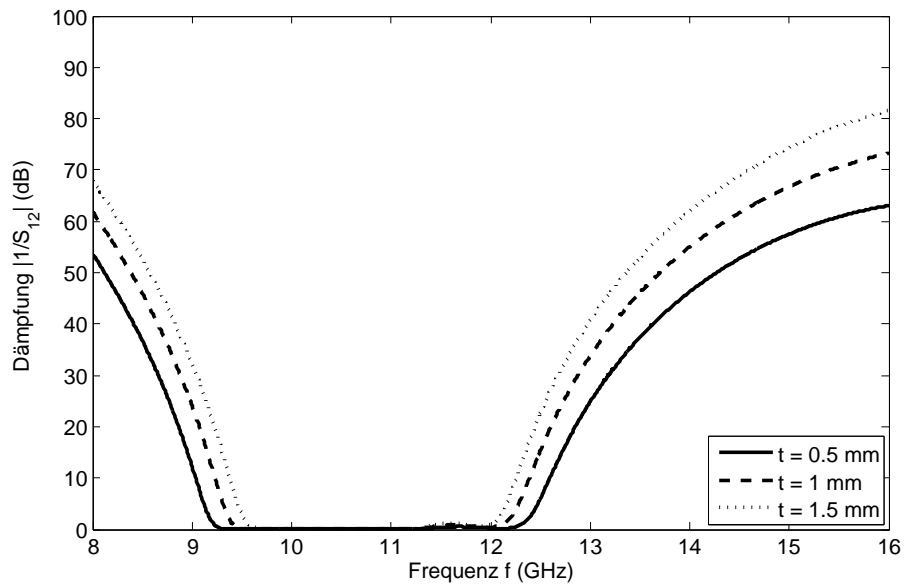
<sup>3</sup> Experimentelles MATLAB-Programm mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

<sup>4</sup> Extrapoliert.

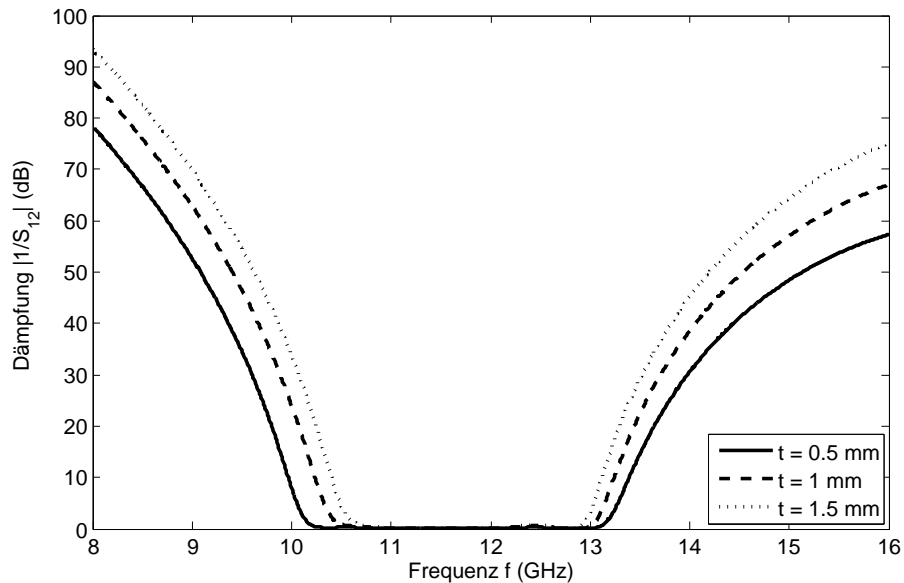


**Abbildung 5.10:** Antwortflächen und Fehler eines Iris-Elements unter Verwendung einer Gitter-Verfeinerungsstufe  $k = 1$  sowie eines äquidistanten Gitters  $\mathcal{G}$ . Die Dicke der Iris-Blende ist auf  $t = 1,35$  mm fixiert.

## 5.1. Ein nicht-adaptives Verfahren



(a) Breite der Blendenöffnungen:  $w_1 = w_7 = 15,519$  mm,  $w_2 = w_6 = 15,189$  mm,  $w_3 = w_5 = 15,011$  mm,  $w_4 = 14,884$  mm. Längen der RHL-Abschnitte:  $l_1 = 20$  mm,  $l_2 = l_3 = l_4 = 8,382$  mm.



(b) Breite der Blendenöffnungen:  $w_1 = w_7 = 14,173$  mm,  $w_2 = w_6 = 13,767$  mm,  $w_3 = w_5 = 13,538$  mm,  $w_4 = 13,411$  mm. Längen der RHL-Abschnitte:  $l_1 = 20$  mm,  $l_2 = l_3 = l_4 = 7,239$  mm.

**Abbildung 5.11:** Dämpfung des gesamten Iris-Filters berechnet durch Auswerten und Kaskadierung des PROMs unter Verwendung einer Gitter-Verfeinerungsstufe  $k = 1$  sowie eines äquidistanten Gitters  $\mathcal{G}$ . Die Fensterhöhen der verschiedenen Iris-Blenden betragen  $h_1 = h_7 = 2,743$  mm,  $h_2 = h_6 = 2,032$  mm,  $h_3 = h_5 = 1,524$  mm,  $h_4 = 1,143$  mm.

zugrunde, dass die Modellauswertungen für Parameterwerte entlang einer Geraden, die diagonal durch den gesamten Parameterraum verläuft, erfolgt. Sobald das PROM zur Verfügung steht, kann dieses ungefähr 8000-mal schneller als das FE-Modell ausgewertet werden. Selbst eine grobe Abrasterung des Parameterraumes mit lediglich  $11^4$  Punkten würde mittels des FE-Modells ungefähr 80 Stunden benötigen, das PROM hingegen liefert die Ergebnisse bereits nach ungefähr einer halben Minute. Der numerische Aufwand zur Erzeugung des PROMs von circa 3,5 Stunden hat sich somit bereits nach einer weitaus größeren Abtastung amortisiert.

Abbildung 5.10 veranschaulicht das Übertragungsverhalten einer Iris-Blende für den Fall, dass ein Wellenleiter-Tor mit der dominanten Wellenform angeregt und deren Transmission auf die sieben Wellenformen am zweiten Wellenleiter-Tor betrachtet wird. Das PROM basiert dabei auf einem äquidistanten Gitter  $\mathcal{G}$  mit Gitter-Verfeinerungsstufe  $k = 1$ . Frequenzgänge der Dämpfung  $|\frac{1}{S_{12}}|$  des gesamten Iris-Filters sind für ausgewählte Konfigurationen in Abbildung 5.11 enthalten. Dabei sind für den gesamten Filter Wellenformen höherer Ordnung von den Diskontinuitäten bis zu den Wellenleiter-Toren bei  $z = 0$  und  $z = L$  bereits so stark gedämpft, dass diese nicht berücksichtigt werden und somit  $S_{12}$  die Transmission der dominanten Wellenformen darstellt.

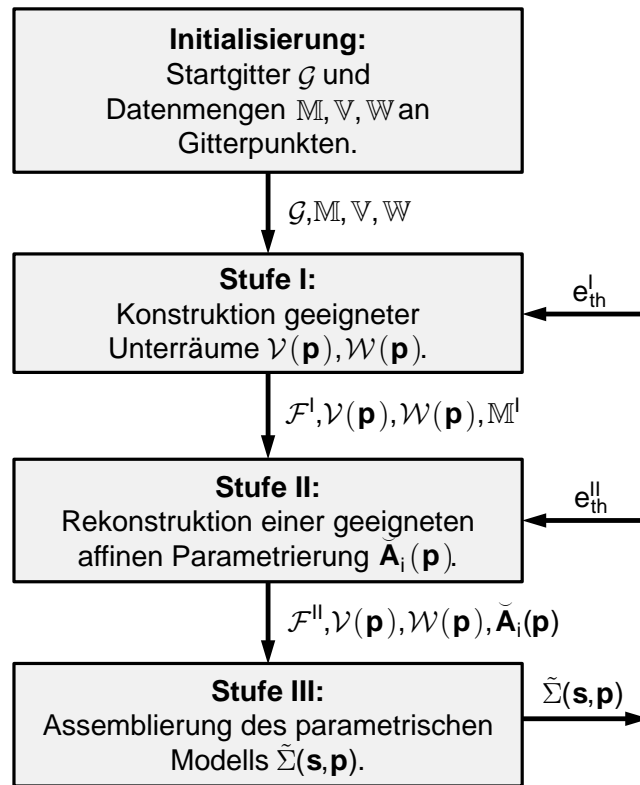
## 5.2 Ein adaptives Verfahren

### 5.2.1 Einleitung und Konzeption

In diesem Abschnitt wird ein selbst-adaptives Verfahren zur parametrischen Ordnungsreduktion basierend auf dem Rahmenwerk aus Kapitel 4 vorgestellt. Dabei handelt es sich um ein Teilbereichsverfahren, welches auf einer Diskretisierung des Raumes  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter in Form von Hyperkuben  $\mathcal{H}$  operiert.

Das Verfahren lässt sich entsprechend Abbildung 5.12 in drei sequentiell ablaufende Stufen einteilen. Nach Vorgabe eines Startgitters  $\mathcal{G}$  sowie der Datenmengen  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{V}$  und  $\mathbb{W}$  gemäß (4.14) und (4.5) werden in Stufe I die von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$ ,  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  im Rahmen eines selbst-adaptiven Prozesses derart bestimmt, dass der durch die Interpolation der Unterräume verursachte Fehler eine vorgegebene integrale Fehlerschranke  $e_{th}^I$  unterschreitet. Der selbst-adaptive Prozess regelt dabei die Feinheit der Diskretisierung von  $\mathcal{P}$  durch ungleichmäßige Unterteilung des Startgitters  $\mathcal{G}$ . Nach Abarbeiten von Stufe I liegen neben  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{G}^I$  sowie die zugehörigen Datenmengen  $\mathbb{M}^I$ ,  $\mathbb{V}^I$  und  $\mathbb{W}^I$  vor.

Stufe II übernimmt aus Stufe I das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{G}^I$ , die von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$ ,  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  und die Menge der Modellinstanziierungen  $\mathbb{M}^I$ . In dieser Stufe wird nach Vorgabe einer weiteren, auf die Übertragungsmatrix bezogenen, integralen Fehlerschranke  $e_{th}^{II}$  unter Verwendung von polynomiellen Interpolationsfunktionen konstanter Ordnung für jeden Hyperkubus  $\mathcal{H}$



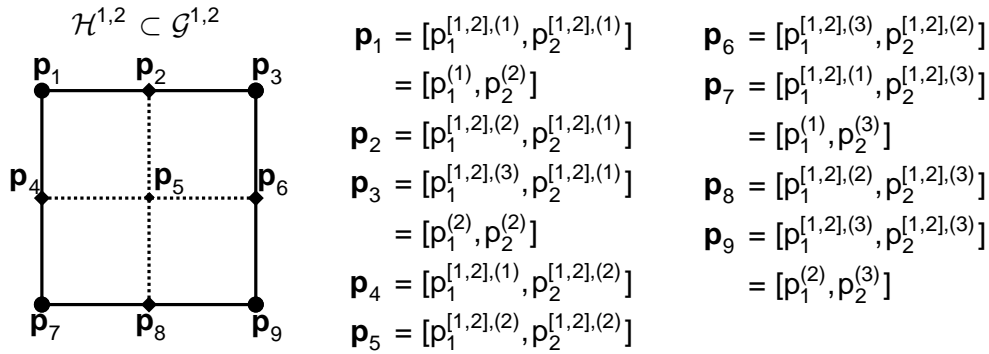
**Abbildung 5.12:** Algorithmische Struktur des adaptiven Verfahrens zur parametrischen Modellordnungsreduktion.

die affine Parameterrekonstruktion nach Abschnitt 4.2 separat bestimmt. Dies erfolgt ebenfalls im Rahmen eines selbst-adaptiven Prozesses, bei dem das Ausgangsgitter  $\mathcal{G}^I$  weiter ungleichmäßig verfeinert wird. Da aus Stufe I die parameterabhängigen Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p}), \mathcal{W}(\mathbf{p})$  bekannt sind, können auf die Übertragungsmatrix bezogene Interpolationsfehler äußerst effizient bestimmt werden.

Den Abschluss des adaptiven Verfahrens bildet Stufe III, die eine Vor-Assemblierung des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Satz 4.3 beinhaltet.

### 5.2.2 Diskrete Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter

Das selbst-adaptive Verfahren operiert mittels eines ungleichmäßigen Verfeinerungsoperators  $\psi$  auf einer Diskretisierung  $\mathcal{F}$  des Raumes  $\mathcal{P}$ . Diese setzt sich aus Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  zusammen, welche zusätzlich mit einem Tensorgitter  $\mathcal{G}^\alpha$  versehen sind. Die benötigten Strukturen werden im Folgenden eingeführt:



**Abbildung 5.13:** Strukturierung des Raumes  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter. Zweidimensionales Beispiel für einen Hyperkubus  $\mathcal{H}^{[1,2]}$  mit Unter-Tensorgitter  $\mathcal{G}^{[1,2]}$ .

**Definition 5.7** (Unter-Tensorgitter eines Hyperkubus). *Gegeben sei ein Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  nach Definition 5.2. Ein dem Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  zugeordnetes Unter-Tensorgitter  $\mathcal{G}^\alpha \supseteq \mathcal{H}^\alpha$  ist mittels der Punktmenge*

$$\mathcal{N}_i^\alpha = \{p_i^{\alpha,(1)}, \dots, p_i^{\alpha,(K_i^\alpha)}\}, \quad \alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_P], \quad \alpha_i \in \{1, \dots, K_i - 1\} \quad (5.49)$$

definiert als

$$\mathcal{G}^\alpha = \mathcal{N}_1^\alpha \times \dots \times \mathcal{N}_P^\alpha, \quad (5.50)$$

wobei die Eckpunkte des Unter-Tensorgitters  $\mathcal{G}^\alpha$  mit denen des zugeordneten Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  übereinstimmen. Es gilt somit

$$p_i^{\alpha,(1)} = p_i^{(\alpha_i)}, \quad (5.51)$$

$$p_i^{\alpha,(K_i^\alpha)} = p_i^{(\alpha_i+1)}. \quad (5.52)$$

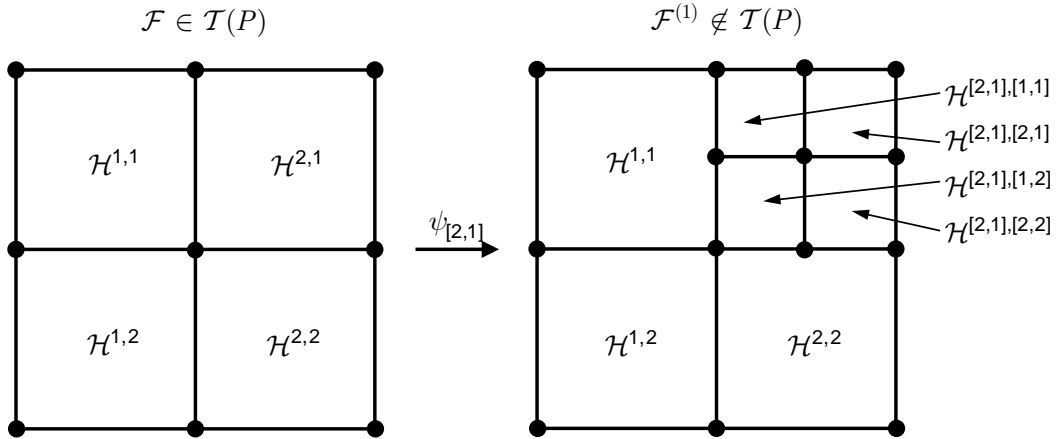
In Abbildung 5.13 ist das Unter-Tensorgitter  $\mathcal{G}^{[1,2]}$  des Hyperkubus  $\mathcal{H}^{[1,2]}$  aus Abbildung 5.1 für  $K_1^{[1,2]} = K_2^{[1,2]} = 3$  veranschaulicht.

**Definition 5.8** (Diskretisierung durch Hyperkuben). *Gegeben sei der Raum  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter. Eine Diskretisierung  $\mathcal{F}$  von  $\mathcal{P}$  mittels nicht überlappender Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  nach Definition 5.2 ist durch*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha} \mathcal{H}^\alpha \quad (5.53)$$

bestimmt, wobei die Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  ein zugeordnetes Unter-Tensorgitter  $\mathcal{G}^\alpha$  nach Definition 5.7 enthalten.





**Abbildung 5.14:** Veranschaulichung der ungleichmäßigen Verfeinerung eines zweidimensionalen Gitters  $\mathcal{F}$ .

**Definition 5.9** (Ungleichmäßige Verfeinerung). *Gegeben sei eine Diskretisierung  $\mathcal{F}$  des Raumes  $\mathcal{P}$  der impliziten Parameter in Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  nach Definition 5.8 mit zugeordneten Unter-Tensorgittern  $\mathcal{G}^\alpha$  nach Definition 5.7. Eine ungleichmäßige Verfeinerung von  $\mathcal{F}$  ist durch den ungleichmäßigen Verfeinerungsoperator*

$$\psi_\gamma : \mathcal{T}(P) \rightarrow \mathcal{T}(P), \quad (5.54a)$$

$$\psi_\gamma(\mathcal{H}^\alpha) = \begin{cases} \bigcup_\beta \mathcal{H}^{\alpha,\beta}, & \text{falls } \alpha = \gamma, \\ \mathcal{H}^\alpha, & \text{falls } \alpha \neq \gamma \end{cases} \quad (5.54b)$$

mit den Multi-Indices

$$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_P], \quad \alpha_i \in \{1, \dots, K_i - 1\}, \quad (5.55a)$$

$$\beta = [\beta_1, \dots, \beta_P], \quad \beta_i \in \{1, 2\}, \quad (5.55b)$$

$$\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_P], \quad \gamma_i \in \{1, \dots, K_i - 1\} \quad (5.55c)$$

sowie den auf  $\mathcal{G}^\gamma$  wirkenden gleichmäßigen Verfeinerungsoperator  $\psi$  nach Definition 5.5 bestimmt. Dabei werden der durch  $\gamma$  identifizierte Hyperkubus aus  $\mathcal{F}$  in  $2^P$  nicht überlappende Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha,\beta}$  und das zugehörige Unter-Tensorgitter  $\mathcal{G}^\gamma$  unterteilt. Für das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$  gilt:

$$\mathcal{F}^{(1)} = \bigcup_\alpha \psi_\gamma(\mathcal{H}^\alpha), \quad (5.56a)$$

$$|\mathcal{F}^{(1)}| \geq |\mathcal{F}|. \quad (5.56b)$$

Abbildung 5.14 veranschaulicht die ungleichmäßige Verfeinerung eines zweidimensionalen Gitters  $\mathcal{F}$ , bei der Hyperkubus  $\mathcal{H}^{[2,1]}$  unterteilt wird.

**Definition 5.10** (Hierarchische Verfeinerung). *Gegeben sei ein Gitter  $\mathcal{F}$  nach Definition 5.8 sowie eine Verfeinerung nach Satz 5.9. Die Verfeinerung ist genau dann hierarchisch, wenn für das verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$*

$$\mathcal{F}^{(1)} \supset \mathcal{F} \quad (5.57)$$

gilt.

### 5.2.3 Stufe I: Darstellung der von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume

In Stufe I werden die parameterabhängigen Darstellungen der Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  gemäß Definition 4.8 bestimmt. Ausgangspunkt ist eine Diskretisierung des Raumes  $\mathcal{P}$  durch ein Tensorgitter  $\mathcal{G}$  nach Definition 5.1, welches vollständig in Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  nach Definition 5.2 zerlegt ist. Für jeden Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  werden separat definierte multilineare Interpolationsfunktionen  $\omega_{m,\alpha}^V, \omega_{m,\alpha}^W$  nach (5.23) angesetzt. Im Rahmen eines selbst-adaptiven Prozesses erfolgt eine ungleichmäßige Verfeinerung des Ausgangsgitters  $\mathcal{G}$  solange, bis ein durch die Unterraum-Interpolation hervorgerufener Fehler eine vorgegebene Fehlerschranke  $e_{th}^I$  unterschreitet. Es wird sowohl ein *zielorientierter* Fehler als auch ein *nicht zielorientierter* Fehler betrachtet. Der zielorientierte Fehler bezieht sich auf die Übertragungsmatrix des durch die Fehlerursache, hier die multilineare Interpolation der Unterräume, fehlerbehafteten Modells und ist daher gut zu interpretieren. Daneben bezieht sich der nicht zielorientierte Fehler unmittelbar auf die Interpolationsfehler in der Darstellung der Unterräume und nutzt keine weiteren Modell-Informationen aus. Die Beurteilung der Relevanz eines solchen Fehlermaßes für die Qualität der Modell-Übertragungscharakteristik gestaltet sich schwieriger als im Falle des zielorientierten Ansatzes. Allerdings entfällt für den nicht zielorientierten Fehler die Notwendigkeit zur Bestimmung der Übertragungscharakteristik mittel Modellauswertungen.

Der adaptive Prozess selbst besteht aus einer *Markierungsstrategie*, einer *Verfeinerungsstrategie* sowie einer *Iterationsvorschrift*. Diese werden in den folgenden drei Abschnitten detailliert beschrieben.

#### Markierungsstrategie

Die Markierungsstrategie weist jedem Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  des Gitters  $\mathcal{F}$  einen Fehler  $e^\alpha \in \mathbb{R}$  zu und markiert denjenigen Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  mit dem größten zugeordneten Fehler zur anschließenden Verfeinerung gemäß der Verfeinerungsstrategie. Der Fehler  $e^\alpha$  wird dabei in einem Fehlerpunkt

$$\mathbf{p}_e^{(\alpha)} \in \text{conv}(\mathcal{H}^\alpha), \quad (5.58a)$$

$$\mathbf{p}_e^{(\alpha)} \notin \mathcal{H}^\alpha \quad (5.58b)$$

bestimmt. Da die Eckpunkte des Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  Interpolationspunkte der Unterraum-Interpolation darstellen, ist der größte Interpolationsfehler im Zentrum von  $\mathcal{H}^\alpha$  zu erwarten. Somit ist die Lokalisierung der Fehlerpunkte  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$  in den Zentren der Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  zweckmäßig. Im Folgenden wird sowohl ein zielorientierter Fehler als auch ein nicht zielorientierter Fehler vorgestellt.

Der zielorientierte Ansatz misst einen über dem Raum  $\mathcal{Q}$  der affinen Parameter gemittelten Fehler in der  $(m, n)$ -Komponente der Übertragungsmatrix eines durch die

approximative Natur der Unterraum-Interpolationen fehlerbehafteten *Ersatzmodells*  $\tilde{\Sigma}_e(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  an der Stelle  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_e^{(\alpha)}$ . Das Ersatzmodell  $\tilde{\Sigma}_e(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  basiert dabei direkt auf dem Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  und nicht auf dem interpolierten Modell  $\check{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ . Damit ist die affine Parameterrekonstruktion als Fehlerquelle in  $\tilde{\Sigma}_e(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  ausgenommen. Es gelten folgende Überlegungen:

**Definition 5.11** (Ersatzmodell). *Gegeben seien auf orthogonalen Projektionen basierende Darstellungen der Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  nach Definition 4.8 sowie ein Ausgangsmodell  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3. Instanziierungen  $\tilde{\Sigma}_e^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  eines Ersatzmodells an Fehlerpunkten  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_e^{(\alpha)}$  mit dem Zweck der Fehlerbestimmung sind durch Instanziierung  $\Sigma^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  des Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  an  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_e^{(\alpha)}$  und anschließende Projektion in die Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$ ,  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  gemäß (4.10) bestimmt.*

**Korollar 5.2.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}_e^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  des Ersatzmodells  $\tilde{\Sigma}_e^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  nach Definition 5.11 ist durch Definition 2.5 bestimmt.*

**Definition 5.12** (reduziertes Referenzmodell der Stufe I). *Gegeben sei die Instanziierung  $\Sigma^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  eines Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3 an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$ . Dabei handelt es sich gemäß Satz 2.2 formal um ein affin parametrisiertes Modell der Form (2.9). Mittels der Methoden aus Kapitel 3 können hierfür Unterräume  $\mathcal{V}^{(\alpha)}$ ,  $\mathcal{W}^{(\alpha)}$  sowie durch Projektion in diese ein reduziertes Modell  $\tilde{\Sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  erzeugt werden. Das Modell  $\tilde{\Sigma}^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  heißt reduziertes Referenzmodell an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$ .*

**Korollar 5.3.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}_{ref}^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  des reduzierten Referenzmodells nach Definition 5.12 ist durch Definition 2.5 bestimmt.*

**Definition 5.13** (zielorientierter Fehler der Stufe I). *Gegeben ist die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}_e^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  nach Korollar 5.2 des Ersatzmodells sowie die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}_{ref}^{(\alpha)}(\mathbf{s})$  nach Korollar 5.3 des reduzierten Referenzmodells jeweils an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$ . Ein zielorientierter Fehler mit Bezug auf die  $(m, n)$ -Komponente der Übertragungsmatrix ist durch*

$$e^\alpha(\mathbf{s}) = \left| [\tilde{\mathbf{H}}_e^{(\alpha)}(\mathbf{s})]_{mn} - [\tilde{\mathbf{H}}_{ref}^{(\alpha)}(\mathbf{s})]_{mn} \right| \quad (5.59)$$

*definiert. Des Weiteren wird durch Auswerten von  $e^\alpha(\mathbf{s})$  an einem äquidistanten Punktgitter  $\mathcal{E}$  im Raum  $\mathcal{Q}$  der affinen Parameter ein gemittelter Fehler der Form*

$$e^\alpha = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{n_s=1}^{|\mathcal{E}|} e^\alpha(\mathbf{s}^{(n_s)}), \quad \mathbf{s}^{(n_s)} \in \mathcal{E} \quad (5.60)$$

*eingeführt.*

Ein nicht zielorientierter Fehler  $e^\alpha$  mit Bezug auf den Interpolationsfehler in der Darstellung der Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  wird in der folgenden Definition eingeführt.

**Definition 5.14** (nicht zielorientierter Fehler der Stufe I). *Gegeben sind die von den impliziten Parametern abhängigen Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  sowie an den Fehlerpunkten  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$  instanziierte Referenz-Unterräume  $\mathcal{V}_{ref}^{(\alpha)}$  und  $\mathcal{W}_{ref}^{(\alpha)}$  gemäß Definition 5.12. Der Fehler  $e^\alpha$  in den Unterräumen  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$  ist mittels eines geeigneten Abstandsmaßes*

$$\text{dist} : \mathbf{Gr}(N, n) \times \mathbf{Gr}(N, n) \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.61)$$

durch

$$e^\alpha = \frac{1}{2} \left( \text{dist} \left( \mathcal{V}(\mathbf{p}_e^{(\alpha)}), \mathcal{V}_{ref}^{(\alpha)} \right) + \text{dist} \left( \mathcal{W}(\mathbf{p}_e^{(\alpha)}), \mathcal{W}_{ref}^{(\alpha)} \right) \right) \quad (5.62)$$

bestimmt.

Eine Übersicht über mögliche Abstandsmaße  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  ist in [EAS98] enthalten.

Sowohl der zielorientierte als auch der auf den Unterräumen direkt basierende Ansatz benötigen zusätzliche Daten an den Fehlerpunkten  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$ . Die Datenmengen  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{W}$  und  $\mathbb{M}$  werden entsprechend ergänzt und umfassen somit Instanziierungen der Unterräume sowie der Ausgangsmodelle an allen Punkten des Gitters  $\mathcal{F}$  und zusätzlich an den Punkten  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$ . Zur Berechnung des auf Unterräumen basierenden Fehlers nach Definition 5.14 muss im Gegensatz zur zielorientierten Variante nach Definition 5.13 weder das Ersatzmodell noch das reduzierte Referenzmodell erzeugt und ausgewertet werden.

## Verfeinerungsstrategie

Es sei  $\mathcal{H}^\gamma$  der durch die Markierungsstrategie markierte Hyperkubus, es gelte also

$$\gamma = \min_{\alpha} \{e^\alpha\} \quad (5.63)$$

mit  $e^\alpha$  nach Definition 5.13 oder Definition 5.14. Die Verfeinerungsstrategie besteht darin, den Hyperkubus  $\mathcal{H}^\gamma$  des Gitters  $\mathcal{F}$  nach Definition 5.9 ungleichmäßig und hierarchisch im Sinne von Definition 5.10 zu unterteilen. Dadurch ergibt sich das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$ . Durch die hierarchische Verfeinerung können sämtliche Daten des Gitters  $\mathcal{F}$  vor der Verfeinerung für das verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$  weiter verwendet werden.

## Iterationsvorschrift

Das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$  dient als Startgitter  $\mathcal{F}$  für den nächsten adaptiven Durchlauf. Die Iteration wird abgebrochen, sobald das gewichtete Mittel  $e^I$  aus den Fehlern  $e^\alpha$  unterhalb der vorgegebenen Fehlerschranke  $e_{th}^I$  liegt und daher

$$e^I < e_{th}^I \quad (5.64)$$

gilt. Die Mittelung erfolgt nach

$$e^I = \frac{1}{V(\mathcal{F})} \sum_{\alpha} e^{\alpha} V(\mathcal{H}^{\alpha}), \quad (5.65)$$

worin

$$V : \mathcal{T}(P) \rightarrow \mathbb{R} \quad (5.66)$$

das Volumen eines Tensorgitters berechnet. Als Ergebnis von Stufe I liegt damit das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^I$ , die Datenmengen  $\mathbb{M}^I$ ,  $\mathbb{V}^I$ ,  $\mathbb{W}^I$  sowie eine bezüglich der Fehlerschranke  $e_{th}^I$  legitimierte Darstellungen von  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  vor.

### Grafische Veranschaulichung

Die wesentlichen Schritte von Stufe I des selbst-adaptiven Ordnungsreduktionsverfahrens sind in Abbildung 5.15 für einen zweidimensionalen Parameterraum  $\mathcal{P}$  mit vier Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  im Ausgangsgitter grafisch veranschaulicht.

#### 5.2.4 Stufe II: Darstellung der affinen Parameterrekonstruktion

Gegenstand von Stufe II ist die Darstellung der affinen Parameterrekonstruktion nach Abschnitt 4.2 derart, dass ein durch diese hervorgerufener Fehler die vorgegebene Fehlerschranke  $e_{th}^{II}$  unterschreitet. Hierzu wird ein selbst-adaptiver Prozess ähnlich dem aus Stufe I herangezogen, welcher das Gitter  $\mathcal{F}$  bestehend aus Hyperkuben  $\mathcal{H}^{\alpha}$  ungleichmäßig verfeinert. Als Startgitter dient das aus Stufe I ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^I$ .

Für das adaptive Verfahren werden die Interpolationsfunktionen  $\Gamma_l$  in (4.1) für jeden Hyperkubus  $\mathcal{H}^{\alpha}$  separat als multivariate Lagrange-Polynome mit konstanter Ordnung  $K - 1$  definiert. Mit den univariaten Lagrange-Polynomen

$$\gamma_{i,j} \in \mathbb{P}(K - 1, 1), \quad (5.67)$$

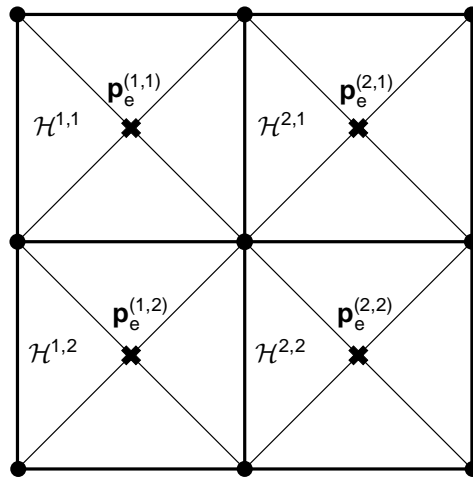
der expliziten Form gemäß (5.17) sowie dem Multi-Index

$$\beta^{(l)} = [\beta_1^{(l)}, \dots, \beta_P^{(l)}], \quad \beta_i^{(l)} \in \{1, \dots, K\} \quad (5.68)$$

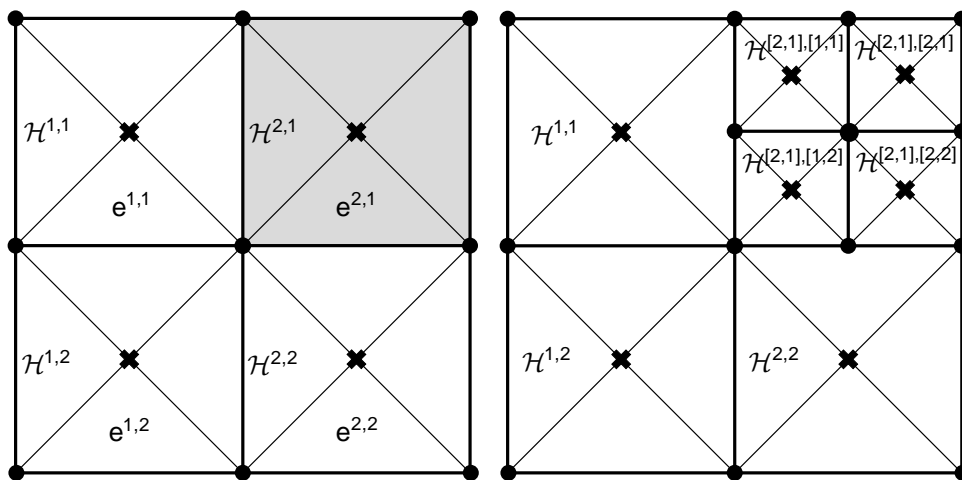
gilt:

$$\text{supp}(\Gamma_{l,\alpha}) = \text{conv}(\mathcal{H}^{\alpha}), \quad (5.69a)$$

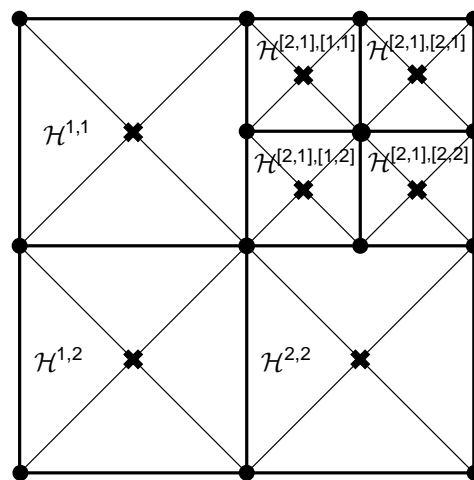
$$\Gamma_{l,\alpha}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \gamma_{\beta_1^{(l)},1}(p_1) \cdot \dots \cdot \gamma_{\beta_P^{(l)},P}(p_P), & \mathbf{p} \in \text{conv}(\mathcal{H}^{\alpha}), \\ 0, & \mathbf{p} \notin \text{conv}(\mathcal{H}^{\alpha}). \end{cases} \quad (5.69b)$$



(a) Startgitter  $\mathcal{F}$ .



(b) Ergebnis der Markierungsstrategie.



(c) Ergebnis der Verfeinerungsstrategie.

**Abbildung 5.15:** Veranschaulichung von Stufe I des selbst-adaptiven Verfahrens zur parametrischen Ordnungsreduktion. Gitterpunkte sind mit runden Markern und Fehlerpunkte  $\mathbf{p}_e^\alpha$  in den Zentren der Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  mit Kreuzen dargestellt.

## 5.2. Ein adaptives Verfahren

---

Somit ergibt sich für die affine Parameterrekonstruktion mit den matrixwertigen Koeffizienten  $\mathbf{A}_{i,l}^\alpha \in \mathbb{C}^{N \times N}$  der Teilbereichs-Ansatz:

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{p}) \approx \check{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p}) = \sum_{l=1}^L \Gamma_{l,\alpha}(\mathbf{p}) \mathbf{A}_{i,l}^\alpha, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{H}^\alpha. \quad (5.70)$$

Um die Interpolationen (5.70) eindeutig zu bestimmen, werden die Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  mit zugeordneten Unter-Tensorgittern  $\mathcal{G}^\alpha$  entsprechend Definition 5.7 ausgestattet. Die Gitterpunkte von  $\mathcal{G}^\alpha$  stellen dabei Interpolationspunkte der multivariaten Lagrange-Polynome dar.

Der selbst-adaptive Prozess von Stufe II ist analog zu dem in Stufe I in eine Markierungsstrategie, eine Verfeinerungsstrategie und eine Iterationsvorschrift unterteilt.

### Markierungsstrategie

Das Ziel der Markierungsstrategie besteht darin, jenen Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  zur Verfeinerung zu markieren, der den größten zugeordneten Fehler  $e^\alpha$  aufweist. Da ein Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  in Stufe II mit dem zugeordneten Tensorgitter  $\mathcal{G}^\alpha$  ausgestattet ist, an dessen Gitterpunkten der Interpolationsfehler verschwindet, wird nicht nur ein einzelner Fehlerpunkt  $\mathbf{p}_e^{(\alpha)}$  sondern eine Menge von Fehlerpunkten

$$\mathcal{E}^\alpha := \left\{ \mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)} \right\} \quad (5.71)$$

herangezogen, an deren Elementen Einzelfehler  $e^{\alpha,\beta}$  bestimmt werden. Eine Mittelwertbildung gemäß

$$e^\alpha = \frac{1}{|\mathcal{E}^\alpha|} \sum_{\beta} e^{\alpha,\beta} \quad (5.72)$$

definiert den dem Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  zugeordneten Fehler  $e^\alpha$ . Die Verteilung der Fehlerpunkte  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  erfolgt nach Unterteilung des dem Hyperkubus  $\mathcal{H}^\alpha$  zugeordneten Unter-Tensorgitters  $\mathcal{G}^\alpha$  in nicht überlappende Hyperkuben  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^\alpha}^\beta$  gemäß

$$\mathcal{G}^\alpha = \bigcup_{\beta} \mathcal{H}_{\mathcal{G}^\alpha}^\beta. \quad (5.73)$$

Es gilt

$$\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)} \in \text{conv} \left( \mathcal{H}_{\mathcal{G}^\alpha}^\beta \right), \quad (5.74a)$$

$$\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)} \notin \mathcal{H}_{\mathcal{G}^\alpha}^\beta, \quad (5.74b)$$

wobei sich eine Lokalisierung der Fehlerpunkte  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  in den Zentren der Hyperkuben  $\mathcal{H}_{\mathcal{G}^\alpha}^\beta$  anbietet, da dort der größte Interpolationsfehler zu erwarten ist.

Zur Bestimmung der Einzelfehler  $e^{\alpha,\beta}$  schlägt der Autor einen zielorientierten Ansatz vor. Dazu werden an den Fehlerpunkten  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  zum einen das parametrische reduzierte

Modelle  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  unter Verwendung der zum aktuellen Zustand des Algorithmus verfügbaren Interpolationen nach (5.70) sowie der Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$ ,  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  aus Stufe I nach (4.10) instantiiert. Zum anderen wird die Konstruktion von reduzierten Referenzmodellen  $\tilde{\Sigma}_{ref}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  an  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  durchgeführt. Die Einzelfehler  $e_i^\alpha$  werden anschließend auf Basis der Übertragungsmatrizen von  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)})$  und  $\tilde{\Sigma}_{ref}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  bestimmt. Die Vorgehensweise wird im Folgenden präzisiert:

**Definition 5.15** (reduziertes Referenzmodell der Stufe II). *Gegeben sei die Instanziierung  $\Sigma^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  eines Ausgangsmodells  $\Sigma(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Definition 2.3 an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  sowie auf orthogonalen Projektionen basierende Darstellungen der Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  gemäß Definition 4.8. Ein reduziertes Referenzmodell  $\tilde{\Sigma}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  ist durch Projektion entsprechend Definition 4.4 definiert.*

**Korollar 5.4.** *Die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}_{ref}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  des reduzierten Referenzmodells  $\tilde{\Sigma}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  nach Definition 5.15 ist durch Definition 2.5 bestimmt.*

**Definition 5.16** (zielorientierter Fehler der Stufe II). *Gegeben ist die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  nach Korollar 2.5 des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  sowie die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}_{ref}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})$  nach Korollar 5.4 des reduzierten Referenzmodells jeweils an der Stelle  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$ . Ein zielorientierter Fehler mit Bezug auf die  $(m, n)$ -Komponente der Übertragungsmatrix ist durch*

$$e^{\alpha,\beta}(\mathbf{s}) = \left| [\tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{s}, \mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)})]_{mn} - [\tilde{\mathbf{H}}_{ref}^{(\alpha),(\beta)}(\mathbf{s})]_{mn} \right| \quad (5.75)$$

definiert. Des Weiteren wird durch Auswerten von  $e^{\alpha,\beta}(\mathbf{s})$  an einem äquidistanten Punktgitter  $\mathcal{E}$  im Raum  $\mathcal{Q}$  der affinen Parameter ein gemittelter Fehler der Form

$$e^{\alpha,\beta} = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{n_s=1}^{|\mathcal{E}|} e^{\alpha,\beta}(\mathbf{s}^{(n_s)}), \quad \mathbf{s}^{(n_s)} \in \mathcal{E} \quad (5.76)$$

eingeführt.

Da das reduzierte Referenzmodell entsprechend Definition 5.15 mittels der interpolierten Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$  und  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  aus Stufe I konstruiert wird, ist es nicht erforderlich, an den Fehlerpunkten  $e^{\alpha,\beta}$  zusätzliche Referenz-Unterräume nach Kapitel 3 zu berechnen. Dieser Umstand beschleunigt den selbst-adaptiven Prozess erheblich.

## Verfeinerungsstrategie

Die Verfeinerungsstrategie von Stufe II ist analog zu jener aus Stufe I. Der mittels der Markierungsstrategie identifizierte Hyperkubus  $\mathcal{H}^\gamma$  wird auf hierarchische Weise verfeinert, womit sich das ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$  ergibt. Die Verfeinerung erfolgt entsprechend den Definitionen 5.9 und 5.10.



### Iterationsvorschrift

Das entsprechend der Verfeinerungsstrategie ungleichmäßig verfeinerte Gitter  $\mathcal{F}^{(1)}$  dient als Startgitter  $\mathcal{F}$  für den darauffolgenden adaptiven Durchlauf. Die adaptive Schleife wird abgebrochen, sobald

$$e^{II} < e_{th}^{II} \quad (5.77)$$

erfüllt ist, wobei für den gemittelten Fehler

$$e^{II} = \frac{1}{V(\mathcal{F})} \sum_{\alpha} e^{\alpha} V(\mathcal{H}^{\alpha}) \quad (5.78)$$

gilt.

Nach Durchlauf von Stufe II liegen somit bezüglich der Fehlerschranke  $e_{th}^I$  legitimierte Darstellungen der Unterräume  $\mathcal{V}(\mathbf{p})$ ,  $\mathcal{W}(\mathbf{p})$  sowie eine bezüglich  $e_{th}^{II}$  legitimierte Form der affinen Parameterrekonstruktion  $\tilde{\mathbf{A}}_i(\mathbf{p})$  vor. Das nach Stufe II ungleichmäßig verfeinerte Gitter wird mit  $\mathcal{F}^{II}$  gekennzeichnet.

### Grafische Veranschaulichung

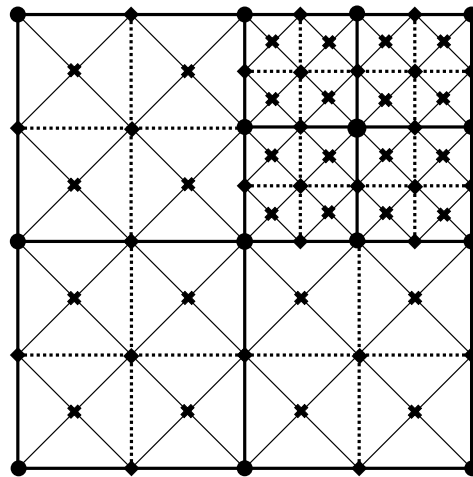
Abbildung 5.16 veranschaulicht den Ablauf von Stufe II des selbst-adaptiven Verfahrens. Als Ausgangssituation dient das Gitter  $\mathcal{F}^I$  aus Abbildung 5.15(c).

## 5.2.5 Stufe III: Assemblierung des parametrischen reduzierten Modells

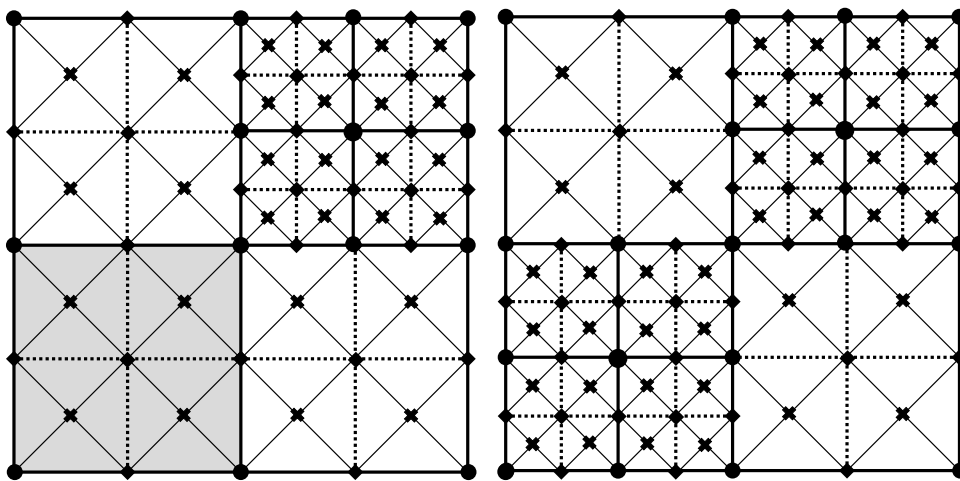
Nach Stufe II sind alle erforderlichen Größen zur Darstellung des parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  vorhanden und es erfolgt eine Vor-Assemblierung entsprechend Satz 4.3.

## 5.2.6 Numerisches Beispiel

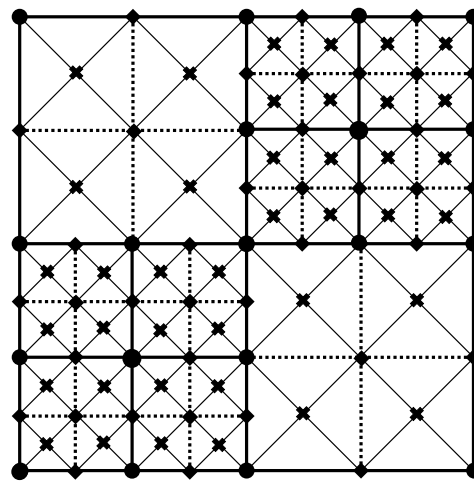
Als numerisches Beispiel für das adaptive Verfahren wird die in Abbildung 5.17 beschriebene Durchkontaktierung einer Leiterplatte betrachtet. Die Struktur wird über zwei Wellenleiter-Tore  $\Gamma_{WG}^{(1)}$  und  $\Gamma_{WG}^{(2)}$  gespeist. Die Oberflächen der hellgrauen Bereiche in Abbildung 5.17(a) bilden den Rand  $\Gamma_E$ , auf dem die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes zu Null erzwungen werden. Der Rand  $\Gamma_H$  setzt sich aus den übrigen äußeren Flächen zusammen. Außerdem ist das Feldgebiet homogen mit einem Dielektrikum gefüllt, welches eine relative Permittivität von  $\epsilon_r = 4,2$  aufweist. Für die relative Permeabilität gilt  $\mu_r = 1$ .



(a) Startgitter  $\mathcal{F}^I$ .

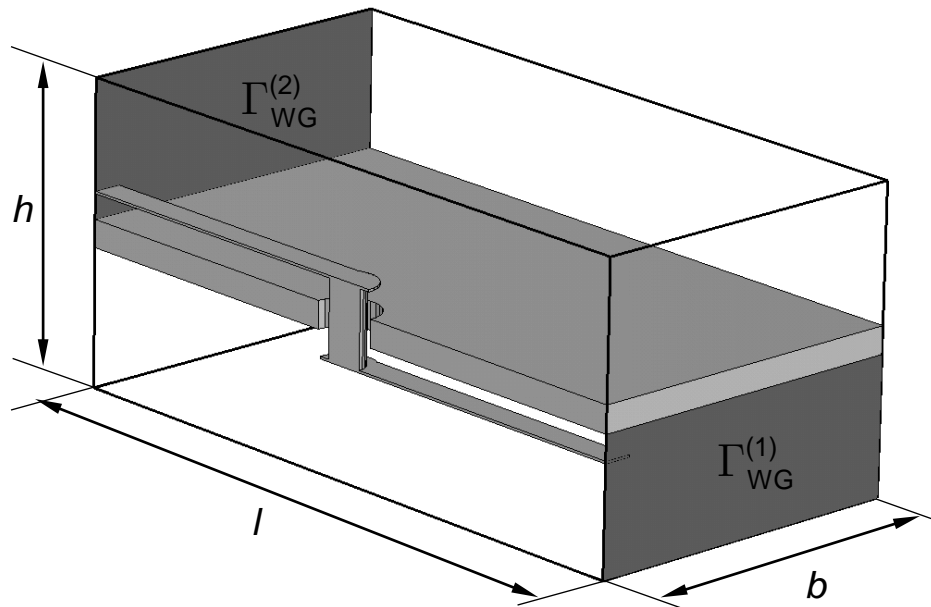


(b) Ergebnis der Markierungsstrategie.

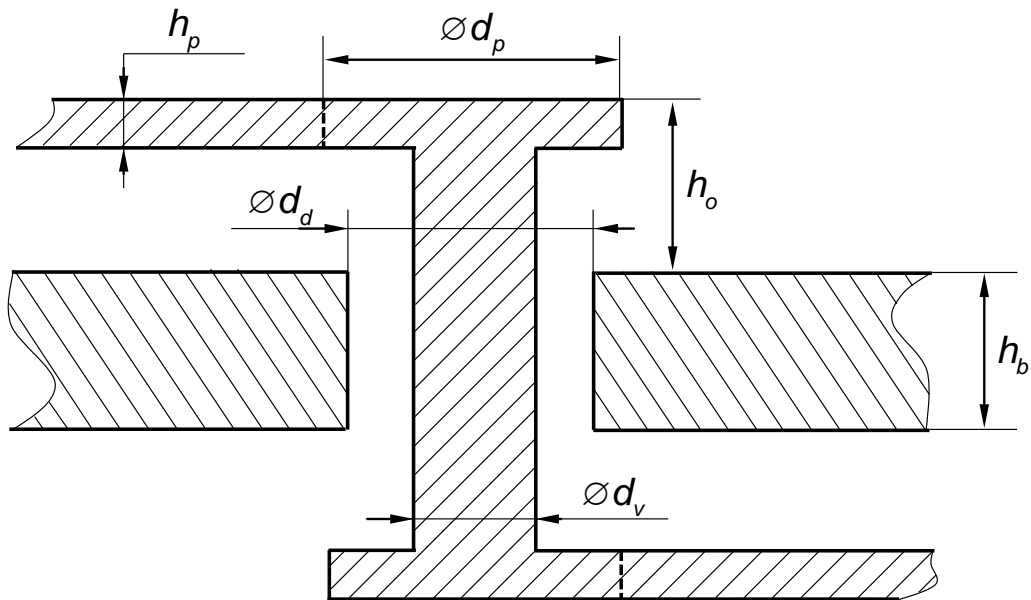


(c) Ergebnis der Verfeinerungsstrategie.

**Abbildung 5.16:** Veranschaulichung von Stufe II des selbst-adaptiven Verfahrens zur parametrischen Ordnungsreduktion. Dargestellt sind Hyperkuben  $\mathcal{H}^\alpha$  mit starken durchgezogenen Linien, deren Eckpunkte mit Punkten, Unter-Tensorgitter  $\mathcal{G}^\alpha$  mit starken unterbrochenen Linien, deren Gitterpunkte mit Diamanten sowie Mengen  $\mathcal{E}^\alpha$  von Fehlerpunkten  $\mathbf{p}_e^{(\alpha),(\beta)}$  mit Kreuzen.



(a) Dreidimensionales Modell. Abmessungen:  $l = 5 \text{ mm}$ ,  $b = 2,5 \text{ mm}$ ,  $h = 2,2 \text{ mm}$ .  
Homogene Materialeigenschaften:  $\epsilon_r = 4,2$ ,  $\mu_r = 1$ .



(b) Schematischer Aufbau. Festgesetzte Werte:  $h_p = 0,018 \text{ mm}$ ,  $h_o = 0,2 \text{ mm}$ ,  $h_b = 0,2 \text{ mm}$ ,  
 $d_d = 0,255 \text{ mm}$ ,  $d_p = 0,21 \text{ mm}$ .

**Abbildung 5.17:** Durchkontaktierung einer Leiterplatte.

Zunächst wird das Konvergenzverhalten von Stufe I und Stufe II des selbst-adaptiven Verfahrens separat untersucht. Dazu wird ein expliziter Parameter, die Frequenz  $f$ , sowie ein impliziter Parameter, der Durchmesser  $d_v$ , betrachtet. Es gilt der Parameterbereich:

$$f \in \mathcal{Q} = [1, 30] \text{ GHz}, \quad (5.79)$$

$$d_v \in \mathcal{P} = [0,09, 0,202] \text{ mm}. \quad (5.80)$$

Das parametrische Ausgangsmodell  $\Sigma(k_0, d_v)$  sowie das PROM  $\tilde{\Sigma}(k_0, d_v)$  entspricht mit  $\mathbf{p} = d_v$  den Darstellungen (5.41) bzw. (5.44) aus Abschnitt 5.1.4.

Stufe I wird anhand des auf den Reflexionsfaktor bezogenen mittleren Fehlers

$$e_{11}^I = \frac{1}{N_f N_p} \sum_{n_p=1}^{N_p} \sum_{n_f=1}^{N_f} |S_{11}(f_{n_f}, p_{n_p}) - S_{11}^{ref}(f_{n_f}, p_{n_p})| \quad (5.81)$$

mit  $N_f = 101$  und  $N_p = 101$  ausgehend von einem äquidistanten Startgitter  $\mathcal{G}$  mit  $|\mathcal{G}| = 3$  Punkten in Abbildung 5.18(a) analysiert. Die in (5.81) enthaltene Referenzlösung  $S_{11}^{ref}$  wird durch Lösen des Ausgangsmodells  $\Sigma(k_0, d_v)$  erzeugt. Zur Berechnung von  $S_{11}(f_{n_f}, d_v)$  erfolgt eine Projektion des FE-Modells  $\Sigma(k_0, d_v)$  in den durch den selbst-adaptiven Prozess generierten Unterraum  $\mathcal{V}(d_v)$ . Somit spiegelt  $e_{11}^I$  ausschließlich durch die Darstellung des Unterraums  $\mathcal{V}(d_v)$  hervorgerufene Fehler wider. In Abbildung 5.18(a) sind Konvergenzkurven sowohl für die bezüglich des Reflexionsfaktors  $S_{11}$  zielorientierte Markierungsstrategie als auch für den rein auf den Interpolationsfehlern des Unterraums  $\mathcal{V}(d_v)$  basierenden Ansatz enthalten. Das für Letztgenannten benötigte Abstandsmaß gemäß Definition 5.14 ist aus [AMS04] entnommen und lautet für zwei Unterräume  $\mathcal{S}_1 \in \mathbf{Gr}(N, n)$  und  $\mathcal{S}_2 \in \mathbf{Gr}(N, n)$ :

$$\text{dist}(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2) = \sqrt{\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2}. \quad (5.82)$$

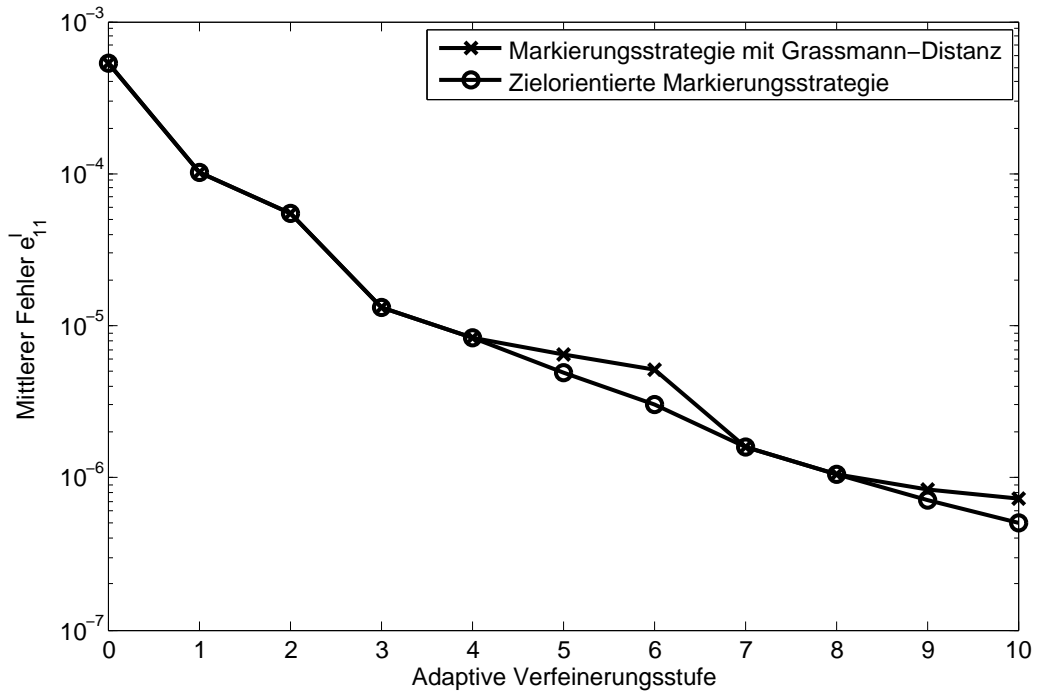
Darin sind  $\theta_i$  die kanonischen Winkel zwischen den Unterräumen  $\mathcal{S}_1 \in \mathbf{Gr}(N, n)$  und  $\mathcal{S}_2 \in \mathbf{Gr}(N, n)$  [GV96]. Beide Markierungsstrategien führen auf ähnliche Konvergenzkurven und sind gut dafür geeignet, den Unterraum  $\mathcal{V}(d_v)$  zu erzeugen.

Die Analyse von Stufe II erfolgt auf Basis des mittleren Fehlers

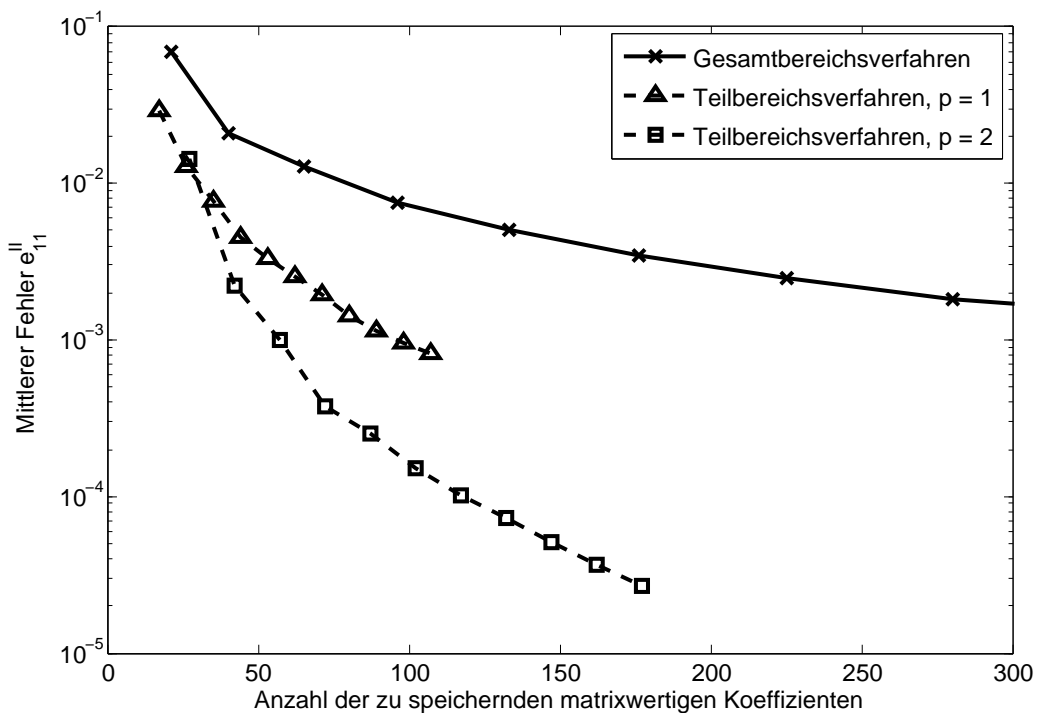
$$e_{11}^{II} = \frac{1}{N_f N_p} \sum_{n_p=1}^{N_p} \sum_{n_f=1}^{N_f} |S_{11}(f_{n_f}, p_{n_p}) - S_{11}^{ref}(f_{n_f}, p_{n_p})| \quad (5.83)$$

mit  $N_f = 101$  und  $N_p = 101$ . Hierbei wird die Referenzlösung  $S_{11}^{ref}$  wie im Falle von Stufe I berechnet,  $S_{11}$  hingegen wird durch Auswerten des nach der affinen Parameterrekonstruktion aus Stufe II verfügbaren interpolierten Modells erzeugt. Es sind somit keinerlei Fehler aus Stufe I enthalten. Ausgegangen wird erneut von einem äquidistanten Startgitter  $\mathcal{G}$  mit  $|\mathcal{G}| = 3$ . Abbildung 5.18(b) zeigt  $e_{11}^{II}$  in Abhängigkeit von der Anzahl der matrixwertigen Koeffizienten  $\tilde{\mathbf{A}}_{i,j,k,l}$  nach (4.52), die zur Darstellung des PROMs zu speichern sind. Verglichen wird das Teilbereichsverfahren des vorliegenden Abschnittes für Polynome erster sowie zweiter Ordnung mit dem Gesamtbereichsverfahren aus

## 5.2. Ein adaptives Verfahren



(a) Mittlerer Fehler in  $S_{11}$  der auf orthogonalen Projektionen basierenden Unterraum-Darstellung unter Verwendung des adaptiven Verfahrens.



(b) Mittlerer Fehler in  $S_{11}$  der affinen Parameterrekonstruktion für das Gesamtbereichsverfahren sowie das Teilbereichsverfahren.

**Abbildung 5.18:** Durchkontaktierung einer Leiterplatte.

Abschnitt 5.1. Die Daten-Marker kennzeichnen die adaptiven Schritte im Falle des Teilbereichsverfahrens bzw. die gleichmäßige Verfeinerungsstufe im Falle des Gesamtbereichsverfahrens. Das Teilbereichsverfahren liefert für eine vordefinierte Fehlerschranke erheblich kompaktere Modelle als das Gesamtbereichsverfahren.

Abschließend wird das komplette selbst-adaptive Verfahren mit allen beteiligten Stufen sowie den geometrischen Parametern

$$d_p \in [0, 21, 0, 255] \text{ mm}, \quad (5.84)$$

$$d_v \in [0, 09, 0.202] \text{ mm}, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{p} = [d_p, d_v]^T \quad (5.86)$$

betrachtet und dem nicht-adaptiven Verfahren aus Abschnitt 5.1 gegenübergestellt. Dazu wird je ein PROM erstellt, dessen mittlerer Fehler  $e$  im Bereich um  $1 \cdot 10^{-4}$  liegt. Zur Darstellung von  $e$  werden die diskreten Parameterwerte  $f^{(\alpha_1)}, d_p^{(\alpha_2)}, d_v^{(\alpha_3)}$  entsprechend

$$\mathbf{d}_\alpha = [f^{(\alpha_1)}, d_p^{(\alpha_2)}, d_v^{(\alpha_3)}] \quad (5.87)$$

in einem Vektor zusammengefasst, worin  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_3]$  einen von  $\alpha = [1, 1, 1]$  bis  $\alpha = [N_f, N_p, N_p]$  laufenden Multi-Index bezeichnet. Für  $e$  gilt:

$$e = \frac{1}{N_e^2 N_f N_p^2} \sum_{\alpha} \sum_{i,j} |S_{i,j}^{ref}(\mathbf{d}_\alpha) - S_{i,j}(\mathbf{d}_\alpha)|. \quad (5.88)$$

Darin sind  $N_e = 2$  die Dimension der Streumatrix,  $N_f = 101$  die Anzahl der äquidistant verteilten Frequenzwerte,  $N_p = 11$  die Anzahl der äquidistant verteilten geometrischen Parameterwerte entlang einer jeden geometrischen Parameterrichtung,  $S_{i,j}^{ref}(\mathbf{d}_\alpha)$  die Komponenten der durch das FE-Modell berechneten Referenz-Streumatrix  $\mathbf{S}^{ref}$  und  $S_{i,j}(\mathbf{d}_\alpha)$  die Komponenten der durch die PROMs bestimmten Streumatrix  $\mathbf{S}$ .

Für Phase I und Phase II des selbst-adaptiven Verfahrens gelten die Schranken

$$e_{th}^I = e_{th}^{II} = 1 \cdot 10^{-3}. \quad (5.89)$$

Während Stufe I nach neun adaptiven Schritten Konvergenz erreicht, ist in Stufe II für polynomielle Interpolationsfunktionen zweiter Ordnung keine weitere Gitterverfeinerung erforderlich.

Numerische Daten der reduzierten Modelle sowie des FE-Modells sind in Tabelle 5.3 enthalten. PROM 1 basiert darin auf dem nicht-adaptiven Ansatz unter Verwendung eines Tensorgitters  $\mathcal{G}$  mit  $|\mathcal{N}_1| = 5$  und  $|\mathcal{N}_2| = 17$  Gitterpunkten. Zur Berechnung von PROM 2 wird der selbst-adaptive Prozess mit (5.89) verfolgt. Die den Speicherbedarf betreffenden Ergebnisse aus Tabelle 5.3 bestätigen die Beobachtungen in Abbildung 5.18(b): Das adaptiv erzeugte PROM 2 benötigt erheblich weniger Speicher als PROM 1. Bezüglich des FE-Modells beziehen sich sowohl der angegebene Speicherbedarf als auch die Laufzeiten zur Modellerzeugung auf eine einzelne Instanziierung im Raum der Geometrieparameter. Die PROMs hingegen benötigen nicht nur weniger Speicher

### 5.3. Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

**Tabelle 5.3:** Numerische Daten für die Durchkontaktierung<sup>1</sup>. Die PROMs verwenden ein äquidistantes Gitter  $\mathcal{G}$  sowie ein Einpunkt-MOR-Verfahren zur Erzeugung der Projektionsmatrizen an den Gitterpunkten.

	FE-Modell <sup>2</sup>	PROM 1 <sup>3</sup>	PROM 2 <sup>3</sup>
Dimension	455 568	12	12
Modell-Größe	523,53 MB	125,71 MB	6,23 MB
Modellgenerierung	44,15 s	10,92 Std.	4,28 Std.
Darin enthalten: Erzeugung der Datenmengen $\mathbb{M}$ und ggf. $\mathbb{V}$	44,15 s	2,60 Std.	2,87 Std.
Modellauswertungen pro Sekunde	0,010	627,50	3 275,73
Berechnung von Abb. 5.19(a) bzw. 5.19(b) mit 10201 Punkten	11,58 Tage <sup>4</sup>	16,26 s	3,11 s
Mittlerer Fehler $e$	-	$9,77 \cdot 10^{-5}$	$1,71 \cdot 10^{-4}$

<sup>1</sup> Gerechnet mit einem Thread auf einem Intel Xeon E5620.

<sup>2</sup> Experimentelle FE-Software in C++ mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

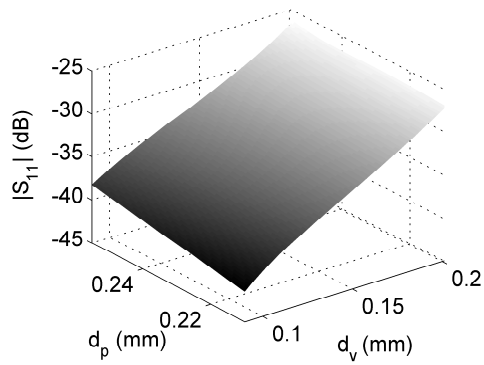
<sup>3</sup> Experimentelles MATLAB-Programm mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

<sup>4</sup> Extrapoliert.

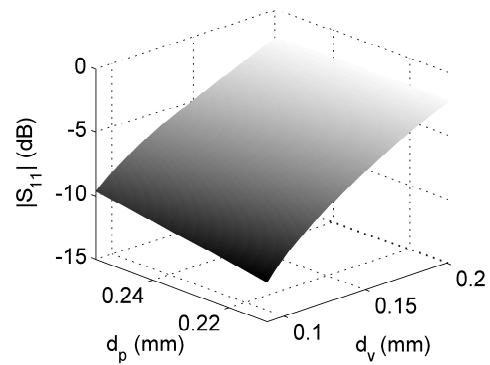
als eine solche Instanziierung, sondern sind darüber hinaus überall im betrachteten Parameter-Gebiet gültig. Die Laufzeiten zur Erzeugung der PROMs haben sich bereits nach Berechnung der in Abbildung 5.19(a) oder Abbildung 5.19(b) für einen einzelnen Frequenzpunkt dargestellten Antworthyperfläche deutlich amortisiert. Sogar das langsamere der beiden PROMs, PROM 1, lässt sich bereits 60000-mal schneller auswerten als das FE-Modell. Die in Tabelle 5.3 angegebenen Raten zur Modellauswertung beziehen sich auf Auswertungen für Parametervektoren, die sich auf einer Geraden quer durch den gesamten Parameterraum befinden.

## 5.3 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

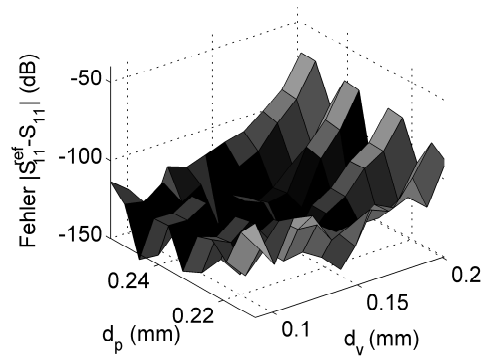
Es wurden zwei neue Verfahren der parametrischen Modellordnungsreduktion vorgestellt, die das Rahmenwerk aus Kapitel 4 implementieren. Beiden liegt eine auf Hyperkuben basierende Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter zugrunde. Das erste Verfahren bedient sich einer auf einem Tensorgitter basierenden polynomiellen Interpolation mit globalem Träger zur Darstellung der affinen Parameterrekonstruktion sowie einer für jeden Hyperkubus separat definierten multilinearen Interpolation zur Darstellung parameterabhängiger Unterräume. Durch gleichmäßige Verfeinerung des Gitters kann Einfluss auf die Genauigkeit des parametrischen reduzierten Modells genommen werden.



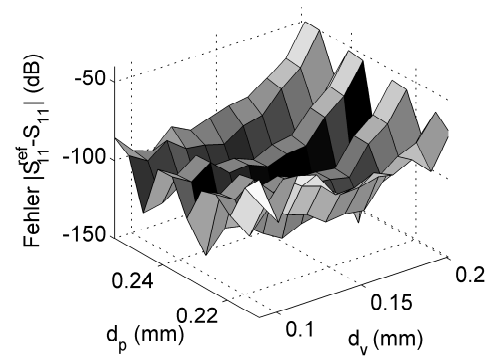
(a)  $f = 1$  GHz.



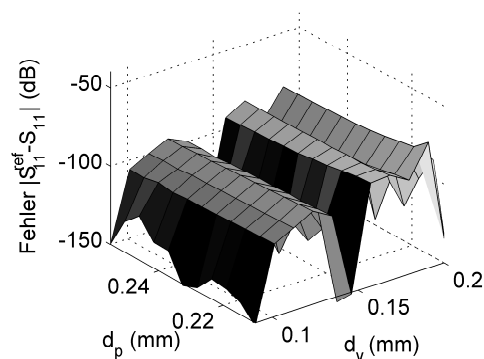
(b)  $f = 30$  GHz.



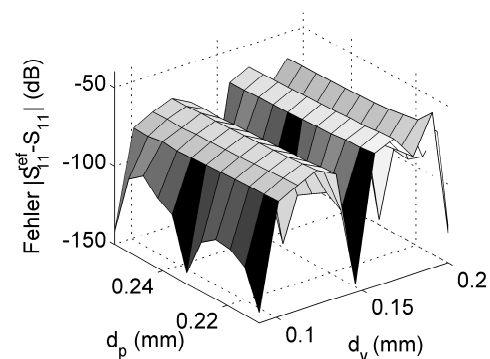
(c) PROM 1 bei  $f = 1$  GHz.



(d) PROM 1 bei  $f = 30$  GHz.



(e) PROM 2 bei  $f = 1$  GHz.



(f) PROM 2 bei  $f = 30$  GHz.

**Abbildung 5.19:** Durchkontaktierung einer Leiterplatte. Antwortflächen und Fehler.



Das zweite Verfahren stellt eine konsequente Weiterentwicklung des ersten dar. Es basiert auf einem dreistufigen selbst-adaptiven Ansatz. Dabei wird von einem in Hyperkuben zerlegten Tensorgitter ausgegangen, welches gemäß einer Markierungsstrategie solange ungleichmäßig verfeinert wird, bis vorgegebene Fehlerschranken eingehalten werden. Die affine Parameterrekonstruktion erfolgt dabei mittels polynomieller Interpolation, wobei der Träger der Interpolationsfunktionen genau einen Hyperkubus umfasst. Zur Darstellung der Unterräume werden, wie beim zuvor genannten Verfahren, multilineare Interpolationsfunktionen verwendet.

Die vorgestellten Ansätze sind in der Lage, sehr genaue parametrische reduzierte Modelle unter Einsatz weniger Instanziierungen des Ausgangsmodells zu erzeugen. Außerdem können die reduzierten matrixwertigen Koeffizienten zur Darstellung der reduzierten Modelle vor-assembliert werden, sodass eine sehr schnelle Modellauswertung gewährleistet ist. Darüber hinaus erben die Verfahren die wesentlichen Eigenschaften des übergeordneten Rahmenwerks, womit die Dimension der reduzierten Modelle unabhängig von der Anzahl der impliziten Parameter wird. Lediglich die Anzahl der matrixwertigen Koeffizienten steigt an. Da die Interpolationen des adaptive Verfahrens eine auf die Hyperkuben bezogene Lokalisierung der Interpolationsträger aufweisen, sind dadurch generierte, parametrische reduzierte Modelle mit Bezug auf deren Speicherbedarf effizienter als durch das nicht-adaptive Verfahren erzeugte Modelle.



# Kapitel 6

## Eine Anwendung: Geometrieoptimierung von Mikrowellenstrukturen

### 6.1 Einleitung

Numerische Optimierungsverfahren [Sch81], [Fle01], [Kel95], [NW06], [HW07] finden heutzutage breite Anwendung im Entwurfsprozess von Mikrowellenstrukturen [Bud98], [HL01, Kapitel 9], [JR10], [JR09]. Im Rahmen des iterativ ablaufenden Optimierungsprozesses wird eine der Problemstellung dienliche *Zielfunktion* durch systematische Variation der Designparameter innerhalb vorgegebener Grenzen minimiert bzw. maximiert. Die optimalen Designparameter werden *Minimierer* bzw. *Maximierer* genannt. Geeignete Zielfunktionen werden oftmals auf Basis des Übertragungsverhaltens der Mikrowellenstruktur konstruiert [Ban69], [ATW84], [LJH95], [AZA98], [CBK<sup>+</sup>10]. Daher wirkt sich die Genauigkeit, mit der das Übertragungsverhalten dargestellt werden kann, unmittelbar auf die Güte der Zielfunktion und schlussendlich auf jene des Minimierers bzw. Maximierers aus. Abgesehen von der Forderung nach hoher Genauigkeit müssen Auswertungen der Kostenfunktion schnell zur Verfügung stehen, da der Optimierungsprozess oftmals eine beachtliche Anzahl an Kostenfunktionsauswertungen benötigt, wie das numerische Beispiele in Abschnitt 6.5 untermauert. Wenngleich numerische Diskretisierungsverfahren geeignet sind, das Übertragungsverhalten mit hoher Genauigkeit auszuwerten, ist deren unmittelbarer Einsatz aufgrund des damit verbundenen numerischen Aufwandes in vielen Fällen nicht möglich. Als schnell auswertbare Alternativen dazu kommen unter anderem Response-Surface-Modelle [DLM<sup>+</sup>99] oder Kriging-Modelle [LMCC04] zum Einsatz, welche allerdings häufig nur eine geringe Genauigkeit aufweisen [LSG<sup>+</sup>08].

Die Modellierungsansätze aus Kapitel 4 sind in der Lage, sowohl schnell auswertbare als auch hochgenaue Modelle zur Verfügung zu stellen. Der Autor schlägt in [BFLDE13] eine

Integration dieser Modelle in den Optimierungsprozess zur schnellen Bereitstellung von Auswertungen der Kostenfunktion vor, sofern zu erwarten ist, dass sich der numerische Aufwand zur Modellerzeugung im Laufe des Optimierungsprozesses amortisiert. Dazu werden in Abschnitt 6.2 das Optimierungsproblem sowie die Zielfunktionen eingeführt. Die zum Auswerten der Zielfunktionen herangezogenen parametrischen reduzierten Modelle sind Gegenstand von Abschnitt 6.3. Abschnitt 6.4 stellt die Grundkonzepte ausgewählter deterministischer sowie stochastischer Optimierungsverfahren vor, die in Abschnitt 6.5 im Rahmen einer Filteroptimierung Anwendung finden.

## 6.2 Das Optimierungsproblem

Es werden von den geometrischen Parametern  $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$  abhängige, hinreichend glatte Zielfunktionen

$$c : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \quad (6.1)$$

betrachtet, die innerhalb des Frequenzbandes  $f \in [f_{min}, f_{max}]$  durch die Übertragungsmatrix  $\tilde{\mathbf{H}}(f, \mathbf{p})$  nach Korollar 2.5 eines parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(f, \mathbf{p})$  gemäß Definition 2.9 zu bestimmen sind. Nebenbedingungen an die Parameter  $\mathbf{p}$  können durch Vorgabe geeigneter Funktionen

$$g_i : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R} \quad (6.2)$$

realisiert werden. Das Optimierungsproblem lautet damit wie folgt:

**Definition 6.1** (Optimierungsproblem). *Gegeben ist eine von den Parametern  $\mathbf{p} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^P$  abhängige Zielfunktion  $c(\mathbf{p})$  nach (6.1) sowie Funktionen  $g_i(\mathbf{p})$  gemäß (6.2). Das skalare Minimierungsproblem mit  $B$  Nebenbedingungen besteht darin, den Minimierer  $\mathbf{p}^* \in \mathcal{P}$  als Lösung von*

$$\min_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p}) \quad (6.3a)$$

$$\text{mit } g_i(\mathbf{p}) \geq 0, \quad i \in \{1, \dots, B\} \quad (6.3b)$$

zu bestimmen.

Im Allgemeinen muss davon ausgegangen werden, dass die Zielfunktion  $c(\mathbf{p})$  mehrere Minima besitzt. Handelt es sich bei einem Minimierer  $\mathbf{p}^*$  um ein globales Minimum der Zielfunktion  $c(\mathbf{p})$ , so wird von einem *globalen Minimierer* gesprochen, andernfalls von einem *lokalen Minimierer*.

## 6.3 Das parametrische reduzierte Modell

Den Ausgangspunkt zur Ableitung des von der Frequenz  $f$  sowie weiterer geometrischer Parameter  $\mathbf{p}$  abhängigen parametrischen reduzierten Modells  $\tilde{\Sigma}(f, \mathbf{p})$  für Mikrowellenstrukturen, die mit Hilfe des Modellierungsansatzes aus Abschnitt 2.3 dargestellt

werden können, bildet das Ausgangsmodell  $\Sigma(f, \mathbf{p})$  der Form (2.98). Mittels eines parametrischen Ordnungsreduktionsverfahrens, welches dem in Kapitel 4 präsentierten Rahmenwerk genügt, folgt für  $\tilde{\Sigma}(f, \mathbf{p})$  die Darstellung:

$$(\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) + jk_0\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{p}) - k_0^2\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{p}))\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p})\mathbf{i}, \quad (6.4a)$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{p})\tilde{\mathbf{x}}. \quad (6.4b)$$

Da es sich bei  $\Sigma(f, \mathbf{p})$  gemäß Definition 2.6 um ein symmetrisches Modell handelt, findet Korollar 3.2 Anwendung, und für die reduzierten Matrizen nach (4.10) folgen die Darstellungen:

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T\check{\mathbf{S}}(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p}), \quad (6.5a)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T\check{\mathbf{F}}(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p}), \quad (6.5b)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{p}) = \mathbf{V}(\mathbf{p})^T\check{\mathbf{T}}(\mathbf{p})\mathbf{V}(\mathbf{p}). \quad (6.5c)$$

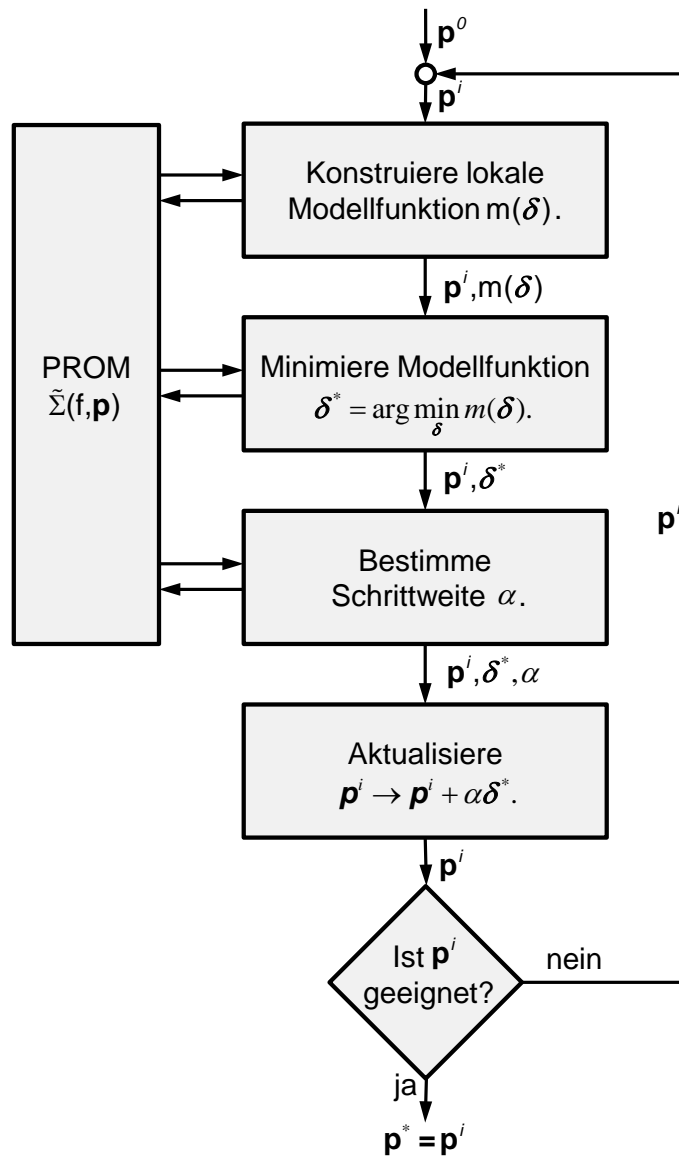
Darin liegen die affinen Parameterrekonstruktionen  $\check{\mathbf{S}}(\mathbf{p})$ ,  $\check{\mathbf{F}}(\mathbf{p})$ ,  $\check{\mathbf{T}}(\mathbf{p})$  entsprechend Abschnitt 4.2 sowie die parameterabhängige Darstellung der Basis  $\mathbf{V}(\mathbf{p})$  entsprechend Abschnitt 4.4 zugrunde. Sowohl Streuparameter als auch Impedanzparameter der Mikrowellenstruktur lassen sich aus  $\tilde{\Sigma}(f, \mathbf{p})$  mittels der nachgelagerten Berechnungsvorschrift (2.100) bestimmen.

## 6.4 Optimierung mit parametrischen reduzierten Modellen

Um das Optimierungsproblem nach Abschnitt 6.2 numerisch zu lösen, steht ein breites Spektrum an Optimierungsverfahren bereit, siehe hierzu [Sch81],[Fle01], [Kel95],[NW06] oder [HW07]. Dabei wird grundsätzlich zwischen globalen Optimierungsverfahren und lokalen Optimierungsverfahren unterschieden. Während Letztgenannte ausgehend von einer vorgegebenen Startkonfiguration  $\mathbf{p}_0 \in \mathcal{P}$  einen lokalen Minimierer finden, suchen globale Optimierungsverfahren entsprechend den globalen Minimierer. Auch wenn sich die einzelnen Methoden stark unterscheiden, so ist ihnen die Forderung nach schnell auswertbaren Kostenfunktionen gemein, damit die Laufzeit des Optimierungsprozesses in einem vertretbaren Rahmen bleibt. In diesem Abschnitt wird anhand zweier Familien von Optimierungsverfahren exemplarisch dargelegt, wie das parametrische reduzierte Modell aus Abschnitt 6.3 gewinnbringend in den Optimierungsprozess eingebunden werden kann.

### 6.4.1 Eine Klasse lokaler Optimierungsverfahren

Zu den lokalen Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen zählen unter anderem die *Active-Set-Methode* oder die *Lagrange-Newton-Methode*



**Abbildung 6.1:** Algorithmische Struktur einer Klasse von deterministischen Optimierungsverfahren.

[Fle01]. Diese Ansätze basiert darauf, das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen lokal in ein unbeschränktes Optimierungsproblem zu überführen, zu dessen Lösung Methoden wie das *Verfahren des steilsten Abstiegs* [JS04, S. 139 ff.], das *Newton-Verfahren* [Fle01, S. 44 ff.] sowie das *Quasi-Newton-Verfahren* [Fle01, S. 49 ff.] bereitstehen. Von zentraler Bedeutung ist dabei die Konstruktion einer lokalen Modellfunktion  $m(\delta)$  im  $i$ -ten Iterationsschritt durch Entwicklung der Zielfunktion  $c(\mathbf{p})$  in einer multivariaten Taylor-Reihe um den Punkt  $\mathbf{p}^i \in \mathbb{R}^P$  des aktuellen Iterationsschrittes. Mit Hilfe der Modellfunktion  $m(\delta)$  wird anschließend eine Korrektur  $\mathbf{s}^i \in \mathbb{R}^P$  errechnet und die Aktualisierung

$$\mathbf{p}^i \mapsto \mathbf{p}^i + \mathbf{s}^i \quad (6.6)$$

durchgeführt. Bei *Line-Search-Verfahren* [Fle01, S. 33ff.] ergibt sich die Korrektur  $\mathbf{s}^i$  durch Skalierung einer Suchrichtung  $\delta^* \in \mathbb{R}^P$  mit einem Skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  derart, dass die Konvergenz des Verfahrens sichergestellt werden kann. Somit gilt die Aktualisierungsvorschrift

$$\mathbf{p}^i \mapsto \mathbf{p}^i + \alpha \delta^*. \quad (6.7)$$

Die Suchrichtung  $\delta^*$  wird dabei durch Minimierung der Modellfunktion  $m(\delta)$  bestimmt. Abbildung 6.1 veranschaulicht die Struktur solcher Verfahren.

Das Verfahren des steilsten Abstiegs und die Newton-artigen Verfahren unterscheiden sich in der Konstruktion der Modellfunktion  $m(\delta)$ . Das Newton-Verfahren verwendet eine quadratische Modellfunktion

$$c(\mathbf{p}^i + \delta) \approx m_n(\delta) = c(\mathbf{p}^i) + \delta^T \underbrace{\nabla c(\mathbf{p}^i)}_{=: \mathbf{g}^i} + \frac{1}{2} \delta^T \underbrace{[\nabla^2 c(\mathbf{p}^i)]}_{=: \mathbf{G}^{(i)}} \delta, \quad (6.8)$$

deren Minimierung auf die Suchrichtung

$$\delta_n = - \left( \mathbf{G}^{(i)} \right)^{-1} \mathbf{g}^i \quad (6.9)$$

führt. Beim Quasi-Newton-Verfahren wird die inverse Hesse-Matrix  $\left( \mathbf{G}^{(i)} \right)^{-1}$  in geeigneter Weise approximiert,

$$\left( \mathbf{G}^{(i)} \right)^{-1} \approx \mathbf{H}^{(i)}, \quad (6.10)$$

womit die Suchrichtung zu

$$\delta_{qn} = -\mathbf{H}^{(i)} \mathbf{g}^i \quad (6.11)$$

bestimmt wird. Details zur Approximation der inversen Hesse-Matrix sind in [Fle01, S. 51 ff.] zu finden. Im Gegensatz zu Newton- und Quasi-Newton-Verfahren nutzt das Verfahren des steilsten Abstiegs ausschließlich Gradienteninformationen. Formal kann

$$\mathbf{G}^{(i)} = \mathbf{I} \quad (6.12)$$

gesetzt werden und für die Suchrichtung folgt

$$\delta_{sd} = -\mathbf{g}^i. \quad (6.13)$$

Wenngleich das Verfahren des steilsten Abstiegs aufgrund seiner einfachen Struktur attraktiv erscheint, so liefert es für eine Reihe von Zielfunktionen stark oszillierende Suchrichtungen und konvergiert in diesen Fällen nur langsam [Fle01, S. 22]. Daher ist für praktische Anwendungen das Newton- oder das Quasi-Newton-Verfahren zu bevorzugen.

Die Anbindung des parametrische Modells an den Optimierungsalgorithmus erfolgt entsprechend Abbildung 6.1 überall dort, wo Auswertungen der Kostenfunktion erforderlich sind. Diese können somit schnell und mit hoher Genauigkeit zur Verfügung gestellt werden.

## 6.4.2 Eine Klasse globaler Optimierungsverfahren

Eine Klasse globaler Optimierungsverfahren bilden *Genetische Algorithmen* (GA) [IMK94], [SKN00], [HW07]. Diesen liegt eine Struktur nach Abbildung 6.2 zugrunde. Im Gegensatz zu den lokalen Verfahren aus Abschnitt 6.4.1 wird bei GA in jedem Iterationsschritt, der auch als *Generation* bezeichnet wird, eine Menge  $\mathbb{P}^i$  an Parametervektoren, *Population* genannt, mittels eines evolutionären Ansatzes modifiziert. Die Startwerte  $\mathbb{P}^0$  werden üblicherweise stochastisch innerhalb des betrachteten Parameterbereiches verteilt. Der Ablauf einer Iteration des GA gestaltet sich folgendermaßen:

Nachdem für jedes Element der Population  $\mathbb{P}^i$  die Zielfunktion ausgewertet worden ist, werden anschließend die im Sinne der Zielfunktion besten Elemente aus  $\mathbb{P}^i$  identifiziert. Diese bilden die Menge  $\mathbb{P}_e$  der *Eliten* und gehen unmittelbar in die nächste Population über. Der Rest,  $\mathbb{P}^i \setminus \mathbb{P}_e$ , wird anschließend in einem Selektionsschritt weiter in sich nicht überschneidende Mengen  $\mathbb{P}_m$  und  $\mathbb{P}_c$  unterteilt. Die Elemente der Menge  $\mathbb{P}_m$  werden mittels einer *Mutationsfunktion*  $f_m$  in die Menge  $\mathbb{P}'_m$  überführt und jene der Menge  $\mathbb{P}_c$  mittels einer *Kreuzungsfunktion*  $f_c$  in die Menge  $\mathbb{P}'_c$ . Die neue Population bildet sich anschließend durch Vereinigung der Mengen  $\mathbb{P}_e$ ,  $\mathbb{P}'_m$  und  $\mathbb{P}'_c$ . Die entscheidenden Komponenten eines GA erfüllen folgende Funktionen:

**Abspaltung der Eliten:** Sorgt dafür, dass die im Sinne der Zielfunktion  $c(\mathbf{p})$  besten Elemente der aktuellen Population mit in die kommende Population aufgenommen werden und damit erhalten bleiben.

**Selektion:** Markiert Elemente der Menge  $\mathbb{P}^i \setminus \mathbb{P}_e$  mittels einer stochastischen Selektionsfunktion  $f_s$  entweder zur Mutation oder zur Kreuzung. Dabei werden durch die Selektionsfunktion Elemente, denen im Sinne der Zielfunktion eine hohe Güte zugeordnet ist, mit größerer Wahrscheinlichkeit zur Kreuzung ausgewählt als solche mit niedriger zugeordneter Güte.

**Mutation:** Die zur Mutation selektierten Elemente werden mittels einer stochastischen Mutationsfunktion  $f_m$  modifiziert. Häufig werden den Komponenten der selektierten Elemente Zufallszahlen, die einer Gauß-Verteilung unterliegen, hinzu addiert.



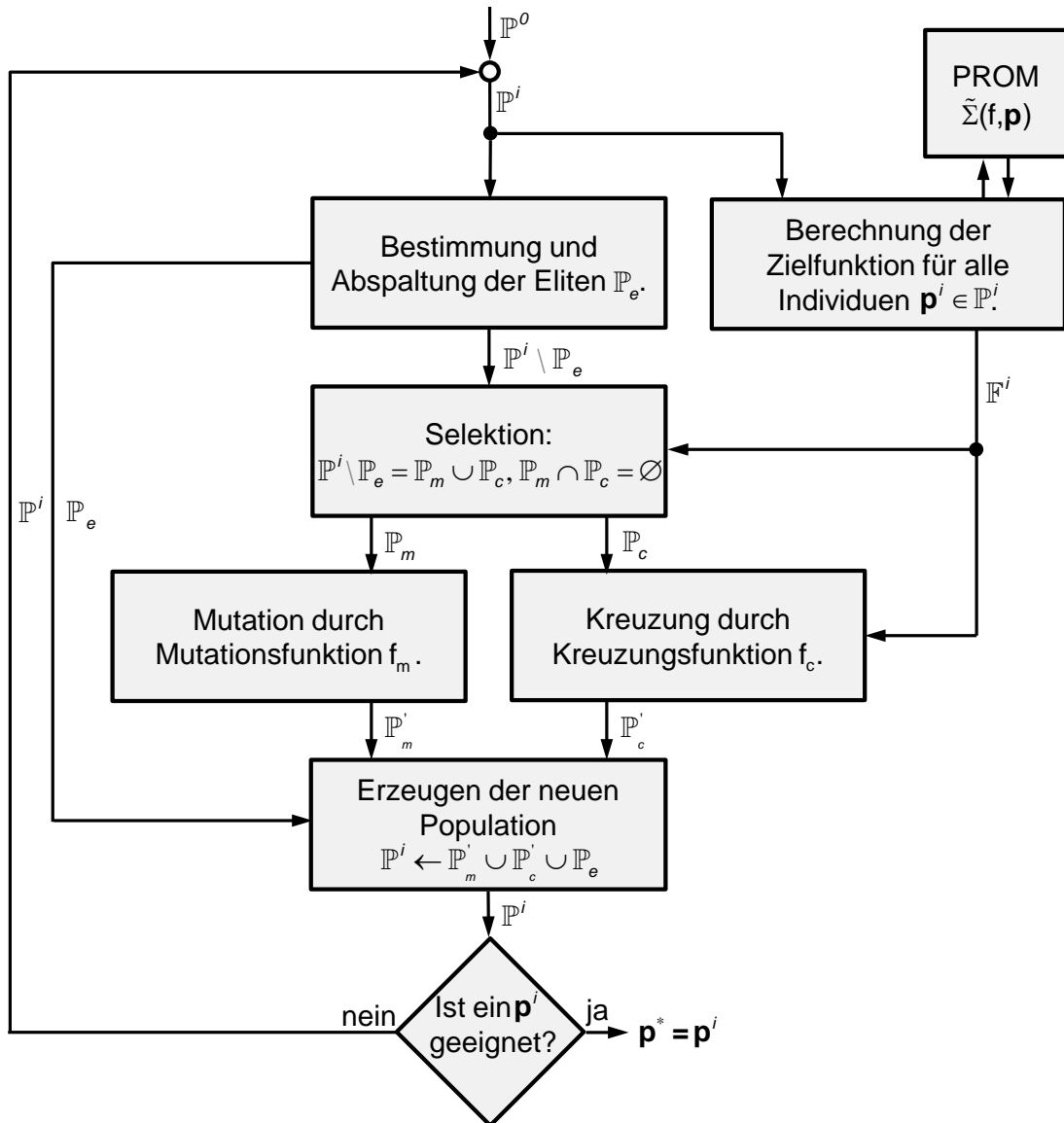


Abbildung 6.2: Algorithmische Struktur einer Klasse von stochastischen Optimierungsverfahren.

**Kreuzung:** Die Kreuzungsfunktion  $f_c$  verknüpft jeweils die Merkmale der Eltern, repräsentiert durch die zwei Elemente  $\mathbf{p}_1$  und  $\mathbf{p}_2$  der Menge  $\mathbb{P}_c$ , zu einem neuen Element  $\mathbf{p}_{12}$  der Menge  $\mathbb{P}'_c$ , den Merkmalen des Kindes. Beispiele für mögliche Kreuzungsfunktionen sind:

- Die Merkmale des Kindes ergeben sich als gewichtetes Mittel der Merkmale der Eltern. Dazu wird eine Diagonalmatrix  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{P \times P}$  erzeugt, deren Diagonalkomponenten mit Zufallszahlen  $\alpha \in [0, 1]$  besetzt sind. Für das Kind folgt

$$\mathbf{p}_{12} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{D}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1). \quad (6.14)$$

- Die Merkmale des Kindes entsprechen Merkmalen der Eltern. Dazu wird ein binärer Zufallsvektor

$$\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_P], \quad b_i \in \{0, 1\} \quad (6.15)$$

mit der gleichen Anzahl an Komponenten wie die Parametervektoren  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  erzeugt. Für die Merkmale des Kindes gilt damit

$$[\mathbf{p}_{12}]_i = \begin{cases} [\mathbf{p}_1]_i, & \text{für } b_i = 1, \\ [\mathbf{p}_2]_i, & \text{für } b_i = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Im Rahmen eines GA eignen sich parametrische reduzierte Modelle zur Berechnung der Zielfunktion aller Elemente einer Generation. Häufig ist eine große Anzahl sowohl an Elementen pro Generation als auch an Generationen selbst erforderlich, bis ein geeignetes Element identifiziert werden kann.

## 6.5 Numerisches Beispiel: Optimierung eines Wellenleiter-Filters

Die Leistungsfähigkeit der PROM-gestützten Geometrieoptimierung von Mikrowellenkomponenten wird auf den kommenden Seiten anhand des in Abbildung 5.8 dargestellten Iris-Filters aus Abschnitt 5.1.4 demonstriert. Der Filter besteht aus sieben Iris-Blenden, die durch RHL-Abschnitte voneinander separiert sind. Als Designparameter werden die Breiten  $w_1, w_2, w_3, w_4$  und die Höhen  $h_1, h_2, h_3, h_4$  der Blendenöffnungen sowie die Längen der RHL-Abschnitte  $l_2, l_3, l_4$  betrachtet. Die Optimierungsaufgabe bestehe darin, den 11-dimensionalen Parametervektor

$$\mathbf{p} = [l_2, l_3, l_4, w_1, w_2, w_3, w_4, h_1, h_2, h_3, h_4]^T \quad (6.17)$$

innerhalb des Frequenzbereichs  $[8, 16]$  GHz derart zu bestimmen, dass der Iris-Filter eine auf den Betrag des Transmissionsfaktors  $|S_{12}|$  bezogene Mittenfrequenz von  $f_c = 11,55$  GHz sowie eine Halbwertbandbreite von  $f_b = 2,1$  GHz erreicht und die Charakteristik eines maximal flachen Filters aufweist.

**Tabelle 6.1:** Einstellungen des genetischen Algorithmus aus der MATLAB-Optimization-Toolbox. Alle nicht aufgeführten Werte sind auf die Standardwerte gesetzt.

Parameter	Wert
PopulationSize	1600
CreationFcn	@gacreationuniformHcConstraints
FitnessScalingFcn	@fitscalingrank
SelectionFcn	@selectionstochunif
EliteCount	20
CrossoverFraction	0.8
MutationFcn	@mutationadaptfeasible
CrossoverFcn	{@crossoverintermediate, [3,3,3]}

**Zielfunktion und Nebenbedingungen:** Der Soll-Amplitudengang des Filters kann nach Vorgabe von  $f_c$  und  $f_b$  durch ein auf konzentrierten Bauelementen beruhendes Netzwerkmodell unter Vernachlässigung von Dispersions-Effekten näherungsweise bestimmt werden, siehe [Che67] und [Mum48]. Mit Hilfe dieses analytischen Referenz-Amplitudengangs  $|S_{12}^{ref}(f, f_0, f_b)|$  und des durch das PROM bereitgestellten Amplitudengangs  $|S_{12}(f, \mathbf{p})|$  wird die Kostenfunktion  $c(\mathbf{p})$  als

$$c(\mathbf{p}) = \frac{1}{N_f} \sum_{n_f=1}^{N_f} \left( |S_{12}^{ref}(f_n, f_0, f_b)| - |S_{12}(f_n, \mathbf{p})| \right)^2 \quad (6.18)$$

mit  $N_f = 201$  definiert. Darin sind  $f_n$  innerhalb des relevanten Frequenzbereichs, [8, 16] GHz, äquidistant verteilte Frequenzpunkte. Das bezüglich der Kostenfunktion formulierte Abbruchkriterium der Optimierung lautet:

$$c(\mathbf{p}) \stackrel{!}{\leq} 6 \cdot 10^{-6}. \quad (6.19)$$

Die Funktionen  $g_i(\mathbf{p})$  schränken den Bereich der geometrischen Parameter gemäß

$$l_i \in [5; 25, 4] \text{ mm}, \quad (6.20)$$

$$w_i \in [10, 15; 18, 85] \text{ mm}, \quad (6.21)$$

$$h_i \in [0, 4; 3, 6] \text{ mm} \quad (6.22)$$

ein und komplettieren das mathematische Optimierungsproblem nach Definition 6.1.

**Die Optimierungsverfahren:** Zur Lösung des Optimierungsproblems wird je ein Optimierungsverfahren aus Abschnitt 6.4.2 und Abschnitt 6.4.1 herangezogen. Bei dem lokalen Optimierungsverfahren handelt es sich um ein Quasi-Newton-Verfahren mit

BFGS-Korrektur nach [Fle01]. Die Schrittweite wird mittels des in [Fle01, S. 33ff.] beschriebenen Line-Search bestimmt und die Behandlung der linearen Nebenbedingungen erfolgt im Rahmen der Active-Set-Methode.

Als globales Optimierungsverfahren kommt der in der MATLAB-Optimization-Toolbox implementierte GA zum Einsatz. Dessen Parameter sind auf die in Tabelle 6.1 aufgelisteten Werte eingestellt.

**Parametrisches reduziertes Modell:** Um schnelle Auswertungen der Kostenfunktion  $c(\mathbf{p})$  bereitzustellen, wird der Modellierungsansatz aus Abschnitt 5.1.4 verfolgt. Zur Beschreibung aller Iris-Elemente ist ein einzelnes PROM der Form (5.44) zu erzeugen, welches für unterschiedliche Parameter ausgewertet und gemäß Abbildung 5.8(b) verschaltet wird. Das PROM weist dabei folgende Eigenschaften auf:

- Die Konstruktion erfolgt mittels des nicht-adaptiven Verfahrens aus Abschnitt 5.1.
- Es werden die ersten sieben relevanten dominanten Wellenformen berücksichtigt.
- Das PROM ist bezüglich der Parameter  $h$ ,  $w$  und  $f$  entsprechend

$$f \in \mathcal{Q} = [8, 16] \text{ GHz}, \quad (6.23)$$

$$w = (1 + p_1) \cdot 14.5 \text{ mm}, \quad p_1 \in [-0.3, 0.3], \quad (6.24)$$

$$h = (1 + p_2) \cdot 2 \text{ mm}, \quad p_2 \in [-0.8, 0.8] \quad (6.25)$$

parametriert. Für die weiteren Abmessungen gilt:  $a = 25,4 \text{ mm}$ ,  $b = 12,7 \text{ mm}$  und  $t = 1 \text{ mm}$ .

- Die das Tensorgitter  $\mathcal{G}$  erzeugenden Punkte sind entsprechend den Nullstellen geeigneter Tschebyscheff-Polynome verteilt. Es gilt  $|\mathcal{N}_1| = 5$  und  $|\mathcal{N}_2| = 7$ .

In Tabelle 6.2 sind die numerischen Daten des PROMs mit denen des FE-Modells verglichen. Das PROM ermöglicht es, die Kostenfunktion  $c(\mathbf{p})$  in unter einer Sekunde zu berechnen, während eine Auswertung auf Basis des FE-Modells über eine Stunde in Anspruch nehmen würde. Damit hat sich der Aufwand zum Erzeugen des PROM bereits nach zwei Auswertung der Kostenfunktion  $c(\mathbf{p})$  amortisiert.

**Ergebnisse:** Abbildung 6.3 zeigt den Verlauf des besten Wertes der Kostenfunktion in Abhängigkeit zur im Rahmen des jeweiligen Optimierungsverfahrens notwendigen Anzahl an Auswertungen der Kostenfunktion. Startwerte für den Quasi-Newton-Algorithmus sowie die gefundenen Minimierer können Tabelle 6.3 entnommen werden. Um das Abbruchkriterium (6.19) zu erreichen, hat der Quasi-Newton-Algorithmus 46 Newton-Iterationen und der GA 495 Generationen benötigt. Dabei kommt der Quasi-Newton-Algorithmus mit ungefähr 600 Auswertungen der Kostenfunktion aus, während der Genetische Algorithmus annähernd eine Millionen Auswertungen benötigt.

**Tabelle 6.2:** Numerische Daten zur Filter-Optimierung<sup>1</sup>.

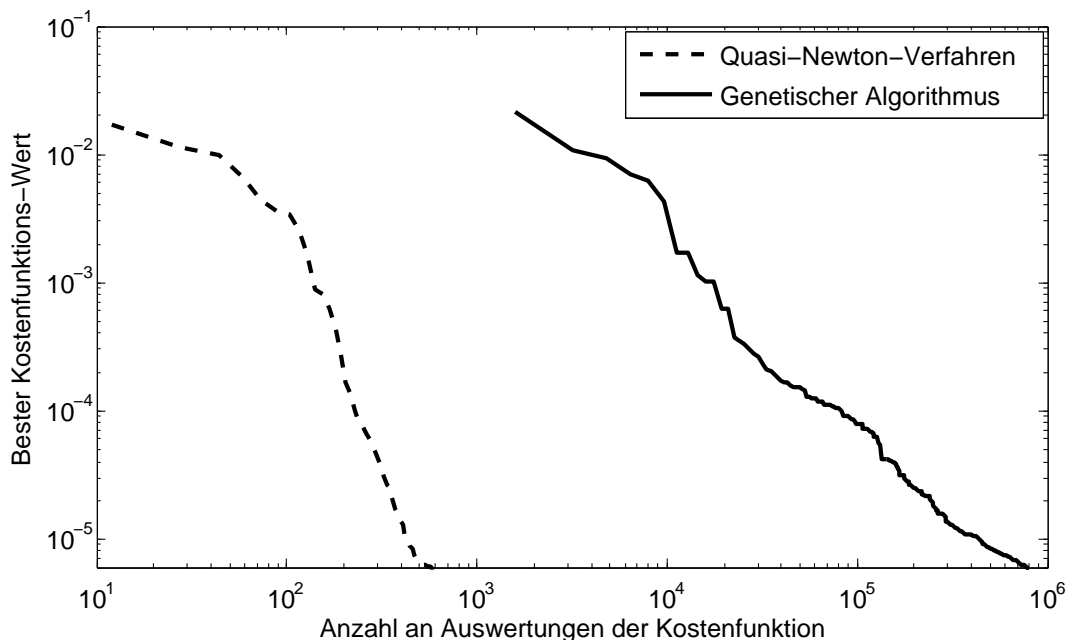
Modell-Daten	FE-Modell <sup>2</sup>	PROM <sup>3</sup>
Modell-Dimension	124 370	70
Modell-Erzeugung	19,90 s	2,46 Stdn.
Modell-Auswertung	19,39 s	$9,47 \cdot 10^{-4}$ s
Mittlerer Fehler $e$ nach (5.47)	-	$3,95 \cdot 10^{-4}$
Auswertung der Kostenfunktion $c(\mathbf{p})$	3,66 Stdn. <sup>4</sup>	0,84 s
Laufzeiten der Optimierung	FE-Modell <sup>2,4</sup>	PROM <sup>3</sup>
Quasi-Newton-Verfahren	86,09 Tage	7,91 Minuten
Genetischer Algorithmus	329,96 Jahre	7,68 Tage <sup>4</sup>
Genetischer Algorithmus (8 Threads)	41,24 Jahre	0,96 Tage

<sup>1</sup> Gerechnet auf einer Plattform mit 2x Intel Xeon E5620. Betrachtet wird Single-Thread Leistung, soweit nichts Gegenteiliges genannt.

<sup>2</sup> Experimentelle FE-Software in C++ mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

<sup>3</sup> Experimentelles MATLAB-Programm mit PARDISO [SG04] zum Lösen von dünnbesetzten linearen Gleichungssystemen.

<sup>4</sup> Extrapoliert.



**Abbildung 6.3:** Iris-Filter-Optimierung: Konvergenzverhalten des Quasi-Newton-Verfahrens sowie des Genetischen Algorithmus.

**Tabelle 6.3:** Parameterwerte sowie Werte der Kostenfunktion vor und nach der Optimierung des Iris-Filters.

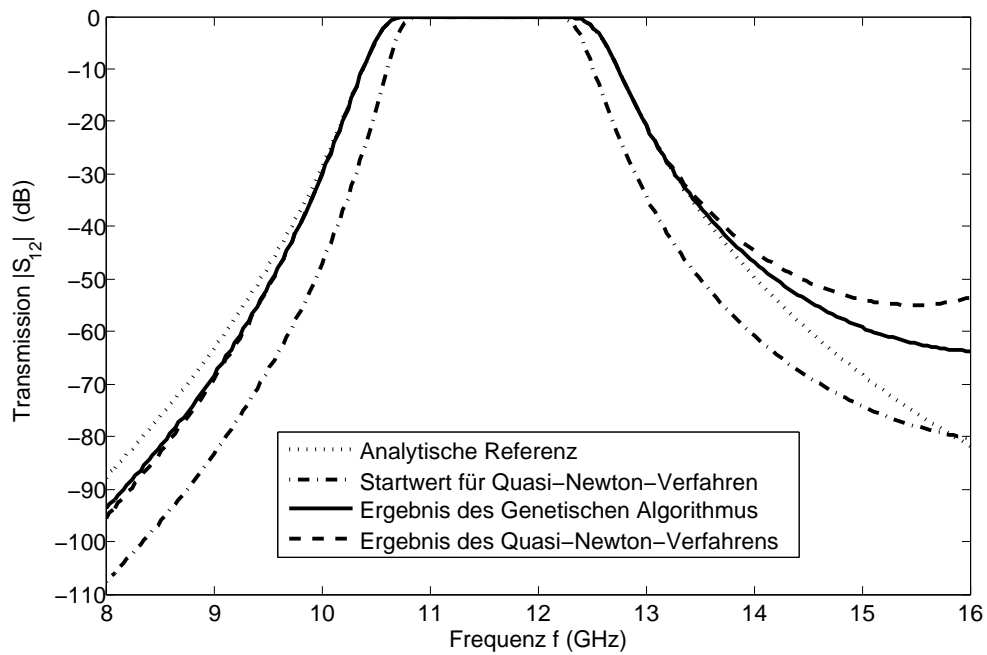
	$\mathbf{p}_0$	$\mathbf{p}_{AS}$	$\mathbf{p}_{GA}$
$l_2$	0,31232	0,28164	0,27659
$l_3$	0,31232	0,32580	0,32094
$l_4$	0,31232	0,37432	0,33919
$w_1$	0,55354	0,58571	0,57937
$w_2$	0,52362	0,53223	0,53464
$w_3$	0,51890	0,51310	0,51832
$w_4$	0,51850	0,50909	0,51725
$h_1$	0,11969	0,14104	0,14123
$h_2$	0,04252	0,069907	0,071774
$h_3$	0,027165	0,039195	0,034633
$h_4$	0,024409	0,038355	0,040358
$c(\mathbf{p})$	$1,6872 \cdot 10^{-2}$	$5,9247 \cdot 10^{-6}$	$5,9789 \cdot 10^{-6}$

Anhand dieser Zahlen sowie der Daten aus Tabelle 6.2 ist klar, dass für das vorliegende Optimierungsproblem die Verwendung von FE-Modellen numerisch äußerst aufwendig ist. Die extrapolierten Laufzeiten belaufen sich für den Genetischen Algorithmus selbst unter Verwendung von Rechenmaschinen, die eine Vielzahl von Prozessen parallel abarbeiten können, im Bereich von vielen Jahren. Unter Verwendung des vorgeschlagenen PMOR-Ansatzes hingegen liegen die Laufzeiten für den Genetischen Algorithmus bei einer Plattform, die acht Prozesse gleichzeitig abarbeitet, bei unter einem Tag.

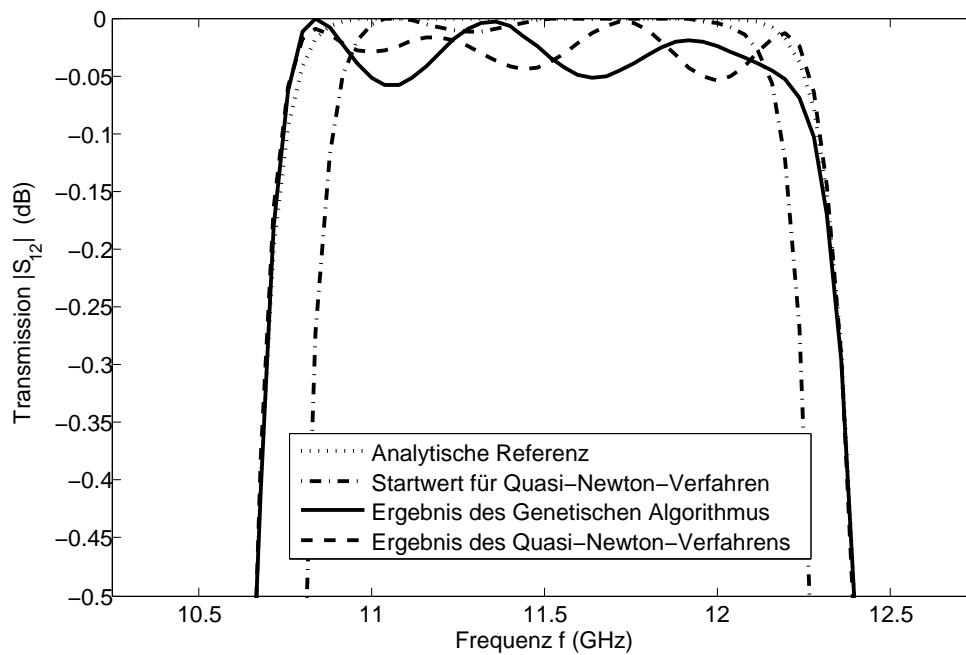
Der Amplitudengang sowohl des optimierten Filters als auch des Filters in Startkonfiguration ist in Abbildung 6.4 dargestellt. Zusätzlich enthält Abbildung 6.5 die durch den PROM-basierten Modellierungs-Ansatz hervorgerufenen Fehler. Darin enthalten sind neben den durch die Interpolationen hervorgerufenen Fehler auch jene, die daraus resultieren, dass durch das PROM nur eine endliche Anzahl an Wellenformen an den Wellenleiter-Toren berücksichtigt werden. Die Spitzen des Fehlerverlaufs befinden sich ungefähr an den oberen und unteren Grenzfrequenzen des Filters-Amplitudengangs.

## 6.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden die parametrischen Modellordnungsreduktionsverfahren aus Kapitel 4 sowie Kapitel 5 im Rahmen von automatisierten Optimierungsverfahren zur schnellen Bereitstellung von Kostenfunktions-Auswertungen eingesetzt. Die vorgeschlagenen PROMs weisen geringe Fehler auf und stellen Auswertungen der Kostenfunktion

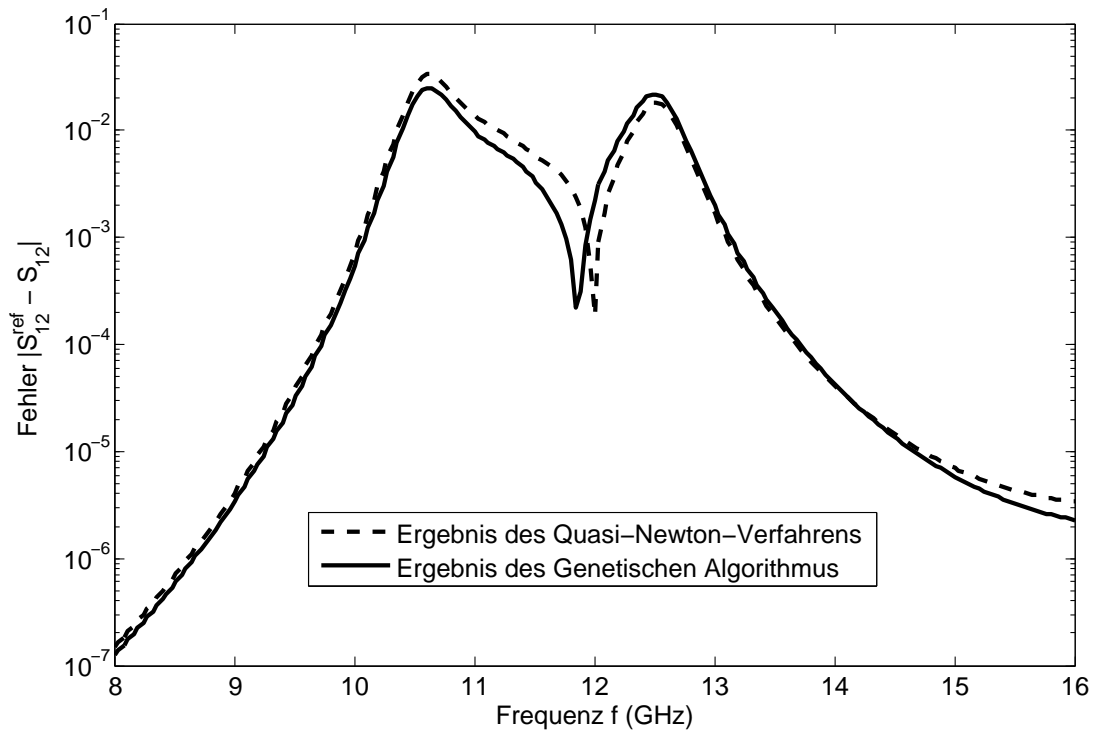


(a) Vollständiger Frequenzbereich.



(b) Nah-Darstellung des Durchlassbereichs.

**Abbildung 6.4:** Iris-Filter-Optimierung: Amplitudengang der optimierten Filterkonfigurationen und Amplitudengang der Startkonfiguration für den Quasi-Newton-Algorithmus.



**Abbildung 6.5:** Iris-Filter-Optimierung: Fehler des PROMs im Amplitudengang der optimierten Filterkonfigurationen.

schnell zur Verfügung. Es wurde je eine Klasse lokaler sowie globaler Optimierungsverfahren betrachtet. Als numerisches Beispiel wurde die Optimierung eines Wellenleiter-Filters herangezogen. Hierfür hat sich der Geschwindigkeitsgewinn durch Verwendung von PROMs anstatt von FE-Modellen als enorm herausgestellt. Im Falle des globalen Optimierungsverfahrens lagen die extrapolierten Laufzeiten unter Verwendung des FE-Modells im Bereich von vielen Jahren, während mit dem PROM ein Tag genügt. Der über dem betrachteten Frequenzbereich gemittelte Fehler des PROM-basierten Modellierungsansatzes liegt ungefähr bei  $10^{-3}$  und ist damit nicht wesentlich größer als jener des FE-Modells.



# Kapitel 7

## Abschließender Teil

### 7.1 Wesentliche Beiträge und Erkenntnisse

Die vorliegende Dissertation leistet zusammenfassend folgende Beiträge zum Stand der Forschung im Bereich der parametrischen Modellordnungsreduktion:

#### **Entwicklung eines neuartigen Rahmenwerks zur parametrischen Ordnungsreduktion**

Die Arbeit stellt ein neuartiges Rahmenwerk zur parametrischen Modellordnungsreduktion für sowohl affin als auch nicht-affin parametrisierte Ausgangsmodelle vor. Das Rahmenwerk setzt sich im Wesentlichen aus zwei Komponenten zusammen: Einer affinen Parameterrekonstruktion, die auf ein interpoliertes Ausgangsmodell führt und der Darstellung von den impliziten Parametern abhängiger Unterräume, auf welche die Lösungsvektoren des interpolierten Ausgangsmodells restringiert werden. Die Parameterrekonstruktion erfolgt mittels eines Interpolationsansatzes und hat den Zweck, das Ausgangsmodell für den Projektionsansatz zugänglich zu machen. Zur Darstellung der parameterabhängigen Unterräume wird die Interpolation orthogonaler Projektionen vorgeschlagen.

Das Rahmenwerk führt auf parametrische reduzierte Modelle mit den folgenden Eigenschaften: Konstruktionsbedingt weisen die Modelle eine niedrige und bezüglich der Anzahl an impliziten Parametern konstante Dimension auf, wodurch eine effektive Behandlung von Geometrieparametern möglich ist. Zur Modellauswertung sind ausschließlich Operationen mit Größen von reduzierter Dimension erforderlich. Es können somit besonders schnell auswertbare Modelle generiert werden. Durch die Interpolationsansätze sind Modellfehler gut steuerbar und es können, sofern erforderlich, hochgenaue parametrische reduzierte Modelle erzeugt werden. Die Modellerzeugung selbst benötigt Instanziierungen des Ausgangsmodells, welche sich mittels Standard-Diskretisierungsverfahren erzeugen lassen. Der Reduktionsprozess und das Diskretisierungsverfahren sind weitestgehend voneinander entkoppelt.

### **Entwicklung von zwei konkreten Verfahren zur parametrischen Ordnungsreduktion**

Neben dem Rahmenwerk sind darauf aufbauend zwei konkrete Verfahren zur parametrischen Ordnungsreduktion Gegenstand der Dissertation. Beiden liegt eine Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter mittels Hyperkuben zugrunde. Das erste Verfahren verwendet globale Lagrange-Polynome zur Darstellung der affinen Parameterrekonstruktion und abschnittsweise definierte, multilineare Funktionen für die Unterraum-Interpolation. Die Modellfehler können durch gleichmäßige Verfeinerung der diskreten Struktur des Raumes der impliziten Parameter gesteuert werden. Numerische Ergebnisse belegen eine im Vergleich mit anderen, aus der Literatur bekannten Ansätzen besonders hohe Konvergenz des Verfahrens. Dadurch sind sehr wenige Instanziierungen des Ausgangsmodells nötig, um ein fehlerarmes reduziertes Modell zu generieren.

Bei dem zweiten Verfahren handelt es sich um einen selbst-adaptiven Ansatz. Die Interpolationsfunktionen sind für die affine Parameterrekonstruktion für jeden Hyperkubus separat definiert und von konstanter Ordnung. Zur Darstellung der Unterräume kommen, wie auch beim erstgenannten Verfahren, multilineare Interpolationsfunktionen zum Einsatz. Im Rahmen des selbst-adaptiven Prozesses wird die Feinheit der Diskretisierung des Raumes der impliziten Parameter durch ungleichmäßige Verfeinerung gesteuert. Parametrische reduzierte Modelle, die unter Verwendung des selbst-adaptiven Ansatzes erzeugt wurden, weisen gegenüber solchen, die mittels des nicht adaptiven Ansatzes generiert wurden, Vorteile in Bezug auf den zum Abspeichern und Auswerten des Modells erforderlichen Speicherbedarf auf.

### **Vorstellung von Ansätzen zur schnellen Geometrieoptimierung**

Der Autor schlägt die Verwendung von parametrischen reduzierten Modellen anstatt von FE-Modellen zur schnellen Bereitstellungen von Auswertungen der Kostenfunktion im Rahmen von Geometrieoptimierungen von Mikrowellenstrukturen vor. Durch den erheblichen Vorteil bezüglich der Anzahl an Modellauswertungen pro Zeiteinheit lassen sich die Laufzeiten von Optimierungsprozesse in vielen Fällen wesentlich verkürzen. Zusätzlich sind aufgrund der gut steuerbaren Modellfehler die Ergebnisse der Optimierung mit den vorgeschlagenen reduzierten Modellen von ähnlich hoher Qualität wie unter Verwendung von FE-Modellen.

### **Anwendung der vorgestellten Methodiken auf FE-Modelle von Mikrowellenstrukturen**

Neben den theoretischen Konzepten erläutert die Arbeit auch deren Anwendung auf FE-Modelle von Mikrowellenstrukturen. Es wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen FE-Modelle von Mikrowellenstrukturen den für das Ordnungsreduktions-Rahmenwerk notwendigen Modellstrukturen genügen. Dabei werden die Abhängigkeiten der FE-Modelle von verschiedenartigen Designparametern formal untersucht. Ein wesentlicher Aspekt ist hierbei die getrennte Behandlung von expliziten Parametern, wie Materialparameter und impliziten Parametern, wie Geometrieparameter. Darüber hinaus dienen verschiedene Mikrowellenstrukturen als

numerische Beispiele zur Untermauerung von Praxisrelevanz und Einsatzfähigkeit der vorgestellten Konzepte.

## 7.2 Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen

- Im Falle von FE-Modellen mit geometrischen Parametern erlaubt das Rahmenwerk keine Änderungen in der Topologie des FE-Netzes. Obwohl mit topologieerhaltenden Netzverzerrungsalgorithmen eine große Klasse von Geometrieparametern behandelt werden kann, so existieren dennoch eine Reihe von Geometrieparametern, die eine Änderung der Netztopologie unausweichlich machen. In diesem Falle ist eine Erweiterung der Methoden dieser Dissertation erforderlich.
- Die vorgestellten Methodiken betrachten Ausgangsmodelle, deren Eingangs- und Ausgangsmatrizen allenfalls von den expliziten Parametern abhängen. Der Fall einer impliziten Parameterabhängigkeit dieser Matrizen macht weitere Untersuchungen erforderlich.
- Zur Beschreibung von Mikrowellenstrukturen auf Netzwerkebene ist stets angenommen worden, dass eine Anregung der Strukturen mittels homogener Wellenleiter erfolgt. Eine Verallgemeinerung auf zylindrische Wellenleiter würde die praktische Anwendbarkeit der Methodiken erweitern.
- Es wurde explizit gezeigt, unter welchen Voraussetzungen FE-Modelle von Mikrowellenstrukturen im Frequenzbereich die Struktur der eingeführten Ausgangsmodelle aufweisen. Die Identifikation und Analyse weiterer Modellklassen bieten Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen.



# Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	Bedeutung
EP	Einpunkt
FE	Finite-Elemente
GA	Genetischer Algorithmus
LGS	Lineares Gleichungssystem
MOR	Modellordnungsreduktion
MP	Mehrpunkt
PROM	Parametrisches reduziertes Modell
PMOR	Parametrische Modellordnungsreduktion
PMTBR	Poor Man's Truncated Balanced Realization
RHL	Rechteckhohlleiter
SVD	Singular Value Decomposition
TE	Transversal elektrisch
TEM	Transversal elektromagnetisch
TM	Transversal magnetisch



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schematische Darstellung des Randwertproblems . . . . .	11
2.2	Schematische Darstellung einer Mikrowellenstruktur . . . . .	13
2.3	Schematische Darstellung von Mehrtores . . . . .	15
2.4	Erzeugung eines parametrischen Finite-Elemente-Netzes . . . . .	23
2.5	Tetraeder-Deformation mit affinen Abbildungen . . . . .	24
4.1	Direkte Interpolation von Basen . . . . .	49
4.2	Auf orthogonalen Projektionen basierende Darstellung von parameterabhängigen Unterräumen . . . . .	53
5.1	Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter . . . . .	61
5.2	Gleichmäßigen Verfeinerung eines zweidimensionalen Tensorgitters . . . . .	62
5.3	Vivaldi-Antennen-Element: Skizze und dreidimensionales Modell . . . . .	66
5.4	Vivaldi-Antennen-Element: Finite-Elemente-Netze für unterschiedliche Längen des Antennen-Horns . . . . .	67
5.5	Vivaldi-Antennen-Element: Konvergenz verschiedener Verfahren der parametrischen Ordnungsreduktion . . . . .	69
5.6	Vivaldi-Antennen-Element: Antwortflächen . . . . .	72
5.7	Vivaldi-Antennen-Element: Reaktanzen und Resistanzen für ausgewählte Geometriewerte . . . . .	73
5.8	Iris-Filter: Schematischer Aufbau und dreidimensionales Modell . . . . .	75
5.9	Iris-Filter: Konvergenz verschiedener Verfahren der parametrischen Ordnungsreduktion . . . . .	77

5.10	Iris-Filter: Antwortflächen und Fehler des Iris-Elements . . . . .	78
5.11	Iris-Filter: Dämpfung des gesamten Iris-Filters . . . . .	79
5.12	Algorithmische Struktur des adaptiven Verfahrens zur parametrischen Modellordnungsreduktion. . . . .	81
5.13	Strukturierung des Raumes der impliziten Parameter. Hyperkubus mit Unter-Tensorgitter . . . . .	82
5.14	Ungleichmäßigen Verfeinerung eines zweidimensionalen Gitters . . . . .	83
5.15	Stufe I des selbst-adaptiven Verfahrens zur parametrischen Ordnungsreduktion . . . . .	88
5.16	Stufe II des selbst-adaptiven Verfahrens zur parametrischen Ordnungsreduktion . . . . .	92
5.17	Durchkontaktierung einer Leiterplatte. Skizze und dreidimensionales Modell	93
5.18	Durchkontaktierung einer Leiterplatte. Konvergenz verschiedener Verfahren der parametrischen Modellordnungsreduktion . . . . .	95
5.19	Durchkontaktierung einer Leiterplatte. Antwortflächen und Fehler . . .	98
6.1	Algorithmische Struktur einer Klasse von deterministischen Optimierungsverfahren . . . . .	104
6.2	Algorithmische Struktur einer Klasse von stochastischen Optimierungsverfahren . . . . .	107
6.3	Iris-Filter-Optimierung: Konvergenzverhalten des Quasi-Newton-Verfahrens sowie des Genetischen Algorithmus . . . . .	111
6.4	Iris-Filter-Optimierung: Amplitudengänge verschiedener Filterkonfigurationen . . . . .	113
6.5	Iris-Filter-Optimierung: Fehler im Amplitudengang der optimierten Filterkonfigurationen . . . . .	114



# Tabellenverzeichnis

5.1	Numerische Daten für das Vivaldi-Antennen-Element . . . . .	70
5.2	Numerische Daten für das Iris-Element . . . . .	77
5.3	Numerische Daten für die Durchkontaktierung . . . . .	97
6.1	Einstellungen des genetischen Algorithmus . . . . .	109
6.2	Numerische Daten zur Filter-Optimierung . . . . .	111
6.3	Parameterwerte sowie Werte der Kostenfunktion vor und nach der Optimierung des Iris-Filters . . . . .	112



# Literaturverzeichnis

- [ACCF09] AMSALLEM, D. ; CORTIAL, J. ; CARLBERG, K. ; FARHAT, C.: A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 80 (2009), Juli, Nr. 9, S. 1241–1258
- [AF08] AMSALLEM, D. ; FARHAT, C.: Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. In: *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 46 (2008), Juli, Nr. 7, S. 1803–1813
- [AMS04] ABSIL, P.-A. ; MAHONY, R. ; SEPULCHRE, R.: Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation. In: *Acta Applicandae Mathematicae* 80 (2004), Januar, Nr. 2, S. 199–220
- [AMS08] ABSIL, P.-A. ; MAHONY, R. ; SEPULCHRE, R.: *Optimization Algorithms on Matrix Manifolds*. 1. Auflage. Princeton/Oxford : Princeton University Press, 2008
- [Ant05] ANTOULAS, A. C.: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. 1. Auflage. Philadelphia : SIAM, 2005
- [ATW84] ARNDT, F. ; TUCHOLKE, U. ; WRIEDT, T.: Computer-optimized multi-section transformers between rectangular waveguide of adjacent frequency bands. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 32 (1984), November, Nr. 11, S. 1479–1484
- [AZA98] ATIA, W. A. ; ZAKI, K. A. ; ATIA, A. E.: Synthesis of general topology multiple coupled resonator filters by optimization. In: *IEEE MTT-S International Microwave Symposium* Bd. 2. Baltimore, Juni 1998, S. 821–824
- [Bal89] BALANIS, C. A.: *Advanced Engineering Electromagnetics*. 1. Auflage. New York : Wiley, 1989
- [Ban69] BANDLER, J. W.: Optimization methods for computer-aided design. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 17 (1969), August, Nr. 8, S. 533–552

- [BB09] BAUER, U. ; BENNER, P.: Model reduction for parametric systems using balanced truncation and interpolation. In: *at - Automatisierungstechnik* 57 (2009), August, Nr. 8, S. 411–420
- [BBG<sup>+</sup>11] BAUR, U. ; BENNER, P. ; GREINER, A. ; KORVINK, J. G. ; LIENEMANN, J. ; MOOSMANN, C.: Parameter preserving model order reduction for MEMS applications. In: *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 17 (2011), Juli, Nr. 4, S. 297–317
- [BFDE12a] BURGARD, S. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Generation of parametric reduced models for passive microwave structures with focus on geometric parameters. In: *The 11th International Workshop on Finite Elements for Microwave Engineering*. Estes Park, Juni 2012
- [BFDE12b] BURGARD, S. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Interpolatory parametric order reduction of finite-element systems in electromagnetics with focus on geometric parameters. In: *Second International Workshop on Model Reduction for Parametrized Systems*. Günzburg, Oktober 2012
- [BFDE13] BURGARD, S. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: A novel parametric model order reduction approach with applications to geometrically parameterized microwave devices. In: *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 32 (2013), September, Nr. 5, S. 1525–1538
- [BFLDE13] BURGARD, S. ; FARLE, O. ; LOEW, P. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Fast shape optimization of microwave devices based on parametric reduced order models. In: *IEEE Transactions on Magnetics* (2013). – Zur Veröffentlichung angenommen
- [BS05] BAI, Z. ; SU, Y.: Dimension reduction of large-scale second-order dynamical systems via a second-order Arnoldi method. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 26 (2005), Juli, Nr. 5, S. 1692–1709
- [Bud98] BUDIMIR, D.: *Generalized Filter Design by Computer Optimization*. 1. Auflage. Norwood : Artech House, 1998
- [Bur08] BURGARD, S.: *Morphing von Finite-Elemente-Netzen*. Saarbrücken, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Universität des Saarlandes, Diplomarbeit, 2008
- [CBK<sup>+</sup>10] CHENG, Q. S. ; BANDLER, J. W. ; KOZIEL, S. ; BAKR, M. H. ; OGURTSOV, S.: The state of the art of microwave CAD: EM-based optimization and modeling. In: *International Journal of RF and Microwave Computer-Aided Engineering* 20 (2010), September, Nr. 5, S. 475–491

- [Che67] CHEN, T.-S.: Characteristics of waveguide resonant-iris filter. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 15 (1967), April, Nr. 4, S. 260–262
- [Cod05] CODECASA, L.: A novel approach for generating boundary condition independent compact dynamic thermal networks of packages. In: *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies* 28 (2005), Dezember, Nr. 4, S. 593–604
- [Col91] COLLIN, R. M.: *Field Theory of Guided Waves*. 2. Auflage. New York : IEEE Press, 1991
- [Col01] COLLIN, R. E.: *Foundations for Microwave Engineering*. 2. Auflage. New York : John Wiley & Sons, 2001
- [CW01] CLEMENS, M. ; WEILAND, T.: Discrete electromagnetism with the finite integration technique. In: *Progress In Electromagnetics Research* 32 (2001), S. 65–87
- [Dav75] DAVIS, P. J.: *Interpolation and Approximation*. 1. Auflage. New York : Dover Publications, 1975
- [DDD08] DESCHRIJVER, D. ; DHAENE, T. ; DE ZUTTER, D.: Robust parametric macromodeling using multivariate orthonormal vector fitting. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 56 (2008), Juli, Nr. 7, S. 1661–1667
- [DEF09] DYCZIJ-EDLINGER, R. ; FARLE, O.: Finite element analysis of linear boundary value problems with geometrical parameters. In: *The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering* 28 (2009), Nr. 4, S. 779–794
- [DLM<sup>+</sup>99] DYCK, D. ; LOWTHER, D. A. ; MALIK, Z. ; SPENCE, R. ; NELDER, J.: Response surface models of electromagnetic devices and their application to design. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 35 (1999), Mai, Nr. 3, S. 1821–1824
- [DSC<sup>+</sup>06] DANIEL, L. ; SIONG, O. C. ; CHAY, L. S. ; LEE, K. H. ; WHITE, J.: A multiparameter moment-matching model-reduction approach for generating geometrically parameterized interconnect performance models. In: *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems* 23 (2006), November, Nr. 5, S. 678–693
- [EAS98] EDELMAN, A. ; ARIAS, T. A. ; SMITH, S. T.: The geometry of algorithms with orthogonality constraints. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 20 (1998), Oktober, Nr. 2, S. 303–353

- [Far07] FARLE, O.: *Ordnungsreduktionsverfahren für die Finite-Elemente-Simulation parameterabhängiger passiver Mikrowellenstrukturen*. Saarbrücken, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Universität des Saarlandes, Diss., 2007
- [FBDE11] FARLE, O. ; BURGARD, S. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Passivity preserving parametric model-order reduction for non-affine parameters. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems* 17 (2011), Mai, Nr. 3, S. 279–294
- [FDE10] FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Numerically stable moment matching for linear systems parameterized by polynomials in multiple variables with applications to finite element models of microwave structures. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 58 (2010), November, Nr. 11, S. 3675–3684
- [FHDE04] FARLE, O. ; HILL, V. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Finite-element waveguide solvers revisited. In: *IEEE Transactions on Magnetism* 40 (2004), März, Nr. 2, S. 1468–1471
- [FKD09] FERRANTI, F. ; KNOCKAERT, L. ; DHAENE, T.: Parameterized S-parameter based macromodeling with guaranteed passivity. In: *IEEE Microwave and Wireless Components Letters* 10 (2009), Oktober, Nr. 10, S. 608–610
- [FKD11] FERRANTI, F. ; KNOCKAERT, L. ; DHAENE, T.: Passivity-preserving parametric macromodeling by means of scaled and shifted state-space systems. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 59 (2011), Oktober, Nr. 10, S. 2394–2403
- [FLDE10] FARLE, O. ; LÖSCH, M. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: Efficient fast frequency sweep without nonphysical resonances. In: *Electromagnetics* 30 (2010), März, Nr. 1-2, S. 51–68
- [Fle01] FLETCHER, R.: *Practical Methods of Optimization*. 2. Auflage. Chichester : John Wiley & Sons, 2001
- [FP02] FERZIGER, J. H. ; PERIC, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3. Auflage. New York : Springer, 2002
- [Gal01] GALLIER, J.: *Geometric Methods and Applications for Computer Science and Engineering*. 1. Auflage. New York : Springer, 2001
- [GKN02] GUNUPUDI, P. ; KHAZAKA, R. ; NAKHLA, M.: Analysis of transmission line circuits using multidimensional model reduction techniques. In: *IEEE Transactions on Advanced Packaging* 25 (2002), Mai, Nr. 2, S. 174–180
- [Gri97] GRIMME, E. J.: *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. Urbana, Coordinated-Science Laboratory, University of Illinois, Diss., 1997

- [GV96] GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C. F.: *Matrix Computations*. 3. Auflage. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1996
- [Har93] HARRINGTON, R. F.: *Field Computation by Moment Method*. New York : IEEE Press, 1993
- [Har01] HARRINGTON, R. F.: *Time-harmonic Electromagnetic Fields*. 1. Auflage. New York : IEEE Press, 2001
- [HFDE03] HILL, V. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: A stabilized multilevel vector finite-element solver for time-harmonic electromagnetic waves. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 39 (2003), Mai, Nr. 3, S. 1203–1206
- [Hil06] HILL, V.: *Schnelle Finite-Elemente-Methoden zur Simulation elektromagnetischer Felder im Frequenzbereich*. Saarbrücken, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Universität des Saarlandes, Diss., 2006
- [HL01] HONG, J.-S. ; LANCASTER, M. J.: *Microstrip Filters for RF/Microwave Applications*. 1. Auflage. New York : John Wiley & Sons, 2001
- [HP01] HEYDARI, P. ; PEDRAM, M.: Model reduction of variable geometry interconnects using variational spectrally-weighted balanced truncation. In: *IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design*. San Jose, November 2001, S. 586–591
- [HW07] HAUPT, R. L. ; WERNER, D. H.: *Genetic Algorithms in Electromagnetics*. 1. Auflage. Hoboken : John Wiley & Sons, 2007
- [Ing06] INGELSTRÖM, P.: A new set of H(curl)-conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 54 (2006), Januar, Nr. 1, S. 106–114
- [Jin02] JIN, J.: *The Finite Element Method in Electromagnetics*. 2. Auflage. New York : John Wiley & Sons, 2002
- [JR09] JACOBSSON, P. ; RYLANDER, T.: Shape optimization of the total scattering cross section for cylindrical scatterers. In: *Radio Science* 44 (2009), August, Nr. 4
- [JR10] JACOBSSON, P. ; RYLANDER, T.: Gradient-based shape optimisation of conformal array antennas. In: *IET Microwaves, Antennas & Propagation* 4 (2010), Februar, Nr. 2, S. 200–209
- [JS04] JARRE, F. ; STOER, J.: *Optimierung*. 1. Auflage. Berlin/Heidelberg : Springer, 2004
- [Kel95] KELLEY, C. T.: *Iterative Methods for Optimization*. 1. Auflage. Philadelphia : SIAM, 1995

- [KV10] KUNISCH, K. ; VOLKWEIN, S.: Optimal snapshot location for computing POD basis functions. In: *Mathematical Modeling and Numerical Analysis* 44 (2010), Mai, Nr. 3, S. 509–529
- [LE09] LOHMANN, B. ; EID, R.: Efficient order reduction of parametric and nonlinear models by superposition of locally reduced models. In: ROPPENCKERAND, G. (Hrsg.) ; LOHMANN, B. (Hrsg.): *Methoden und Anwendungen der Regelungstechnik. Erlangen-Münchener Workshops 2007 und 2008*. Aachen : Shaker Verlag, 2009, S. 27–36
- [LJH95] LEE, H.-B. ; JUNG, H.-K. ; HAHN, S.-Y.: Shape optimization of H-plane waveguide tee junction using edge finite element method. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 31 (1995), Mai, Nr. 3, S. 1928–1931
- [LK05] LEUNG, A. T.-M. ; KHAZAKA, R.: Parametric model order reduction technique for design optimization. In: *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. Kobe, Mai 2005, S. 1290–1293
- [LMCC04] LEBENSZTAJN, L. ; MARRETTO, C. A. R. ; COSTA, M. C. ; COULOMB, J.-L.: Kriging: a useful tool for electromagnetic device optimization. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 40 (2004), März, Nr. 2, S. 1196–1199
- [IMK94] ÜLMER, G. F. ; MOHAMMED, O. A. ; KOH, C.-S.: Utilizing genetic algorithms for the optimal design of electromagnetic structures. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 30 (1994), November, Nr. 6, S. 4296–4298
- [LPS99] LIU, Y. ; PILEGGI, L. T. ; STROJWAS, A. J.: Model order-reduction of RC(L) interconnect including variational analysis. In: *Proceedings of the 36th Design Automation Conference*. New Orleans, Juni 1999, S. 201–206
- [LSG<sup>+</sup>08] LEI, G. ; SHAO, K. R. ; GUO, Y. ; ZHU, J. ; LAVERS, J. D.: Sequential optimization method for the design of electromagnetic device. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 44 (2008), November, Nr. 11, S. 3217–3220
- [Mon03] MONK, P.: *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. 1. Auflage. Oxford : Oxford University Press, 2003
- [Mor97] MORTENSON, M. E.: *Geometric Modeling*. 1. Auflage. New York : John Wiley & Sons, 1997
- [Mum48] MUMFORD, M. M.: Maximally-flat filters in waveguides. In: *Bell System Technical Journal* 27 (1948), Oktober, S. 684–713
- [NW06] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S.: *Numerical Optimization*. 2. Auflage. New York : Springer, 2006
- [Per88] PERTERSON, A. F.: Absorbing Boundary Conditions for the Vector Wave Equation. In: *Microwave and Optical Technology Letters* 1 (1988), April, Nr. 2, S. 62–64



- [Pet05] PETERSON, A. F.: *Mapped Vector Basis Functions For Electromagnetic Integral Equations*. 1. Auflage. Colorado : Morgan and Claypool, 2005
- [Phi04] PHILLIPS, J. R.: Variational interconnect analysis via PMTBR. In: *IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design*. San Jose, November 2004, S. 872–879
- [PMEL10] PANZER, H. ; MOHRING, J. ; EID, R. ; LOHMANN, B.: Parametric model order reduction by matrix interpolation. In: *at - Automatisierungstechnik* 58 (2010), August, Nr. 8, S. 475–484
- [Poz05] POZAR, D. M.: *Microwave Engineering*. 3. Auflage. Hoboken : John Wiley & Sons, 2005
- [PS10] POMPLUN, J. ; SCHMIDT, F.: Accelerated a posteriori error estimation for the reduced basis method with application to 3d electromagnetic scattering problems. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 32 (2010), Februar, Nr. 2, S. 498–520
- [RAZ01] RUBIO, J. ; ARROYO, J. ; ZAPATA, J.: SFELP - An efficient methodology for microwave circuit analysis. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 49 (2001), März, Nr. 3, S. 509–516
- [RHP08] ROZZA, G. ; HUYNH, D. B. P. ; PATERA, A. T.: Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 15 (2008), Mai, Nr. 3, S. 229–275
- [RP99] RABIEI, P. ; PEDRAM, M.: Model order reduction of large scale circuit using balanced truncation. In: *Proceedings of the Asia and South Pacific Design Automation Conference* Bd. 1. Hong Kong, Januar 1999, S. 237–240
- [Rue74] RUEHLI, A. E.: Equivalent circuit model for three-dimensional multiconductor systems. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 22 (1974), März, Nr. 3, S. 216–221
- [Rus03] RUSSER, P.: *Electromagnetics, Microwave Circuit and Antenna Design for Communication Engineering*. 1. Auflage. Norwood : Artech House, 2003
- [Sch81] SCHWEFEL, H.-P.: *Numerical Optimization of Computer Models*. 3. Auflage. Chichester : John Wiley & Sons, 1981
- [Sch13] SCHULTSCHICK, A.: *Adaptive model order reduction techniques for the broadband finite element simulation of electromagnetic structures*. Saarbrücken, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Universität des Saarlandes, Diss., 2013
- [SCNZ94] SANAIE, R. ; CHIPROUT, E. ; NAKHLA, M. S. ; ZHANG, Q.-J.: A fast method for frequency and time domain simulation of high-speed VLSI

- interconnects. In: *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* 42 (1994), Dezember, Nr. 12, S. 2562–2571
- [Sen60] SENIOR, T. B. A.: Impedance boundary conditions for imperfectly conducting surfaces. In: *Applied Scientific Research, Section B* 8 (1960), Nr. 1, S. 418–436
- [SFDE09] SCHULTSCHICK, A. ; FARLE, O. ; DYCZIJ-EDLINGER, R.: An adaptive multi-point fast frequency sweep for large-scale finite element models. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 45 (2009), März, Nr. 3, S. 1108–1111
- [SG04] SCHENK, O. ; GÄRTNER, K.: Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with PARDISO. In: *Journal of Future Generation Computer Systems* 20 (2004), April, Nr. 3, S. 475–487
- [SKN00] SARENI, B. ; KRÄHENBÜHL, L. ; NICOLAS, A.: Efficient genetic algorithms for solving hard constrained optimization problems. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 36 (2000), Juli, Nr. 4, S. 1027–1030
- [SL06] SALIMBAHRAMI, B. ; LOHMANN, B.: Order reduction of large scale second order systems using Krylov subspace methods. In: *Linear Algebra and its Application* 415 (2006), Juni, Nr. 2-3, S. 385–405
- [SLL02] SLONE, R. D. ; LEE, J.-F. ; LEE, R.: Automating multipoint Galerkin AWE for a FEM fast frequency sweep. In: *IEEE Transactions on Magnetics* 38 (2002), März, Nr. 2, S. 637–640
- [SLL03] SLONE, R. D. ; LEE, R. ; LEE, J.-F.: Broadband model order reduction of polynomial matrix equation using single-point well-conditioned asymptotic waveform evaluation: derivation and theory. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), Dezember, Nr. 1, S. 2325–2342
- [Son13] SON, N. T.: A real time procedure for affinely dependent parametric model order reduction using interpolation on Grassmann manifolds. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 93 (2013), Februar, Nr. 8, S. 818–833
- [SS90] STEWART, G. W. ; SUN, J.-G.: *Matrix Perturbation Theory*. 1. Auflage. San Diego : Academic Press, 1990
- [SS99] SHIN, J. ; SCHAUBERT, D. H.: A parameter study of stripline-fed Vivaldi notch-antenna arrays. In: *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 47 (1999), Mai, Nr. 5, S. 879–886
- [TH05] TAFLOVE, A. ; HAGNESS, S. C.: *Computational-Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. 3. Auflage. Boston/London : Artech House Publishers, 2005

- [TM01] TISSEUR, F. ; MEERBERGEN, K.: The quadratic eigenvalue problem. In: *SIAM Review* 43 (2001), Mai, Nr. 2, S. 235–286
- [TNGT07] TRIVERIO, P. ; NAKHLA, M. ; GRIVET-TALOCIA, S.: Parametric macro-modeling of multiport networks from tabulated data. In: *IEEE Conference on Electrical Performance of Electronic Packaging*. Atlanta, Oktober 2007, S. 51–54
- [TNGT10] TRIVERIO, P. ; NAKHLA, M. ; GRIVET-TALOCIA, S.: Extraction of parametric circuit models from scattering parameters of passive RF components. In: *European Microwave Integrated Circuits Conference*. Paris, September 2010, S. 393–396
- [Van07] VAN BLADEL, J. G.: *Electromagnetic Fields*. 2. Auflage. Piscataway : IEEE Press, 2007
- [WP86] WEBB, J. P. ; PARIHAR, S.: Finite element analysis of H-plane rectangular waveguide problems. In: *IEEE Proceedings H: Microwaves, Antennas & Propagation* 133 (1986), Nr. 2, S. 91–94
- [WPV09] WANG, W. ; PARACHOS, G. N. ; VOUVAKIS, M. N.: BT-POD: a parallel and error-controllable wideband model reduction method for frequency-domain simulations. In: *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*. Atlanta, Juni 2009, S. 1–4
- [WPV10] WANG, W. ; PARASCHOS, G. N. ; VOUVAKIS, M. N.: Multi-parametric sweep of large-scale FEM models using the BT-POD. In: *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*. Toronto, Juli 2010, S. 1–4
- [WSW06] WITTIG, T. ; SCHUHMAN, R. ; WEILAND, T.: Model order reduction for large systems in computational electromagnetics. In: *Linear Algebra and its Applications* 415 (2006), Juni, Nr. 2-3, S. 499–530
- [WV11] WANG, W. ; VOUVAKIS, M. N.: Fast geometric parameter sweep of FEM models via a nonlinear BT-POD model reduction. In: *IEEE International Symposium on Antennas and Propagation*. Spokane, Juli 2011, S. 2472–2475
- [ZT00] ZIENKIEWICZ, O. C. ; TAYLOR, R. L.: *The Finite Element Method*. 5. Auflage. Oxford : Butterworth-Heinemann, 2000