

# **Charakterisierung des nichtlinear-viskoelastischen Materialverhaltens gefüllter Elastomere**

**Dissertation**

zur Erlangung des Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)**

der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät III

Chemie, Pharmazie, Bio- und Werkstoffwissenschaften  
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

**Dipl.-Ing. Tobias Scheffer**

Saarbrücken

2016

Tag des Kolloquiums: 04.03.2016

Dekan:	Prof. Dr.-Ing. Dirk Bähre
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels Dr.-Ing. habil. Michael Johlitz
Vorsitz:	Prof. Dr.-Ing. Dirk Bähre
Akad. Mitarbeiter:	Dr-Ing. Daniela Foetz

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität des Saarlandes am Lehrstuhl für Technische Mechanik unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels. An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, mich für die Hilfe und Unterstützung, die ich in der Zeit meiner Dissertation erhalten habe, zu bedanken.

Zunächst gilt Prof. Dr.-Ing. Stefan Diebels in der Rolle meines Doktorvaters mein besonderer Dank. Seine Unterstützung und Förderung haben maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Bereits während meiner Zeit als studentischer Mitarbeiter und anschließend während meiner Promotion hat er mir jederzeit großes Vertrauen geschenkt und war für unzählige fachliche Diskussion immer bereit. Das gemeinsame, angenehme Arbeitsklima hat mich in meiner Arbeit deutlich voran gebracht.

Besonders gefreut hat es mich, dass Dr.-Ing. habil. Michael Johlitz sich für die Übernahme des Koreferats bereit erklärt hat. Bereits während seiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Universität des Saarlandes konnte er mich in seinen Lehrveranstaltungen für die Technische Mechanik begeistern und hat damit einen wesentlichen Beitrag dazu geleistet, dass diese Arbeit zu Stande gekommen ist. Außerdem war auch sein räumlicher Wechsel an die Universität der Bundeswehr München niemals ein Hindernis für einen weiteren Kontakt und einen wissenschaftlichen Austausch. Auch ihm gilt daher mein besonderer Dank.

Darüber hinaus möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhl für Technische Mechanik bedanken. Ihr alle habt durch die zahlreichen fachlichen, aber auch fachfremden Diskussionen in einem angenehmen Arbeitsklima maßgeblich zum Erfolg der Arbeit beigetragen. Namentlich nennen möchte ich Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Anne Jung. Ich konnte stets auf ihren umfangreichen Erfahrungsschatz zurückgreifen und sie hat mich bei der Ausarbeitung meiner Dissertation sehr unterstützt. Des Weiteren möchte ich mich bei Dr.-Ing. Florian Goldschmidt bedanken, der die Implementierung der 3D-Finite-Elemente-Methode für diese Arbeit umgesetzt hat.

Es ist kaum möglich allen Institutskollegen meinen Dank persönlich auszusprechen. Dennoch möchte ich mich an dieser Stelle insbesondere bei meinen unmittelbaren Bürokollegen bedanken. Bereits Michael und Nadine sorgten mit ihrer angenehmen und motivierenden Art stets für ein besonders angenehmes Arbeitsumfeld und konnten mich so für meine Arbeit begeistern. Während meines Studiums und auch anschließend in der gemeinsamen Zeit im Büro gilt mein Dank Henning. Sowohl auf wissenschaftlicher als auch freundschaftlicher Basis blicke ich hier gerne auf eine schöne gemeinsame Zeit zurück. Einen besonderen Dank möchte ich schließlich an Céline richten. Gerade in der nicht immer einfachen Schlussphase meiner Arbeit konnte sie mich jederzeit wieder aufbauen und motivieren. Sowohl als Kollegin als auch gute Freundin hatte sie stets ein offenes Ohr und war während der Zeit für die Entstehung dieser Arbeit und darüber hinaus für mich sehr wichtig.

Zuletzt gilt mein persönlicher Dank meiner Familie und meinen Freunden. In den vergangenen Jahren hatten sie auch in den schwierigeren Phasen jederzeit das notwendige Verständnis und haben mich immer in meiner Arbeit unterstützt.

Saarbrücken, Januar 2016

*Tobias Scheffer*

## Zusammenfassung

Charakteristisch für gefüllte Elastomere ist ihr ausgeprägtes inelastisches Materialverhalten. Neben einer deutlichen Hysterese ist es typisch, dass die Relaxationsprozesse über einen langen Zeitraum ablaufen. Das Verhalten folgt dabei häufig nicht einer linearen Viskoelastizitätstheorie.

Die vorliegende Arbeit behandelt die mechanische Charakterisierung eines rußgefüllten Elastomers in einem kontinuumsmechanischen Materialmodell. Der wesentliche Bestandteil des Modells ist die Beschreibung der Effekte über prozessabhängige Materialparameter.

Aufgrund der Komplexität des Materialverhaltens ist die Aufbereitung der experimentellen Daten bereits hinreichend aufwendig. Daher widmet sich ein maßgeblicher Teil dieser Arbeit der Entwicklung einer angemessenen Versuchsführung. Das Hauptaugenmerk gilt dabei der Grundelastizität als Basis für die Überlagerung der zeitabhängigen Effekte. Es wird ein optimierter Prozess zur Separierung der Gleichgewichtsspannungen aus der Gesamtspannung entwickelt.

Da die prozessabhängige Formulierung des Materialmodells in einer komplexen Parameteridentifikation mündet, wird zudem für die Betrachtung kürzerer Zeitskalen ein weiterer Modellvorschlag vorgestellt. Er basiert auf einer Erweiterung des viskoelastischen Modells um eine statische Hysterese bei zyklischer Belastung, so dass die Formulierung der viskoelastischen Anteile keiner Prozessabhängigkeit mehr bedarf.

## **Abstract**

Characteristic for filled elastomers is a pronounced inelastic material behavior. A distinctive hysteresis loop, as well as relaxation processes over a long time range are typical. Thereby, the material behavior is usually non-linear viscoelastic.

The present contribution deals with the mechanical characterization of a filled elastomer by a continuum mechanical model. One major aspect of the model is the description of the observed effects by process-dependent material parameters.

The experiments result in a very elaborate process because of the complex material behavior. Hence, special attention is turned towards the development of an adequate experimental procedure. The focus is on the basic elasticity, which deals as the basis for the superimposed time-dependent behavior. Therefore, an optimized process in order to separate the equilibrium stress out of the overall stress is developed.

The process-dependent formulation of the model results in a difficult parameter identification. Hence, concerning smaller time ranges, a further modeling approach is presented. Therefore, the viscoelastic description is extended with a statical hysteresis for cyclic loadings. This extension yields a model, which does not need any process-dependent material parameters.

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Motivation &amp; Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Forschung</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Kontinuumsmechanische Grundlagen</b>	<b>13</b>
3.1	Kinematik . . . . .	14
3.2	Bilanzgleichungen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Materialtheorie</b>	<b>25</b>
4.1	Hyperelastizität . . . . .	26
4.2	Viskoelastizität . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Material &amp; experimentelle Methoden</b>	<b>49</b>
5.1	Probenmaterial . . . . .	49
5.2	Experimentelle Methoden . . . . .	55

<b>6 Experimente &amp; Modellbildung</b>	<b>71</b>
6.1 Mullins-Effekt . . . . .	71
6.2 Grundelastizität . . . . .	76
6.3 Viskoelastische Betrachtungen . . . . .	85
6.3.1 Relaxationsversuche . . . . .	85
6.3.2 Zyklische Versuche . . . . .	87
6.3.3 Payne-Effekt . . . . .	90
6.4 Materialmodell . . . . .	92
<b>7 Numerik &amp; Parameteridentifikation</b>	<b>97</b>
7.1 Dreidimensionale Finite-Elemente-Umsetzung . . . . .	98
7.2 Uniaxiale Reduktion des Modells . . . . .	99
7.3 Parameteridentifikation . . . . .	105
7.4 Ergebnisse & Diskussion . . . . .	107
<b>8 Optimierung des experimentellen Prozesses</b>	<b>113</b>
<b>9 Alternativer Modellansatz</b>	<b>121</b>
<b>10 Zusammenfassung &amp; Ausblick</b>	<b>131</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>134</b>



<i>Inhaltsverzeichnis</i>	iii
<b>Anhang</b>	<b>151</b>
A    Veröffentlichungen & Proceedings . . . . .	151
B    Vorträge . . . . .	153



# 1

---

## Motivation & Einleitung

---

Elastomerwerkstoffe sind aus heutigen industriellen Anwendungen kaum noch wegzudenken. Zahlreiche Anforderungen benötigen zur Funktionalität elastische Komponenten. Zudem ist es durch die vorangetriebene Entwicklung und Kenntnis des Materialverhaltens in einer Vielzahl von Fällen möglich, metallische Komponenten mit hohem spezifischem Gewicht komplett durch polymere bzw. elastomere Bauteile zu ersetzen.

In ihren physikalischen Eigenschaften zeichnen sich Elastomere durch eine Vielzahl vorteilhafter Merkmale aus. Besonderer Nutzen wird in vielen Anwendungen aus der ausgeprägten reversiblen Verformbarkeit gezogen. Des Weiteren weisen Elastomere für viele Einsatzgebiete sehr gute Entkopplungseigenschaften auf. Aufgrund des gleichzeitig geringen spezifischen Gewichts ist das Material zudem für den Leichtbau dienlich. In der heutigen Zeit stehen sowohl Ökonomie als auch Ökologie im Vordergrund des industriellen Interesses. Daher ist der aufkommende Stellenwert solcher Leichtbaumaterialien mit sehr variablen Eigenschaften nicht weiter verwunderlich.

Um die Materialeigenschaften für die jeweilige Anwendung passend zur Verfügung zu stellen, ist es nur selten möglich unmittelbar das reine Elastomer ohne Zusätze einzusetzen, da es nicht immer alle Anforderungen erfüllen kann. Durch Hinzugabe von Füllstoffen sollen die Eigenschaften des Elastomers in geeigneter Weise verbessert und ergänzt werden. So können beispielsweise Festigkeits- oder

Dämpfungswerte unter Berücksichtigung der Wechselwirkung der beigemengten Füller bezüglich des Anwendungsfalls optimiert werden.

Die genannten Materialeigenschaften resultieren in einer Vielzahl von Anwendungsgebieten. Dabei gilt die Automobilindustrie als größter Abnehmer elastomerer Bauteile. Hier finden Elastomere für verschiedenste Anwendungen Einsatz, beispielsweise als Lagerbauteil oder als Dichtkörper. Sie sind auch als Basiskomponente aus der Reifenindustrie nicht mehr wegzudenken.

Auf Basis der beschriebenen charakteristischen Eigenschaften und des Interesses an solchen gefüllten Elastomeren ist die Kenntnis über das Materialverhalten von enormer Bedeutung. Bereits in frühen Entwicklungs- und Konstruktionsphasen von Bauteilen wird im Sinne des ökonomischen Gedankens auf Simulationen zurückgegriffen, um Entwicklungszeiten zu verkürzen, Schwachstellen zu ermitteln oder auch zur Optimierung der Bauteilgeometrie. Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, muss das Material in Bezug auf die experimentell gewonnenen Erkenntnisse in einem Materialmodell beschrieben werden.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein kontinuumsmechanisches Modell zur Verfügung zu stellen, welches das Materialverhalten eines rußgefüllten Elastomers widerspiegeln kann. Das Probenmaterial ist einer Automobiltürdichtung der Firma *SaarGummi International GmbH* entnommen. Diese besteht aus mehreren Komponenten. Eine bildet das rußgefüllte EPDM (Ethylen-Propylen-Dien-Kautschuk)-Vollmaterial, welches Bestandteil der folgenden Untersuchungen sein wird. Zusätzlich bildet eine wesentliche Komponente der Dichtung das EPDM als Moosgummi in aufgeschäumter Form. Frau Dr.-Ing. Koprowski-Theiß hat sich in ihrer Dissertation [86] der Beschreibung des Materialverhaltens des porösen, aufgeschäumten EPDM gewidmet. Basierend auf ihren Untersuchungen baut die folgende Arbeit auf.

Die wesentliche Charakteristik im Materialverhalten des rußgefüllten EPDM ist die ausgeprägte Zeit- und Prozessabhängigkeit. Diese äußert sich maßgeblich in zwei Experimenten. Zum einen kann bei Relaxationsversuchen beobachtet werden, dass die gesamte Relaxationszeit mehrere Tage bzw. darüber hinaus bis zum kompletten Relaxieren sogar mehrere Wochen beträgt. Der Anteil der zeitabhängigen Überspannungen, die sich während der konstanten Deformationen dabei abbauen, bildet einen Hauptanteil der Gesamtspannung. Zum anderen zeigt die Variation der Dehnraten in zyklischen Versuchen eine ausgeprägte Hysterese, die selbst für geringste Dehnraten nicht eliminiert werden kann. Die beobachteten Effekte haben maßgeblichen Einfluss auf die Formulierung des Materialmodells.

Bei dem Materialmodell wird zur Beschreibung dieses Verhaltens auf dem phäno-

menologischen Ansatz von Koprowski-Theiß [86] aufgebaut. Da nach ausreichender Erholungsphase im spannungsfreien Zustand keine plastischen Dehnungen im Probenmaterial überbleiben, wird von einer Modellbeschreibung mit plastischen Anteilen abgesehen. Um die hinreichend komplexe Ratenabhängigkeit allerdings abbilden zu können, ist es notwendig die Materialparameter vom Prozess abhängig zu formulieren. Dies resultiert in einer unmittelbaren Kopplung mehrerer Materialparameter in funktionalen Zusammenhängen, die von dem Belastungsprozess abhängig sind.

Die vorliegende Arbeit erweitert den experimentell zugrunde gelegten Datensatz aus [86] um die Betrachtung der Amplitudenabhängigkeit bei zyklischer Belastung in Form des Payne-Effekts. Dieser wird zusätzlich in die Parameteridentifikation miteinbezogen. Er stellt einen für gefüllte Elastomere charakteristischen Entfestigungseffekt dar und soll daher in der Materialbeschreibung Beachtung finden.

Außerdem hat sich bereits bei der Charakterisierung verschiedenster gefüllter Elastomere gezeigt, dass die deutlichen inelastischen Materialeigenschaften in einem sehr komplexen experimentellen Prozess resultieren. Beispielhaft sollen hier nur einige Literaturstellen in Form von Dissertationen, z. B. von Diercks [31], Dippel [32], Höfer [70], Koprowski-Theiß [86], Rendek [143], oder Sedlan [157] genannt werden. Gerade hinsichtlich einer phänomenologischen Modellbildung ist der zugrunde gelegten Datenbasis in Form der Experimente allerdings besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Ein weiteres Ziel ist es daher, den experimentellen Prozess als Datenbasis zur Modellbildung näher zu beleuchten. Zu diesem Zweck sollen die notwendigen Messmethoden vorgestellt werden und eine sinnvolle Versuchsführung zur Charakterisierung von gefüllten Elastomeren herausgearbeitet werden. Dabei gilt es vor allem, die Ermittlung der Grundelastizität ohne zeitabhängige Spannungsanteile zu optimieren. Wird das Materialverhalten, wie auch im vorliegenden Fall, mit einem rein viskoelastischen Modell beschrieben, so ist die Separierung der Gleichgewichtsspannungen aus der Gesamtspannung ein wichtiger Schritt zur Erstellung einer sinnvollen Modellbasis. Die Überlagerung der zeitabhängigen Nichtgleichgewichtsspannungen kann nur geeignet erfolgen, wenn die zugrunde gelegte Gleichgewichtsspannung frei von zeitabhängigen Anteilen ist.

Die Problematik bei gefüllten Elastomeren besteht darin, dass die bereits beschriebenen zeitabhängigen Prozesse auf solch großer Zeitskala ablaufen, dass die klassischen Experimente zur Ermittlung der Gleichgewichtsspannung nicht realisierbar sind. Als typische Versuche zur Bestimmung der Grundelastizität gelten zum einen zyklische Versuche bis zu einer gewissen Deformation, mit derart langsamen Dehn-

raten, dass Belastungs- und Entlastungspfad aufeinander zum liegen kommen. Es bildet sich somit keine Hysterese aus, die die inelastischen Anteile der Spannung verkörpert. Zum anderen können auch Relaxationsversuche an verschiedenen Dehnungsniveaus genutzt werden, um durch Interpolation durch die Endwerte jedes Relaxationsprozesses die gesamte Gleichgewichtskurve zu erhalten. Allerdings laufen die Relaxationsprozesse so langsam ab, dass reproduzierbare Ergebnisse ohne perfekte klimatische Bedingungen kaum realisierbar sind. Daher gilt in der vorliegenden Arbeit ein besonderes Augenmerk der Entwicklung einer sinnvollen Versuchsführung zur Separierung der Gleichgewichtsspannungen.

Durch die funktionalen Zusammenhänge und die daraus resultierende Kopplung der Materialparameter wird die Parameteridentifikation sehr komplex. Es stellt sich daher die Frage, ob es überhaupt einen eindeutigen optimalen Parametersatz gibt. Auch wenn das vorgestellte viskoelastische Materialmodell die Möglichkeit bietet, eine Vielzahl an Lastfällen abzubilden und die langen Relaxationsprozesse beinhaltet, soll in dieser Arbeit zusätzlich ein alternativer Modellvorschlag vorgestellt werden, um den Identifikationsprozess zu erleichtern. Das Modell basiert auf einer statischen Hysterese, die lediglich von geringen viskoelastischen Anteilen überlagert wird. Die Formulierung auf dieser Grundlage soll in der Art erfolgen, dass die funktionalen Kopplungen, die die wesentliche Ursache der komplexen Parameteridentifikation darstellen, entfallen. Die sehr langsamen Prozesse werden dabei nicht mehr abgebildet.

Im Folgenden wird in einem ersten Schritt der Stand der Forschung aufbereitet, auf welchem die Überlegungen in der Modellentwicklung beruhen. Die wesentliche Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist die mechanische Charakterisierung eines rußgefüllten Elastomers in Form eines kontinuumsmechanischen Materialmodells. Zu diesem Zweck werden in Kap. 3 und Kap. 4 die notwendigen Grundlagen bereitgestellt. Dabei erfolgt die Aufbereitung der Theorie zunächst auf allgemeinem Wege für die Kinematik und die Bilanzgleichungen. Bei der Ermittlung der materialspezifischen Zusammenhänge wird die Vorgehensweise anfänglich für hyperelastisches Materialverhalten vorgestellt, um schließlich die für diese Arbeit im Wesentlichen relevante Materialklasse der Viskoelastizität zu behandeln.

Im Anschluss wird das Probenmaterial vorgestellt. Das Hauptaugenmerk der Dissertation liegt auf der mechanischen Beschreibung des makroskopischen Verhaltens. Die physikalisch-chemische Charakterisierung des Materials erfolgt daher nur in solch geringem Maße, dass das mechanische Verhalten interpretiert werden kann. Auf eine weitere mikromechanische Untersuchung wird verzichtet. Des Weiteren

werden die experimentellen Methoden, welche zur mechanischen Charakterisierung Verwendung finden, eingeführt. Neben den Versuchsständen zur Aufbringung der Last werden optische Methoden zur Deformationsmessung vorgestellt. Des Weiteren zeigt Kap. 5 erste Vorversuche zur Charakterisierung grundlegender Eigenschaften wie Isotropie und Inkompressibilität.

Die in Kap. 6 beschriebene Modellentwicklung erfolgt in einer sukzessiven Vorgehensweise auf Basis der durchgeführten Experimente. Zunächst wird der Mullins-Effekt betrachtet. Im Anschluss werden die Gleichgewichtsspannungen als Modellbasis zur Verfügung gestellt. Die Parameteridentifikation für den Gleichgewichtsanteil folgt daher auch unmittelbar. Darauf aufbauend werden anhand von Relaxationsversuchen und zyklischen Experimenten mit unterschiedlichen Dehnraten die inelastischen Effekte des Materials herausgearbeitet. Des Weiteren wird der amplitudenabhängige Payne-Effekt untersucht. Auf Basis der experimentellen Ergebnisse wird in Kap. 6.4 das resultierende Materialmodell beschrieben.

In Kap. 7 wird zunächst die Möglichkeit einer dreidimensional formulierten Finite-Elemente-Umsetzung dargestellt. Da diese jedoch nicht grundlegender Bestandteil der vorliegenden Arbeit ist, wird nur ein Überblick über die Vorgehensweise gegeben. Im Anschluss wird zur Verringerung des numerischen Aufwands das Modell auf den uniaxialen Lastfall beschränkt. Darauf basierend erfolgt schließlich die Parameteridentifikation des Modells. Die daraus resultierenden Ergebnisse werden darauf folgend vorgestellt und mit den experimentellen Ergebnissen verglichen.

Auf Basis des Modells wird die Aufmerksamkeit wieder zurück auf das Experiment gelenkt. Kap. 8 widmet sich der Optimierung des experimentellen Prozesses zur Ermittlung der Gleichgewichtsspannungen.

Da die Parameteridentifikation für das viskoelastische Modell ein komplexes Verfahren darstellt, wird in Kap. 9 ein alternativer Modellvorschlag auf Basis einer geometrisch linearen Theorie vorgestellt. Das wesentliche Merkmal dieser Modellbeschreibung ist die Beinhaltung einer statischen Hysterese, welche durch die Reibung zwischen Füllerpartikeln oder -agglomeraten hervorgerufen werden kann. Auch für das Alternativmodell wird ein Vergleich zwischen Simulation und Experimenten gezogen. Die Vor- und Nachteile des alternativen Ansatzes werden beschrieben.

Letztenendes werden die maßgeblichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit noch einmal zusammengefasst dargestellt und ein Ausblick auf Folgearbeiten gegeben, welche auf dieser Dissertation beruhen können.





# 2

---

## Stand der Forschung

---

In industriellen Anwendungen kommen bei Bauteilen mit elastischen Komponenten in der Regel gefüllte Elastomere zum Einsatz. Als typisches Verwendungsbereich ist in erster Linie die Automobilindustrie zu nennen. Neben dem Einsatz als Reifengummi [36] werden gefüllte Elastomere beispielsweise in der Vibrationsdämpfung [162] oder auch als Dichtungsgummi [177] genutzt. Eine Übersicht über gefüllte Elastomere, angefangen bei den chemischen und physikalischen Eigenschaften, über die Herstellungsverfahren bis hin zu den typischen Einsatzgebieten und mechanischen Eigenschaften liefern Leblanc [100], Rother [153] oder Enikolopyan [40]. Das Potential dieser Werkstoffe für die verschiedenen Verwendungszwecke, das sich durch die verschiedenen Herstellungsverfahren sowie die Vielzahl an möglichen Kombinationen aus Füllstoffen und Matrixmaterialien ergibt, wird in Domininghaus [34] vorgestellt. Diese Übersichtswerke haben gemein, dass sie zum einen den wohl geläufigsten Füllerpartikel, den Kohlenstoff oder Ruß [175, 186], betrachten, zum anderen wird der Fokus verstärkt auf alternative Füller gelenkt. Dazu werden vor allem die Silicate gezählt [167, 178, 185], welche immer größeren Stellenwert erlangen.

Auch der mechanischen Charakterisierung von gefülltem Gummi wird immer mehr Bedeutung beigemessen. Treloar liefert in seinem Werk *The physics of rubber elasticity* [172] einen Überblick über das mechanische Verhalten von elastomeren Werkstoffen sowie deren experimentelle Charakterisierung und stellt eine Übersicht über

Modellansätze bereit. Er gilt zugleich als einer der Vorreiter in der Beschreibung hyperelastischen Materialverhaltens mit der Wahl einer mikroskopisch motivierten Basis im Rahmen einer molekularen Netzwerktheorie [169, 170]. Darin wird eine Beschreibung der statistischen Mechanik der Kettenmoleküle durchgeführt, welche beinhaltet, dass größer werdende Molekülknotenabstände im deformierten Netzwerk in einer Reaktionskraft resultieren. In seinen Betrachtungen arbeitet Treloar in [169] die Ansätze von Kuhn [96] und Wall [179] aus und zieht in [170] Vergleiche mit einem rein phänomenologischen Ansatz von Mooney [127]. Eine weitere Gegenüberstellung mehrerer phänomenologischer Modelle mit seiner mikroskopisch motivierten Netzwerktheorie wird von Treloar 1976 [171] vorgestellt und im Rahmen dieser Veröffentlichung von Hopkins, Rivlin und Ball kommentiert und diskutiert.

In der Folgezeit gibt es bis zum heutigen Tag eine Vielzahl an Untersuchungen, die sich mit der Beschreibung des mechanischen Verhaltens von elastomeren Werkstoffen beschäftigen. Daher kann in der weiteren Aufarbeitung der Literatur zu dieser Thematik kein Anspruch auf Vollständigkeit gewährleistet werden. Für die verschiedenen angesprochenen Teilgebiete werden lediglich beispielhaft einige Quellen genannt, an denen sich die vorliegende Arbeit orientiert.

Bei den Ansätzen in der Modellbildung müssen im Wesentlichen zwei Vorgehensweisen unterschieden werden. Auf der einen Seite gibt es jene Ansätze, welche auf der Struktur der betrachteten Elastomere basieren und mikromechanisch motiviert sind. Sie sollen die Wechselwirkungen der Makromolekülketten in einer elastomeren Struktur abbilden. Hierzu gehören die Arbeiten von Arruda & Boyce [6], Heinrich et al. [66, 67], Kaliske & Heinrich [65, 83], Hossain [73], Lulei [117], Miehe et al. [124, 125] sowie Reese [140].

Dem gegenüber steht eine rein phänomenologische Herangehensweise. Was diese Modellbildung angeht, werden im Experiment beobachtete Phänomene auf makroskopischer Ebene beschrieben. Die mikroskopische Struktur ist nicht von Interesse. Dabei muss eine geeignete Funktion für die freie Verzerrungsenergie gewählt werden. Eine Formulierung in Abhängigkeit der Eigenwerte des zur Beschreibung gewählten Deformationstensors stellt Ogden [131] vor. Ehret [39] zeigt für diesen Ansatz, dass es einen direkten Bezug zu einer mikroskopischen Betrachtung im Rahmen der Netzwerktheorie gibt. Auf der phänomenologischen Seite gibt es des Weiteren eine Vielzahl von Beschreibungen, bei denen die freie Energiedichte in Abhängigkeit der Invarianten eines Deformationstensors formuliert wird. Dazu zählen beispielsweise die Arbeiten von Alexander [1], Gent & Thomas [46], Haupt & Sedlan [63] oder Yeoh [186]. All diesen Ausführungen ist gemein, dass sie auf

den Überlegungen von Gumbrell et al. [52], Mooney [127], Rivlin [148, 149] sowie Rivlin & Saunders [150] fußen, welche eine Formulierung der Funktion für die freie Verzerrungsenergiedichte als polynomiellen Reihenansatz von Potenzen der Hauptinvarianten von Deformationstensoren vorschlagen. Eine sinnvolle Wahl des Wertebereichs für die Materialparameter dieses Konzepts wird von Hartmann [57] diskutiert. Eine ausführliche Übersicht, inklusive tabellarischer Aufstellung verschiedener Modelle, die auf diesem Reihenansatz beruhen, stellt Beda [11, 12] zur Verfügung.

Eine zusammenfassende Sicht auf die Gesamtheit der konstitutiven Modelle, sowohl mikroskopisch als auch phänomenologisch motiviert, sowie Vergleiche, die unter den Modellen gezogen werden, erhält man in den Übersichtsartikeln von Beda [12], Boyce & Arruda [21], Ehret [39] sowie Marckmann [118].

Zur Darstellung des ratenabhängigen, inelastischen Materialverhaltens muss eine Erweiterung auf die Viskoelastizitätstheorie erfolgen. Dabei hat sich die Beschreibung über innere Variablen etabliert. Eine umfassende Übersicht über die Nutzung von inneren Variablen zur Beschreibung inelastischen Materialverhaltens haben Horstemeyer & Bammann in ihrem historischen Übersichtswerk zur Thematik aufbereitet [72]. Sie betrachten verschiedene Materialien, somit auch verschiedene Materialklassen, und erläutern das Konzept der inneren Variablen. Bezüglich der Viskoelastizität sind als erste Werke die Untersuchungen von Coleman & Gurtin [26] sowie Coleman & Noll [25, 27] zu erwähnen. In diesen Publikationen bildet die zeitliche Evolution der inneren Variablen ein schwindendes Gedächtnis bezüglich des Belastungsprozesses ab. Basierend auf diesen Überlegungen gibt es bereits eine Vielzahl an Untersuchungen. Hier können beispielhaft nur einige Quellen genannt werden, an denen sich die vorliegende Arbeit orientiert, z. B. Amin et al. [3, 4], Bergström & Boyce [13, 14], Govindjee & Reese [50], Haupt et al. [59, 60, 61, 62], Johlitz [75], Laiarinandrasana et al. [97], Lion et al. [104, 105, 106, 108, 109], Reese et al. [139, 141, 142], Rendek & Lion [145] sowie Sedlan [157].

Gerade bei gefüllten Elastomeren zeigen sich stark ausgeprägte inelastische Eigenschaften. Auch im Hinblick auf deren Beschreibung kann unterschieden werden zwischen phänomenologischen konstitutiven Modellen, wie beispielsweise von Bergström & Boyce [13], Besdo & Ihlemann [15], Lion [109], Miehe & Keck [126] und Koprowski-Theiß et al. [86, 87], und mikroskopisch motivierten Theorien.

Die ausgeprägte Inelastizität, beispielsweise in Form einer deutlichen Ratenabhängigkeit, wird häufig als Folge der Interaktion der einzelnen Komponenten dieser Werkstoffe untereinander gesehen. Johlitz [75, 77, 78] überträgt seine Untersuchungen bezüglich Randschichteffekten bei Klebungen auf Randschichten um den

Füllerpartikel. Diese Randschicht weist dabei unterschiedliches Materialverhalten im Vergleich zum Füller sowie zu der umgebenden Polymermatrix auf. So gibt es neben Wechselwirkungen zwischen Füller und Matrixmaterial ebenso Wechselwirkungen zwischen den Füllerpartikeln selbst, da diese wiederum in der Regel nur selten als einzelne Partikel im Matrixmaterial vorliegen, sondern Agglomerate bilden [91]. Es gibt einige Arbeiten, die auf mikroskopischer Ebene versuchen die auftretenden Vorgänge in Einklang mit dem Materialverhalten zu bringen und dieses somit zu beschreiben. Dazu zählen neben den frühen Veröffentlichungen von Medalia [120, 121, 122] die Abhandlungen von Fleck et al. [41], Govindjee & Simo [51], Juhre et al. [80], Klüppel & Schramm [85], Litvinov et al. [111], Lorenz & Klüppel [113] und Sternstein & Zhu [164]. Richtungsabhängige Eigenschaften und multiaxiale Deformationszustände können durch eine Erweiterung dieser Betrachtungen mit Hilfe des Konzepts der repräsentativen Raumrichtungen einbezogen werden. Dafür werden uniaxiale Zusammenhänge, die auf kleiner Skala das Elastomer auf mikromechanischer Basis beschreiben können, mit gewichteten Richtungsvektoren multipliziert, um multiaxiales Verhalten abzubilden. Hier sei der Leser auf die Literatur von Freund et al. [44, 45] sowie Lorenz et al. [112] hingewiesen. Einige der vorher genannten Arbeiten [41, 45, 80, 112, 113] setzen mit dem sogenannten Dynamischen Flockulationsmodell an, das die prozessabhängige Interaktion von Fülleragglomeraten mit deren direktem Umfeld beschreibt. Es beinhaltet das Aufbrechen der Fülleragglomerate unter mechanischer Deformation in einzelne Füller oder Fülleraggregate, bestehend aus einigen wenigen Partikeln. Dieser Mechanismus resultiert in einer Entfestigung des Materials. Eine Entlastung führt zu einer Reagglomeration, wodurch sich erneut Bindungen zwischen den aufgebrochenen Einzelfüllern bzw. Fülleraggregaten aufbauen.

Wird ein Material mit einer gewissen Rate deformiert, gleiten die Agglomerate und Partikel aneinander vorbei. Lorenz, Meier & Klüppel [114] bezeichnen dies als innere Reibung und begründen mit diesen mikromechanischen Vorgängen die für gefüllte Elastomere charakteristische, ausgeprägte Hysterese. Die Gestalt der Hysterese und ihre Abhängigkeit von der Dehnrates folgt häufig nicht einer klassischen Viskoelastizitätstheorie. Auch bei sehr langsamen Dehnrates zeigt sich eine Hysterese. Außerdem unterscheiden sich die Überspannungen bei variierender Belastungsgeschwindigkeit kaum [86, 156]. Lion [106] bezeichnet das beobachtete Verhalten als statische Hysterese oder Gleichgewichtshysterese. Einige Untersuchungen widmen sich der detaillierten Betrachtung des hysteretischen Verhaltens von Polymeren. Beispiele dafür sind die Veröffentlichungen von Henann & Anand [68], Kaliske & Rothert [84], Krempl & Khan [93], Laurent et al. [98], Lion [107], Marvalova

[119], Miehe & Keck [126], Rey et al. [146] und Vandenbroucke et al. [176]. Diese haben gemeinsam, dass ein plastischer oder viskoplastischer Ansatz das Materialverhalten abbildet. Eine rein viskoelastische Betrachtung des Materials verfolgen Koprowski-Theiß et al. [86, 87, 88, 89], wobei die Hysteresen mittels nichtlinearer Maxwell-Elemente mit sehr langen Relaxationszeiten abgebildet werden. Dieser Ansatz wird auch in der vorliegenden Arbeit weiter verfolgt [155, 156]. Eine ähnliche Beschreibung kann durch prozessabhängige Viskositäten erreicht werden. Hierzu sei der Leser auf die Arbeiten von Höfer [70] und Rendek & Lion [144, 145] verwiesen.

Das Aufbrechen der Fülleragglomerate wird zudem als Ursache der, für gefüllte Elastomere typischen, Entfestigungseffekte gesehen. Charakteristisch für gefüllte Elastomere muss in diesem Kontext neben dem Mullins-Effekt der Payne-Effekt genannt werden.

Der Mullins-Effekt geht auf die ursprünglichen Arbeiten von Mullins [128], Mullins & Tobin [129] und Harwood, Mullins & Payne [58] in Form eines dehnungsabhängigen Entfestigungseffekts zurück. Einige Autoren beschäftigen sich mit der Modellierung dieser Thematik, beispielsweise Beatty & Krishnaswamy [10, 94], Besdo & Ihlemann [16], Diercks [31], Göktepe & Miehe [48], Govindjee & Simo [51], Ihlemann [74] sowie Wulf & Ihlemann [184]. Die Ursachen dieses Elastomerverhaltens werden dabei mit unterschiedlichen mikroskopischen Vorgängen begründet. Während die ursprüngliche Definition des Mullins-Effekts [128, 129] neben irreversiblen Anteilen auch reversible Anteile bei einer Entfestigung beinhaltet, verfolgt Büche [23] eine alternative Betrachtungsweise. Er definiert lediglich den irreversiblen Anteil der Schädigung bzw. Entfestigung, welche auftritt, wenn bisher undeformiertes, jungfräuliches Material zum ersten Mal deformiert wird, als Mullins-Effekt. Seine mikroskopische Erklärung über das irreversible Abreißen kürzerer Polymerketten von den Füllerpartikeln greifen Hanson et al. [55] in ihrem Artikel auf. Eine Übersicht über verschiedene Ansätze zur Darstellung des Mullins-Effekts geben Diani et al. [29]. Bei der Begriffswahl „Mullins-Effekt“ wird zu Gunsten einer klareren Separation der einzelnen auftretenden Effekte im Rahmen dieser Arbeit auf Büches Definition [23] zurückgegriffen.

Der zweite, für gefüllte Elastomere typische Entfestigungseffekt ist der Payne-Effekt. Es handelt sich um einen amplitudenabhängigen Effekt, der bei zyklischer Belastung um eine Mitteldehnung beobachtet wird. Die ersten Untersuchungen gehen auf Fletcher & Gent [42] zurück und wurden von Payne [133, 134, 135] weitergeführt. Der Payne-Effekt ist ein reversibler Effekt, der auf alternierenden Prozessen des Aufbrechens und der Neubildung von Bindungen beruht und häufig

in der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Füllerpartikeln gesehen wird. Dieser Vorgang wird bei Donnet & Custodero [35], Gessler & Payne [47] sowie Wang et al. [181] beschrieben. Einige Arbeiten beschäftigten sich bereits mit der Modellierung dieses Effekts, z. B. Kraus [92], Österlöf [132], Rendek [143] oder Ulmer [175]. Da der Effekt im Wesentlichen unter dynamischen, zyklischen Belastungen betrachtet wird, beziehen sich einige Beschreibungen auf den Frequenzbereich. Als mathematisches Hilfsmittel nutzen beispielsweise Lion & Kardelky [110], Sjöberg & Kari [162] und Wollscheid [182] im Frequenzbereich fraktale Ableitungen, deren Vorteile für die Formulierung des Payne-Effekts von Wollscheid & Lion [183] erarbeitet werden.

Beim finalen Schritt einer Materialmodellierung, der Ermittlung der Materialparameter, wird in Form einer inversen Rechnung die Differenz zwischen den experimentellen Daten und den numerischen Resultaten aus dem Modell verglichen und minimiert. Als Optimierungsalgorithmen können beispielsweise Evolutionsstrategien [138] oder das Verfahren *fminsearch* genutzt werden, dass auf dem Nelder-Mead-Algorithmus basiert [130, 147]. Mit der Parameteridentifikation in einer Invariantenformulierung nach Rivlin & Saunders [150] hat sich Hartmann [57] auseinandergesetzt.

# 3

---

## Kontinuumsmechanische Grundlagen

---

Im folgenden Kapitel sollen die kontinuumsmechanischen Grundlagen bereitgestellt werden, die im Rahmen dieser Arbeit benötigt werden. Die Kontinuumsmechanik ermöglicht es, das Materialverhalten eines Körpers unter mechanischer oder allgemeiner äußerer Belastung zu beschreiben. Eine kontinuumsmechanische Theorie besteht dabei aus drei Teilen. Zunächst sind die Kinematik, welche die Beschreibung der Bewegung und der Deformationen beinhaltet, und die Bilanzgleichungen zu nennen. Diese Bilanzgleichungen sind axiomatisch eingeführte Erhaltungssätze für die Größen Masse, Impuls, Drall, Energie sowie Entropie. Den dritten Stützpfeiler der Kontinuumsmechanik bilden die Konstitutivgleichungen. Sie stellen das Bindeglied zwischen Kinematik und Bilanzgleichungen dar und beschreiben das Materialverhalten, indem sie den Zusammenhang zwischen den Deformationen und den resultierenden Spannungen wiedergeben.

Die Kontinuumsmechanik stellt somit ein sehr weitreichendes Gebiet dar. Die folgende Zusammenfassung der kontinuumsmechanischen Zusammenhänge kann daher keinen Anspruch auf Vollständigkeit bieten. Für eine detaillierte Betrachtung sei der interessierte Leser auf die Literatur verwiesen. Beispielhaft können hier die Arbeiten von Haupt [59], Truesdell & Toupin [174], Holzapfel [71] oder Altenbach & Altenbach [2] genannt werden.

### 3.1 Kinematik

In der Kontinuumsmechanik wird der atomare Aufbau eines Körpers mit seinen physikalischen Eigenschaften in einer mikroskopischen Betrachtung nur phänomenologisch berücksichtigt. Es wird vorausgesetzt, dass die Materie im Körper kontinuierlich verteilt ist. In einer kontinuumsmechanischen Theorie spricht man auch von materiellen Körpern. Ein materieller Körper  $\mathcal{B}$  wiederum besteht aus unendlich vielen materiellen Punkten als kleinste darstellbare Einheit. Jeder materielle Punkt ist Träger der physikalischen Eigenschaften des Körpers.

Die Kinematik beschäftigt sich mit der Beschreibung der Bewegung und der Deformation solcher materieller Körper. Diesbezüglich werden im allgemeinen zunächst zwei Konfigurationen eingeführt, die Referenz- und die Momentankonfiguration.

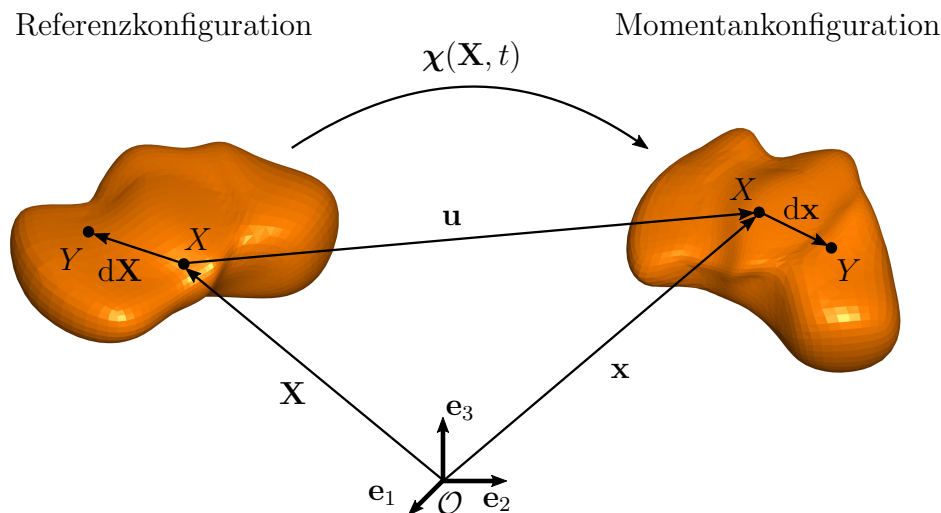


Abbildung 3.1: Referenz- und Momentankonfiguration

Die Referenzkonfiguration stellt in der Regel den undeformierten Körper dar und wird zum Zeitpunkt  $t = t_0$  definiert. Die Momentankonfiguration beschreibt den Körper in einem deformierten Zustand zu einem Zeitpunkt  $t > t_0$ .

Betrachtet man für beide Konfigurationen zwei benachbarte materielle Punkte  $X$  und  $Y$ , so wird deren Abstand in der Referenzkonfiguration mit  $d\mathbf{X}$  und in der deformierten Momentankonfiguration mit  $d\mathbf{x}$  bezeichnet. Zur Beschreibung der Position des materiellen Punktes dient in der undeformierten Lage der Ortsvektor  $\mathbf{X}$  als Ausgangsposition und für den aktuellen Zustand  $\mathbf{x}$ . Der Verbindungsvektor zwischen diesen beiden Positionen wird mit  $\mathbf{u}$  bezeichnet und definiert den



Verschiebungsvektor des materiellen Punktes  $X$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (3.1)$$

Die aktuelle Lage des materiellen Punktes  $X$  kann zudem über eine Bewegungsfunktion  $\chi(\mathbf{X}, t)$  beschrieben werden. Diese bijektive Funktion verknüpft eindeutig die Ausgangsposition  $\mathbf{X}$  mit der aktuellen Position  $\mathbf{x}$  über

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (3.2)$$

Leitet man  $\chi(\mathbf{X}, t)$  nach der Zeit ab, ergibt sich die Geschwindigkeit und anschließend die Beschleunigung in Lagrangescher Darstellung

$$\dot{\chi}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\chi(\mathbf{X}, t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t), \quad \ddot{\chi}(\mathbf{X}, t) = \frac{d^2\chi(\mathbf{X}, t)}{dt^2} = \mathbf{a}(\mathbf{X}, t). \quad (3.3)$$

Die Kombination der Gleichungen (3.2) und (3.3) liefert die Eulersche oder räumliche Darstellung

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\chi}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \ddot{\chi}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \quad (3.4)$$

Bei einer Lagrangeschen Betrachtungsweise wird die Bewegung des Körpers bezüglich eines seiner materiellen Punkte beschrieben. Daher wird sie auch materiell genannt. Bei einer Deformation bewegt sich also der Beobachter mit. Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung werden mit  $\mathbf{X}$  parametrisiert. Hingegen wird bei einer Eulerschen Betrachtung die Bewegung von einem ortsfesten Punkt über  $\mathbf{x}$  beschrieben. Die dargestellte materielle Beschleunigung in Eulerscher Darstellung (3.4) lässt sich alternativ direkt durch Bildung des totalen Differentials errechnen. Sie zerfällt dabei in einen lokalen und konvektiven Anteil

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \quad (3.5)$$

Dabei stellt der Gradient die Ableitung nach dem Ortsvektor der Momentankonfiguration  $\mathbf{x}$  dar

$$\text{grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.6)$$

Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  gilt als wichtiger Operator der Kontinuumsmechanik. Er ist allgemein über die Ableitung der Bewegungsfunktion  $\chi(\mathbf{X}, t)$  nach dem

Ortsvektor der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$  definiert

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \mathbf{I} + \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (3.7)$$

Der eingeführte Tensor  $\mathbf{I}$  ist der Identitätstensor zweiter Stufe. Im Vergleich zu Gleichung (3.6) kennzeichnet hier die Großschreibung eine Gradientenbildung bezüglich der Referenzkonfiguration

$$\text{Grad}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (3.8)$$

Die Verbindung zweier benachbarter materieller Punkte wird als materielles Linienelement bezeichnet. Der Deformationsgradient überführt Linienelemente  $d\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration in Linienelemente  $d\mathbf{x}$  der Momentankonfiguration mit

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}. \quad (3.9)$$

Somit kann der Deformationsgradient keiner Konfiguration zugeordnet werden und wird als Zweifeldtensor bezeichnet. Er beinhaltet neben der Deformation auch die Starrkörperrotation. Zur Abhilfe kann mit Hilfe der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (3.10)$$

der Deformationstensor in zwei Anteile, einen eigentlich orthogonalen Tensor  $\mathbf{R}$  und einen Rechts-Strecktensor  $\mathbf{U}$  bzw. einen Links-Strecktensor  $\mathbf{V}$  zerlegt werden.  $\mathbf{R}$  beschreibt dabei die Rotation des materiellen Körpers,  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  die Deformation. Die Determinante  $\det \mathbf{F}$  wird als Jacobi-Determinante  $J$  bezeichnet. Sie bildet Volumenelemente der Referenz- in die Momentankonfiguration ab

$$dv = \det \mathbf{F} dV = JdV \quad (3.11)$$

und ist stets positiv, d. h.

$$J > 0. \quad (3.12)$$

Um die Deformation eines Körpers über  $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{V}$  zu beschreiben, ist die spektrale Zerlegung des Deformationsgradienten nötig. Diese ist allerdings mathematisch recht komplex. Deshalb werden Deformationsmaße eingeführt, die die Quadrate

von Linienelementen der jeweiligen Konfigurationen

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{bzw.} \quad dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (3.13)$$

aufeinander abbilden

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} \cdot d\mathbf{X}, \quad (3.14)$$

bzw.

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.15)$$

Damit wird die Starrkörperrotation aus dem Deformationsmaß eliminiert. Auf diesem Wege ergeben sich der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (3.16)$$

als Maß der Referenzkonfiguration und der linke Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (3.17)$$

als Deformationsmaß der Momentankonfiguration. Beide nehmen im undeformierten Zustand den Wert  $\mathbf{I}$  an. Es ist üblich, sich bei der Angabe der Deformation auf die Ausgangsgröße zu beziehen, so dass der Ausgangszustand den Nulltensor  $\mathbf{0}$  ergibt. Entsprechend lassen sich Verzerrungstensoren als Differenz der Quadrate von Linienelementen der beiden Konfigurationen (3.13) einführen. Bezüglich der Referenzkonfiguration ergibt sich der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (3.18)$$

Der Faktor  $1/2$  ist dabei Konvention, so dass die Linearisierung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  in der klassischen Ingenieursverzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon}$  resultiert. Analog ergibt sich bezüglich der Momentankonfiguration der entsprechende Euler-Almansi Verzerrungstensor  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (3.19)$$

Beide neu eingeführten Verzerrungsmaße nehmen in der undeformierten Lage den Wert des Nulltensors an. Sie lassen sich über die mathematischen Tensorprodukte *push forward*

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3.20)$$

bzw. *pull back*

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad (3.21)$$

ineinander überführen.

Gerade die in dieser Arbeit betrachteten gefüllten Elastomere zeigen ein charakteristisches ratenabhängiges Verhalten. Daher werden neben den Deformationsmaßen Informationen über die Deformationsgeschwindigkeiten benötigt. Zunächst wird der räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  eingeführt. Er berechnet sich mit

$$\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.22)$$

direkt aus den Geschwindigkeiten (3.3) der materiellen Punkte. Bezüglich der Referenzkonfiguration ergibt sich der materielle Geschwindigkeitsgradient als Zeitableitung des Deformationsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \text{Grad } \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (3.23)$$

Der Zusammenhang dieser beiden Geschwindigkeitsmaße beruht auf der Kettenregel der Differentiation und lautet

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.24)$$

Der räumliche Geschwindigkeitsgradient  $\mathbf{L}$  lässt sich in einen symmetrischen Anteil  $\mathbf{D}$  und einen schiefsymmetrischen Anteil  $\mathbf{W}$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (3.25)$$

zerlegen. Der symmetrische Anteil stellt die Deformationsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (3.26)$$

dar. Der schiefsymmetrische Anteil wiederum ist der Wirbeltensor

$$\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (3.27)$$

Die zeitliche Änderung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  errechnet sich als

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}. \quad (3.28)$$

Auch hier gelten zum Transport zwischen den Konfigurationen wieder die Operationen *push forward* und *pull back*. Gleichung (3.28) stellt die *pull back*-Operation dar. Für den *push forward* folgt

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}^{-1}. \quad (3.29)$$

Ersetzt man  $\mathbf{E}$  durch den Rücktransport des Almansi-Tensors  $\mathbf{A}$  aus Gleichung (3.21) und führt die materielle Zeitableitung aus, so folgt für die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$

$$\mathbf{D} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = \overset{\Delta}{\mathbf{A}}. \quad (3.30)$$

Die Formulierung der Verzerrungsrate bezüglich der Momentankonfiguration entspricht nicht einer materiellen Zeitableitung. Diese vorliegende Rate wird als sogenannte obere Oldroyd- oder als obere Lie-Ableitung

$$\overset{\Delta}{(\bullet)} = (\bullet)^{\bullet} + \mathbf{L}^T \cdot (\bullet) + (\bullet) \cdot \mathbf{L} \quad (3.31)$$

bezeichnet.

## 3.2 Bilanzgleichungen

Zusätzlich zur Kinematik ist die Einführung von Bilanzgleichungen ein weiterer zentraler Punkt einer kontinuumsmechanischen Betrachtung. Sie bilden die zweite Säule der Kontinuumsmechanik und werden axiomatisch eingeführt. Dabei sollen sie die Physik und Naturgesetze widerspiegeln. Neben den Bilanzen aus der klassischen Mechanik für Masse, Drall und Impuls wird zudem die Thermodynamik in Form der Energie- und Entropiebilanzen einbezogen.

Bei der Bereitstellung der Bilanzgleichungen kann auf eine sogenannte Masterbilanz zurückgegriffen werden. Für eine detaillierte Betrachtung dieser Masterbilanz sei der Leser auf die Literatur bei Diebels [30] sowie Ehlers [38] verwiesen. Eine ausführliche Diskussion der einzelnen Bilanzen wird beispielsweise bei Altenbach & Altenbach [2] oder Haupt [59] bereitgestellt.

Die Masterbilanz zeigt, dass die Formulierung aller Bilanzgleichungen im Allgemeinen identisch ist. In allen Bilanzen wird die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe  $\psi$  in Relation zum Fluss  $\boldsymbol{\varphi}$  dieser Größe über den Rand  $\partial\mathcal{B}$  des Körpers  $\mathcal{B}$ , einem Zufuhrterm  $\sigma$  und einem Produktionsterm  $\hat{\psi}$  gesetzt

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} da + \int_{\mathcal{B}} \sigma(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\mathcal{B}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (3.32)$$

Ausgehend von der Annahme, dass die Felder stetig differenzierbar sind, erhält man mit Hilfe des Transports von Volumenelementen (3.11)

$$(dv)^{\bullet} = \operatorname{div} \mathbf{v} dv \quad (3.33)$$

bzw. mit dem Reynoldsschen Transporttheorem

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \psi(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\mathcal{B}} \left( \dot{\psi}(\mathbf{x}, t) + \psi(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dv \quad (3.34)$$

sowie dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \int_{\partial\mathcal{B}} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} da \quad (3.35)$$

die lokale Formulierung für den materiellen Punkt

$$\dot{\psi} + \psi \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} + \sigma + \hat{\psi}. \quad (3.36)$$

Bei der Massenbilanz als erste betrachtete Bilanzgleichung wird die Masse als zeitlich konstante Erhaltungsgröße gesehen, d. h.

$$\frac{d}{dt} m = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho dv = 0. \quad (3.37)$$

Es gibt weder einen Fluss, noch gibt es Zufuhr- oder Produktionsterme. Für die physikalische Größe der Dichte  $\rho$  ergibt sich somit die lokale Formulierung der Massenbilanz

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.38)$$

Analog zum Transport der Volumenelemente (3.11) ergibt sich damit der Transport der Referenzdichte  $\rho_0$  auf die Momentankonfiguration

$$\rho = (\det \mathbf{F})^{-1} \rho_0 = J^{-1} \rho_0. \quad (3.39)$$

Die Impulsbilanz beruht auf dem zweiten Newtonschen Axiom oder der Impulserhaltung. Der Impuls  $\mathbf{l}$  ändert sich durch die resultierende Kraft  $\mathbf{f}$ . Es gilt

$$\frac{d}{dt} \mathbf{l} = \mathbf{f}. \quad (3.40)$$

Der Impuls eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}$  resultiert aus seiner Dichte  $\rho$  und Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bzw.  $\dot{\mathbf{x}}$  zum Zeitpunkt  $t$

$$\mathbf{l}(\mathcal{B}, t) = \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{x}}(t) dm = \int_{\mathcal{B}} \rho \dot{\mathbf{x}}(t) dv. \quad (3.41)$$

Die auf den Körper wirkende Kraft wird in Nah- und Fernwirkungskräfte aufgeteilt. Während die Nahwirkungskräfte über die Oberfläche  $\partial\mathcal{B}$  auf den Körper einwirken, wirken die Fernwirkungskräfte in seinem Inneren. Typisches Beispiel für eine Fernwirkungskraft ist die Gravitationskraft. Stellt  $\mathbf{t}$  die Oberflächenspannung dar, die durch den Kontakt des Körpers mit seiner Umgebung entsteht, und wirkt zudem die Volumenkraftdichte  $\rho \mathbf{b}$  im Inneren des Körpers, so ergibt sich für die wirkende Kraft  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t} da + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dv. \quad (3.42)$$

Für die lokale Form der Impulsbilanz wird das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \quad (3.43)$$

angewandt. Es existiert somit ein Spannungstensor  $\mathbf{T}$ , der mit der Normalen  $\mathbf{n}$  auf dem Rand  $\partial\mathcal{B}$  den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  erzeugt. Mit dem Gaußschen Integralsatz

ergibt sich schließlich die lokale Formulierung der Impulsbilanz

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \quad (3.44)$$

Der dargestellte Spannungstensor bezüglich der Momentankonfiguration ist der Cauchysche Spannungstensor  $\mathbf{T}$ . Er bezieht die aktuelle Kraft auf das aktuelle Flächenelement und wird auch wahre Spannung genannt. Die analoge Darstellung mit Bezug auf die Referenzkonfiguration liefert die Bilanz in materieller Darstellung

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}. \quad (3.45)$$

Ein Vergleich der beiden Formulierungen (3.44) und (3.45) liefert den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.46)$$

das dem Cauchy-Spannungstensor  $\mathbf{T}$  entsprechende Spannungsmaß bezüglich der Referenzkonfiguration. Im Gegensatz zur wahren Spannung wird beim 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor  $\mathbf{P}$  die Kraft auf die Ausgangsfläche bezogen,  $\mathbf{P}$  wird daher auch als Nominalspannung bezeichnet.

Die Drehimpuls- oder Drallbilanz beschreibt die Momentenwirkung der auf die Körperoberfläche wirkenden Spannungen und der Fernwirkungskräfte und die durch sie verursachte Änderung des Dralls oder Drehimpulses. Es ergibt sich die Symmetrie der Cauchy-Spannung  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (3.47)$$

In einer thermodynamischen Betrachtung wird zunächst die Bilanz der inneren Energie  $\epsilon$  bereit gestellt. Aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik folgt, dass sich die gesamte Energie eines materiellen Körpers durch die an ihm verrichtete mechanische und thermische Leistung ändert. Die Energie besteht dabei aus zwei Anteilen, der kinetischen und der inneren Energie. Hier und im folgenden ist stets die spezifische Energiedichte gemeint. In der lokalen Darstellung der Energiebilanz

$$\rho \dot{\epsilon} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \operatorname{div} \mathbf{q} + \rho r \quad (3.48)$$

wird die materielle Zeitableitung der inneren Energie  $\epsilon$  mit der Spannungsleistung  $\mathbf{T} : \mathbf{D}$  bezüglich der Momentankonfiguration, der Divergenz des Wärmestroms



$\mathbf{q}$  und einer Wärmezufuhr  $\rho r$  in Relation gesetzt. Für eine Darstellung bezüglich der Referenzkonfiguration wird das Konzept der dualen Variablen nach Haupt & Tsakmakis [64] genutzt. Es besagt, dass die spezifische Spannungsleistung invariant gegenüber der gewählten Konfiguration ist, d. h.

$$\frac{1}{\rho_0} \bar{\mathbf{T}} : \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho} \mathbf{T} : \mathbf{D}. \quad (3.49)$$

Daraus ergibt sich ein weiteres Spannungsmaß, die 2. Piola-Kirchhoffsche Spannung  $\bar{\mathbf{T}}$ , welche die konjugierte Spannung zur Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{E}}$  auf der Referenzkonfiguration darstellt. Der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor folgt aus dem *push forward* der Deformationsgeschwindigkeit  $\dot{\mathbf{E}}$  in Gleichung (3.49) und einem Koeffizientenvergleich

$$\bar{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}^{-T}. \quad (3.50)$$

Final wird das Augenmerk auf die Entropiebilanz gelenkt, welche auf dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik basiert. Es muss gewährleistet bleiben, dass die Entropieproduktion  $\hat{\eta}$  in einem materiellen Körper nie negativ sein darf. Dies legt zugleich die Prozessrichtung fest und zeigt, dass alle thermodynamischen Prozesse irreversibel sind. Mit dem Entropiefluss

$$\varphi_\eta = -\frac{\mathbf{q}}{\theta} \quad (3.51)$$

sowie dem Zufuhrterm für die Entropie

$$\sigma_\eta = \frac{\rho r}{\theta}, \quad (3.52)$$

wobei  $\theta$  für die absolute Temperatur steht, wird die Entropieänderung  $\dot{\eta}$  in Form einer Ungleichung

$$\rho \dot{\eta} + \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{\rho r}{\theta} = \hat{\eta} \geq 0 \quad (3.53)$$

bilanziert, die einen nichtnegativen Produktionsterm garantiert.



# 4

---

## Materialtheorie

---

Basierend auf den zuvor eingeführten kontinuumsmechanischen Größen, die den Deformationsprozess in Größe und Geschwindigkeit beschreiben, sowie den Bilanzgleichungen, welche Randbedingungen an die physikalischen Eigenschaften des Materials knüpfen, soll im Folgenden der Bezug zum Material hergestellt werden. Bis zu diesem Zeitpunkt sind die theoretischen Grundlagen auf allgemeiner Basis und unabhängig vom Material formuliert. Zur Lösung eines kontinuumsmechanischen Problems sind allerdings noch weitere Informationen notwendig. Diese sollen im Rahmen des folgenden Kapitels in Form von Materialgleichungen oder Konstitutivgleichungen zur Verfügung gestellt werden. Sie bilden zugleich die dritte und finale Stütze einer kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise.

Zunächst wird die allgemeine Vorgehensweise für hyperelastisches Materialverhalten vorgestellt. Im Anschluss wird die für diese Arbeit im Wesentlichen relevante Materialklasse betrachtet, die Viskoelastizität. Diesbezüglich werden zunächst weitere kontinuumsmechanische Größen eingeführt, die zur Beschreibung der Viskoelastizität erforderlich sind. Im Anschluss wird die Vorgehensweise in der Formulierung der konstitutiven Beziehungen für eine solche Erweiterung um die Rateabhängigkeit erläutert. Ziel ist es dabei, einen Gleichungssatz zur Verfügung zu stellen, der neben den konstitutiven Beziehungen zwischen Spannung und Deformationsmaßen ebenso die Kinematik in einem Deformationsprozess behandelt.

## 4.1 Hyperelastizität

Für die Materialklasse der Hyperelastizität gibt es mit  $\chi$  eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den beiden Konfiguration in Abb. 3.1 aus Kap. 3.1. Als Bindeglied zwischen der Kinematik und den Bilanzgleichungen müssen für eine vollständige Modellbildung allerdings noch Konstitutivgleichungen postuliert werden. Diese Materialgesetze bezeichnet man auch als Auswirkungsfunktionen

$$\mathcal{R} = \{\psi, \eta, \mathbf{T}, \mathbf{q}\}, \quad (4.1)$$

die als Funktionale der Bewegung  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  und der Temperatur  $\theta$ , bzw. allgemein in Abhängigkeit eines Satzes von Prozessvariablen  $\mathcal{S}$ , gesucht werden. Für die weiteren Darstellung wird die freie Energie  $\psi$  in Form der Legendre-Transformation eingeführt, so dass

$$\psi = \epsilon - \theta \eta \quad (4.2)$$

gilt. Durch Auflösen nach der Entropie  $\eta$  und Bildung der zeitlichen Ableitung  $\dot{\eta}$  kann in die Entropiebilanz (3.53) eingesetzt werden. Dies resultiert in der Clausius-Duhem-Ungleichung

$$-\rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{\theta} - \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \text{grad } \theta + \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0, \quad (4.3)$$

einer fundamentalen Formulierung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Im vorliegenden Fall werden lediglich isotherme Prozesse betrachtet, d. h.  $\theta = \textit{konst.}$  Somit reduziert sich die Clausius-Duhem-Ungleichung und es verbleibt die Clausius-Planck-Ungleichung

$$\rho \dot{\psi} + \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0. \quad (4.4)$$

Des Weiteren ist das vorliegende Material materiell inkompressibel, es gibt keine Volumendehnung. Unter der Annahme der Inkompressibilität, d. h. konstanter Dichte, wird aus der Massenbilanz (3.38) eine Volumenbilanz

$$\text{div } \mathbf{v} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \det \mathbf{F} = 1. \quad (4.5)$$

Für die weitere Auswertung wird der mathematisch äquivalente Ausdruck

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{I} : \mathbf{D} = 0 \quad (4.6)$$

genutzt. Diese Volumenbilanz ist bei der Auswertung des Entropieprinzips im Sinne einer Zwangsbedingung zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck wird die Inkompressibilitätsnebenbedingung (4.6) mit einem Lagrange-Multiplikator  $p$  erweitert und der Clausius-Planck-Ungleichung (4.4) hinzugefügt

$$p \mathbf{I} : \mathbf{D} + \mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} \geq 0. \quad (4.7)$$

Der Lagrange-Multiplikator  $p$  lässt sich aus den Randbedingungen des jeweiligen thermodynamischen Prozesses berechnen.

Diese Formulierung ist noch allgemeingültig und unabhängig von der betrachteten Materialklasse. Zur Einführung der konstitutiven Beziehungen wird die Auswertung der Clausius-Planck-Ungleichung auf hyperelastisches Materialverhalten beschränkt. Diesbezüglich muss nur eine Prozessvariable betrachtet werden. Im Fall der Hyperelastizität kann beispielsweise der linke Cauchy-Green Deformationstensor

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B}\} \quad (4.8)$$

gewählt werden. Für die Zeitableitung der freien Energie  $\psi(\mathbf{B})$  gilt durch Anwendung der Kettenregel

$$\dot{\psi}(\mathbf{B}) = \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}}. \quad (4.9)$$

Um das totale Differential vollständig in die Clausius-Planck-Ungleichung einbinden zu können, wird die materielle Zeitableitung des linken Cauchy-Green Deformationstensor  $\dot{\mathbf{B}}$  in Relation zur Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  gebracht. Die Zeitableitung  $\dot{\psi}(\mathbf{B})$  berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : \left( \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T \right) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}^T. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit den Tensorrechnungszusammenhängen [59, 71]

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} : \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T : \mathbf{B} \quad (4.11)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{A}} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{A}} \quad (4.12)$$

sowie mit der Symmetrie des linken Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} &= \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ &= 2 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} : \mathbf{D}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Der zweite Hauptsatz folgt damit zu

$$\left( p \mathbf{I} + \mathbf{T} - 2 \rho \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} \geq 0. \quad (4.14)$$

Auf die Ermittlung der konstitutiven Beziehung für die Spannung aus diesen Zusammenhängen soll an dieser Stelle vorerst verzichtet werden. Im Folgenden wird unter Einbeziehung der ratenabhängigen Effekte eine Erweiterung des Vorgehens um zusätzliche Prozessvariablen notwendig, was eine Neubetrachtung der Auswertung des zweiten Hauptsatzes erfordert. Die Bereitstellung der Spannungsbeziehungen erfolgt daher erst nach den Ausführungen im folgenden Kapitel.

## 4.2 Viskoelastizität

In diesem Kapitel wird die Materialtheorie für die Materialklasse der Viskoelastizität vorgestellt, die den wesentlichen Stellenwert des in der vorliegenden Arbeit entwickelten Modells hat. Der notwendige Gleichungssatz, inklusive der konstitutiven Spannungs-Deformations-Relationen, wird daher für die Viskoelastizität eingeführt.

Zur Interpretation verschiedener Materialverhalten bedient man sich häufig der Darstellung in rheologischen Modellen. Klassisch bilden sie zwar nur eine eindimensionale und geometrisch lineare Theorie ab, dennoch können rheologische Modelle zur Motivation des Materialverhaltens und zur Erläuterung der Einführung neuer kontinuumsmechanischer Größen in einer Materialtheorie für finite Defor-

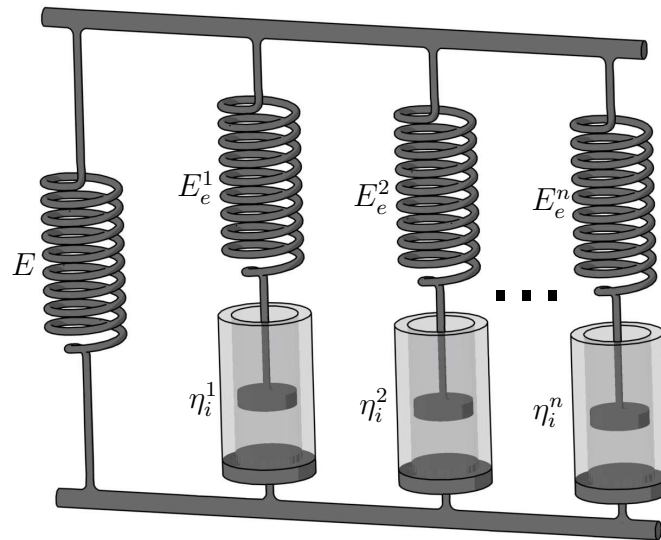


Abbildung 4.1: Rheologisches Modell der Viskoelastizität.

mationen beitragen. Um viskoelastisches Materialverhalten abzubilden, wird ein rheologisches Modell der Viskoelastizität, wie in Abb. 4.1 dargestellt, verwendet. Es besteht aus einem einzelnen Federelement mit Federsteifigkeit  $E$  und  $n$  dazu parallel geschalteten Maxwell-Elementen. Abb. 4.2 zeigt ein solches Maxwell-Element als Reihenschaltung einer Feder der Steifigkeit  $E_e^j$  mit einem Dämpfer der Viskosität  $\eta_i^j$ . Die tiefgestellte Indizierung deutet bereits darauf hin, dass die Reihenschaltung im Maxwell-Element elastisches mit inelastischem Materialverhalten kombiniert. Der hochgestellte Index  $j$  verweist auf das jeweilige Maß im  $j$ -ten Maxwell-Element.

Die Spannung  $\sigma$  in der Feder und dem Dämpfer ist identisch, so dass sich gemäß

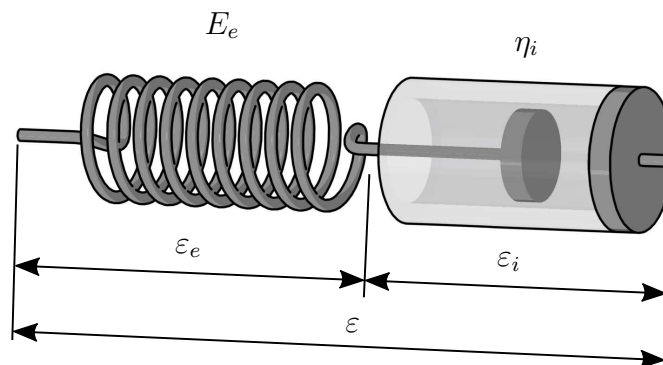


Abbildung 4.2: Maxwell-Element.

einer geometrisch linearen Theorie die Zusammenhänge

$$\sigma = E_e \varepsilon_e = \eta \dot{\varepsilon}_i \quad (4.15)$$

ergeben. Die einzelne Feder repräsentiert die Gleichgewichtsspannung oder Grundelastizität des Materials, d. h. das Verhalten ohne ratenabhängige, viskose Anteile. Wird das Modell derart langsam deformiert, dass alle Dämpfer diese Bewegung vollständig und simultan verfolgen können und somit die Federn der Maxwell-Elemente nicht gedehnt werden, reagiert das Modell hyperelastisch. Bei einer zyklischen Belastung mit einer solch langsamen Deformationsrate würden der Belastungs- und Entlastungspfad vollständig aufeinander liegen. Bei höherer Dehnrate können die Dämpfer der Deformation nicht simultan folgen. Die Nichtgleichgewichtsfedern  $E_e^j$  werden deformiert, und es wird eine Nichtgleichgewichtsspannung überlagert. Eine geeignete Staffelung der Größenordnungen der Viskositäten  $\eta_i^j$  ermöglicht die Abbildung des kontinuierlichen Relaxationsspektrums. Je nach Wertebereich der abzubildenden Deformationsraten ist lediglich eine hinreichende Anzahl an Maxwell-Elementen notwendig, um das vorhandene Spektrum in der Ratenabhängigkeit erfassen zu können.

Die Basis der kontinuumsmechanischen Modellierung des vorliegenden Materialverhaltens ist die Umsetzung einer Viskoelastizitätstheorie für finite Deformationen. Dies geschieht in Anlehnung an das rheologische Modell in Abb. 4.1. Ein wesentlicher Schritt in diesem Vorhaben ist die Zerlegung des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$ . Diese dient der Entkopplung verschiedener physikalischer Effekte in einer Materialmodellierung. Während in einer geometrisch linearen Theorie die Deformationsmaße noch additiv aufgespaltet werden können (siehe Abb. 4.2), entspricht dies bei der Betrachtung finiter Deformationen der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten. Zunächst sei diesbezüglich die volumetrisch-isochore Zerlegung genannt, die von Flory [43] eingeführt wurde. Die erste Unterteilung in elastische und inelastische Anteile ist aus der Kristallplastizität bekannt und wurde erstmals von Kröner [95], Lee [101] sowie Lee & Liu [102] angewandt.

Bei der Beschreibung von Viskoelastizität wurden die Überlegungen weiter geführt. Eine Aufteilung in viskose und elastische Anteile wurde in den Arbeiten von Sidoroff [160] sowie Lubliner [116] vorgestellt. Dieser Ansatz ist inzwischen in der Beschreibung viskoelastischen Materialverhaltens für finite Deformationen weit verbreitet und wurde beispielsweise von Le Tallec et al. [99], Lion [105], Reese & Govindjee [141] oder Sedlan [157, 158] weiter geführt. Jede multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten resultiert in der Einführung einer Zwischen-



konfiguration, die physikalisch vom materiellen Körper nicht eingenommen wird und daher lediglich ein mathematisches Konstrukt ist. Die Zwischenkonfiguration stellt einen lokal relaxierten Zustand dar. Die Interpretation des viskoelastischen Materialverhaltens mit Hilfe des rheologischen Modells in Abb. 4.1 erfordert somit die Einführung einer solchen fiktiven Zwischenkonfiguration für jedes Maxwell-Element. Dabei wird jeweils der multiplikative Split des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  in einen elastischen Anteil  $\mathbf{F}_e^j$  und einen inelastischen Anteil  $\mathbf{F}_i^j$ , wie in Abb. 4.3 dargestellt, durchgeführt. Jede Zwischenkonfiguration beinhaltet ihre eigenen Verzerrungstensoren. Die inelastischen, fiktiven Zwischenkonfigurationen, die bei der multiplikativen Aufteilung von  $\mathbf{F}$  entstehen, sind nur ein Hilfsmittel, um physikalisch transparente Materialgleichungen konstruieren zu können. Eine Übersicht über die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten geben Lubarda [115] und Meggyes [123].

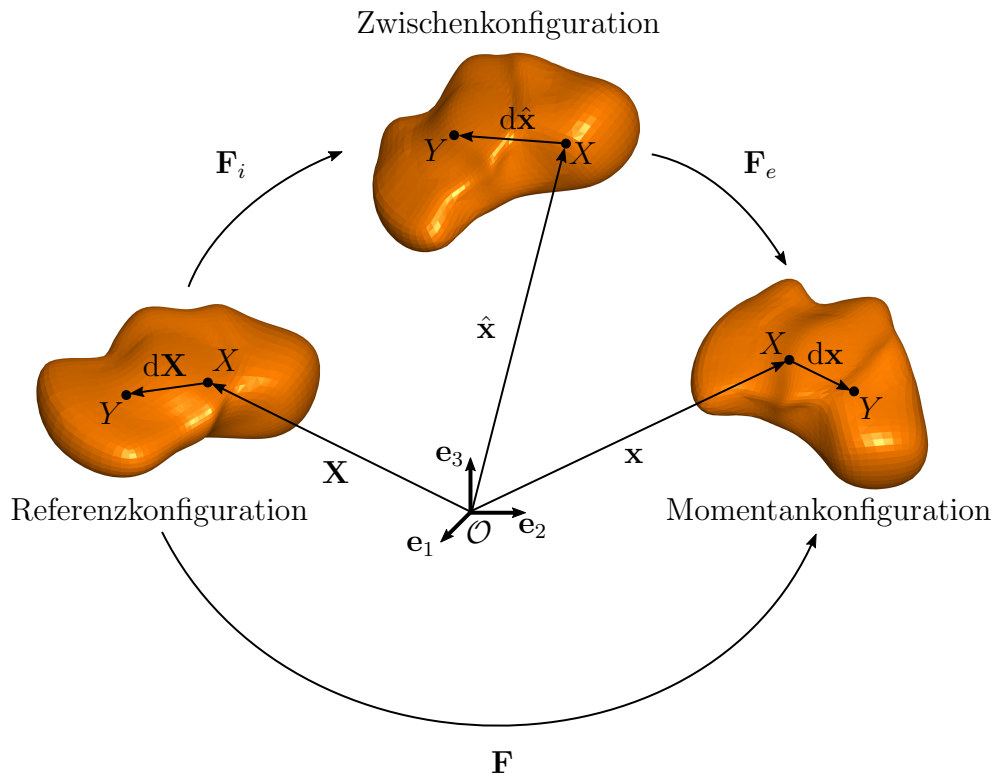


Abbildung 4.3: Einführung einer fiktiven Zwischenkonfiguration.

Im Folgenden sollen die daraus resultierenden, weiteren notwendigen Deformationsmaße und deren Raten für eine einzelne Zwischenkonfiguration zur Verfügung gestellt werden. Der Index  $j$  wird daher aus Übersichtlichkeitsgründen zunächst außer Acht gelassen.

Auch im Fall der Zwischenkonfiguration existieren zwischen den einzelnen Konfigurationen die Operationen *push forward* und *pull back*. So entsteht das entsprechende

Verzerrungsmaß  $\mathbf{\Gamma}$  bezüglich der jeweiligen Zwischenkonfiguration zum einen über einen Rücktransport des Almansischen Verzerrungstensors  $\mathbf{A}$  von der Momentan- konfiguration mit dem elastischen Anteil des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_e$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}_e, \quad (4.16)$$

oder zum anderen durch Vorwärtstranport des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\mathbf{E}$  auf die Zwischenkonfiguration mit Hilfe des inelastischen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}_i$

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{F}_i^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_i^{-1}. \quad (4.17)$$

Das Verzerrungsmaß  $\mathbf{\Gamma}$  wiederum lässt sich additiv in einen elastischen und einen inelastischen Anteil

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_e + \mathbf{\Gamma}_i \quad (4.18)$$

aufspalten, mit

$$\mathbf{\Gamma}_e = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e - \mathbf{I}), \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{\Gamma}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}_i^{-T} \cdot \mathbf{F}_i^{-1}). \quad (4.19)$$

Dabei werden der rechte elastische Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{C}_e$

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \quad (4.20)$$

und der linke inelastische Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}_i$

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{F}_i^T \quad (4.21)$$

als Deformationsmaße der Zwischenkonfiguration definiert. Durch Transportvorschriften erhält man die analogen Größen auf den beiden anderen Konfigurationen. Auf der Referenzkonfiguration ergibt sich der rechte inelastische Cauchy-Green-Deformationstensors  $\mathbf{C}_i$

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{F}_i. \quad (4.22)$$

Der linke elastische Cauchy-Green-Deformationstensors  $\mathbf{B}_e$

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_e^T \quad (4.23)$$

folgt als Maß der Momentankonfiguration. Beide Tensoren können über

$$\mathbf{B}_e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}_i^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \quad (4.24)$$

ineinander überführt werden. Daraus ergeben sich zudem die korrespondierenden Verzerrungsmaße der beiden Konfigurationen

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_i - \mathbf{I}), \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}_e^{-1}). \quad (4.25)$$

Die Rate des Verzerrungstensors  $\mathbf{\Gamma}$  ergibt sich beispielsweise durch den *push forward* der materiellen Zeitableitung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors  $\dot{\mathbf{E}}$  von der Referenz- auf die Zwischenkonfiguration

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{F}_i^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{F}_i^{-1} = \mathbf{F}_i^{-T} \cdot (\mathbf{F}_i^T \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{F}_i) \cdot \mathbf{F}_i^{-1} = \dot{\mathbf{\Gamma}} + \mathbf{L}_i^T \cdot \mathbf{\Gamma} + \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{L}_i, \quad (4.26)$$

mit dem inelastischen Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L}_i = \dot{\mathbf{F}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{-1}. \quad (4.27)$$

Wie bereits bei der Verzerrung  $\mathbf{\Gamma}$ , kann auch die obere Lie-Ableitung dieses Verzerrungstensors  $\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}$  aus Gl. (4.26) additiv in eine elastische und eine inelastische Rate

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}} = \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_e + \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i \quad (4.28)$$

aufgeteilt werden. Dabei errechnet sich der inelastische Anteil zu

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i = \mathbf{F}_i^{-T} \cdot \dot{\mathbf{E}}_i \cdot \mathbf{F}_i^{-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i + \mathbf{L}_i^T) = \dot{\mathbf{\Gamma}}_i + \mathbf{L}_i^T \cdot \mathbf{\Gamma}_i + \mathbf{\Gamma}_i \cdot \mathbf{L}_i \quad (4.29)$$

und der elastische Anteil zu

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_e = \dot{\mathbf{\Gamma}}_e + \mathbf{L}_i^T \cdot \mathbf{\Gamma}_e + \mathbf{\Gamma}_e \cdot \mathbf{L}_i. \quad (4.30)$$

Es wird deutlich, dass nur die inelastische Rate eine rein inelastische Größe darstellt. Die elastische Rate enthält sowohl elastische als auch inelastische Maße, da in Gl. (4.30) neben  $\mathbf{\Gamma}_e$  auch  $\mathbf{L}_i$  auftritt. Die Transportvorschriften für die Raten sind analog zu denen der Verzerrungsmaße selbst zu behandeln.

In einer klassischen Viskoelastizitätstheorie finden in der Regel nur zwei Prozessvariablen Verwendung, beispielsweise der linke Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}$  und der linke elastische Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}_e^j$

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j\} . \quad (4.31)$$

Im vorliegenden Fall wird aufgrund der nichtlinear-viskoelastischen Charakteristik und deren Repräsentation die Betrachtung der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  als zusätzliche Prozessvariable notwendig. Der erweiterte Satz an Prozessvariablen lautet somit

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D}\} . \quad (4.32)$$

Wie im späteren Verlauf dieser Arbeit gezeigt wird, hängt das Spannungsmaß von der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  direkt ab und ist prozessabhängig. Aufgrund des Prinzips der Äquipräsenz (vgl. Truesdell & Noll [173], Truesdell & Toupin [174]) wird daher im Folgenden zunächst überprüft, inwiefern diese Prozessvariable  $\mathbf{D}$  Einfluss auf die Auswertung der Clausius-Planck-Ungleichung hat.

Der Ansatz diesbezüglich erfolgt in Anlehnung an die Betrachtung viskoser Fluide. Steht ein Fluid unter Druckbelastung, so geht dies mit Volumendehnungen einher, wiederum ist das Aufbringen einer Schubbelastung immer mit einem Fließvorgang verbunden. Schubspannungen können daher nur übertragen werden, wenn das Fluid eine Scherrate erfährt. Das Verhalten ist somit geschwindigkeitsabhängig und wird als viskos bezeichnet. Darauf basierend werden in der Beschreibung des Zustands eines Fluids die Volumendehnung und die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  genutzt. Die Volumendehnung wird über die Dichte  $\rho$  beschrieben. Daher ergibt sich ein für Fluide typischer Satz an Prozessvariablen

$$\mathcal{S}_{fluid} = \{\rho, \mathbf{D}\} \quad (4.33)$$

zur Auswertung der Clausius-Planck-Ungleichung. Es liegt folglich eine ähnliche Betrachtung wie in der vorliegenden Beschreibung des nichtlinear-viskoelastischen Verhaltens vor. Die Schritte in der Auswertung können daher vom viskosen Fluid übertragen werden.

Für das nichtlinear-viskoelastische Materialverhalten wird bei der zeitlichen Ableitung der freien Energie im ersten Schritt nach allen Prozessvariablen abgeleitet.

Es ergibt sich gemäß (4.32)

$$\dot{\psi}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D}) = \frac{\partial \psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} + \frac{\partial \psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \dot{\mathbf{B}}_e^j + \frac{\partial \psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}}. \quad (4.34)$$

Bezug nehmend auf die Viskoelastizität, die das untersuchte Material aufweist, wird die freie Energie  $\psi$  zudem in Anlehnung an das rheologische Modell aus Abb. 4.1 in einen Gleichgewichts- und  $n$  Nichtgleichgewichtsanteile

$$\psi = \psi_{eq}(\mathbf{B}, \mathbf{D}) + \sum_{j=1}^n \psi_{neq}^j(\mathbf{B}_e^j, \mathbf{D}) \quad (4.35)$$

aufgeteilt. Lediglich der Gleichgewichtsanteil der freien Energie hängt von  $\mathbf{B}$  ab.  $\mathbf{B}_e^j$  taucht nur in den Nichtgleichgewichtsanteilen auf, d. h. die Zeitableitung der freien Energie wird umgeformt zu

$$\dot{\psi}(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D}) = \frac{\partial \psi_{eq}(\mathbf{B}, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{neq}^j(\mathbf{B}_e^j, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \dot{\mathbf{B}}_e^j + \frac{\partial \psi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}}. \quad (4.36)$$

Die Abhängigkeit gegenüber der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  wird erst im Folgenden näher beleuchtet. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden in den nachfolgenden Schritten die Abhängigkeiten der freien Energien nicht mehr weiter schriftlich mitgeführt. Es ergibt sich zunächst für die Clausius-Planck-Ungleichung aus Gl. (4.7)

$$p \mathbf{I} : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} : \dot{\mathbf{B}} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \dot{\mathbf{B}}_e^j + \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \right) + \mathbf{T} : \mathbf{D} \geq 0. \quad (4.37)$$

In der Betrachtung dieser Relation müssen zunächst, analog zu der Beschreibung bei der Hyperelastizität in Kap. 4.1, die materiellen Zeitableitungen des linken Cauchy-Green Deformationstensors  $\dot{\mathbf{B}}$  sowie des elastischen linken Cauchy-Green Deformationstensors  $\dot{\mathbf{B}}_e^j$  in ihrer Formulierung mit der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  überein gebracht werden. Für den Gleichgewichtsanteil wurden diese Schritte bereits in Kap. 4.1 durchgeführt mit dem resultierenden Zusammenhang (4.13).

Für die Nichtgleichgewichtsanteile

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \dot{\mathbf{B}}_e^j &= \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}^T)^\bullet \\ &= \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \left( \underbrace{\dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}^T}_{1. \text{ Term}} + \underbrace{\mathbf{F} \cdot ((\mathbf{C}_i^j)^{-1})^\bullet \cdot \mathbf{F}^T}_{2. \text{ Term}} + \underbrace{\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T}_{3. \text{ Term}} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

wiederum bietet sich die Aufteilung in Einzelterme an. Betrachtet wird zunächst der erste Term

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : (\dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}^T) &= \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : (\dot{\mathbf{F}} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{F}^T) \\ &= \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : (\mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e^j) \\ &= \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die Vorgehensweise für den dritten Term ist analog

$$\frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T) = \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \mathbf{L}^T. \quad (4.40)$$

Beim zweiten Term wird vorab die zeitliche Ableitung der Inversen des inelastischen, rechten Cauchy-Green Deformationstensors  $((\mathbf{C}_i^j)^{-1})^\bullet$  benötigt. Die zeitliche Ableitung des Identitätstensors ist gleich  $\mathbf{0}$  und damit ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_i^j \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1})^\bullet &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow ((\mathbf{C}_i^j)^{-1})^\bullet &= -(\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{C}}_i^j \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Für den mittleren Term in (4.38) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \left( -\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \dot{\mathbf{C}}_i^j \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \right) &= \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \left( -\mathbf{F}_e^j \cdot ((\mathbf{L}_i^j)^T + \mathbf{L}_i^j) \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \right) \\ &= \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \left( -\mathbf{F}_e^j \cdot 2 \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Zusammenfassend ergibt sich für die Nichtgleichgewichtsanteile

$$\frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \dot{\mathbf{B}}_e^j = 2 \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \mathbf{D} - 2 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \left( -\mathbf{F}_e^j \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \right). \quad (4.43)$$

Die Clausius-Planck-Ungleichung resultiert damit in

$$\begin{aligned} & \left( -2\rho \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} - \sum_{j=1}^n 2\rho \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} + p\mathbf{I} + \mathbf{T} \right) : \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \\ & + \sum_{j=1}^n 2\rho \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \mathbf{F}_e^j \cdot \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \geq 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Nun folgend wird die Abhängigkeit der Auswertung des Entropieprinzips von der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  geprüft. Für den thermodynamischen Prozess liegen die Werte der Prozessvariablen fest. Der Zustand ist vollständig durch die Prozessvariablen bestimmt. Der Prozess kann von außen so gesteuert werden, dass die Ableitungen der Prozessvariablen beliebige Werte annehmen. Es ergibt sich ein anderes Randwertproblem, welches allerdings ebenso thermodynamisch konsistent sein muss. Legt man, wie im vorliegenden Fall, die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  als Prozessvariable fest, so kann

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} \geq 0 \quad (4.45)$$

mit beliebigen Werten für  $\dot{\mathbf{D}}$  nur gelten, wenn es keine Abhängigkeit der freien Energie  $\psi$  von der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  gibt, d. h. wenn der Ableitungsterm verschwindet. Basierend darauf lässt sich allgemein festhalten, dass die Terme, die in Produkten mit zeitlichen Ableitungen von Prozessvariablen auftreten, zu Null werden müssen. Ansonsten wäre die Entropiebetrachtung vom Vorzeichen der Ableitung der Prozessvariablen abhängig und somit könnte ein Vorzeichenwechsel dieser Ableitung das Dissipationsprinzip verletzen [19, 20].

Der Term (4.45) entfällt und es verbleibt der Zusammenhang  $\phi$

$$\begin{aligned} \phi & = \left( -2\rho \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} - \sum_{j=1}^n 2\rho \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} + p\mathbf{I} + \mathbf{T} \right) : \mathbf{D} \\ & + \sum_{j=1}^n 2\rho \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \mathbf{F}_e^j \cdot \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \geq 0. \end{aligned} \quad (4.46)$$

In der weiteren Betrachtung der Abhängigkeiten von der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  erfolgt die Auswertung des ersten Summanden in Gl. (4.46) in zwei Schritten. Dazu wird die Gesamtspannung  $\mathbf{T}$  in einen Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{T}_{eq}$

und einen Nichtgleichgewichtsanteil  $\mathbf{T}_{neq}$  separiert

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \mathbf{T}_{neq}. \quad (4.47)$$

Zunächst wird ein Zustand im mechanischen Gleichgewicht betrachtet. Für den Gleichgewichtszustand muss die Dissipation minimal werden. Dieser Zustand wird in der Mischungstheorie als Mischungsgleichgewicht bezeichnet [19]. Als Bedingung muss die Ableitung der Restungleichung bei Annäherung an das Gleichgewicht zu Null werden. Diesbezüglich wird ein Größenordnungsparameter  $\iota$  eingeführt, so dass

$$\mathbf{D}^* = \iota \mathbf{D}, \quad \iota \rightarrow 0. \quad (4.48)$$

Es folgt ein beliebiger Zustand  $\mathbf{D}^*$ , der sich dem Gleichgewicht nähert. Als Kriterium für das Minimum in der Dissipation muss für die Richtungsableitung der Restungleichung  $\phi$  nach dem Größenordnungsparameter  $\iota$

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{B}, \mathbf{B}_e^j, \iota \mathbf{D})}{\partial \iota} \right|_{\iota=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.49)$$

erfüllt werden. Dies liefert für den vorliegenden Fall

$$\left( -2\rho \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} + p_{eq} \mathbf{I} + \mathbf{T}_{eq} \right) : \mathbf{D}^* \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.50)$$

Da die Nichtgleichgewichtsspannungen im Gleichgewicht nicht auftreten, wird nur der Gleichgewichtsanteil  $\mathbf{T}_{eq}$  berücksichtigt. Darüber hinaus geht der Lagrange-Multiplikator  $p$  als Zwangsbedingung für Inkompressibilität sowohl im Gleichgewicht als auch im Nichtgleichgewicht ein. Daher wird dieser ebenso in zwei Anteile für beide Zustände aufgespalten. Außerdem entfallen alle Terme, die vom elastischen linken Cauchy-Green Deformationstensor  $\mathbf{B}_e^j$  abhängen, da  $\mathbf{B}_e^j$  als Nichtgleichgewichtsvariable im Gleichgewicht nicht eingehen darf. Damit das Minimum in der Dissipation für beliebige Geschwindigkeitszustände  $\mathbf{D}^*$  erreicht wird, muss der Klammerausdruck in (4.50) zu Null werden und es folgt für die Gleichgewichtsspannung

$$\mathbf{T}_{eq} = -p_{eq} \mathbf{I} + 2\rho \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}}. \quad (4.51)$$

Die Restungleichung reduziert sich für die anschließende Betrachtung des Nicht-



gleichgewichts zu

$$\left( - \sum_{j=1}^n 2 \rho \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e} + p_{neq} \mathbf{I} + \mathbf{T}_{neq} \right) : \mathbf{D} + \sum_{j=1}^n 2 \rho \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e} : \mathbf{F}_e^j \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \geq 0. \quad (4.52)$$

Eine hinreichende Bedingung für den mit der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  multiplizierten Anteil ist auch hier die Eliminierung des Klammerausdrucks, so dass

$$\mathbf{T}_{neq} = -p_{neq} \mathbf{I} + \sum_{j=1}^n 2 \rho \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e} \quad (4.53)$$

folgt. Es verbleibt nur noch der letzte Term in Gl. (4.52) als Dissipationsrestungleichung. Diese kann zur Ermittlung der Kinematik der Nichtgleichgewichtsanteile genutzt werden.

Somit wurde gezeigt, dass die Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$  zwar als Prozessvariable verwendet wird, dies auf die Ergebnisse der Auswertung der Clausius-Planck-Ungleichung allerdings keinen Einfluss hat. Da folglich auch die Unterteilung beim Lagrange-Multiplikator  $p$  in Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteile überflüssig wird, wird im Folgenden direkt von der von  $\mathbf{D}$  unabhängigen Form der Entropiebilanz (4.46) ausgegangen. Die Vorgehensweise ist analog wie zuvor zu betrachten. Der mit  $\mathbf{D}$  multiplizierte, erste Anteil wird im Sinne von Coleman & Noll [25] ausgewertet. Sie argumentieren, dass jeder Prozess vollständig durch den Wert der Prozessvariablen beschrieben wird und daher von der zeitlichen Änderung der Prozessvariablen unabhängig sein muss. Der Klammerterm in der Ungleichung (4.46) wird zu Null gesetzt, so dass diese stets erfüllt ist. Weiterhin liegt beim untersuchten Material Inkompresibilität vor, und die Bedingung  $\det \mathbf{F} = J = 1$  gilt. Aus der Volumenbilanz bzw. dem Transport der Dichten (3.39) folgt, dass

$$\rho = \rho_0 = konst. \quad (4.54)$$

ist. Gemäß Gl. (4.35) kann die Gesamtspannung bezüglich des rheologischen Modells in Abb. 4.1 in einen Gleichgewichts- und  $n$  Nichtgleichgewichtsanteile

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{neq}^j \quad (4.55)$$

aufgeteilt werden. Damit ergibt sich für die Gesamtspannung die konstitutive Be-

ziehung

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{eq} + \sum_{j=1}^n \mathbf{T}_{neq}^j = -p \mathbf{I} + 2 \rho_0 \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} + \sum_{j=1}^n 2 \rho_0 \mathbf{B}_e^j \cdot \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j}. \quad (4.56)$$

Der Lagrange-Multiplikator  $p$ , als Zwangsbedingung für die Inkompressibilität, geht nun sowohl für die Gleichgewichts- als auch die Nichtgleichgewichtsspannungen ein und kann aus den Randbedingungen für den Gesamtprozess bestimmt werden.

Auf Basis dieser konstitutiven Beziehung für die Spannung ist der nächste Schritt die Wahl der freien Energiefunktionen  $\psi$  bzw.  $\psi_{neq}^j$ . Eine Formulierung in Invarianten der Prozessgröße, im vorliegenden Fall eines Verzerrungsmaßes, ist aufgrund der Unabhängigkeit vom Bezugssystem sinnvoll. Für die aktuelle Beschreibung bieten sich die Invarianten des linken, bzw. rechten Cauchy-Green-Deformationstensors für den Gleichgewichtsanteil der freien Energie an. Für den Nichtgleichgewichtsanteil können die Invarianten der entsprechenden inelastischen Deformationstensen genutzt werden. Für die Grundlagen dieser Formulierung sei der Leser auf die Theorie isotroper Tensorfunktionen hingewiesen [17, 18, 163, 180]. Für die Beschreibung in dieser Arbeit werden die freien Energiefunktionen beim Gleichgewichtsanteil in Invarianten des linken Cauchy-Green-Deformationstensors  $\mathbf{B}$  und für die Nichtgleichgewichtsanteile entsprechend in Invarianten des elastischen linken Cauchy-Greenschen Deformationstensors  $\mathbf{B}_e^j$  für jedes Maxwell-Element gewählt. Da die Form der Invarianten dieser beiden Tensoren identisch ist, wird die Bereitstellung der invarianten Größen sowie die Vorgehensweise in der Auswertung der konstitutiven Beziehung (4.56) im Folgenden am Beispiel des Gleichgewichtsanteils gezeigt. Diese Schritte sind unmittelbar auf die Nichtgleichgewichtsanteile übertragbar.

Aus dem Eigenwertproblem für den linken Cauchy-Green-Deformationstensors  $\mathbf{B}$

$$(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \text{bzw.} \quad \det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (4.57)$$

mit den Eigenwerten  $\lambda$ , entsteht das charakteristische Polynom

$$\lambda^3 - \mathbb{I}_{\mathbf{B}} \lambda^2 + \mathbb{II}_{\mathbf{B}} \lambda - \mathbb{III}_{\mathbf{B}} = 0, \quad (4.58)$$

mit den drei Hauptinvarianten des Tensors  $\mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \text{I}_{\mathbf{B}} &= \text{tr } \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{I}, \\ \text{II}_{\mathbf{B}} &= \frac{1}{2} ((\mathbf{B} : \mathbf{I})^2 - \mathbf{B}^T : \mathbf{B}), \\ \text{III}_{\mathbf{B}} &= \det \mathbf{B} = (\det \mathbf{F})^2. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Bei der Auswertung des zweiten Hauptsatzes (4.46) und daher auch der konstitutiven Beziehung für die Spannung in Gl. (4.56) muss die Ableitung der freien Energie berechnet werden. In einer von den Invarianten abhängigen Formulierung der freien Energie muss die Kettenregel

$$\frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \text{I}_{\mathbf{B}}} \frac{d\text{I}_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} + \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \text{II}_{\mathbf{B}}} \frac{d\text{II}_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} + \frac{\partial \psi_{eq}}{\partial \text{III}_{\mathbf{B}}} \frac{d\text{III}_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} \quad (4.60)$$

angewandt werden. Die Ableitungen der Invarianten nach dem linken Cauchy-Green-Deformationstensor darin lauten

$$\begin{aligned} \frac{d\text{I}_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} &= \mathbf{I}, \\ \frac{d\text{II}_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} &= \text{I}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} - \mathbf{B}, \\ \frac{d\text{III}_{\mathbf{B}}}{d\mathbf{B}} &= (\det \mathbf{B}) \mathbf{B}^{-T}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Zur Berechnung weiterer Invarianten wird das Theorem von Cayley-Hamilton genutzt, das besagt, dass jeder Tensor seine charakteristische Gleichung

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \text{I}_{\mathbf{B}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} + \text{II}_{\mathbf{B}} \mathbf{B} - \text{III}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (4.62)$$

erfüllt. Bis zu diesem Punkt ist die Vorgehensweise noch unter Einbeziehung der drei Hauptinvarianten gegeben. Im Folgenden soll allerdings auf die Abhängigkeiten von der dritten Invarianten verzichtet werden. Da beim vorliegenden Material inkompressibles Verhalten vorausgesetzt wird, reduziert sich die dritte Hauptinvariante auf den konstanten Wert 1, vergleiche Gl. (4.5). In den Bilanzgleichungen im vorangegangenen Kap. 4.1 wurde dies bereits in Form einer Zwangsbedingung über den Lagrange-Parameter  $p$  in Gl. (4.7) berücksichtigt.

Die Spannungs-Deformations-Beziehung für die Gleichgewichtsspannung ergibt

dann

$$\mathbf{T}_{eq} = -p_{eq} \mathbf{I} + 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}}{d\mathbb{I}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{I} + 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}}{d\mathbb{II}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} \cdot (\mathbb{I}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} - \mathbf{B}). \quad (4.63)$$

Unter Einbeziehung des Satzes von Cayley-Hamilton (4.62) gilt die Umformung

$$\mathbf{B} \cdot (\mathbb{I}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} - \mathbf{B}) = \mathbb{II}_{\mathbf{B}} \mathbf{I} - \mathbb{III}_{\mathbf{B}} \mathbf{B}^{-1}. \quad (4.64)$$

Die mit dem Identitätstensor multiplizierte zweite Invariante kann zudem in der Zwangsbedingung für Inkompressibilität verarbeitet werden, so dass sich ein modifizierter Lagrange-Parameter  $\tilde{p}_{eq}$  ergibt und sich die Spannungsbeziehung auf die Form

$$\mathbf{T}_{eq} = -\tilde{p}_{eq} \mathbf{I} + 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}}{d\mathbb{I}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} - 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}}{d\mathbb{II}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^{-1} \quad (4.65)$$

reduziert.

Da für den elastischen linken Cauchy-Green-Deformationstensor  $\mathbf{B}_e^j$  die Einführung der Invarianten vollkommen analog vonstattengeht, ist die Vorgehensweise für die Nichtgleichgewichtsanteile direkt übertragbar. Innerhalb der vorangegangenen Ausführungen ist der linke Cauchy-Greensche Deformationstensor  $\mathbf{B}$  lediglich jeweils mit dem entsprechenden inelastischen Tensor  $\mathbf{B}_e^j$  zu ersetzen. Es ergibt sich eine Gesamtspannung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -\tilde{p} \mathbf{I} + 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}}{d\mathbb{I}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B} - 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}}{d\mathbb{II}_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}^{-1} \\ & + \sum_{j=1}^n \left( 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}^j}{d\mathbb{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{B}_e^j - 2 \rho_0 \frac{d\psi_{eq}^j}{d\mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} (\mathbf{B}_e^j)^{-1} \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Für die Gestalt der freien Energiefunktion  $\psi$  gibt es verschiedene Ansätze. Eine Übersicht liefern beispielsweise Boyce & Arruda [21] sowie Marckmann & Verron [118]. Im Rahmen dieser Arbeit wird der von Rivlin & Saunders [148, 149] vorgestellte polynomielle Reihenansatz verwendet, der in den Invarianten eines Deformationstensors, hier am Beispiel des linken Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{B}$  formuliert wird

$$\rho_0 \psi = \sum_{k,l=0}^{N,M} c_{kl} (\mathbb{I}_{\mathbf{B}} - 3)^k (\mathbb{II}_{\mathbf{B}} - 3)^l. \quad (4.67)$$

Diese Wahl wird sowohl für die Gleichgewichtsanteile als auch für die Nichtgleichgewichtsanteile der freien Energie getroffen.

In einer viskoelastischen Betrachtungsweise ist es neben der Kenntnis über den

Spannungs-Deformations-Zusammenhang zudem notwendig, die Kinematik der inelastischen Elemente zu betrachten. Dazu wird sich der verbleibenden Dissipationsrestungleichung

$$\sum_{j=1}^n 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{B}_e^j} : \mathbf{F}_e^j \cdot \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \geq 0 \quad (4.68)$$

bedient. Der resultierende Gleichungssatz für die kinematischen Zusammenhänge wird im Folgenden in allgemeiner Form für verschiedene Ansätze der freien Energien  $\psi_{neq}^j$  im Sinne eines polynomiellen Reihenansatzes der Invarianten (4.67) bereitgestellt, um die Zusammenhänge ohne Weiteres auf Modelle übertragen zu können, die vom vorliegenden Fall abweichen. Damit die resultierenden Evolutionsgleichungen in geeigneten Größen für eine Implementierung vorliegen, sind einige Umformungen notwendig. Häufig wird die notwendige Ausarbeitung deutlich reduziert dargestellt und auf einen bestimmten Ansatz für die freie Energie  $\psi_{neq}^j$  beschränkt. Wesentliche Schritte werden somit umgangen. Im Folgenden soll in der vorliegenden Arbeit eine allgemeingültigere Fassung bereit gestellt werden. Die notwendigen Schritte werden daher in detaillierter Form vorgestellt. Diese Herleitung bietet dann allerdings auch den Vorteil, dass der sich ergebende Gleichungssatz mit der Einschränkung auf isotropes, inkompressibles Verhalten auf andere Modelle des Typs (4.67) unmittelbar anwendbar ist.

Mit den Ableitungen der freien Energien  $\psi_{neq}^j$  im Nichtgleichgewicht nach dem linken elastischen Cauchy-Green Deformationstensor  $\mathbf{B}_e^j$  unter Anwendung der Kettenregel und mit Berücksichtigung der Invarianten von  $\mathbf{B}_e^j$  analog zu Gl. (4.61) folgt

$$\sum_{j=1}^n \left[ 2 \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{I} + \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} \mathbf{I} - (\mathbf{B}_e^j)^T \right) \right) \right] : \mathbf{F}_e^j \cdot \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \geq 0. \quad (4.69)$$

Die Erweiterung der Rechenregel (4.11) um einen vierten Tensor

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}^T : \mathbf{C} \quad (4.70)$$

ergibt

$$\sum_{j=1}^n \left[ 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j - (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot (\mathbf{F}_e^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T)^T \cdot \mathbf{F}_e^j \right) \right] : \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j \geq 0 \quad (4.71)$$

und mit der Definition des rechten elastischen Cauchy-Green-Deformationstensors  $\mathbf{C}_e^j$  folgt schließlich

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\left[ 2 \rho_0 \left( \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{C}_e^j + \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} \mathbf{C}_e^j - \mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j \right) \right) \right]}_{LHS} : \overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j \geq 0. \quad (4.72)$$

Aufgrund der Inkompressibilitätsannahme gilt

$$\det \mathbf{F} = \det \mathbf{F}_e^j = \det \mathbf{F}_i^j = 1, \quad (4.73)$$

und somit

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{F}_i^j) \cdot &= \frac{\partial \det \mathbf{F}_i^j}{\partial \mathbf{F}_i^j} : \dot{\mathbf{F}}_i^j = (\det \mathbf{F}_i^j) (\mathbf{F}_i^j)^{-T} : \dot{\mathbf{F}}_i^j = \mathbf{I} : \dot{\mathbf{F}}_i^j \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \\ &= \mathbf{I} : \mathbf{L}_i^j = \text{tr}(\mathbf{L}_i^j) = 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Für

$$\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_i^j + (\mathbf{L}_i^j)^T) \quad (4.75)$$

gilt daher auch

$$\text{tr}(\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j) = 0. \quad (4.76)$$

Folglich muss die Evolutionsgleichung für  $\mathbf{\Gamma}_i^j$  in deviatorischer Form vorliegen, was zugleich erfordert, dass die linke Seite (*LHS*) der Restungleichung (4.72) ebenso deviatorischen Charakter aufweisen muss. Außerdem wird nach Haupt [59] diese Restungleichung erfüllt, wenn  $\overset{\Delta}{\mathbf{\Gamma}}_i^j$  proportional zur linken Seite (*LHS*) des Produkts (4.72) ist. Beide Zusammenhänge werden repräsentiert in dem Zusammen-

hang

$$\begin{aligned}\eta_i^j \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j &= \left[ LHS - \frac{1}{3} \text{tr}(LHS) \mathbf{I} \right] \\ \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j &= \frac{1}{\eta_i^j} \left[ LHS - \frac{1}{3} \text{tr}(LHS) \mathbf{I} \right].\end{aligned}\quad (4.77)$$

Zu diesem Zweck wird ein positiver Proportionalitätsfaktor  $\eta_i^j$  eingeführt, welcher die Viskosität des  $j$ -ten Maxwell-Elements repräsentiert. Die Wahl einer skalarwertigen Viskosität setzt dabei Isotropie voraus. Die Einschränkung auf inkompressibles Verhalten ist im Rahmen der vorliegenden Herleitung ein wichtiger Schritt. Eine Erweiterung auf kompressibles Verhalten ist allerdings ebenso ohne Weiteres möglich. In diesem Fall ist zunächst ein volumetrisch-isochoerer Split des Deformationsgradienten notwendig, um den Schritt (4.77) in gezeigter Form anwenden zu können. Der Rücktransport der inelastischen Deformationsgeschwindigkeit  $\overset{\Delta}{\Gamma}_i^j$  der Zwischenkonfiguration auf die Referenzkonfiguration erfolgt mit Hilfe des *pull back*

$$\dot{\mathbf{E}}_i^j = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}}_i^j = (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j \cdot \mathbf{F}_i^j \Leftrightarrow \overset{\Delta}{\Gamma}_i^j = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \dot{\mathbf{C}}_i^j \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1}. \quad (4.78)$$

Somit folgt als Evolutionsgleichung für die inelastische Deformation der Dämpfer in den einzelnen Maxwell-Elementen

$$\frac{1}{2} (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \dot{\mathbf{C}}_i^j \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} = \frac{1}{\eta_i^j} \left[ LHS - \frac{1}{3} \text{tr}(LHS) \mathbf{I} \right]. \quad (4.79)$$

Einsetzen der linken Seite  $LHS$  aus Gl. (4.72) ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}}_i^j &= \frac{2}{\eta_i^j} \left[ 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j \cdot \mathbf{F}_i^j \right. \\ &\quad + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j \cdot \mathbf{F}_i^j - (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot (\mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j) \cdot \mathbf{F}_i^j \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \text{tr} \left( 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{C}_e^j + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} \mathbf{C}_e^j - \mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j \right) \right) (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot \mathbf{F}_i^j \right] \\ &= \frac{2}{\eta_i^j} \left[ 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{C} + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \text{tr}(\mathbf{B}_e^j) \mathbf{C} - (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot (\mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j) \cdot \mathbf{F}_i^j \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \text{tr} \left( 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{C}_e^j + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} \left( \text{tr}(\mathbf{B}_e^j) \mathbf{C}_e^j - \mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j \right) \right) \mathbf{C}_i^j \right].\end{aligned}\quad (4.80)$$

Im Hinblick auf die numerische Umsetzung der vorgestellten geometrisch nichtlinearen Evolutionsgleichungen ist bezüglich der Zeit ein Euler-Verfahren in Kombination mit einem lokalen Newton-Verfahren notwendig. Daher müssen für den aktuellen Zeit- bzw. Iterationsschritt bekannte Größen für die rechte Seite der Evolutionsgleichungen (4.80) vorliegen. Folgende Umformungen sind somit noch notwendig:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}_i^j)^T \cdot (\mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j) \cdot \mathbf{F}_i^j &= (\mathbf{F}_i^j)^T \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j \cdot \mathbf{F}_i^j \\
&= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}_e^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F} \\
&= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \\
&= \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C}.
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Für die Spur eines Tensors gelten die Regeln

$$\operatorname{tr}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \operatorname{tr}(\mathbf{A}), \tag{4.82}$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}) + \operatorname{tr}(\mathbf{B}), \tag{4.83}$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) = \operatorname{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \operatorname{tr}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \tag{4.84}$$

Dementsprechend ist eine zyklische Vertauschung der Tensoren in der Spur erlaubt. Zur Ermittlung der Spur von  $\mathbf{B}_e^j$  gilt mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_e^j &= \mathbf{F}_e^j \cdot (\mathbf{F}_e^j)^T = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{F}^T \\
&= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}^T
\end{aligned} \tag{4.85}$$

der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^j) &= \operatorname{tr}(\mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{F}^T) = \operatorname{tr}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Analog ergibt sich  $\operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j)$  mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_e^j &= (\mathbf{F}_e^j)^T \cdot \mathbf{F}_e^j = (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \\
&= (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.87}$$



zu

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j) &= \operatorname{tr}(\mathbf{F} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{F}^T) = \operatorname{tr}([\mathbf{F}_i^j]^T \cdot \mathbf{F}_i^j \cdot \mathbf{C}) \\
&= \operatorname{tr}((\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C}) \\
&= \operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}(\mathbf{B}_e^j).
\end{aligned} \tag{4.88}$$

Für die Spur  $\operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j)$  wiederum gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\mathbf{C}_e^j \cdot \mathbf{C}_e^j) &= \operatorname{tr}((\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}((\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-1}) \\
&= \operatorname{tr}((\mathbf{F}_i^j)^{-1} \cdot (\mathbf{F}_i^j)^{-T} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C}) \\
&= \operatorname{tr}((\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C}).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Eingesetzt in die Evolutionsgleichungen (4.80) folgt nun in allgemeiner Form

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{C}}_i^j &= \frac{2}{\eta_i^j} \left[ 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{C} + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} (\operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}) \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \left( 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j}} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \rho_0 \frac{\partial \psi_{neq}^j}{\partial \mathbb{II}_{\mathbf{B}_e^j}} (\operatorname{tr}(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}) \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} - (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1} \cdot \mathbf{C}) \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Diese Formulierung beinhaltet sowohl Größen der Referenz- als auch der Momentankonfiguration. Die Invarianten lassen sich allerdings gemäß Gl. (4.86) zwischen den Konfiguration direkt ineinander überführen. Für gegebene Werte des rechten Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{C}$  kann die Gl. (4.90) numerisch mit einem impliziten Euler-Verfahren gelöst werden.



# 5

---

## Material & experimentelle Methoden

---

### 5.1 Probenmaterial

„Polymer“ leitet sich aus dem altgriechischen „polý“ für „viele“ und „méros“ für „Teil“ bzw. „Teilchen“ ab und beschreibt somit die Struktur dieser Materialklasse. Der Wortbedeutung entsprechend stellt ein Polymer eine chemische Verbindung aus verzweigten Makromolekülen dar, die wiederum aus vielen, sich wiederholenden, gleichen oder ähnlichen Einheiten bestehen. Diese Einheiten werden Monomere genannt. Wie der Name „Polymer“ bereits vermuten lässt, ist anzunehmen, dass das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Material aufgrund seiner Struktur komplexes Materialverhalten aufweist.

Bei der Verzweigung der Makromoleküle können sich verschiedene Anordnungen ausbilden. Sie können sowohl teilkristallin als auch in ungeordneter, amorpher Struktur vorliegen. Außerdem können die Ketten untereinander interagieren. Sie können chemisch vernetzen. Zwischen den Molekülketten können kovalente Bindungen entstehen. Neben chemischen Bindungen sind auch physikalische Interaktionen zwischen den Ketten möglich. Strukturell lassen sich Polymere auf der Basis dieser Überlegungen in drei Untergruppen aufteilen.

Thermoplaste weisen keine chemische Vernetzung auf. Die einzelnen Makromoleküle interagieren kaum miteinander. Sie können sowohl in teilkristalliner als auch

amorpher Struktur vorliegen.

Bei vernetzten Polymeren wird wiederum zwischen zwei Materialklassen unterschieden, den Elastomeren und den Duromeren bzw. Duroplasten. Im Gegensatz zu den Thermoplasten sind die Hauptmakromolekülketten bei diesen beiden Materialgruppen direkt miteinander verbunden. Die Einteilung innerhalb der vernetzten Polymere erfolgt dabei über den Vernetzungsgrad. Während Duroplaste einen hohen Vernetzungsgrad aufweisen, liegen bei Elastomeren nur wenige kovalente Bindungen vor.

Bei Elastomeren ist die Grundstruktur der Molekülketten amorph, d. h. ungeordnet. Häufig wird zur besseren Vorstellung sinnbildlich ein Vergleich mit einem Knäuel Spaghetti gezogen. Da es physikalisch sinnvoll ist, einen möglichst entropiereichen, ungeordneten Zustand einzunehmen, sind die einzelnen Molekülketten ineinander verknäult. An einzelnen Kreuzungspunkten gibt es direkte Verbindungen zwischen den Makromolekülen, sie sind quervernetzt. Schematisch ist dies in Abb. 5.1 dargestellt. Wird die Struktur auseinandergezogen, werden die Molekül-

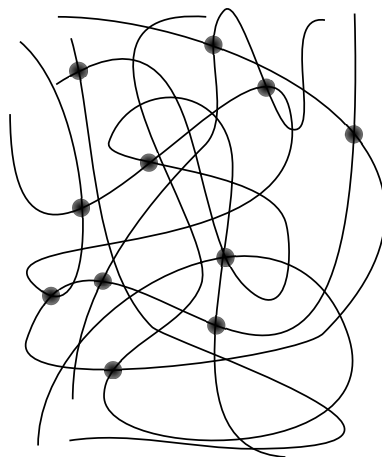


Abbildung 5.1: Amorphe Struktur des Elastomers mit quervernetzten, kovalenten Verbindungen.

ketten gezwungen, ihren entropiereichen Zustand aufzugeben und sich in Richtung der Deformation zu ordnen. Die Unordnung wird reduziert. Anschließendes Entlasten führt dazu, dass die Struktur wieder in ihren Ausgangszustand zurückkehrt. Die Molekülketten relaxieren, da die Gesamtstruktur nach möglichst viel Entropie bestrebt ist.

Bezüglich weiterer Information zur Synthese, zur Struktur und zu den Eigenschaften von Polymeren sei der Leser auf die Literatur verwiesen, z. B. bei Domininghaus [33, 34], Harper [56] sowie Roff & Scott [151].

Das in der vorliegenden Arbeit untersuchte Material ist das Elastomer EPDM. Die-

se Abkürzung steht für **E**thylen-**P**ropylen-**D**ien-**M**onomer. Es handelt sich somit um ein ternäres Blockcopolymer. Dies bedeutet, dass es aus drei unterschiedlichen Monomeren besteht. Den wesentlichen Bestandteil bilden Ethylen und Propylen. Das Dien liegt in der Regel nur in geringer Form, in der Größenordnung von 2 bis 12 Massenprozent, vor. Neben der Vulkanisation bildet das Dien Verzweigungen zwischen den Molekülketten. Für das Beispiel eines EPDM mit Cyclopentadien als Dien-Komponente ergibt sich eine Strukturformel, wie in Abb. 5.2 gezeigt.

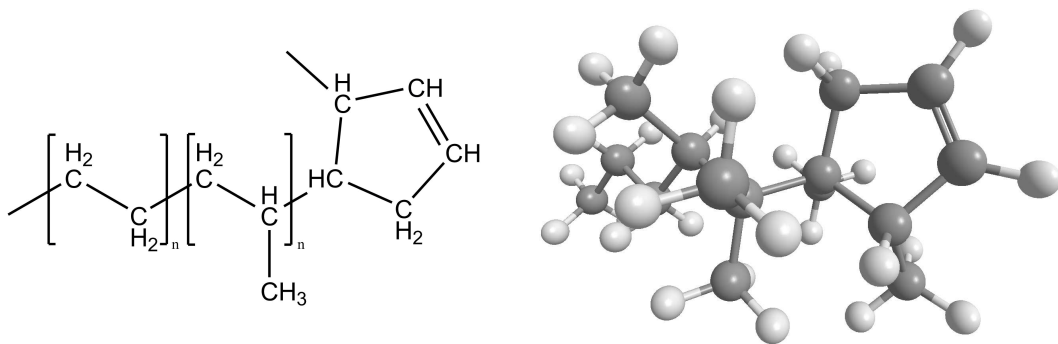


Abbildung 5.2: 2D- und 3D-Strukturformel eines EPDM.

Die Vernetzung bei der Vulkanisation erfolgt in der Regel durch Zugabe von Schwefel. Unter Druck und erhöhter Temperatur bilden sich Schwefelbrücken zwischen den Makromolekülketten. Die Doppelbindung in der Struktur nach Abb. 5.2 erlaubt alternativ auch eine Peroxidvernetzung [152].

Die wesentlichen Eigenschaften von EPDM sind neben der guten Witterungs-, UV- und Ozonbeständigkeit auch die Robustheit gegenüber Temperatur und Dampf. Zudem ist es äußerst alterungsbeständig [34]. Aufgrund dieser hervorragenden Eigenschaften resultiert eine Vielzahl an Einsatzmöglichkeiten. Beispielhaft sind hierbei Schläuche, Dichtungen für Fenster und Türen, sowohl im Automobilbereich als auch in der Bauindustrie, die Ummantelung von Kabeln oder der Einsatz in der Reifenindustrie zu nennen. Durch die vielseitigen Eigenschaften und Anwendungsgebiete wird EPDM auch als Allzweckelastomer gesehen [151].

Um möglichst gute Materialeigenschaften zu erreichen, liegen Elastomere, wie auch das vorliegende EPDM, selten als reines Matrixmaterial vor. Es ist üblich dem Material Füllpartikel, wie Kieselsäure oder Kohlenstoff, hinzuzugeben, um die Materialeigenschaften für den jeweiligen Einsatzbereich anzupassen. Das untersuchte EPDM ist mit Rußpartikeln, d. h. Kohlenstoff, gefüllt. Neben den unmittelbaren mechanischen Eigenschaften kann eine solche Zugabe von Füllpartikeln zudem positiven Einfluss auf die Haltbarkeit, die Verarbeitbarkeit und die Materialkosten haben. Die beigemengten Rußpartikel sind in der Regel nicht als Einzelpartikel in

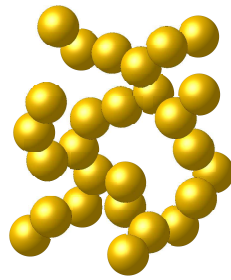


Abbildung 5.3: Fülleragglomerat aus mehreren Einzelpartikeln.

der Elastomermatrix eingebettet, sondern bilden, wie Abb. 5.3 zeigt, Agglomerate aus mehreren Partikeln. Der Kohlenstoff, aus dem die Füller aufgebaut sind, bildet mit dem Matrixmaterial in der unmittelbaren Umgebung Verbindungen. Wirkt dieser Mechanismus auf Füllerpartikel, die sich nahezu berühren, entstehen glasartige Polymerbrücken zwischen den Füllern, die starke Bindungen zwischen den Einzelpartikeln darstellen. Es bilden sich Aggregate mit starkem Zusammenhalt. Bedingt durch physikalisch-chemische Wechselwirkungen lagern sich diese Aggregate wiederum zu größeren Agglomeraten zusammen, welche aus mehreren Aggregaten bestehen können. Bei Silica-Füllern sind die Wechselwirkungen in der Regel auf Wasserstoffbrücken zurückzuführen, während bei Rußpartikeln van der Waals-Kräfte wirken. Die Bindungen zwischen den Primärteilchen erschweren eine gleichmäßige Dispersion des Füllstoffes in der Elastomermatrix. Die Agglomerate fügen sich in die amorphe, vernetzte Struktur aus Abb. 5.1 ein. Eine schematische Darstellung des rußgefüllten EPDM ist in Abb. 5.4 gezeigt.

Da die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Komponenten, insbesondere die Interaktion innerhalb der Fülleragglomerate als eine der Hauptursachen für das kom-

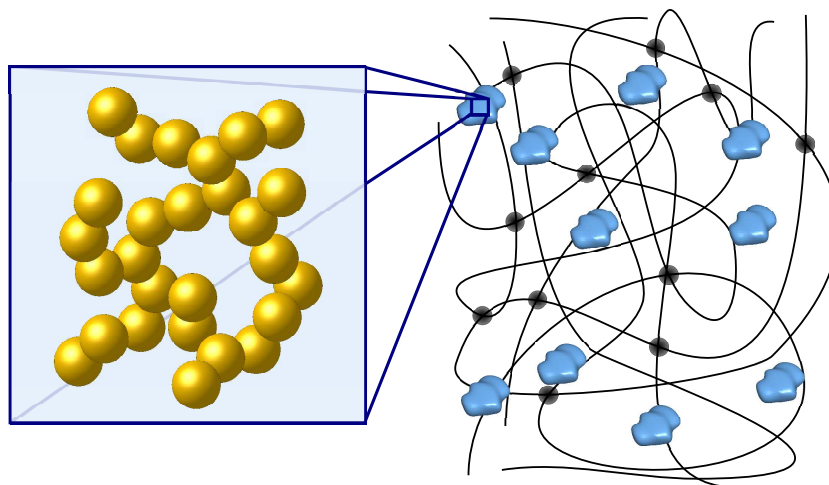


Abbildung 5.4: Schemadarstellung: Rußgefülltes EPDM.

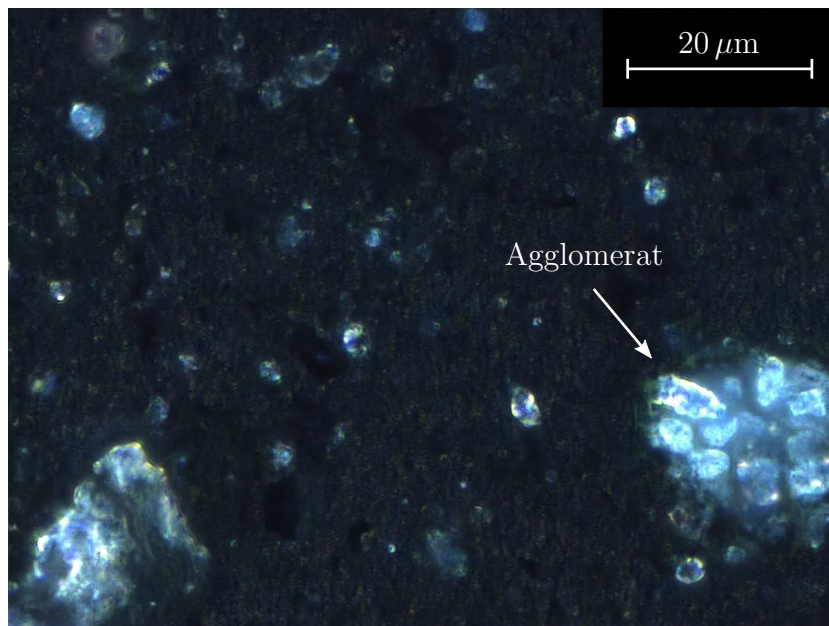


Abbildung 5.5: Lichtmikroskopie-Aufnahme des Probenmaterials (Kooperation: Lehrstuhl für Experimentelle Methodik der Werkstoffwissenschaften, Universität des Saarlandes).

plexe Materialverhalten gesehen wird, wird mithilfe eines Lichtmikroskops *Axio Imager 2*<sup>®</sup> der Firma *Zeiss*<sup>®</sup> die Struktur des vorliegenden EPDM bei 1000-facher Vergrößerung untersucht. Es soll gezeigt werden, dass das Material strukturell der Schemadarstellung 5.4 entspricht. Da die im schwarzen Matrixmaterial eingebetteten Rußpartikel kaum auszumachen sind, wird ein Polarisationsfilter genutzt, der die Rußpartikel deutlich hervorhebt. Wie erwartet bilden sich auch beim untersuchten, gefüllten EPDM Agglomerate aus, wie Abb. 5.5 deutlich zeigt. Die hellen Teilchen stellen die Kohlenstofffüllerpartikel dar. Es sind unverkennbar Clusterbildungen von Füllerpartikeln auszumachen, die analog zur Schemaskizze in Abb. 5.4 im Elastomernetzwerk eingebettet sind. Die beobachtete Struktur dient der Interpretation der Effekte, die in den noch folgenden Untersuchungen beobachtet werden. Auf eine detailliertere physikalisch-chemische Charakterisierung des Materials wird im Rahmen der Ausarbeitung im Weiteren verzichtet, da die gewählte Modellierung phänomenologisch erfolgt.

Das Probenmaterial aus den Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit liegt unmittelbar in Form des fertigen Bauteils vor. Dabei handelt es sich um eine Türdichtung aus dem Automobilbereich, wie in Abb. 5.6 dargestellt. Das Probenmaterial wurde in dieser Form von der Firma *SaarGummi International GmbH* zur Verfügung gestellt. Die Dichtleiste besteht aus drei Komponenten, zum einen dem soliden, rußgefüllten EPDM-Vollmaterial. Zum anderen wird ein Aluminiumprofil bei der



Abbildung 5.6: Türdichtung *SaarGummi International GmbH*.

Extrusion zur Stabilisierung und Formgebung in das Elastomer eingelassen. Des Weiteren wird für die Funktionalität als Dichtkörper ein Teil des EPDM in aufgeschäumter Form als Moosgummi extrudiert. Die strukturelle Kompressibilität des aufgeschäumten EPDM erlaubt eine Volumenveränderung und ist eine wesentliche Voraussetzung für eine effektive Abdichtung. Die Verarbeitung des porösen Moosgummis ist den Arbeiten von Haberstroh zu entnehmen [53, 54]. Die Beschreibung des Materialverhaltens des geschäumten EPDM soll nicht Bestandteil dieser Arbeit sein. Die vorliegende Dissertation baut auf den Arbeiten von Koprowski-Theiß et al. [88, 89, 90] auf. Sie hat sich im Rahmen ihrer Dissertation [86] mit der Modellierung des porösen Moosgummis beschäftigt. Im Rahmen der folgenden Untersuchungen wird nur das Vollmaterial des Dichtkörpers betrachtet.

Da das Material nur in Form des Bauteils vorliegt, ist die Geometrie des Probenmaterials beschränkt. Die Proben werden in Form von Zugstäben nach DIN EN ISO 527-2 Typ:5A aus dem Dichtprofil ausgestanzt (siehe Abb. 5.7).

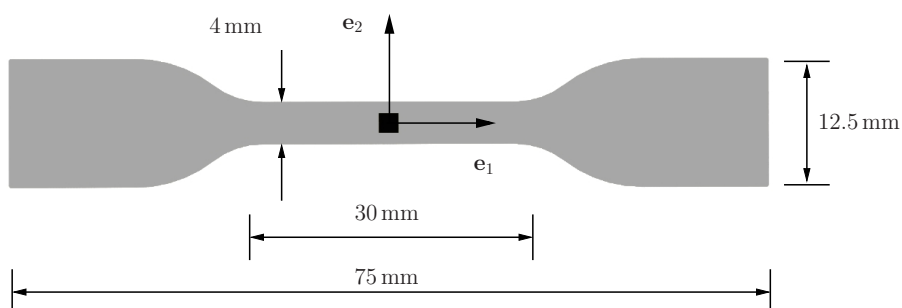


Abbildung 5.7: Zugprobe nach DIN EN ISO 527-2 Typ:5A.



## 5.2 Experimentelle Methoden

Vor allem aufgrund der unkomplizierten Durchführbarkeit ist der uniaxiale Zugversuch der Standardversuch bei einer Materialcharakterisierung. Zudem erlaubt das vorliegende Probenmaterial eine maximale Probengröße in Form der Knochenzugprobe gemäß Abb. 5.7. Daher werden als Datenbasis bei der Untersuchung des betrachteten rußgefüllten EPDM lediglich uniaxiale Versuche durchgeführt. In den Ergebnissen der Arbeit wird allerdings die Übertragbarkeit der Überlegungen auf weitere Deformationszustände diskutiert. Eine mehraxiale Charakterisierung gefüllter Elastomere ist grundsätzlich möglich, z. B. in Form von wahren Biaxialversuchen [76, 159].

Da die Ratenabhängigkeit des Materials wesentlicher Bestandteil der Untersuchungen ist, müssen Experimente mit unterschiedlichen Dehnraten betrachtet werden. Des Weiteren stellen Relaxationsversuche Daten zur Charakterisierung des viskoelastischen Materialverhaltens bereit. Um genügend Informationen zur Modellierung der Ratenabhängigkeit zu erhalten, wird bei den Experimenten für die Dehnraten ein Bereich von  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  bis  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$  berücksichtigt. Dabei sollen Deformationen in der Größenordnung von 100 % betrachtet werden.

In der Wahl des experimentellen Aufbaus sind zur Erfüllung dieser Eckdaten mehrere Konzepte anwendbar. Die geforderten Dehnraten bedingen eine maximale Maschinengeschwindigkeit von  $10 \text{ mm/s}$  für die gegebene Probengeometrie. Für diesen Geschwindigkeitsbereich können konzeptionell nahezu alle Antriebe genutzt werden.

Hinsichtlich der uniaxialen Untersuchungen in dieser Arbeit kommen für die angesprochenen Experimente zwei Versuchsstände zum Einsatz. Basis des ersten Konzepts ist eine Linearachse *Linos LT 200 ST*<sup>®</sup>. Diese ermöglicht die eigentliche Linearbewegung, die für den uniaxialen Zug notwendig ist. Das spindelbasierte Konzept reicht für den geforderten Geschwindigkeitsbereich aus. Zur Realisierung einer höheren Dynamik oder ständiger Wechselbelastungen müssten alternative Antriebssysteme genutzt werden. Der hier verwendete Gesamtaufbau erfolgte als Eigenentwicklung und ist in Abb. 5.8 dargestellt. Die zugehörige Ansteuerung wurde in der Programmiersprache *National Instruments LabView*<sup>®</sup> umgesetzt.

Bei einem maximalen Verfahrweg von 200 mm für den Typ *LT 200 ST* können Maschinengeschwindigkeiten von  $20 \text{ mm/s}$  erreicht werden. Das Kraftmaximum in Zug- und Druckrichtung liegt bei 250 N. Wie in der Detaildarstellung in Abb. 5.8 zu sehen ist, wird die Probe oben und unten durch Einspannungen jeweils geklemmt.

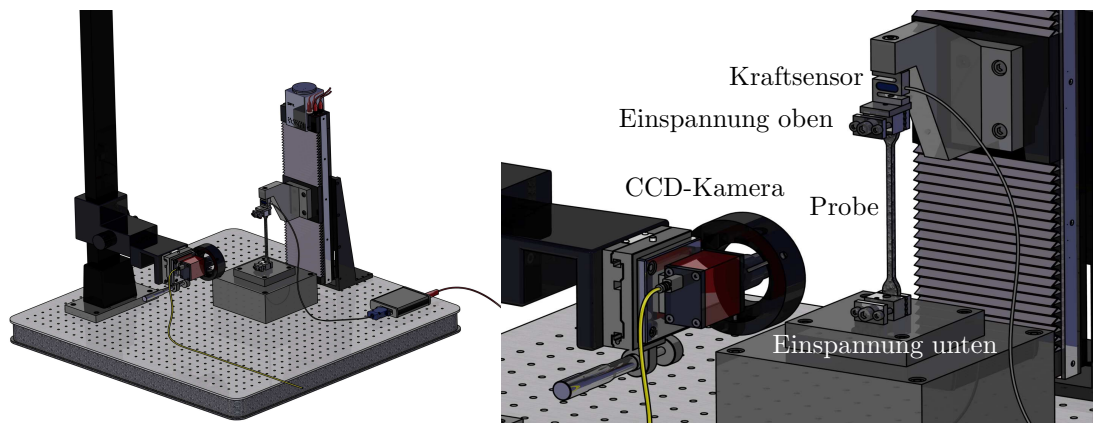


Abbildung 5.8: *Linos LT 200 ST*; rechts: Detaildarstellung.

Mit der oberen Klemmung ist ein Kraftsensor von ME-Messsysteme<sup>®</sup> verbunden. Der in einer *S*-Form doppelt ausgeführte Biegebalken wird unter Belastung deformiert. Darin befindliche Dehnungsmessstreifen messen diese Deformation. Über einen Messkraftverstärker kann letztendlich das resultierende elektrische Spannungssignal ausgelesen werden. Durch die Kenntnis eines Kalibrierwertes kann die Kraft schließlich ermittelt werden. Dieser Wert kann beispielsweise durch Anhängen einer definierten Last und einer Kalibriermessung bestimmt werden. Beim Kraftsensor wird für die Untersuchungen ein Nennkraftbereich von  $\pm 100$  N gewählt. Er reicht aus, um den gesamten Lastbereich für das untersuchte EPDM abzubilden, ist aber zugleich nicht überdimensioniert. Der relative Messfehler des Kraftsensors bezieht sich stets auf das Kraftmaximum. Außerdem führt die Wahl eines zu großen Messbereichs zu einem schlechteren Verhältnis zwischen Signal und Messrauschen.

Abb. 5.9 zeigt den zweiten verwendeten Versuchsstand für die uniaxialen Prüfungen, den Universalprüfstand *Instron ElectroPuls E10000 Linear-Torsion*<sup>®</sup>. Neben der Linearachse bietet der Aufbau zudem die Möglichkeit Torsionsversuche durchzuführen, welche in diesen Untersuchungen jedoch nicht genutzt werden. Basis des Prüfstands ist ein elektrodynamisches Antriebssystem, das eine weitaus höhere Dynamik erlaubt. Neben einer maximalen Lineargeschwindigkeit von  $2$  m/s kann bei zyklischen Belastungen eine Frequenz von über  $100$  Hz erreicht werden. Der maximale Verfahrweg ist bei einem Lastbereich von bis zu  $\pm 10$  kN auf  $60$  mm begrenzt.

Es kann generell der gleiche Kraftsensor wie zuvor eingesetzt werden. Allerdings wird für dynamische Untersuchungen ein Sensor mit Trägheitskompensation benötigt. Dafür steht ein Sensor *Dynacell*<sup>®</sup> mit Messbereich  $\pm 1$  kN zur Verfügung. Zur Bestimmung der Deformation kann in beiden Fällen der Maschinenweg der



Abbildung 5.9: *Instron ElectroPuls E10000 Linear-Torsion.*

Linearachsen direkt ausgelesen und in Relation zur Einspannlänge der Probe gesetzt werden. Aufgrund der Inhomogenitäten und des variierenden Querschnitts der Knochenprobe aus Abb. 5.7 an den Einspannungen stellt diese Methode allerdings keine zufriedenstellende Genauigkeit zur Verfügung. Daher wird eine Dehnungsmessung unmittelbar am mittleren Steg des Probekörpers umgesetzt. Wegen der geringen Steifigkeit des Materials kommen berührende Messverfahren nicht in Frage. Infolgedessen werden optische Auswertemethoden genutzt. In diesem Kontext können zwei unterschiedliche Prinzipien angewendet werden.

Beim ersten Verfahren wird mit Hilfe einer Siebdruckfarbe ein quadratisches Muster auf die Probe aufgebracht, wie in Abb. 5.7 gezeigt. Auf Basis des Prinzips von Saint-Venant ebbt der Einfluss von Inhomogenitäten mit größer werdendem Abstand der ursächlichen Einleitungsstelle der Inhomogenitäten, im vorliegenden Fall der Einspannungen, ab. Daher wird die Markierung auf der Mitte des Probensteiges positioniert. Es muss gewährleistet werden, dass für die Dehnungsmessung die Farbe noch nicht vollständig getrocknet ist, ansonsten würde sie abbröckeln, da sie versprödet und unter Dehnung die Haftung zur Probe verliert. Im flüssigen Zustand haftet die Farbe allerdings an der Probenoberfläche an und folgt der Deformation.

Die Dehnungsmessung erfolgt über eine Kontrasterkennung zwischen Probe und aufgebrachtter Farbe an den Rändern des Messfelds. Nach der Ermittlung dieser Kanten werden die Pixel zwischen den gegenüberliegenden Rändern des Messfelds gezählt und zur Ermittlung eines Dehnungsmaßes in Relation zur Ausgangslänge des Messfelds gesetzt. Dafür muss lediglich ein Referenzbild des undeformierten Zustands vorliegen.

Die Kantendetektion erfolgt automatisiert in der Software *National Instruments Vision Assistant*<sup>®</sup>. Für einen deutlichen Kontrast wird bei der Wahl der Farbe des Messfelds weiße Siebdruckfarbe auf dem schwarzen Probenmaterial eingesetzt (siehe Abb. 5.10).

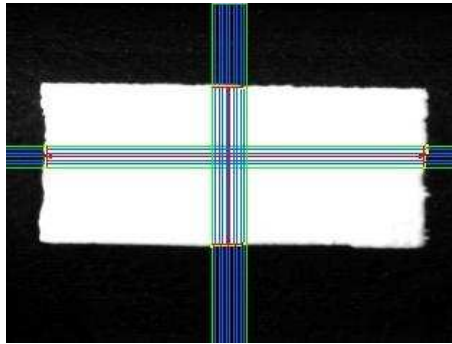


Abbildung 5.10: Kantendetektion in *National Instruments Vision Assistant*<sup>®</sup>.

Als Deformationsmaß wird die Streckung  $\lambda$  ermittelt, die sich aus dem Quotienten der aktuellen Länge und der Ausgangslänge des Messfelds bestimmt. Für die Zugrichtung ergibt dies für die Ausgangslänge  $l_0$  und die aktuelle Länge  $l$

$$\lambda_1 = \frac{l}{l_0}. \quad (5.1)$$

Analog sind die Streckungen in den weiteren Raumrichtungen gemäß Abb. 5.11 definiert.

Obwohl diese Messmethodik effizient und unkompliziert durchführbar ist, bietet sie auch Nachteile. Zum einen schränkt man den Messbereich auf eine sehr lokale Messung ein und zum anderen liefert die Kantenerkennung nur in Zugrichtung eine hinreichende Genauigkeit. Eine simultane Messung der beiden weiteren Raumrichtungen ist nur eingeschränkt durchführbar. Gerade für das Grundverständnis des Materialverhaltens sollen aber zudem Zusammenhänge der Deformationen in den verschiedenen Richtungen näher untersucht werden.

Zur Lösung wird ein Messprinzip angewandt, welches den aktuellen Stand der Technik bei optischen Messverfahren repräsentiert. Die digitale Bildkorrelation,

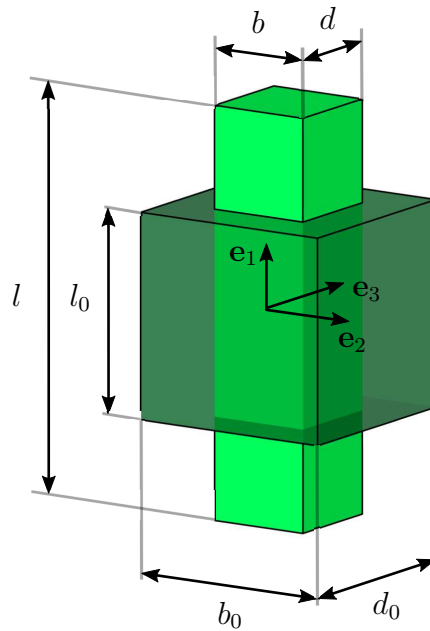


Abbildung 5.11: Bezugsgrößen der Streckungen in den drei Raumrichtungen.

kurz DIC (digital image correlation), ermöglicht eine feldliche Auswertung des betrachteten Messfeldes. Während es bereits in den 1980er Jahren Untersuchungen zu der Thematik gab, z. B. bei Bruck et al. [22] oder Chu et al. [24], gelten heutzutage die Werke von Sutton et al. [165, 166] als Standardliteratur für diese optische Messmethode.

Wichtig für die Funktionsweise ist das Vorhandensein eines stochastischen Punktmusters auf der Probenoberfläche. Dieses wird auch als Speckle-Muster bezeichnet. In den Untersuchungen dieser Arbeit wird mit Hilfe eines Lack-Sprays und einer diffusen Düse eine Punktwolke aus Lackpartikeln auf die Probe gesprüht. Fotolithographische Verfahren, Airbrush-Systeme oder das Einbacken einzelner Partikel in die Probenoberfläche sind weitere Möglichkeiten der Probenpräparation. Außerdem kann bei einigen Materialien die natürliche Oberflächenstruktur als zufälliges Muster genutzt werden, wie von Jung et al. [81, 82] am Beispiel von Metallschäumen gezeigt wird.

Die DIC beruht auf dem Vergleich von Grauwertbildern des Speckle-Musters. Für diesen Vergleich wird die normierte Kreuzkorrelationsfunktion

$$C_n = \sum_i \sum_j \frac{(G_0(x_i, y_i) - \bar{G}_0) (G_t(x'_i, y'_i) - \bar{G}_t)}{\sqrt{\left( \sum_i \sum_j (G_0(x_i, y_i) - \bar{G}_0)^2 \right) \left( \sum_i \sum_j (G_t(x'_i, y'_i) - \bar{G}_t)^2 \right)}} \quad (5.2)$$

genutzt.  $G_0(x_i, y_i)$  ist der Grauwert eines Pixels des Referenzbildes während  $\bar{G}_0$  den mittleren Grauwert des betrachteten Bildbereichs darstellt. Die mit dem Index  $t$  gekennzeichneten Größen sind dementsprechend der Grauwert  $G_t(x'_i, y'_i)$  und der mittlere Grauwert  $\bar{G}_t$  des deformierten Vergleichsbildes zum Zeitpunkt  $t$ .  $(x_i|y_i)$  stellt die Koordinaten eines Pixels im Referenzbild dar, während  $(x'_i|y'_i)$  die identifizierten Koordinaten des entsprechenden Pixels im Vergleichsbild wiedergibt. Für die feldliche Dehnungsmessung kann die Kreuzkorrelationsfunktion nicht direkt für die gesamte Probenoberfläche angewandt werden, da die lokalen Dehnungsinformationen verloren gehen würden. Abb. 5.12 stellt schematisch den Ablauf einer DIC dar.

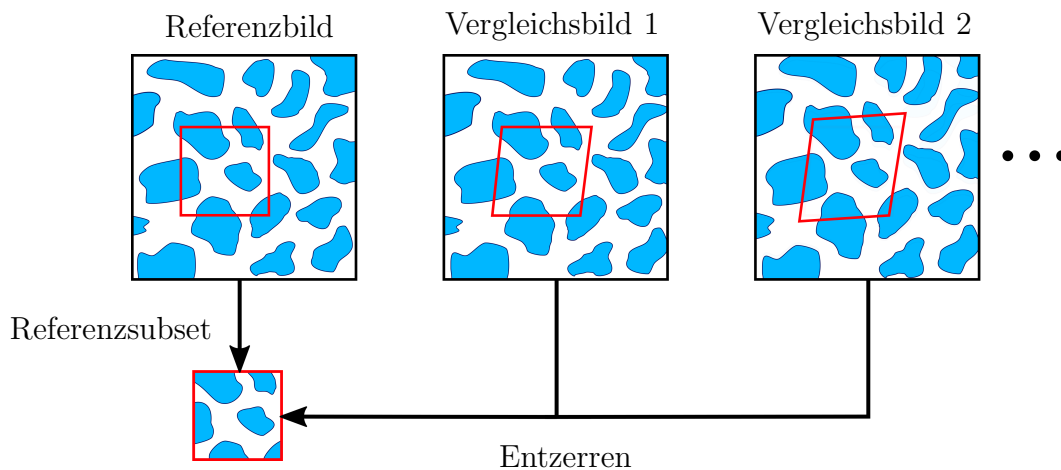


Abbildung 5.12: Schematische Darstellung einer digitalen Bildkorrelation.

Der auszuwertende Bereich wird zunächst in kleine Bildbereiche, die sogenannten Subsets oder Facetten, unterteilt. Beginnend beim Referenzsubset wird bei der Auswertung der darauf folgenden Vergleichsbilder bezüglich der Ausgangslage jedes Subset so lange verschoben und verzerrt, bis das Grauwertprofil von Vergleichsubset und ursprünglichem Subset möglichst gut übereinstimmen. Durch das anschließende Entzerren des Vergleichssubsets kann auf die lokalen Verschiebungen und Deformationen für den jeweiligen, lokalen Bereich rückgerechnet werden. Anschließend wird das Subset um einige Pixel im Bildbereich weitgeschoben und der Vergleich inklusive Detektion, Entzerren und Ermittlung der Verschiebungen erfolgt von Neuem bis der gesamte Bildbereich erfasst ist. Dies geschieht für jeden Deformationszustand zu dem eine Aufnahme vorliegt und liefert somit die vollständige Information über das Verschiebungsfeld in der betrachteten Ebene. Daraus resultierend können die Deformationen in der betrachteten Ebene, welche in der Regel die Probenoberfläche darstellt, bestimmt werden.

Zur Erfassung aller drei Raumrichtungen muss dieses Prinzip erweitert werden.

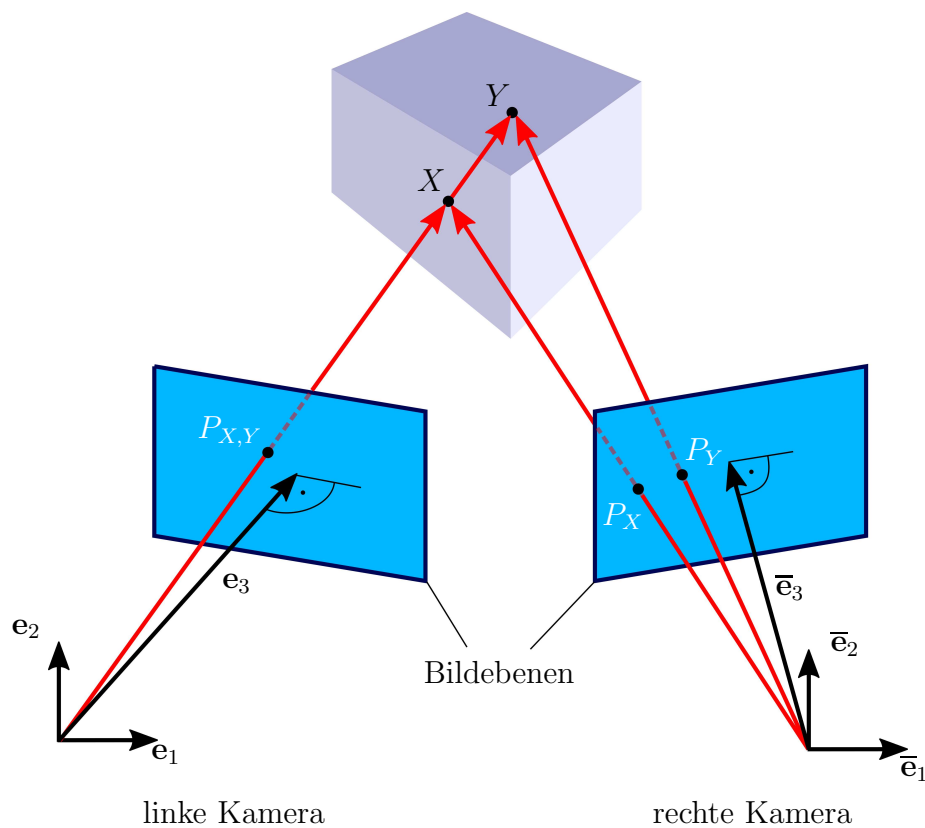


Abbildung 5.13: Schemadarstellung Stereoskopie.

Die Problematik bei der Auswertung mit einer Kamera in der bisher dargestellten Art und Weise lässt sich sehr gut anhand Abb. 5.13 erkennen. Eine einzelne Perspektive liefert nicht genügend Informationsgehalt für eine vollständige dreidimensionale Auswertung.

Für die linke Kamera in Abb. 5.13 werden die Punkte  $X$  und  $Y$  in ihrer Projektion auf die Bildebene der Kamera an der gleichen Position  $P_{X,Y}$  dargestellt. Diese Kamera kann die beiden Punkte somit in ihrer Lage nicht unterscheiden. Wird dementsprechend während eines Versuchs ein materieller Punkt entlang seines Projektionsvektors verschoben, wird die Bewegung somit bezüglich der jeweiligen Kamera nicht erfasst. Zusätzliche Informationen sind notwendig.

Für die rechte Kamera werden währenddessen aus einer weiteren Perspektive die beiden Punkte auf verschiedene Bildpunkte  $P_X$  und  $P_Y$  projiziert. Ebenso kann die Bewegung von  $X$  nach  $Y$  nachvollzogen werden.

Durch Überlagerung der Daten beider Perspektiven kann aus einer digitalen Bildkorrelation für beide Kameras ein dreidimensionales Verschiebungsfeld für die betrachtete Fläche ermittelt werden. Da beide Kameras jedoch die gleichen Punkte auf dem Objekt erfassen müssen, kann auf diese Art und Weise nur eine Oberfläche eines Probekörpers betrachtet werden.

Zur Vervollständigung der dreidimensionalen Auswertung wird im Rahmen dieser Arbeit die Korrelationssoftware *Istra 4D*<sup>®</sup> der Firma *Dantec Dynamics* eingesetzt. Die Bezeichnung „4D“ stellt keine vierte Dimension dar, sondern soll lediglich hervorheben, dass die Software eine tatsächliche dreidimensionale Auswertung eines Probekörpers unter Deformation erlaubt. „360°-3D-DIC“ ist eine treffende Bezeichnung der Möglichkeiten, die das Programm bietet.

Zur Umsetzung wird das vorgestellte Schema der Stereoskopie aus Abb. 5.13 um weitere Perspektiven, d. h. weitere Kameras, ergänzt. Für die Experimente am EPDM werden, wie in Abb. 5.14 gezeigt, bei der Zugprobe die Vorderseite und die Rückseite jeweils mit zwei Kameras erfasst und die soeben vorgestellten Verfahren werden angewandt. Für komplexere Geometrien und sehr detaillierte Auswertungen ist die Erweiterung auf bis zu 16 Kameras möglich, um die komplette Rundumsicht zu erlangen.



Abbildung 5.14: Anordnung des 4-Kamera-Systems mit der Probe im Zentrum.

Grundvoraussetzung bei der Anwendung der Methodik ist die genaue Kenntnis der Positionierung und Ausrichtung der Kameras im Aufbau. Aufgrund dessen ist eine sorgfältige Kalibrierung des Kamerasystems vor Versuchsbeginn notwendig. Während für ein 2-Kamera-System noch eine mit einem Schachbrettmuster einseitig bedruckte Keramikplatte genutzt werden kann, ist für eine „4D“-Messung mit einem 4-Kamera-System eine simultane Kalibrierung für die vorderseitigen und rückseitigen Kameras notwendig (siehe Abb. 5.15, oben). Das Kalibriermuster ist hochgenau vermessen. Für das 4-Kamera-System wird zur Ermittlung der Orientierung der Kameras eine mit diesem Muster beidseitig bedruckte Glasplatte eingesetzt, deren Dicke ebenso präzise vermessen ist. Die Abmaße der Kalibrierplatten und des Kalibrierusters sind in der Software hinterlegt.

Für eine hochgenaue Kalibrierung muss neben der exakten Kenntnis der Geome-



trie des Kalibrieramusters eine zeitlich synchrone Aufnahme der Bilder bei allen Kameras gewährleistet werden. Eine softwarebasierte Triggerung reicht in diesem Fall nicht aus. Alle Kameras werden daher synchron mit einem elektrischen Spannungssignal getriggert.

Da eine Einzelaufnahme noch nicht genügend Information für den Kalibrieralgorithmus bietet, wird die Kalibrierplatte im Bildbereich in verschiedene Ausrichtungen geschwenkt und bezüglich dieser Zustände für alle vier Kameras eine Aufnahme getätigt. Diese variierenden Positionen im Zusammenspiel mit dem bekannten Muster liefern schließlich die Orientierung und Positionierung des Gesamtsystems als Grundlage für die stereoskopische Auswertung.

Bei einer vollständigen Versuchsdurchführung resultiert daraus eine hinreichend große Menge an notwendigen Daten. Für alle Kameras müssen neben den Kalibrierbildern zunächst eine Referenzaufnahme der undeformierten Probe sowie in ausreichender zeitlicher Auflösung die Bilder der deformierten Zustände vorliegen. Im Hinblick auf eine erfolgreiche digitale Bildkorrelation sollten die Dehnungsschritte zwischen den Einzelzuständen nicht zu groß sein, da dies die Detektion des Musters erschwert. Eine Übersicht über die Datenaufzeichnung liefert Abb. 5.15.

Beim uniaxialen Zugversuch ergibt sich auf der vorderen und hinteren Oberfläche der Probe für alle vier Kameras eine Dehnungsverteilung, wie in Abb. 5.16 zu se-

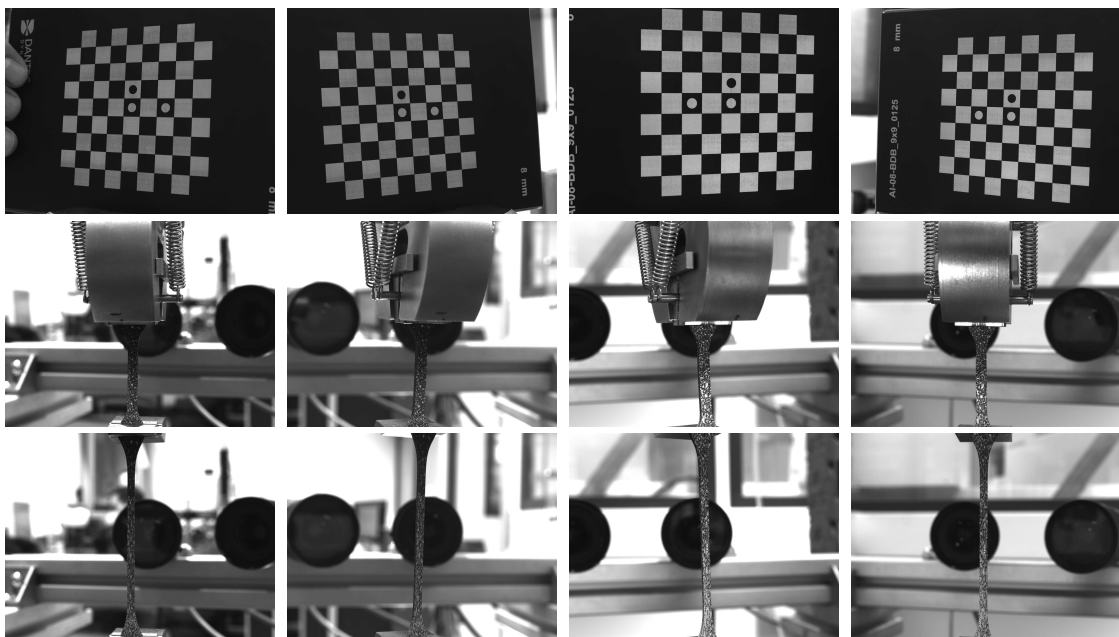


Abbildung 5.15: Datenerfassung für die digitale Bildkorrelation:  
oben: Kalibrierung; Mitte: Referenzzustand; unten: deformierte Probe.

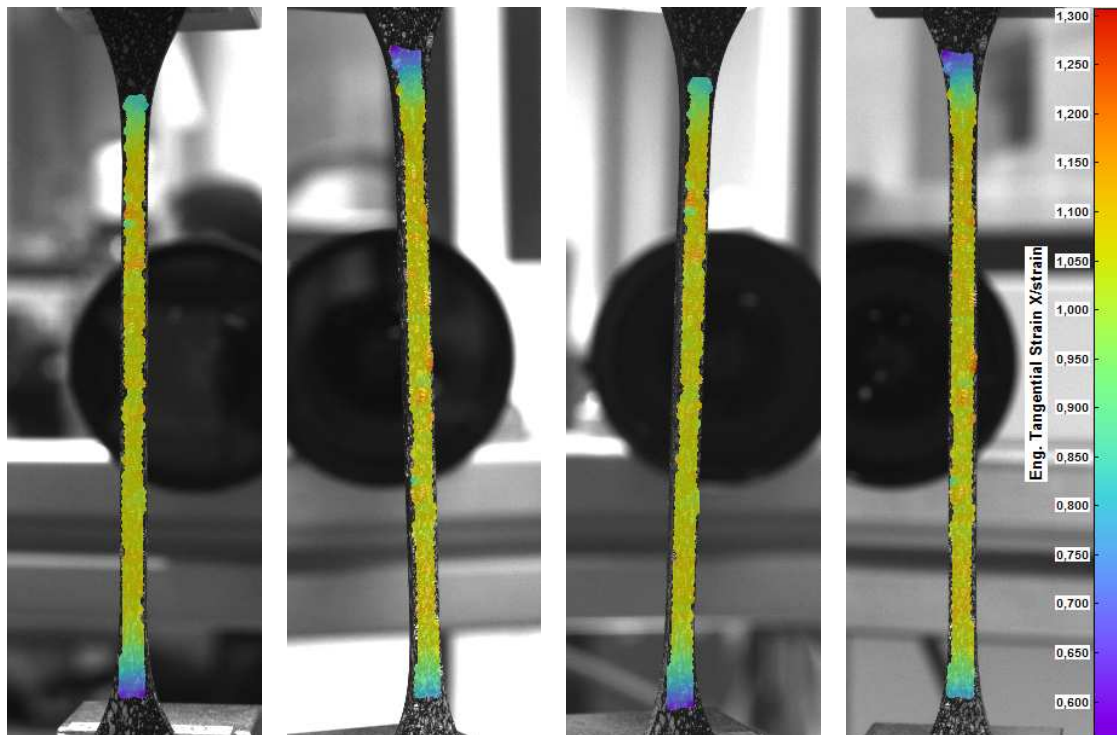


Abbildung 5.16: Ausgewertete DIC für die Ingenieurstressdehnung in Zugrichtung  
 Bild 1 & 2: Vorderseite der Probe  
 Bild 3 & 4: Rückseite der Probe.

hen ist. Die Auswertung der gewonnenen Daten erfolgt auch bei der DIC für den mittleren Bereich des Probensteges.

Zu Statistikzwecken wird bei der Ermittlung der Daten in diesem Bereich über mehrere Datenpunkte gemittelt. Für die beiden Oberflächen stehen dafür in *Istra 4D*<sup>®</sup> Funktionen zur Verfügung, die über alle Punkte eines ausgewählten Datenbereichs eine Mittelwertbildung durchführen. Diese Funktion liefert die Dehnungen in Zugrichtung und senkrecht dazu auf der Probenoberfläche.

Für die Dickenrichtung steht keine statistische Auswertefunktion über einen Bereich zur Verfügung. Daher wird zur Vermeidung von einzelnen Ausreißern eine manuelle Mittelwertbildung durchgeführt. Diesbezüglich wird auf einer Seite der Probe ein Auswertepunkt definiert, ein sogenannter *Gauge*-Punkt. Auf Basis der Kalibrierung findet die Software den entsprechenden Punkt auf der gegenüberliegenden Seite. Über den Abstand der beiden Punkte kann schließlich auf die Deformation rückgerechnet werden. Zur Mittelung für die Tiefeninformation werden mehrere solcher Punkte definiert. Eine direkte Schnittstelle zur numerischen Mathematiksoftware *SciLab*<sup>®</sup> ermöglicht die Statistikbildung. Abb. 5.17 zeigt die relevanten Datenbereiche für die verschiedenen Raumrichtungen. Außerdem zeigt diese Darstellung in der Zusammenfassung aller vier Kameraansichten als 3D-Sicht

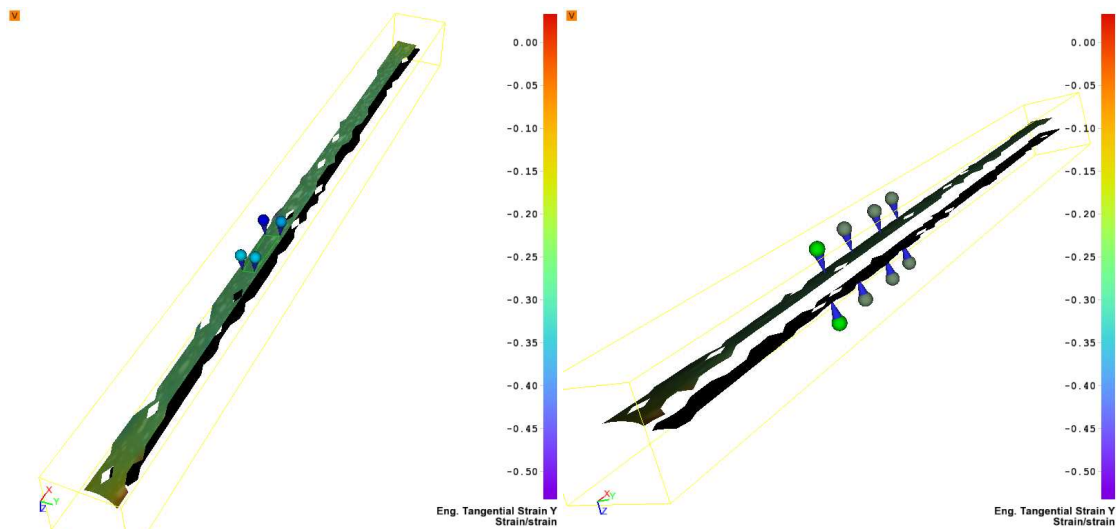


Abbildung 5.17: links: Auswertung der Deformationsmaße über einen definierten Bereich auf der Probenoberfläche.  
rechts: Auswertung der Tiefeninformation an mehreren Punkten.

sehr anschaulich die Möglichkeiten der digitalen Bildkorrelation.

Bezüglich der Auswertung der so ermittelten Daten muss zudem gewährleistet werden, dass vom jeweiligen Versuchsstand das passende Kraftsignal für die selben Zeitpunkte vorliegt, zu denen die Bilder aufgenommen werden. Zu diesem Zweck ist zu empfehlen, das elektrische Triggersignal mit einem Ereignis der Versuchsführung zu koppeln. In den Experimenten dieser Arbeit wird das Triggersignal mit dem Erreichen einer bestimmten Position der Prüfmaschine gekoppelt. Beispielsweise kann bei einer linearen Belastung eine Datenaufzeichnung pro 0,1 mm-Schritt stattfinden.

Auf Basis der vorgestellten Konzepte sollen im Vorfeld einige Vorversuche durchgeführt werden, die zum einen ein Grundverständnis für gewisse Materialeigenschaften schaffen sollen und zum anderen die Auswertung für die weiteren Versuche dieser Arbeit vereinfachen.

Aufgrund der amorphen Struktur von Elastomeren wird für die grundlegende Charakteristik des Materialverhaltens Isotropie bei gleichzeitiger Inkompressibilität erwartet. Die dreidimensionale optische Dehnungsmessung mittels digitaler Bildkorrelation ermöglicht eine zuverlässige Auswertung dieser Eigenschaften.

In einem ersten Schritt wird die Isotropieannahme geprüft, d. h. es muss beim uniaxialen Zugversuch nachgewiesen werden, dass die Deformationen in den beiden zur Zugrichtung senkrecht stehenden Querrichtungen identisch sind. Zu diesem Zweck wird die Probe in Stufen von 0,1 mm Maschinenweg bis zu einem Maximum von 50 mm gezogen. Dies entspricht beim genutzten Aufbau einer Dehnung von

ca. 125 %. An jeder Stufe wird ein Triggersignal an die Kameras gesendet, und anschließend werden die Bilder mit der digitalen Bildkorrelation ausgewertet. Ein Vergleich der Ingenieursdehnungen  $\varepsilon_2 = \Delta b/b_0$  und  $\varepsilon_3 = \Delta d/d_0$  bezüglich der Geometrie in Abb. 5.11, als Verhältnis von Längenänderung und Ausgangslänge in der jeweiligen Richtung zeigt eine gute Übereinstimmung (siehe Abb. 5.18).

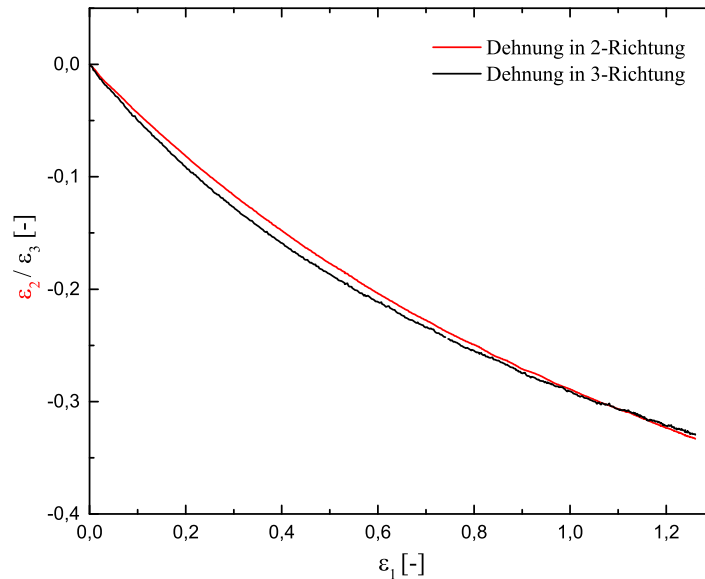


Abbildung 5.18: Vergleich der Dehnungen  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  zur Überprüfung der Isotropieannahme

Anschließend wird überprüft, ob zudem von inkompressiblem Materialverhalten ausgegangen werden kann. Die Inkompressibilitätsnebenbedingung

$$\det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \stackrel{!}{=} 1 \quad (5.3)$$

resultiert mit der gezeigten Isotropiebedingung in

$$\det \mathbf{F} = \lambda_1 \lambda_2^2 \stackrel{!}{=} 1, \quad (5.4)$$

wobei die 1-Richtung weiterhin die Zugrichtung repräsentiert. Der Zusammenhang der Dehnungen  $\varepsilon_i$ , die *Istra 4D*<sup>®</sup> ausgibt, mit den Streckungsmaßen  $\lambda_i$  ist durch

$$\lambda_i = 1 + \varepsilon_i \quad (5.5)$$

gegeben. Zur Kontrolle der Annahme inkompressiblen Verhaltens wird der selbe Versuch genutzt wie bereits bei der Isotropieüberprüfung. Diagramm 5.19 zeigt

die Determinante des Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  aufgetragen über der Dehnung in Zugrichtung. Es lässt sich zwar die Tendenz einer Volumenvergrößerung bei steigender Streckung in Zugrichtung erkennen, bis zu einer Dehnung von 100% weicht das Volumen allerdings weniger als ein Prozent vom Ausgangsvolumen ab. Daher wird für die folgenden Betrachtungen von quasi-inkompressiblem Materialverhalten ausgegangen.

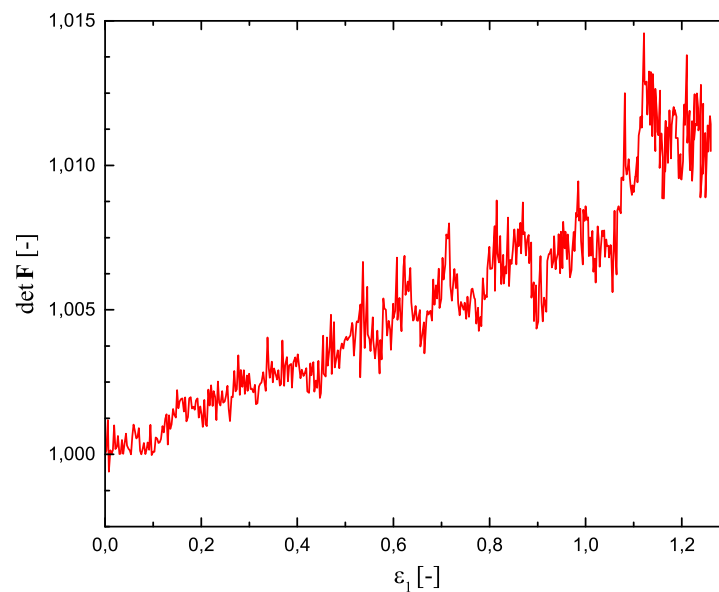


Abbildung 5.19: Überprüfung der Inkompressibilitätsnebenbedingung.

Da sich die Querdehnungen mit den bisher überprüften Materialcharakteristika unmittelbar aus dem Dehnungsmaß in der Zugrichtung ermitteln lassen, soll zu Gunsten einer effizienteren Versuchsführung bei den folgenden Experimenten die Auswertung auf die Zugrichtung beschränkt werden.

Mit der Kenntnis dieser grundlegenden Materialeigenschaften wird ein direkter Zusammenhang zwischen Maschinenweg und Streckung geprüft. Zu diesem Zweck werden die Anfangsbedingungen klar definiert. Der Probekörper muss stets die selbe Geometrie aufweisen. Da die Prüflinge mit einem Stanzmesser gemäß der Geometrie nach DIN EN ISO 527-2 Typ:5A (vgl. Abb. 5.7) aus dem Dichtkörper herausgestanzt werden, wird diese Bedingung erfüllt. Des Weiteren muss für eine reproduzierbare Messung gewährleistet werden, dass die Probe bei jedem Versuch identisch eingespannt wird. Im Hinblick darauf werden zum einen seitliche Führungen in die Einspannungen gefräst, so dass der Zugstab gerade ausgerichtet ist. Zum anderen wird ein klar definierter Endanschlag bei den Einspannungen vorgesehen. Somit wird der Probekörper an beiden Enden 12,5 mm tief eingespannt. Die

so definierte Konfiguration wird für alle zukünftigen Experimente beibehalten. Für diese Prüfbedingungen wird mit Hilfe der optischen Dehnungsmessung gezeigt, dass ein linearer Zusammenhang zwischen Traversenposition  $u$  und Streckung  $\lambda_1$  in Zugrichtung, gemäß

$$\lambda_1 = 1 + 0,0273 u \quad (5.6)$$

die Deformation abbildet, wie in Abb. 5.20 dargestellt. Daher kann zu Gunsten einer effizienteren Versuchsführung für die folgenden Experimente auf die optische Auswertemethodik verzichtet werden. Aus dem Maschinenweg wird auf die Streckungen in allen drei Dimensionen rückgeschlossen, wobei sich auf Basis der Isotropie und Inkompressibilität zwischen den Raumrichtungen der Zusammenhang

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad (5.7)$$

ergibt.

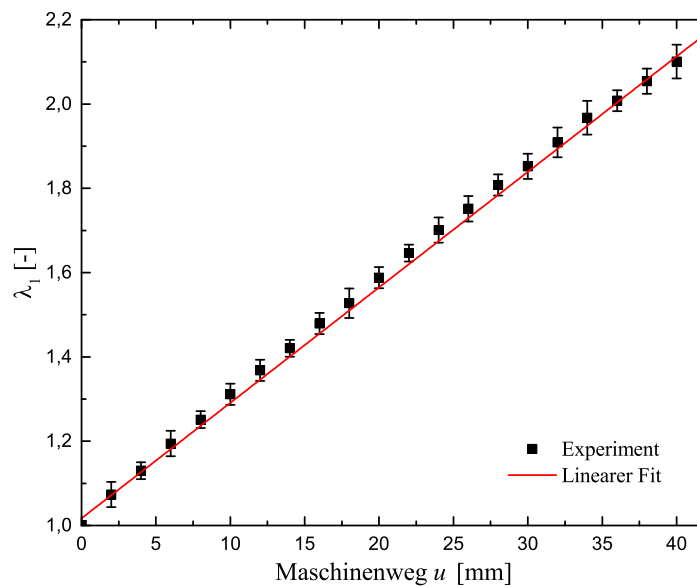


Abbildung 5.20: Zusammenhang zwischen Traversenposition  $u$  und Streckung  $\lambda_1$ .

Da finite Deformationen im Rahmen der Untersuchungen von Interesse sind, wird als entsprechendes Spannungsmaß die Cauchy-Spannung  $\mathbf{T}$  gewählt, wobei sich die Spannung in Zugrichtung mit

$$T_{11} = \frac{F}{A}, \quad (5.8)$$

als Quotient der gemessenen Kraft  $F$  bezogen auf den aktuellen Probenquerschnitt  $A$  ergibt. Die aktuelle Bezugsfläche  $A$  wiederum ergibt sich aus den aktuellen

Deformationsmaßen und der Ausgangsfläche  $A_0$ . Es gilt

$$A = A_0 \lambda_2 \lambda_3 \quad (5.9)$$

und mit der Isotropieannahme und der Inkompressibilität folgt mit Gl. (5.7)

$$A = A_0 \frac{1}{\lambda_1}. \quad (5.10)$$

Im Rahmen der Untersuchungen dieser Dissertation wird unter anderem der Payne-Effekt betrachtet. Hinsichtlich der notwendigen Experimente mit einer dynamischen, zyklischen Belastung ist der *Linos LT 200 ST*<sup>®</sup> aus Abb. 5.8 aufgrund seines Spindeltriebs ungeeignet. Für die zyklischen Untersuchungen kann daher zum einen der Prüfstand *Instron ElectroPuls E10000 Linear-Torsion*<sup>®</sup> eingesetzt werden. Zum anderen wurde speziell für diese Versuche ein eigenständiges Konzept entwickelt. Mit Hilfe eines variablen Exzenters wird, gemäß der Prinzipdarstellung in Abb. 5.21, eine rotatorische Bewegung in eine Linearbewegung umgewandelt.

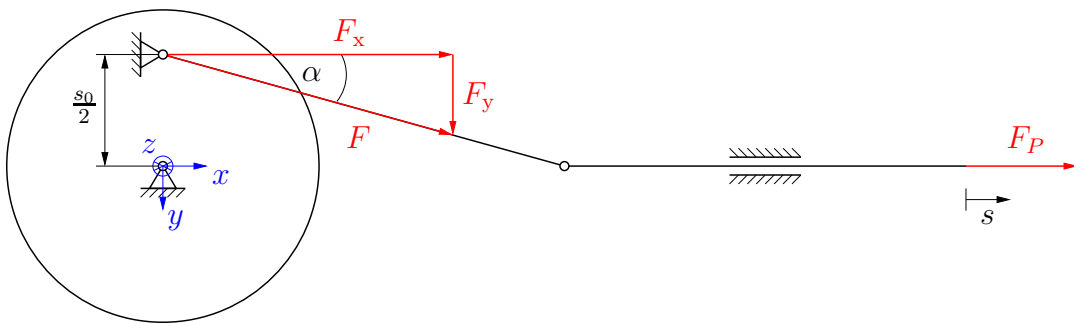


Abbildung 5.21: Konzept des zyklischen Zugversuchs [154].

Basierend auf diesem Konzept entstand der Versuchsstand, wie in Abb. 5.22 dargestellt [154]. Für die Einspannung der Probe werden ebenso die selben Randbedingungen wie bereits zuvor erläutert genutzt, so dass die Auswertung der Dehnungen ebenfalls unmittelbar über die Linearposition erfolgt. Der Zusammenhang der beiden Maße entspricht aufgrund des identischen Einbaus des Probekörpers Gl. (5.6). Die dynamische Amplitude  $s_0/2$  kann über den am Schrittmotor montierten Exzenter eingestellt werden. Diese liegt in der Größenordnung von bis zu  $\pm 15\%$  Dehnung. Auf der Gegenseite der Probe kann manuell über einen Linearpositioniertisch eine statische Vordeformation bis zu  $100\%$  aufgebracht werden. Bei einer dynamischen Amplitude unterhalb  $\pm 5\%$  Dehnung sind Belastungsfrequenzen bis  $25\text{ Hz}$  möglich. Für größere Amplituden reduziert sich die Dynamik aufgrund des

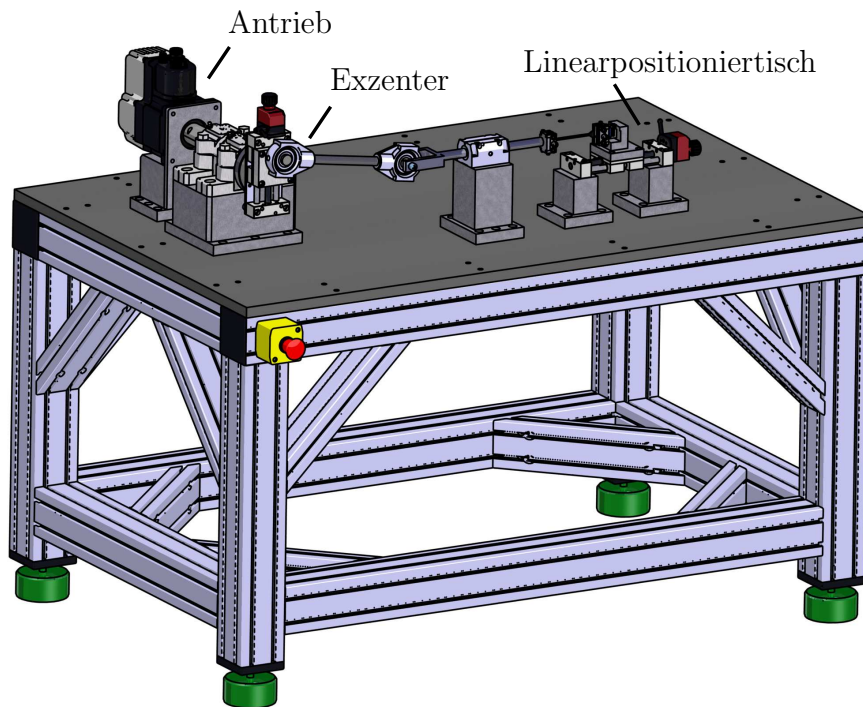


Abbildung 5.22: Zyklischer Versuchsstand [154].

höheren Massenträgheitsmoments am Exzenter. Das maximale Drehmoment des Antriebs wird erreicht.

Die vorgestellten Konzepte dienen der Erstellung einer hinreichenden Datenbasis zur Entwicklung des Materialmodells in dieser Arbeit. Dabei ist zu erwähnen, dass sämtliche Versuche bei Raumtemperatur durchgeführt werden.



# 6

---

## Experimente & Modellbildung

---

Das folgende Kapitel soll die Modellbildung zur Beschreibung des vorliegenden gefüllten EPDM beschreiben. Da das Modell rein phänomenologisch entsteht, bilden die Experimente die Grundlage in der Entwicklung des Modells. Auf Basis der beobachteten Effekte in den einzelnen Versuchen zur Repräsentation des Materialverhaltens werden die wesentlichen Punkte, die das Materialmodell beinhalten muss, Schritt für Schritt herausgearbeitet.

### 6.1 Mullins-Effekt

Zu Beginn der Versuchsreihe ist unmittelbar der sogenannte Mullins-Effekt auszumachen, der einen für gefüllte Elastomere charakteristischen Entfestigungseffekt darstellt. Wie bereits im Stand der Forschung erwähnt, wird bei der Definition des Mullins-Effekts in dieser Arbeit die Interpretation von Bueche [23] geteilt. Im Sinne seiner Erläuterungen werden nur die irreversiblen Anteile der Entfestigung bei Erstbelastung unter dem Begriff Mullins-Effekt zusammengefasst. Dabei gibt es lediglich eine Abhängigkeit von der bisherigen maximalen Deformation in der Belastungsgeschichte. Das wiederum heißt, dass bei einer Belastung über das bis-

herige Deformationsmaximum der Mullins-Effekt wieder zum Tragen kommt.

Für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass das Material bereits beim Einbau oder bei erster Benutzung bis zu seinem Maximum deformiert wird. Da in der Regel das Materialverhalten im tatsächlichen Gebrauch von Interesse ist, soll zunächst geprüft werden, in welcher Art und Weise diese Erstbelastung und die damit verbundenen Entfestigungseffekte aus der Modellbeschreibung eliminiert werden können.

Zu diesem Zweck wird ein Vergleich zwischen dem Material unter Erstbelastung und zu einem späteren Zeitpunkt angestrebt. Zuvor unbelastetes, „jungfräuliches“ Probenmaterial wird daher in zehn Zyklen mit einer konstanten Dehnrates von  $0,0273\text{ s}^{-1}$  von der undeformierten Lage bis zu einem Maximum von 110% belastet. Die Wahl fällt auf dieses Dehnungsmaximum, da es auch in den folgenden Experimenten im Hinblick auf die Modellbildung nicht überschritten wird. Es ist ein deutlicher Spannungsabfall nach dem ersten Belastungszyklus erkennbar (siehe Abb. 6.1). In den Folgezyklen stabilisiert sich die Hysterese sowohl in ihrer Form als auch in ihrer Lage.

Für die selben Proben soll der identische Versuchsablauf nach Ablauf von acht Tagen analysiert und die Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge verglichen werden. Im Hinblick darauf ruht das Material nach der Erstbelastung zunächst für die angesprochenen acht Tage. In dieser Zeit können Erholungs- und Relaxationsvorgänge vonstatten gehen. Im Anschluss wird das selbe Probenmaterial abermals der bereits beschriebenen zyklischen Belastung unterzogen. Abb. 6.1 zeigt den Vergleich der Erstbelastung mit dem Experiment nach acht Tagen. Die Differenz zwischen dem jeweils ersten Belastungszyklus bei den beiden Versuchsdurchläufen ist deutlich sichtbar. Des Weiteren stimmen die letzten Hysteresen überein, wobei auch bei dem späteren Durchlauf des Experiments weiterhin ein Abfall zwischen erstem Belastungszyklus und den folgenden Zyklen vorhanden ist, bis sich schließlich die Lage der Hysterese stabilisiert. Dieses Verhalten zwischen dem ersten und den daran anschließenden Zyklen deutet auf viskoelastische Ursachen hin. Daher wird für eine klare Separation der irreversiblen Entfestigungsanteile in Form des Mullins-Effekts über die bereits durchgeführten Experimente hinaus ein weiterer Vergleich zu einer Folgebeltung nach einem Tag angestellt.

Die Resultate der Belastungen nach einem Tag und nach acht Tagen stimmen, wie Abb. 6.2 zeigt, nahezu überein. Der erste Belastungspfad beim Experiment nach einer Woche liegt allerdings leicht oberhalb desjenigen nach nur einem Tag. Hinsichtlich der weiteren Überlegungen bezüglich der viskoelastischen Charakterisierung deutet dies bereits darauf hin, dass Relaxationsprozesse in der zeitlichen

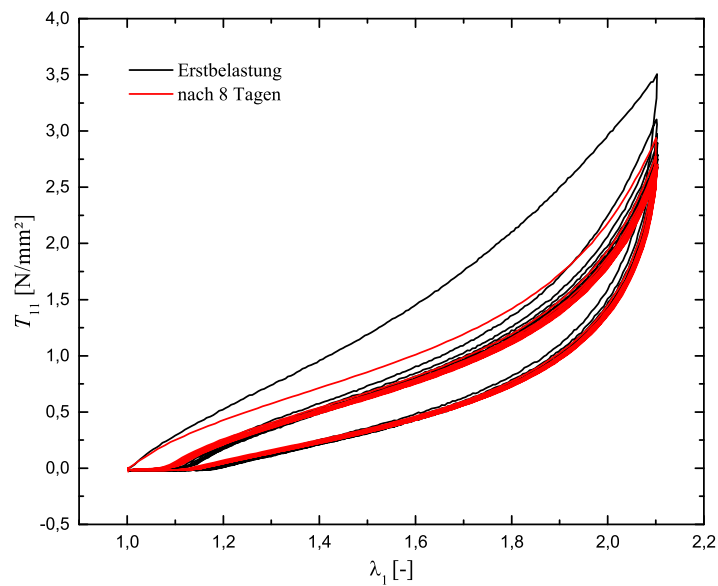


Abbildung 6.1: Untersuchung des Mullins-Effekts: Vergleich zwischen Erstbelastung und dem Experiment nach acht Tagen.

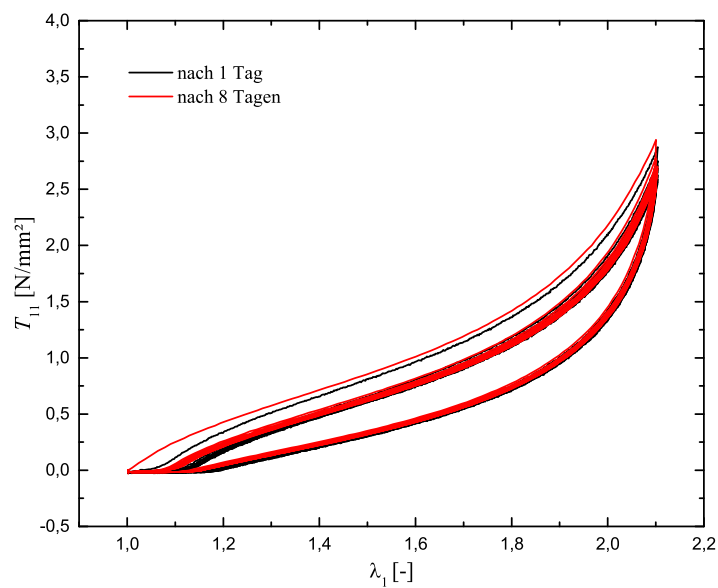


Abbildung 6.2: Untersuchung des Mullins-Effekts: Vergleich der Resultate einen Tag und 8 Tage nach der Erstbelastung.

Größenordnung von einer Woche sichtbaren Einfluss auf die Materialantwort haben und daher im Modellgedanken Berücksichtigung finden müssen.

Hinsichtlich der Interpretation der in den Vorversuchen zum Mullins-Effekt beobachteten Phänomene werden die Überlegungen von Fleck et al. [41], Lorenz et al.

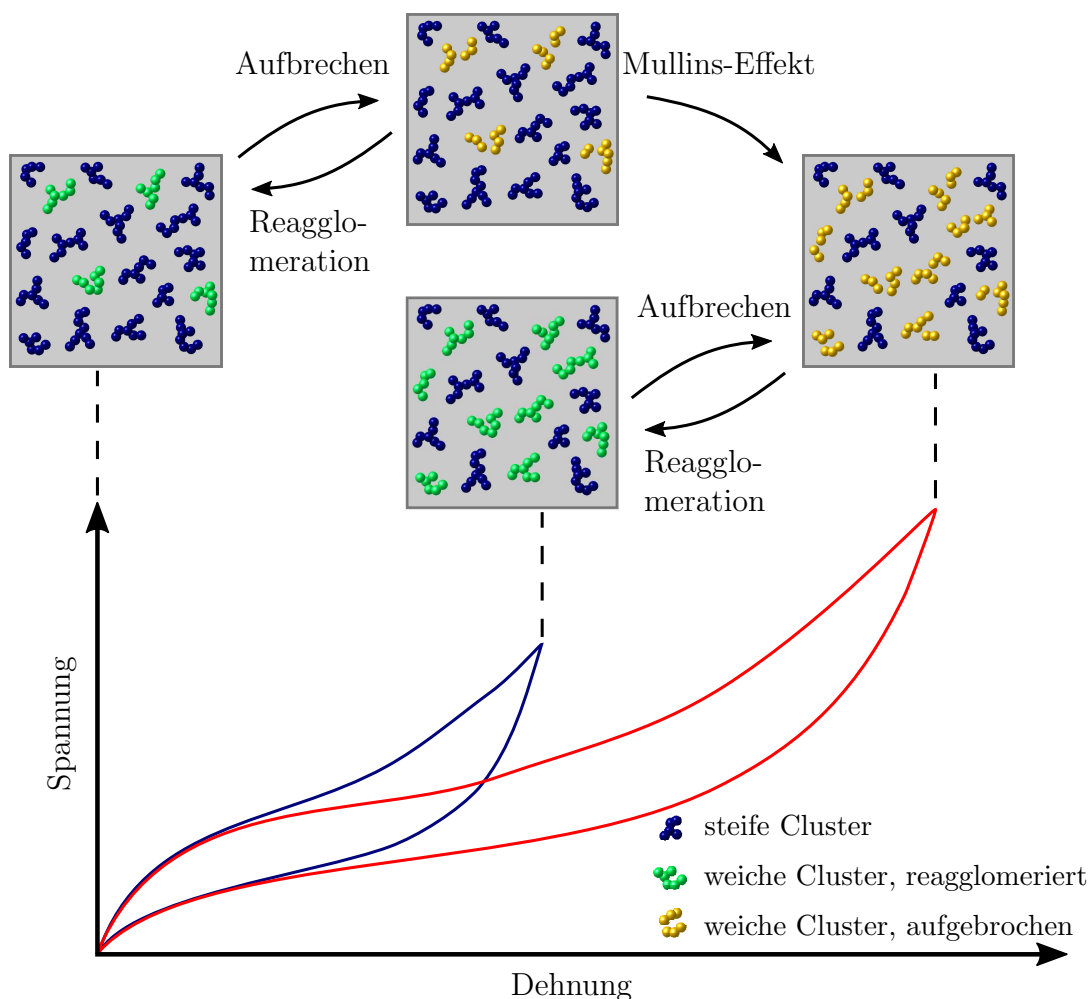


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung der Füller-Füller-Interaktion unter Last (in Anlehnung an Fleck et al. [41], Lorenz et al. [113, 114] bzw. Raghunath et al. [137]).

[113, 114] bzw. Raghunath et al. [137] aufgegriffen. Die in Kapitel 5.1 beschriebene Grundstruktur von Elastomeren begünstigt bereits durch das komplexe Aneinandervorbeigleiten der Makromolekülketten unter Last viskoelastisches Verhalten. Fleck et al. [41], Lorenz et al. [113, 114] sowie Raghunath et al. [137] allerdings sehen in ihren Arbeiten die wesentlichen Ursachen der ausgeprägten Viskoelastizität und der Entfestigungseffekte in der Interaktion der Füllerpartikel innerhalb der Agglomerate. Eine Aufteilung in die verschiedenen Mechanismen, welche zur klaren Trennung der Effekte auch in dieser Arbeit verwendet werden, kann anschaulich anhand Abb. 6.3 erfolgen.

Wird ein gefülltes Elastomer unterhalb seiner bisher maximalen Deformation belastet, brechen schwache Agglomerate, deren Verbindung auf physikalisch-chemischen Wechselwirkungen beruht, in kleine Teile auf. Bei Rußen stellen van der Waals-

Kräfte in der Regel die schwachen physikalischen Bindungen her, die sich unter Last auftrennen. Eine anschließende Entlastung erlaubt wiederum, dass sich die Bindungen neu aufbauen. Die Füllercluster reagglomerieren.

Die beschriebenen Vorgänge haben mehrere Materialeigenschaften zur Folge. Die dafür notwendige Energie sowie das Aneinandervorbeigleiten der Füllerpartikel nach dem Auseinanderbrechen der Agglomerate äußern sich in Form einer ausgeprägten Hysterese, welche bei einer zyklischen Belastung auftritt. Dabei muss sich zunächst ein physikalisches Gleichgewicht zwischen Aufbrechen der Agglomerate in der Belastungsphase und Reagglomeration in der Entlastungsphase bilden. Dies begründet die abfallende Hysterese innerhalb der ersten Zyklen bis sich schließlich ein stabiler Gleichgewichtszustand einstellt.

Die Amplitude der zyklischen Belastung stellt ein Maß für die Anzahl an aufgebrochenen, weichen Clustern dar. Eine Erhöhung der dynamischen Amplitude führt zu einer größeren Zahl aufgebrochener Agglomerate, die wiederum reagglomerieren können. Diese Amplitudenabhängigkeit wird im Verlauf der folgenden Ausarbeitungen unter dem Begriff Payne-Effekt später aufgegriffen.

Bei einer Belastung über die bisher maximale Deformation hinaus brechen des Weiteren die Polymerbrücken zwischen den Füllerpartikeln innerhalb der steifen Aggregate. Eine irreversible Entfestigung der betroffenen Füllercluster und somit auch des Gesamtverbunds aus Elastomermatrix und Füllern ist die Folge. Zur definierten Separierung der auftretenden Effekte wird nur der irreversible Anteil der Entfestigungsprozesse unter dem Namen Mullins-Effekt zusammengefasst. Für jungfräuliches Probenmaterial liegt die maximale Anzahl an steifen Füllerclustern vor. Je höher die maximale Deformation erfolgt, desto mehr Polymerbrücken können aufbrechen und desto stärker äußert sich der Effekt. Mit der auf diese Weise interpretierten Definition hängt der Mullins-Effekt nur von der bisher maximal aufgetragenen Deformation ab.

Da die Beschreibung des Mullins-Effekt nicht Bestandteil der Modellbildung in der vorliegenden Arbeit ist, muss gewährleistet werden, dass er für alle, die Materialbeschreibung betreffenden Versuche eliminiert wird. Entsprechend wird zu Beginn eine zyklische Deformation mit zehn Belastungszyklen bis zu einer Deformation von 110 % aufgebracht. Diese Dehnung wird in den folgenden Versuchen dann nicht mehr überschritten.

Hinsichtlich einer guten Reproduzierbarkeit muss zudem die zeitliche Abfolge der Versuche strukturiert erfolgen. Abb. 6.2 zeigt, dass zeitabhängige Effekte in der Größenordnung von einer Woche sichtbar vorhanden sind, wie am Unterschied zwischen den jeweils ersten Belastungspfaden beim Versuch nach einem Tag und

nach acht Tagen zu erkennen ist. Da bereits für diese Zeitskala der Unterschied sichtbar aber zugleich auch sehr gering ist, wird eine Ruhephase des Materials vor dem eigentlichen Versuch von einer Woche gewährleistet.

Den Mullins-Effekt betreffend wird daher das Probenmaterial wie beschrieben vorkonditioniert und kann im Anschluss für eine Woche relaxieren, bevor die eigentlichen Versuche durchgeführt werden.

## 6.2 Grundelastizität

Bezug nehmend auf die beschriebene komplexe Struktur des rußgefüllten EPDM und auf Basis der ersten Vorversuche hinsichtlich des Mullins-Effekts ist eindeutig zu vermuten, dass das Materialverhalten stark vom Deformationsprozess abhängt. Eine ausgeprägte Ratenabhängigkeit kann erwartet werden. Die Struktur des Materials und die Interpretation der Interaktion der einzelnen Komponenten im vorangegangenen Kapitel deuten darauf hin, dass keine plastischen Effekte im klassischen Sinn auftreten. Die Füller-Füller-Interaktion nach der Eliminierung des Mullins-Effekts stellt eine reversible Entfestigung dar, während das Abgleiten der Kettenmoleküle zueinander zu ratenabhängigen Effekten führt. Typische Beispiele für ratenabhängiges Verhalten sind erhöhte Spannungen bei steigender Deformationsgeschwindigkeit und Spannungsrelaxationen bei konstant gehaltener Deformation. Die angesprochenen Phänomene klingen bei konstanten Bedingungen mit der Zeit ab. Basierend auf diesen Überlegungen wird die Modellentwicklung analog zu einer rein viskoelastischen Charakterisierung aufgebaut.

Entsprechend des rheologischen Modells in Abb. 4.1 aus Kap. 4.2 kann Viskoelastizität durch eine Überlagerung eines Gleichgewichtsanteils mit mehreren Anteilen, die die zeitabhängigen Prozesse abbilden, dargestellt werden. Der Gleichgewichtsanteil wird hierin in Form der einzelnen Gleichgewichtsfeder repräsentiert, während die zeitabhängigen Komponenten im Modell entsprechend durch die Maxwell-Elemente verkörpert werden (siehe Abb. 4.2).

Um das Materialverhalten auf einer phänomenologischen Basis effektiv beschreiben zu können, ist es sinnvoll den statischen Anteil der Materialantwort bei Belastung von den zeitabhängigen Anteilen zu separieren. Bezug nehmend auf Kap. 4.2 werden in der Modellbeschreibung gemäß Gl. (4.55) die Spannungsanteile ebenso klar getrennt. Eine getrennte Beschreibung der verschiedenen Phänomene ist daher zu empfehlen. Hinsichtlich der Experimente muss folglich eine dazu passende Daten-

basis bereitgestellt werden.

Daher wird im Folgenden zu Gunsten einer strukturierten Modellentwicklung zunächst das Augenmerk auf die Grundelastizität des Materials gelenkt. Zur Ermittlung dieses Gleichgewichtsanteils der Spannung gibt es mehrere typische experimentelle Methoden.

Da die Nichtgleichgewichtsanteile der Spannung erst bei einer gewissen Deformationsrate angeregt werden, kann ein zyklischer Versuch mit einer hinreichend langsamen Geschwindigkeit in der Regel die notwendige Information für die Beschreibung der Gleichgewichtsspannung liefern. Bezüglich des rheologischen Modells der Viskoelastizität in Abb. 4.1 würde dies bedeuten, dass in allen Maxwell-Elementen die Dämpfer der gesamten Deformation simultan folgen. In diesem Fall würde sich in den Nichtgleichgewichtsfedern keine Spannung aufbauen. Bei der Spannungsantwort in einem zyklischen Versuch, würde sich dies in der Art äußern, dass der Belastungspfad und der Entlastungspfad der Deformation vollständig aufeinander liegen.

Diesbezüglich wird ein Experiment mit einer Traversengeschwindigkeit von  $0,01 \text{ mm/s}$ , d. h. einer Dehnrates von  $0,00273 \text{ s}^{-1}$  durchgeführt. Geringere Geschwindigkeiten sind mit dem *Linos LT 200 ST*<sup>®</sup> nicht realisierbar. Der Spindeltrieb wird von einem Schrittmotor angetrieben. Geringere Geschwindigkeiten liegen bereits in der Größenordnung der Schrittteilung. Damit würde keine glatte Verschiebungsfunktion aufgebracht, die Einzelschritte wären als Sprünge in der Bewegung erkennbar.

Der Versuch zeigt, dass die Hysterese auch bei dieser langsamen Geschwindigkeit weiterhin vorhanden ist. Auf der Zeitskala, die durch die langsamste Maschinengeschwindigkeit vorgegeben wird, lassen sich plastische Effekte vermuten. Eine ausreichend lange Ruhephase des Probenmaterials im ausgespannten, spannungsfreien Zustand führt jedoch zur Ausgangsgeometrie. Nach einer ausreichenden Wartezeit verbleiben, wie vermutet, keine plastische Deformationen. Die Beschreibung der beobachteten Hysterese soll daher zunächst nicht in Form einer statischen Gleichgewichtshysterese, wie für plastische Materialien üblich, erfolgen. Unter Umständen schließt sich die Hystereseschleife bei einer weiteren deutlichen Reduzierung der Belastungsgeschwindigkeit noch komplett. Dies kann zum einen mit dem vorhandenen Prüfstand aufgrund der Geschwindigkeit nicht getestet werden. Zum anderen müssten für die daraus resultierenden, äußerst langen Versuchszeiten perfekte klimatische Bedingungen herrschen. Temperaturschwankungen müssten ausgeschlossen werden, was mit dem vorhandenen Aufbau derzeit nicht möglich ist. Ein weiterer Versuch, der der Ermittlung der Gleichgewichtsspannung dient, ist

der Relaxationsversuch. Wird ein Elastomer bis zu einer bestimmten Deformation gedehnt, und wird im Anschluss diese Dehnung über einen Zeitraum konstant gehalten, kann ein deutlicher Abfall in der gemessenen Kraft und somit auch in der Spannung beobachtet werden. Bei einem solchen Relaxationsprozess sind in der Regel eine Vielzahl von Maxwell-Elementen aktiv. Die Dämpferelemente können der Anfahrrampe auf die Enddeformation nicht folgen. Somit baut sich eine Spannung in den Nichtgleichgewichtsfedern auf. Bei konstant gehaltener Deformation folgen die Dämpfer allmählich der äußeren Belastung und entlasten somit die in Reihe geschaltete Feder des jeweiligen Maxwell-Elements. Sukzessive werden die Maxwell-Elemente spannungsfrei, beginnend mit dem Element mit der geringsten Viskosität. Schließlich wird ein Zustand ohne zeitabhängige Überspannungen, d. h. die Gleichgewichtsspannung, für die betrachtete Deformation erreicht. Das beschriebene Verhalten wird auch mit dem Begriff Spannungsrelaxation bezeichnet.

Da ein solcher Relaxationsversuch lediglich einen Punkt der Grundelastizität liefert, ist es notwendig den Versuch für eine hinreichende Anzahl an Dehnungsniveaus durchzuführen. Eine Interpolation durch die stationären Werte zum Ende jedes Relaxationsprozesses resultiert schließlich in der Grundelastizität. Die Ermittlung der Gesamtkurve kann anhand eines Probekörpers erfolgen, indem die Dehnungsstufen nacheinander angefahren werden und an jeder Stufe eine Haltezeit mit konstanter Deformation stattfindet. Ein solcher Versuch wird häufig auch als Treppenversuch bezeichnet. Der Ablauf ist schematisch in Abb. 6.4 dargestellt.

Wie das Diagramm bereits andeutet, ist es beim Abrastern der Dehnungen hinsichtlich der Ermittlung der Gleichgewichtsspannungen sinnvoll den Belastungs- und Entlastungspfad zu betrachten und jeweils einen Relaxationsvorgang durchzuführen. Der Prozess für den Entlastungspfad ist analog zu betrachten. Bezüglich der Maxwell-Elemente werden die Nichtgleichgewichtsfedern für diesen Fall allerdings auf Druck belastet. Somit relaxiert die Spannung von einem geringeren Wert nach oben hin zum Gleichgewichtswert.

Für den Belastungs- und Entlastungsast erfolgen daher an jeder Dehnungsstufe die Relaxationsprozesse in umgekehrter Art und Anweise. Die Annäherung an die stationäre Spannung erfolgt für die Belastung von größeren Werten und bei der Entlastung von geringeren Werten hin zum Gleichgewicht. Da die Grundelastizität nur von der aktuellen Deformation abhängt und nicht zeitabhängig ist, muss der Gleichgewichtswert für beide Pfade der selbe sein. Ein Vergleich der Spannungswerte nach dem Relaxationsprozess für beide Zustände ist daher ein Maß dafür,



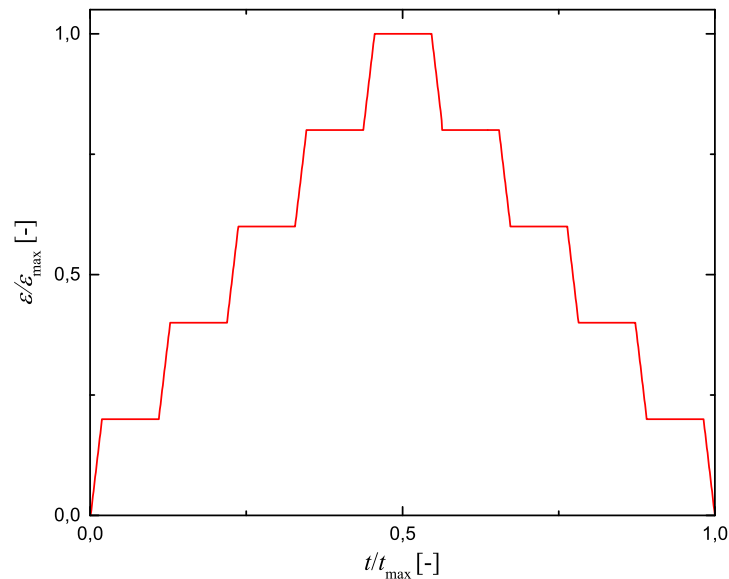


Abbildung 6.4: Ablauf Treppenversuch: Relaxation zu verschiedenen Dehnungsniveaus.

ob das Gleichgewicht tatsächlich durch die Haltezeit erreicht werden konnte.

Am Beispiel einer Dehnung von 60 % wird dieser Vergleich für das EPDM durchgeführt. Abb. 6.5 zeigt allerdings eine deutliche Differenz für die beiden Relaxationsvorgänge nach einer Haltezeit von einer halben Stunde pro Stufe im Treppenversuch. Obwohl es für jeden Relaxationsprozess gesondert betrachtet augenscheinlich so aussieht, als wäre bereits ein stationäres Spannungsplateau erreicht, zeigt die Differenz der beiden Endwerte nach 1800 s eindeutig auf, dass diese Methode nicht ausreichend für eine verlässliche Bestimmung der Grundelastizität ist.

Eine halblogarithmische Darstellung von Abb. 6.5 bezüglich der Zeit zeigt, dass das Relaxationsverhalten auf dem Belastungs- und Entlastungspfad unterschiedlich ist (siehe Abb. 6.6). Eine einfache Mittelwertbildung des Endwertes aus dem Versuch für den Entlastungs- und Belastungspfad zur Festlegung des Gleichgewichtsmaßes ist folglich nicht zuverlässig. Längere Versuche zum Schließen der Lücke zwischen den beiden Endwerten der Versuche sind aufgrund der bereits angesprochenen Problematik zudem schwierig realisierbar. Bei den langen Relaxationszeiten des Materials von mehreren Tagen oder mehr müssen Temperaturschwankungen über die Versuchsdauer ausgeschlossen werden. Der Unterschied zwischen den ersten Belastungszyklen in Abb. 6.2 zeigt jedoch bereits, dass Haltezeiten in der Größenordnung von einer Woche für die Ermittlung der Gleichgewichtsspannung angestrebt werden müssten, da Relaxationsverhalten zwischen einem und acht Tagen erkennbar ist.

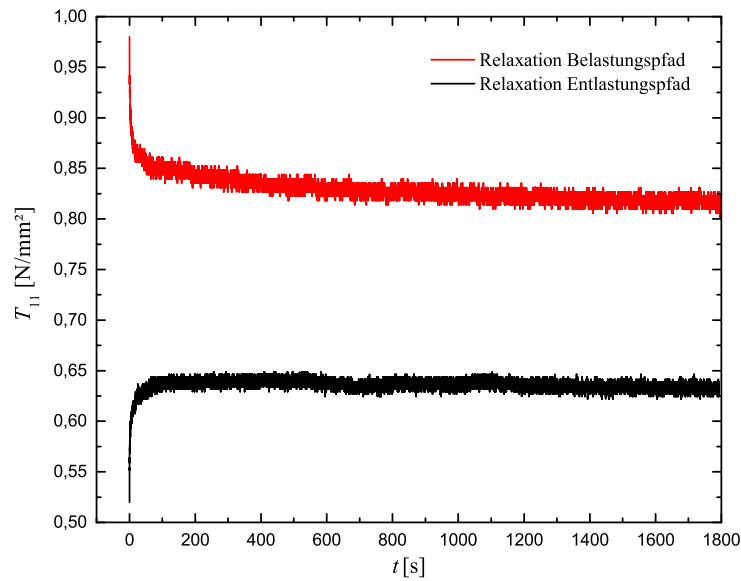


Abbildung 6.5: Vergleich eines Relaxationsversuchs auf dem Belastungs- und Entlastungspfad eines Treppenversuchs für die Deformation  $\varepsilon = 60\%$ .

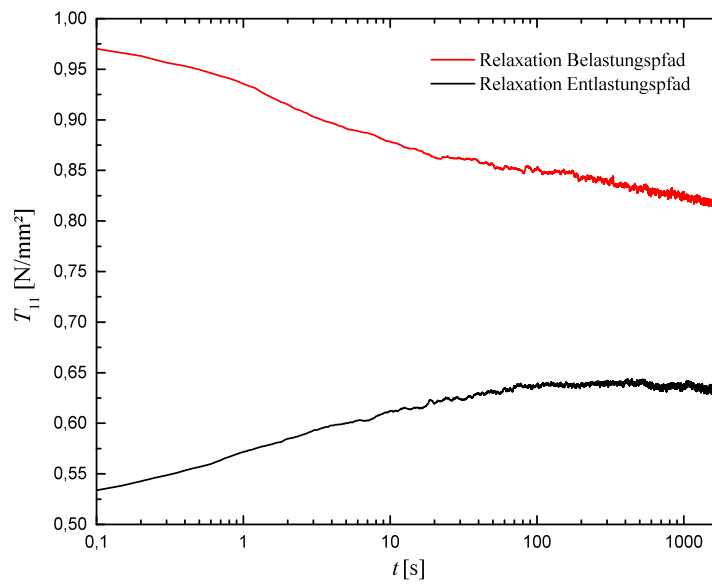


Abbildung 6.6: Halblogarithmische Darstellung des Relaxationsverhaltens für die Belastung und Entlastung.

Somit können die klassischen experimentellen Methoden zur Ermittlung der Grundelastizität nicht genutzt werden. Eine alternative Möglichkeit basiert auf den Beobachtungen, die bereits in den ersten Vorversuchen zum Mullins-Effekt gemacht werden konnten.

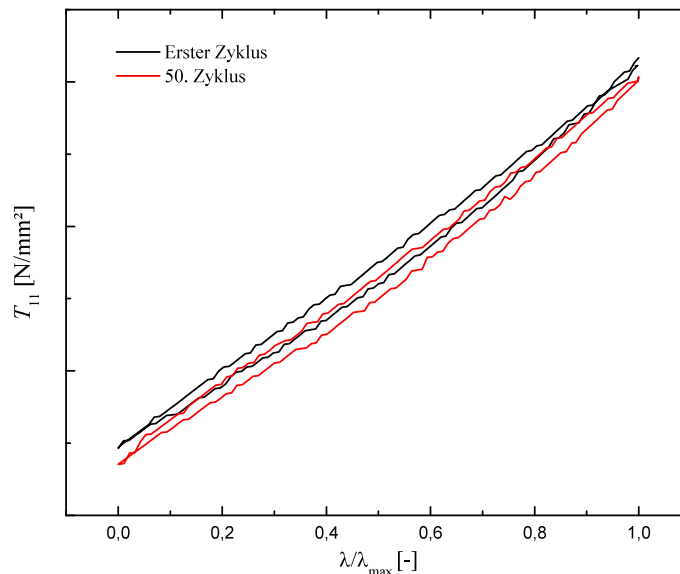


Abbildung 6.7: Abfallen der Hystereseseife bei zyklischer Belastung um eine Mitteldehnung, Vergleich zwischen erstem und fünfzigstem Belastungszyklus.

Bei einer zyklischen Belastung des Materials ist ein Abfallen der gesamten Hystereseschleife zu sehen, bis sich schließlich eine stationäre Hystereseschleife einstellt. Eine solche Belastung mit geringer Belastungsamplitude um eine Mitteldehnung herum zeigt ähnliches Verhalten. Die aufgrund des geringen Lastunterschieds verhältnismäßig kleinen Hystereseschleifen fallen mit jedem Zyklus bezüglich ihrer Lage nach unten ab. Abb. 6.7 zeigt für eine zyklische Belastung um eine Mitteldehnung den Vergleich der Hystereseseife für den ersten und fünfzigsten Belastungszyklus. Nach einer bestimmten Anzahl Zyklen lässt sich kein weiterer Abfall der Hysteresekurve ausmachen. Die Hystereseschleife wird stationär. Hinsichtlich der Ermittlung der Grundelastizität wird für die Mitteldehnung die mittlere Spannung aus Belastungs- und Entlastungspfad des letzten Belastungszyklus genommen.

Da zu diesem Zeitpunkt in der Modellentwicklung das exakte Materialverhalten noch nicht bekannt ist, werden für das Experiment zunächst auf Erfahrungsbasis Prozessparameter festgelegt. Neben einer Dehnungsamplitude von  $\pm 3\%$  wird eine Maschinengeschwindigkeit von  $\pm 1 \text{ mm/s}$  gewählt. Da die Hysteresekurve bereits nach 100 Zyklen keine sichtbare Änderung mehr zeigt, fällt die Wahl der Zyklenzahl unter Einbeziehung eines Sicherheitsfaktors auf 200. Die Wahl der Prozessparameter ist sehr wichtig für eine reproduzierbare und gleichzeitig effiziente Versuchsführung. Daher beschäftigt sich im späteren Verlauf dieser Arbeit noch ein gesondertes Kapitel mit der Optimierung der Prozessführung zur Erlangung der Grundelastizität.

Um den gesamten Verlauf der Gleichgewichtsspannung zu erhalten, wird eine maximale Deformation bei 40 mm Maschinenweg festgelegt, was in etwa einer Dehnung von 110 % entspricht. Diese 40 mm werden in 5 mm-Schritte unterteilt, um Information über den gesamten Deformationsbereich zu erhalten. Es lässt sich erkennen, dass sich ein *S*-Schlag ausbildet, der für Polymere typisch ist. Nach einer anfänglichen Erweichung bei steigender Deformation versteift das Material bei einer weiteren Steigerung der Dehnung wieder.

Im Rahmen dieser Arbeit wird, wie bereits in den Grundlagen im Kap. 4 vorgestellt, der polynomielle Reihenansatz gemäß Gl. (4.67) als Ansatz für die phänomenologische Beschreibung verfolgt.

Hinsichtlich der ermittelten Gestalt der Gleichgewichtskurve mit dem Krümmungswechsel bei steigender Dehnung muss ein Ansatz höherer Ordnung genutzt werden. Die Wahl fällt auf den Ansatz nach Yeoh [186, 187]

$$\rho_0 \psi_{eq} = c_{10} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3) + c_{20} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3)^2 + c_{30} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3)^3. \quad (6.1)$$

Hierin wird lediglich die erste Invariante betrachtet, allerdings bis zur dritten Ordnung, was die Linkskrümmung und den Krümmungswechsel im Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang abzubilden vermag. Ansätze, die auch die zweite Invariante nutzen, sind nur sinnvoll, wenn Daten aus mehraxialen Versuchen zur Verfügung stehen, vergleiche Johlitz & Diebels [76].

Da die Gleichgewichtsspannung als Grundlage für die folgende Einbeziehung der ratenabhängigen Anteile dienen soll, erfolgt die Parameteridentifikation losgelöst von den folgenden Versuchen. Dies wird durch die klare Separation von Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteilen ermöglicht. Aufgrund der vergleichsweise geringen Anzahl an Materialparametern und der Gleichgewichtskurve als einzigen Versuch kann die Ermittlung der Parameter in der Software *OriginPro*<sup>®</sup> erfolgen. Diesbezüglich ist im Vorfeld eine Reduktion der tensoriellen Formulierung auf den zugrunde gelegten uniaxialen Zugversuch notwendig.

Die Gleichgewichtsspannung  $\mathbf{T}_{eq}$  in der dreidimensionalen Formulierung folgt bezüglich des Yeoh-Ansatzes aus Gl. (6.1) zu

$$\mathbf{T}_{eq} = -\tilde{p}_{eq} \mathbf{I} + [2 c_{10} + 4 c_{20} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3) + 6 c_{30} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3)^2] \mathbf{B} \quad (6.2)$$

mit dem linken Cauchy-Green Deformationstensor für den uniaxialen Zug

$$\mathbf{B} \hat{=} \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{B_{11}}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{B_{11}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

wobei  $\lambda = l/l_0$  für die Streckung in Zugrichtung steht. Hierin sind bereits die Annahmen Isotropie und Inkompressibilität enthalten. Für den uniaxialen Zug baut sich lediglich in Zugrichtung eine Spannung auf. Die transversalen Querrichtungen sind spannungsfrei und somit ergibt sich

$$T_{22,eq} = T_{33,eq} = 0. \quad (6.4)$$

Anhand dieser zusätzlichen Randbedingung lässt sich der Lagrange-Multiplikator  $\tilde{p}_{eq}$  bestimmen zu

$$\tilde{p}_{eq} = [2c_{10} + 4c_{20}(\text{tr}(\mathbf{B}) - 3) + 6c_{30}(\text{tr}(\mathbf{B}) - 3)^2] B_{22}, \quad (6.5)$$

mit der Spur von  $\mathbf{B}$

$$\text{tr}(\mathbf{B}) = B_{11} + B_{22} + B_{33} = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}. \quad (6.6)$$

Damit folgt für die Gleichgewichtsspannung in Zugrichtung

$$\begin{aligned} T_{11,eq} &= [2c_{10} + 4c_{20}(\text{tr}(\mathbf{B}) - 3) + 6c_{30}(\text{tr}(\mathbf{B}) - 3)^2] (B_{11} - B_{22}) \\ &= \left[ 2c_{10} + 4c_{20} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 6c_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right] \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Dieser skalare Zusammenhang kann mit *OriginPro*<sup>®</sup> an die Spannungs-Dehnungs-Kurven angepasst werden. Die Formulierung in Abhängigkeit vom Streckungsmaß  $\lambda$  erfolgt, da die entsprechenden Werte unmittelbar aus dem Versuch bekannt sind. Der resultierende Parametersatz ist in Tabelle 6.1 dargestellt.

Für die Gleichgewichtskurve ergibt sich, wie in Abb. 6.8 gezeigt, eine sehr gute Übereinstimmung von Experiment und Materialmodell auf Basis des Yeoh-Ansatzes.

Der Parameter  $c_{20}$  muss für den vorliegenden Fall negativ sein, um die charakte-

$c_{10}$ [MPa]	$c_{20}$ [MPa]	$c_{30}$ [MPa]
0.2	-0.052	0.017

Tabelle 6.1: Identifizierte Parameter bezüglich der Grundelastizität.

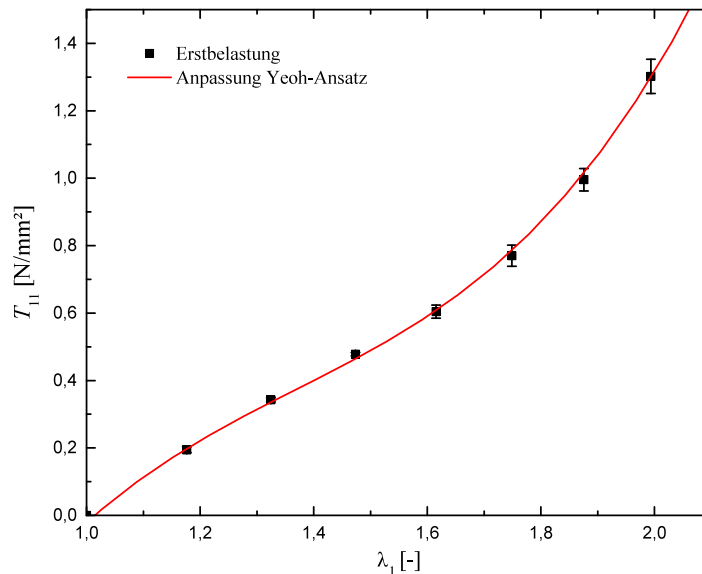


Abbildung 6.8: Gleichgewichtskurve auf Basis des Yeoh-Ansatzes, Vergleich zwischen Experiment und Modell.

ristische  $S$ -förmige Grundelastizität abzubilden. Um bei steigender Dehnung den Steifigkeitsabfall zu Beginn mit der anschließenden Verfestigung darzustellen, muss  $c_{20}$  bezogen auf die Arbeiten von Yeoh & Fleming [187] bzw. Dhondt [28] kleiner als Null sein. Die Wahl als negativer Parameter ermöglicht die Darstellung des vorhandenen Krümmungswechsels.

Johnson et al. [79] forderten die Wahl positiver Materialparameter bei dem Reihenansatz nach Rivlin & Saunders [150] bezüglich Gl. (4.67) um Drucker-Stabilität zu garantieren. Dieses Stabilitätskriterium besagt gemäß der Arbeiten von Drucker [37] bzw. Hill [69], dass die inkrementelle innere Energie nicht negativ sein darf, d. h.

$$d\mathbf{T} : d\mathbf{B} \geq 0. \quad (6.8)$$

Somit muss bei steigender Deformation die Spannung ebenso ansteigen. Eine Entlastung durch geringere Dehnung bedeutet ebenso eine geringere Spannung.

Przybylo & Arruda [136] schränkten die Forderung nach positiven Materialparametern wiederum ein. Gerade hinsichtlich der Ansätze mit höheren Ordnungen der ersten Invarianten  $I_{\mathbf{B}}$ , und somit auch für den Ansatz nach Yeoh, führt diese

Einschränkung zu schlechteren Modellanpassungen.

Für das angepasste Modell in der vorliegenden Arbeit wird bezüglich des uniaxialen Belastungszustands für den gesamten, für die Streckung möglichen Wertebereich  $\lambda \in ]0; \infty[$  die Drucker-Stabilitätsbedingung gemäß Gl. (6.8) erfüllt. Der angepasste Parametersatz ist daher physikalisch sinnvoll.

## 6.3 Viskoelastische Betrachtungen

### 6.3.1 Relaxationsversuche

Auf Basis der gewonnenen Grundelastizität wird im Folgenden das Augenmerk auf das zeitabhängige Verhalten gelenkt. Zu diesem Zweck sollen zunächst Relaxationsversuche einen Überblick über das Gesamtmaß des zeitabhängigen Verhaltens liefern.

Da während eines Relaxationsvorgangs eine Vielzahl von Maxwell-Elementen angeregt werden, liefern die Experimente zum einen einen Überblick über das Maß an Überspannung aufgrund inelastischer Materialeigenschaften und zum anderen Hinweise für den zeitlichen Rahmen dieser Vorgänge. Ein kontinuierliches Relaxationsspektrum wird bei der sprunghaften Belastung angeregt. Sukzessive werden die Maxwell-Elemente während der Haltephase spannungsfrei.

Hinsichtlich der Charakterisierung des Relaxationsverhaltens werden die Proben aus der undeformierten Lage mit einer linear wachsenden Deformation bis auf verschiedene Dehnungsniveaus belastet. Diese Deformation wird anschließend konstant gehalten. Die Belastungsrampe erfolgt mit einer Traversengeschwindigkeit von  $1 \text{ mm/s}$ , d. h. einer Dehnrates von  $0,0273 \text{ s}^{-1}$ .

Abb. 6.9 zeigt anhand der Relaxationsprozesse für die Dehnungsstufen 60 %, 76 % sowie 87 %, dass für das Material ausgeprägtes, inelastisches Verhalten vorliegt. Die Haltezeit bei den drei Experimenten beträgt jeweils eine Stunde. Um einen adäquaten Vergleich zu ermöglichen, beinhaltet das Diagramm zudem die Grundelastizität jeder Dehnungsstufe.

Eine deutliche Überspannung, die in der Größenordnung der eigentlichen Grundelastizität liegt, ist jeweils zum Ende der Anfahrrampe auf die Deformation sichtbar. Innerhalb der ersten zehn Minuten bei konstanter Deformation bauen sich die Überspannungen ca. zu 50 % ab. Der folgende Relaxationsprozess geht

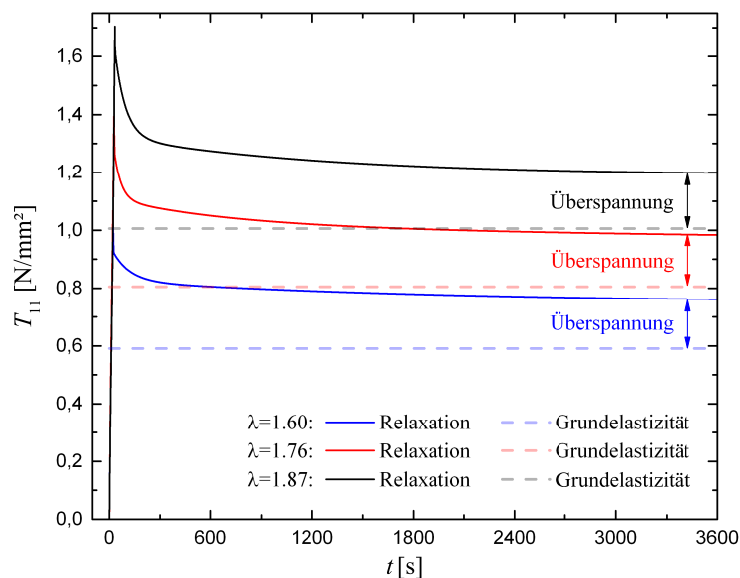


Abbildung 6.9: Vergleich mehrerer Relaxationsprozesse für verschiedene Dehnungsstufen über eine Haltezeit von einer Stunde.

allerdings sehr langsam vonstatten. Nach der Versuchsdauer von einer Stunde beträgt die Differenz zur Gleichgewichtsspannung weiterhin ca. 20 %. Die absolute Differenz zwischen aktuellem Spannungsmaß und Grundelastizität zum Ende des Versuchs stimmt für die unterschiedlichen Dehnungsstufen nahezu überein. Nach einer Stunde Haltezeit betragen die Nichtgleichgewichtsspannungen für alle drei Deformationen ca.  $0,2 \text{ N/mm}^2$ .

Allerdings ist die anfängliche Überspannung nach Beendigung der Belastungsrampe für größere Deformationen wesentlich stärker ausgeprägt. Während die Nichtgleichgewichtsspannung zu Beginn der Haltezeit für die Dehnungsstufe  $\lambda = 1,6$  ca.  $0,4 \text{ N/mm}^2$  beträgt, liegt bei der höheren Streckung  $\lambda = 1,87$  eine Überspannung von ca.  $0,7 \text{ N/mm}^2$  vor. Sowohl das Maß der Überspannung als auch der Verlauf des Relaxationsprozesses hängen somit von der Dehnungsstufe ab. Das Materialmodell muss daher berücksichtigen, dass für größere Deformationen die Nichtgleichgewichtsspannung zunimmt.

Zudem zeigt das Experiment, dass eine sehr große Zeitskala bei der Betrachtung des Abbaus der Nichtgleichgewichtsanteile in Betracht gezogen werden muss. Eine Erhöhung der Haltezeit vermindert die Lücke zwischen Gesamtspannung und Gleichgewichtsanteil, allerdings nur geringfügig. Für die Dehnungsstufe 76 % wird in Abb. 6.10 gezeigt, dass selbst nach 20000 s die Lücke nicht geschlossen werden kann. Längere Versuchsdauern sind aufgrund der geforderten konstanten klimatischen Bedingungen nicht realisierbar.



Die Relaxationsversuche zeigen deutlich, dass ein breites Relaxationsspektrum abgebildet werden muss. Auf der einen Seite wird ein großer Anteil der inelastischen Spannungen in einem vergleichsweise kurzen Zeitraum abgebaut. Auf der anderen Seite wiederum liegt die Dauer bis zum Abbau der gesamten Überspannungen in der Größenordnung von mindestens einigen Tagen.

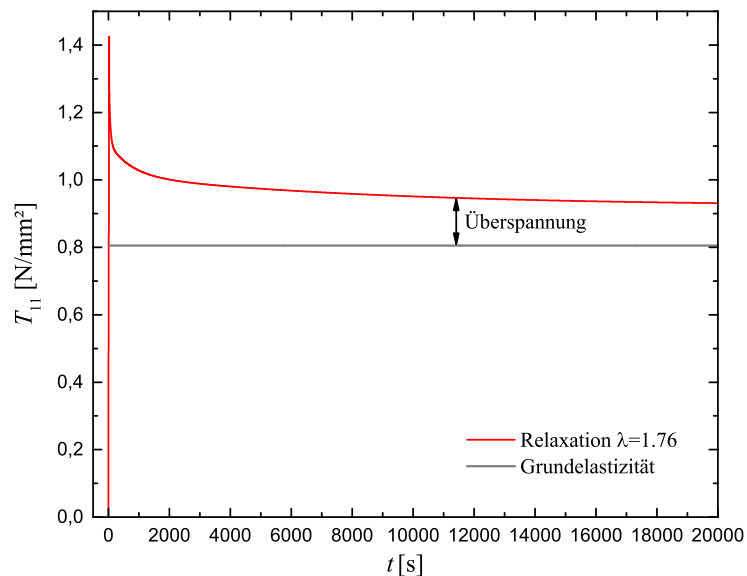


Abbildung 6.10: Relaxation bei  $\lambda = 1,76$  über eine Haltezeit von 20000 s.

### 6.3.2 Zyklische Versuche

Um das zeitabhängige Verhalten über einen bestimmten Geschwindigkeitsbereich hinweg differenzierter zu betrachten werden des Weiteren zur Beschreibung der Viskoelastizität zyklische Experimente mit drei unterschiedlichen Dehnraten durchgeführt. Als geringste Rate fällt die Wahl auf  $0,00273 \text{ s}^{-1}$ . Sie stellt zugleich, wie bereits bei der Ermittlung der Grundelastizität erwähnt, die für den *Linos LT 200 ST*<sup>®</sup> kleinste Größenordnung bei der Maschinengeschwindigkeit dar. Für die ratenabhängigen Untersuchungen erfolgt die weitere Staffelung der Geschwindigkeiten in Dekaden. Somit sind die weiterhin untersuchten Dehnraten  $0,0273 \text{ s}^{-1}$  und  $0,273 \text{ s}^{-1}$ . Die Versuchsergebnisse sind zunächst getrennt voneinander in Abb. 6.11 dargestellt.

Bereits in Kap. 6.2 wurde eine Charakteristik im Materialverhalten angesprochen,

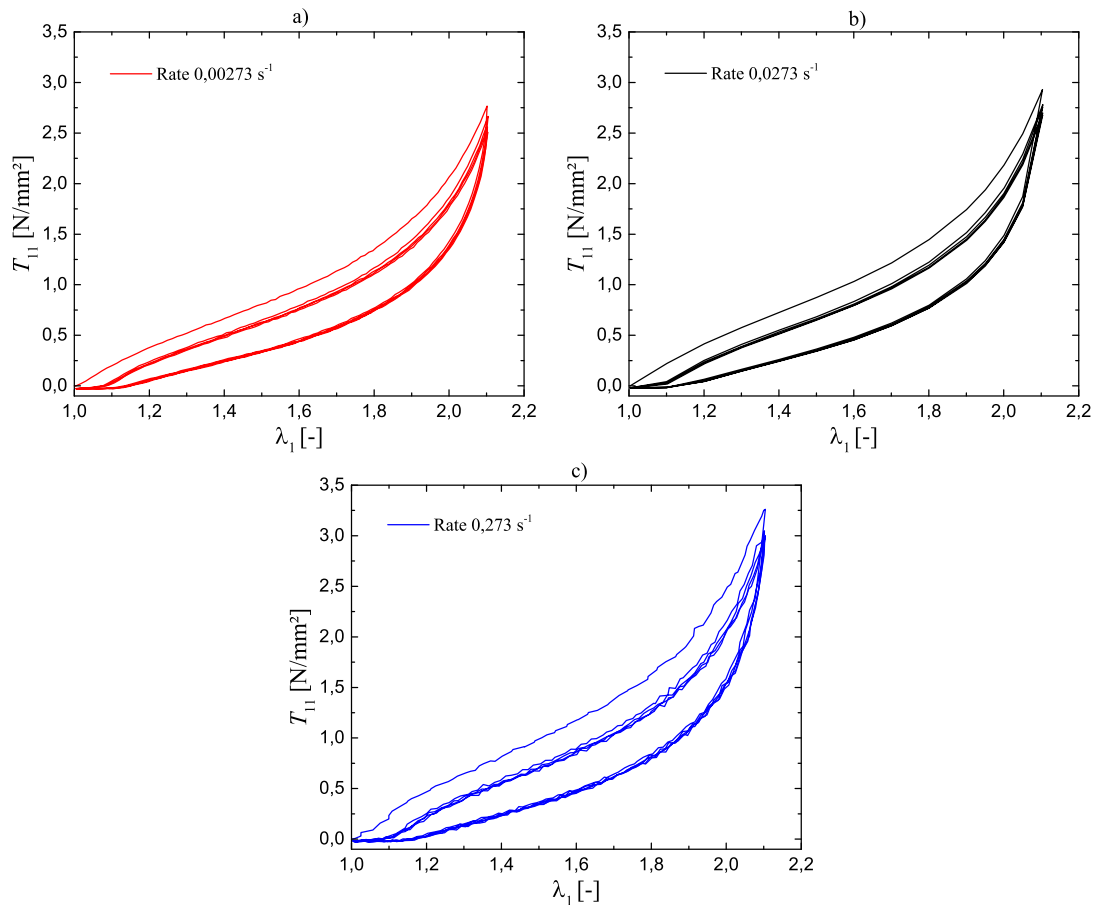


Abbildung 6.11: Zyklische Versuche mit verschiedenen Dehnraten:  
 a):  $0,00273 \text{ s}^{-1}$ , b):  $0,0273 \text{ s}^{-1}$ , c):  $0,273 \text{ s}^{-1}$ .

welche es zu beachten gilt. Selbst bei der langsamsten Dehnrates ist eine deutliche Hystereseschleife sichtbar. Dies deutet zunächst auf eine statische Hysterese hin, welche mit Plastizität beschrieben werden kann. Von einem entsprechenden Ansatz wird zu diesem Zeitpunkt der Arbeit allerdings noch Abstand gehalten. Da das Material sich in der Geometrie vollständig regeneriert und keine plastischen Dehnungen verbleiben, soll zunächst eine rein viskoelastische Beschreibung erfolgen. Es wird geschlussfolgert, dass sich bei weiterer deutlicher Senkung der Belastungsgeschwindigkeit die Hystereseschleife weiter schließen kann. Die Experimente mit den entsprechenden Geschwindigkeiten können mit den zur Verfügung stehenden Mitteln allerdings nicht durchgeführt werden.

Die Ursache für das Vorhandensein der auffälligen Hystereseschleifen kann wiederum, in Bezug auf Abb. 6.3, in der Interaktion der einzelnen Komponenten des gefüllten Elastomers gesehen werden. Für das zeitabhängige Aufbrechen und Reagglomerieren der weichen Füllercluster wird Energie benötigt, welche sich makroskopisch bei einer zeitlich veränderlichen äußeren Last in Form einer deutlichen

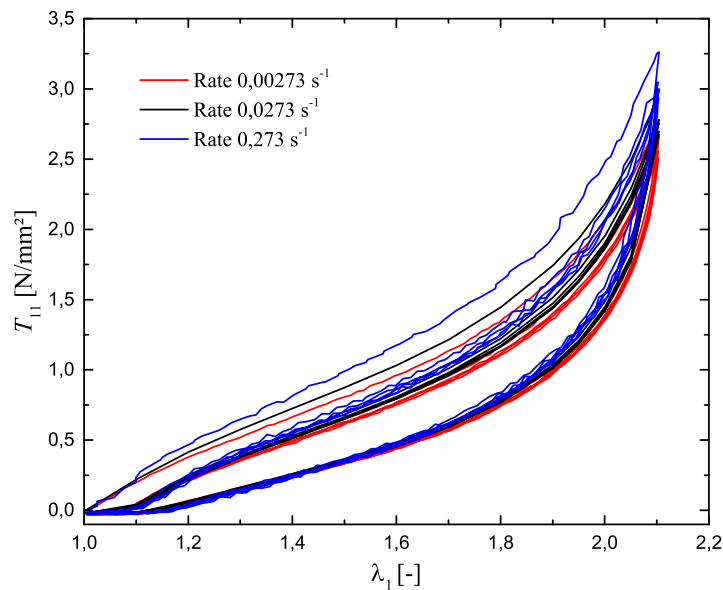


Abbildung 6.12: Vergleich der zyklischen Versuche für drei Dehnraten.

Hysterese äußert.

Des Weiteren ist über den gesamten Ratenbereich hinweg erkennbar, dass sowohl die Spitzenwerte, als auch die Gestalt und Größe der Hystereseschleife kaum voneinander abweichen. Dies gilt vor allem für die stabilen Hysteresen zum Ende der zyklischen Belastung. Ein direkter Vergleich, wie in Abb. 6.12, zeigt deutlich die vergleichsweise geringen Abweichungen über die beiden Dekaden hinweg.

Bezogen auf die Relaxationsversuche im vorangegangenen Abschnitt 6.3.1 wird eine deutliche Viskoelastizität beobachtet, welche Nichtgleichgewichtsspannungen zur Folge hat, die einen Hauptanteil zur Gesamtspannung beitragen. Entsprechend werden auf Basis der Überlegungen für eine klassische, lineare Viskoelastizitätstheorie deutlichere Unterschiede im hysteretischen Verhalten erwartet, als sie tatsächlich beobachtet werden. Für die bezeichnende Ratenabhängigkeit, die im Relaxationsprozess zu sehen ist, würde eine lineare Viskoelastizität die Spannungsmaxima bei einer Variation der Dehnraten über zwei Größenordnungen deutlich voneinander abweichen lassen. Außerdem würde sich die eingeschlossene Fläche der Hystereseschleife als Maß für die Energiedissipation entsprechend bei Steigerung der Dehnungsgeschwindigkeiten vergrößern.

Die Abbildung dieser Charakteristik stellt einen zentralen Punkt bei der Entwicklung des Materialmodells dar und erfordert die Einbeziehung nichtlinearer Effekte in das Modell.

### 6.3.3 Payne-Effekt

Der Modellgedanke im Rahmen dieser Arbeit beruht im Wesentlichen auf der Interpretation des Materialverhaltens mit Hilfe der Wechselwirkungen der Einzelkomponenten des Elastomers, wie in Abb. 6.3 zusammenfassend beschrieben. Daher soll neben den bereits durchgeführten Experimenten überprüft werden, ob der amplitudenabhängige Payne-Effekt mit dem Materialmodell dargestellt werden kann. Die für die amplitudenabhängige Entfestigung ursächlichen Mechanismen können auch auf das Aufbrechen und die Reagglomeration in Belastungs-Entlastungs-Zyklen bezogen werden. Größere Amplituden resultieren in einer größeren Anzahl weicher Füllercluster, die aufbrechen und bei Entlastung wieder reagglomerieren.

Dementsprechend werden zur Untersuchung des Payne-Effekts, wie Abb. 6.13 zeigt, zyklische Deformationen um eine statische Vordeformation betrachtet. Beginnend bei einer Ausgangslänge  $l_R$  der Probe, wird diese auf eine statische Vordeformation  $l_0$  gedehnt und anschließend mit einer zyklischen Deformation mit einer Frequenz  $f = \omega/2\pi$  und einer doppelten Amplitude  $\Delta \varepsilon = 2 \Delta \varepsilon_{dyn}$  um diese Mitteldehnung belastet.

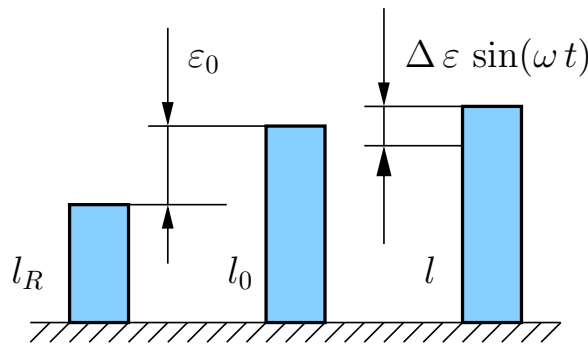


Abbildung 6.13: Zyklischer Versuch um eine statische Vordeformation.

Mit dem Exzenterantrieb aus Abb. 5.22 werden zu diesem Zweck für eine Belastungsfrequenz von 1 Hz die dynamischen Amplituden bei einer solchen Belastung variiert. Für die dynamische Amplitude  $\varepsilon_{dyn}$  wird ein Bereich von  $\pm 0,3\%$  bis  $\pm 7,5\%$  untersucht. In der Betrachtung des Payne-Effekts ist es üblich den Speichermodul  $G'$  als Maß für die benötigte Energie bei einem Belastungszyklus in der Form

$$G' = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} \cos(\varphi) \quad (6.9)$$

auszuwerten.  $\Delta\sigma$  stellt die Spannungsdifferenz zwischen Spannungsmaximum und -minimum innerhalb der zyklischen Belastung dar, während  $\Delta\varepsilon$  die doppelte dynamische Amplitude  $2\Delta\varepsilon_{dyn}$  als Differenz zwischen maximaler und minimaler Deformation während des Zyklus wiedergibt. Bei einer sinusförmigen Belastung, wie in Abb. 6.13 beschrieben, folgt die Spannungsantwort der Dehnungsanregung mit einem Phasenversatz  $\varphi$ . Mit dem Eigenbau für die Untersuchungen ist die zeitliche Auflösung des Versatzes der beiden Größen nicht möglich. Mit der Annahme kleiner Phasenverschiebungen wird der Kosinus-Term in Gl. (6.9) eliminiert und im Rahmen der durchgeführten Experimente wird der Speichermodul als Quotient der Spannungsdifferenz und Dehnungsdifferenz

$$G' = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (6.10)$$

betrachtet. Dies entspricht der Steigung der Hystereseschleife, d. h. die Steigung der Geraden durch die Eckpunkte der Hystereseschleife stellt den Speichermodul dar.

Da die Ursache des Payne-Effekts in dem Zusammenbruch und dem Wiederaufbau schwacher, physikalischer Bindungen gesehen wird, stellt er einen reversiblen Effekt dar. Somit wird bei der Betrachtung der Amplitudenabhängigkeit die Variation der Amplitude an dem selben Probekörper durchgeführt. Es ist nicht notwendig, für jede dynamische Amplitude eine neue Probe zu untersuchen. Die Steigerung der Deformation erfolgt daher sukzessive während der Belastungen. Um reproduzierbare Ergebnisse zu generieren werden bei jeder Deformationsstufe jedoch zunächst 500 Einschwingzyklen durchgeführt, damit sich, wie in Kapitel 6.2 beschrieben, die Lage und Form der Hystereseschleife zunächst stabilisieren und die auftretenden Effekte sicher voneinander separiert betrachtet werden können.

Abb. 6.14 zeigt für eine statische Vordeformation von 60 % die Experimente bezüglich der Untersuchung des Payne-Effekts. Ein signifikanter Abfall in der Steigung der Hystereseschleife bei Erhöhung der dynamischen Deformation wird deutlich sichtbar.

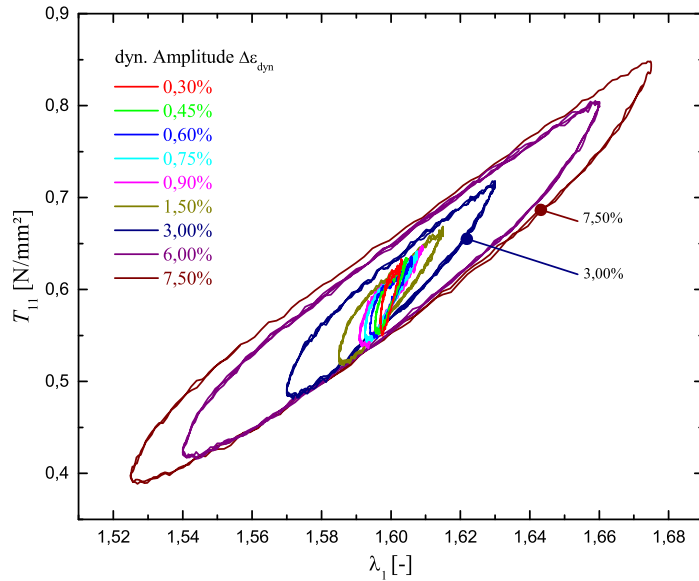


Abbildung 6.14: Zyklische Belastung mit variierender Dehnungsamplitude um die Vordeformation  $\lambda = 1,6$  bei einer Belastungsfrequenz von 1 Hz.

## 6.4 Materialmodell

Anhand der beobachteten Phänomene aus den vorangegangenen Experimenten wird im Folgenden das Modell, welches sich daraus ableitet, vorgestellt. Auf Basis der Grundelastizität aus Kapitel 6.2 wird für die Nichtgleichgewichtsanteile der Spannung das Verhalten mehrerer Maxwell-Elemente in Anlehnung an das rheologische Modell der Viskoelastizität aus Abb. 4.1 überlagert.

Bei den zyklischen Versuchen wird zur Materialcharakterisierung ein Bereich der Dehnrates über drei Größenordnungen hinweg betrachtet. Entsprechend sollte mindestens eine gleiche Anzahl an Maxwell-Elementen zur Beschreibung genutzt werden, um das Relaxationsspektrum in ausreichender Art und Weise abbilden zu können. Bei dem vorliegenden Modell werden daher vier Maxwell-Elemente zur Beschreibung zugrunde gelegt.

Auf Basis des Reihenansatzes nach Rivlin & Saunders [150] gemäß Gl. (4.67) resultiert die einfachste Formulierung unter Einbeziehung der ersten Invarianten in geringster Ordnung im Neo-Hookeschen Ansatz

$$\rho_0 \psi_{neq} = c_{10} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e} - 3). \quad (6.11)$$

Zur Abbildung der ansteigenden Überspannungen für größere Deformationswerte wird jedoch, analog zur Wahl des Yeoh-Ansatzes bei der Grundelastizität, eine versteifende Wirkung des Modellansatzes für größere Dehnungen notwendig. Entsprechend wird zur Abbildung des beschriebenen Verhaltens für ein Maxwell-Element ein Ansatz höherer Ordnung gewählt, so dass für das erste Maxwell-Element der Zusammenhang

$$\rho_0 \psi_{neq}^1 = c_{301} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^1} - 3)^3. \quad (6.12)$$

genutzt wird. Die ersten beiden Indizes bei den Parametern  $c_{klj}$  beziehen sich im Weiteren auf die Ordnungen der Invarianten bezüglich der Ansatzfunktion Gl. (4.67). Der dritte Index kennzeichnet die fortlaufende Nummerierung bei den Maxwell-Elementen.

Bei den verbleibenden drei Maxwell-Elementen wird für den Modellansatz lediglich der einfachste Ansatz nach Neo-Hooke zugrunde gelegt, d. h. für diese gilt

$$\rho_0 \psi_{neq}^j = c_{10j} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^j} - 3), \quad \text{mit } j=2\dots4. \quad (6.13)$$

Mit den gewählten Ansätzen für die freien Energiedichtefunktionen  $\psi_{eq}$  und  $\psi_{neq}^j$  ergibt sich die Gesamtspannung

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & -p \mathbf{I} + 2 [c_{10} + 2 c_{20} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3) + 3 c_{30} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}} - 3)^2] \mathbf{B} \\ & + 6 c_{301} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^1} - 3)^2 \mathbf{B}_e^1 + \sum_{j=2}^4 2 c_{10j} \mathbf{B}_e^j. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Für die Nichtgleichgewichtsanteile muss zudem die Kinematik der einzelnen Maxwell-Elemente ermittelt werden. Zu diesem Zweck müssen die Evolutionsgleichungen des rechten inelastischen Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{C}_i^j$  gemäß Gl. (4.90) für jedes Maxwell-Element ausgewertet werden. Da lediglich Abhängigkeiten von der ersten Invarianten des elastischen linken Cauchy-Green Deformationstensors vorliegen, reduzieren sich die Evolutionsgleichungen. Für das erste Maxwell-Element folgt

$$\dot{\mathbf{C}}_i^1 = \frac{12}{r^1} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^1} - 3)^2 \left[ \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr} (\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^1)^{-1}) \mathbf{C}_i^1 \right] \quad (6.15)$$

und für die weiteren drei Maxwell-Elemente  $j = 2 \dots 4$

$$\dot{\mathbf{C}}_i^j = \frac{4}{r^j} \left[ \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^j)^{-1}) \mathbf{C}_i^j \right]. \quad (6.16)$$

Dabei sind die Materialparameter  $r^j$  als Verhältnis der Steifigkeit der jeweiligen Nichtgleichgewichtsfeder  $E_e^j$  und der jeweiligen Viskosität des Dämpfers  $\eta_i^j$  definiert

$$r^j = \frac{E_e^j}{\eta_i^j} \quad (6.17)$$

und stellen die Relaxationszeiten der Maxwell-Elemente dar. Die Steifigkeiten  $E_e^j$  aus der geometrisch linearen Theorie gemäß Abb. 4.1 werden bezüglich der finiten Theorie durch die entsprechenden  $c_{klj}$  ersetzt. Hinsichtlich der Nichtlinearität des Materialverhaltens wird der Ansatz von Koprowski-Theiß [86] weiterverfolgt. Um die nichtlineare Viskoelastizität darzustellen, werden daher die Relaxationszeiten  $r^j$  als prozessabhängige Funktionen dargestellt, die sowohl von der gesamten Dehnrates als auch von der jeweiligen Deformation des Maxwell-Elements abhängen. Eine ähnliche Herangehensweise auf Basis prozessabhängiger Funktionen für die Viskositäten der Dämpferelemente ist den Arbeiten von Höfer [70] sowie Rendek & Lion [144, 145] zu entnehmen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die folgenden funktionalen Zusammenhänge für die Relaxationszeiten

$$\begin{aligned} r^1 &= r_{11}, \\ r^2 &= r_{21} + r_{22} \exp(-k_{21} \|\mathbf{D}\|), \\ r^3 &= r_{31} + r_{32} \exp(-k_{31} \|\mathbf{D}\|) + r_{33} \exp(-k_{32} \|\mathbf{D}\|), \\ r^4 &= r_{41} + (r_{42} + r_{43} \exp(-k_{41} \|\mathbf{D}\|)) (\|\mathbf{C}_i^4\| - \sqrt{3}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

gewählt. Da die Nichtlinearitäten der viskoelastischen Betrachtung sich im Wesentlichen auf die Deformationsratenabhängigkeit beziehen, werden die Relaxationszeiten in Abhängigkeit der aktuellen Prozessgeschwindigkeit, in Form der Deformationsgeschwindigkeit  $\mathbf{D}$ , gesetzt. So kann zum einen eine Nichtlinearität bezüglich der Belastungsgeschwindigkeit beachtet werden, zum anderen kann unterschieden werden, ob das Material aktuell eine Deformationsänderung erfährt, oder ob ein Relaxationsprozess vonstattengeht. Für diesen Fall wird die Norm der Deformati-



ongeschwindigkeit  $\|\mathbf{D}\|$  zu Null. Als Norm wird dabei die Frobenius-Norm

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij})^2} \quad (6.19)$$

genutzt. Die doppelte Ausführung des Arrhenius-Zusammenhangs für die Relaxationszeit  $r^3$  des dritten Maxwell-Elements wird nach der später durchgeführten Parameteridentifikation deutlich. Sie ermöglicht, dass ein Relaxationsprozess sowohl dynamische Prozesse als auch stationäre Relaxationsvorgänge abbilden kann. Die zusätzliche Abhängigkeit von  $\mathbf{C}_i^4$  für die vierte Relaxationszeit wird hinsichtlich des dehnungsstufenabhängigen Relaxationsverhaltens in Betracht gezogen.



# 7

---

## Numerik & Parameteridentifikation

---

Das im vorherigen Kapitel entwickelte Materialmodell muss mit Hilfe numerischer Methoden umgesetzt werden. Da das Hauptaugenmerk der vorliegenden Arbeit auf der Materialcharakterisierung liegt, werden die genutzten Verfahren nur in kompakter Form erläutert. Das folgende Kapitel stellt zunächst eine Möglichkeit der Implementierung des Modells in einen Finite-Elemente-Code vor. Dabei wird die gesamte dreidimensionale Information in der tensoriellen Darstellung des Modells genutzt. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit lediglich uniaxiale Belastungszustände zugrunde gelegt werden, steht die multiaxiale, numerische Umsetzung des vorgestellten Modells nicht im Fokus der folgenden Ausführungen. Daher werden nur die grundlegenden Schritte angesprochen und nicht detailliert ausgearbeitet. Auf Basis der vorhandenen Experimente wird in dieser Arbeit das dreidimensionale Modell für finite Deformationen in reduzierter Form bezüglich des uniaxialen Belastungszustands dargestellt. Dies geschieht im Hinblick auf eine effizientere Simulation und Parameteridentifikation, da mit der Einschränkung auf uniaxiale Deformationen ein skalarer Gleichungssatz resultiert, welcher numerisch deutlich einfacher behandelt werden kann als das vollständige 3D-Modell.

Anhand des implementierten Modells kann durch Vergleich von Lösungen des Randwertproblems mit den durchgeführten Experimenten eine Parameteridentifikation erfolgen. Die resultierenden Parameter werden zum Ende des Kapitels bereitgestellt.

## 7.1 Dreidimensionale Finite-Elemente-Umsetzung

Aufgrund der komplexen Bauteilgeometrien bzw. wegen multiaxialer Belastungszustände liegen bei realen Anwendungen in der Regel ebenso mehraxiale Deformationszustände vor. In mehreren Arbeiten wurde bereits die Problematik aufgezeigt, dass ein Materialmodell, das auf Basis eines uniaxialen Datensatzes angepasst wurde, nicht zwangsläufig diese multiaxialen Zustände abzubilden vermag. Treloar hat in frühen Arbeiten [172] die Notwendigkeit einer multiaxialen Betrachtung für viele Modelle aufgezeigt. Beispiele für aktuelle Untersuchungen, die sich mit der multiaxialen Charakterisierung von Elastomeren beschäftigen sind beispielsweise die Veröffentlichungen von Baaser [7], Johlitz & Diebels [76] sowie Seibert et al. [159]. Basierend auf diesen Überlegungen wurde das Materialmodell im Rahmen einer Finite-Elemente-Implementierung umgesetzt. Da diese aufgrund der Modellkomplexität bezüglich einer Parameteridentifikation numerisch sehr aufwendig ist und lediglich uniaxiale Versuche die Datenbasis bilden, wird diese FE-Umsetzung im Rahmen dieser Arbeit nicht eingesetzt. Daher werden im Folgenden nur die Kernaussagen kurz beschrieben, um die Möglichkeiten für eventuelle Folgearbeiten aufzuzeigen. Für eine detaillierte Ausarbeitung sei der Leser auf die Veröffentlichung von Scheffer et. al [155] sowie die Dissertation von Florian Goldschmidt [49] hingewiesen.

Er hat sich im Rahmen seiner Dissertation mit der numerischen Umsetzung eines Modells für Klebeverbindungen mit gradierten mechanischen Eigenschaften befasst und eine Finite-Elemente-Implementierung in der *open-source* FE-Bibliothek *deal.II*<sup>®</sup> [8, 9] umgesetzt. Darauf basierend kann auch das vorliegende Modell implementiert werden.

Die wesentlichen Punkte, welche es bei der Numerik zu beachten gilt, sind die geometrische Nichtlinearität aufgrund der betrachteten finiten Deformationen. Zur Lösung wird ein Newton-Verfahren genutzt. Des Weiteren ergibt sich für die numerische Integration der Evolutionsgleichungen für die inelastischen Deformationen in der Umsetzung mit einem impliziten Euler-Verfahren ein weiterer nichtlinearer Gleichungssatz, welcher ebenso mit einem Newton-Verfahren gelöst werden kann. Bei der Ausführung der beiden Newton-Verfahren wird jeweils eine numerische Tangente eingesetzt [49].

## 7.2 Uniaxiale Reduktion des Modells

Die vorgestellte dreidimensionale Finite-Elemente-Umsetzung ist numerisch komplex. Da das Materialmodell zudem starke Nichtlinearitäten in den funktionalen Zusammenhängen der Relaxationszeiten aufweist, wird die Simulation, gerade im Hinblick auf eine Parameteridentifikation, die Rechenzeit betreffend, sehr aufwendig.

Als Datenbasis liegen lediglich uniaxiale Zugversuche vor. Entsprechend kann das Modell auf diesen Versuchstyp reduziert werden, was in einem Satz von gekoppelten skalarwertigen Gleichungen resultiert. Der numerische Aufwand zur Lösung des entstehenden Gleichungssatzes ist deutlich geringer als die numerische Behandlung des vollständigen 3D-Problems. Somit kann die Effizienz der Parameteridentifikation um ein Vielfaches gesteigert werden, wenn eine angepasste 1D-Formulierung verwendet wird. Aus Übersichtlichkeitsgründen wird bei den Streckungsmaßen im Folgenden auf die Richtungsindizierung verzichtet. Die Streckung in Zugrichtung wird mit  $\lambda$  bezeichnet.

Bezüglich einer Theorie für finite Deformationen ergibt sich für den gesamten Deformationsgradienten sowie dessen elastischen und inelastischen Anteil mit dem multiplikativen Zusammenhang

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_i, \quad (7.1)$$

die Koeffizientendarstellung für den uniaxialen Lastfall unter Berücksichtigung von Isotropie und Inkompressibilität

$$\mathbf{F} \hat{=} \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

und entsprechend

$$\mathbf{F}_e \hat{=} \begin{bmatrix} \lambda_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_e} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_e} \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F}_i \hat{=} \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

In einem ersten Schritt wird die Konstitutivbeziehung aus Gl. (6.14) betrachtet. Wie bereits bei der Untersuchung der Grundelastizität in Kap. 6.2 wird die Spannungsfreiheit senkrecht zur Zugrichtung als Randbedingung genutzt, nun allerdings bezüglich der Gesamtspannung, d. h.

$$T_{22} = T_{33} = 0. \quad (7.4)$$

Daraus lässt sich der Lagrange-Parameter  $\tilde{p}$  als

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= [2 c_{10} + 4 c_{20} (\text{tr}(\mathbf{B}) - 3) + 6 c_{30} (\text{tr}(\mathbf{B}) - 3)^2] B_{22} \\ &\quad + 6 c_{301} (\text{tr}(\mathbf{B}_e^1) - 3)^2 B_{e22}^1 + \sum_{j=2}^4 2 c_{10j} B_{e22}^j \end{aligned} \quad (7.5)$$

ableiten. Somit ergibt sich für die Cauchy-Spannung  $T_{11}$  in Zugrichtung eine skalarwertige Gleichung

$$\begin{aligned} T_{11} &= [2 c_{10} + 4 c_{20} (\text{tr}(\mathbf{B}) - 3) + 6 c_{30} (\text{tr}(\mathbf{B}) - 3)^2] (B_{11} - B_{22}) \\ &\quad + 6 c_{301} (\text{tr}(\mathbf{B}_e^1) - 3)^2 (B_{e11}^1 - B_{e22}^1) + \sum_{j=2}^4 2 c_{10j} (B_{e11}^j - B_{e22}^j). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Die Komponenten des linken Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{B}$ , des linken elastischen Cauchy-Green Deformationstensors  $\mathbf{B}_e^j$  sowie deren Spuren werden in Form von Streckungsmaßen formuliert, so dass

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left[ 2 c_{10} + 4 c_{20} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 6 c_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right] \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \\ &\quad + 6 c_{301} \left( (\lambda_e^1)^2 + \frac{2}{\lambda_e^1} - 3 \right)^2 \left( (\lambda_e^1)^2 - \frac{1}{\lambda_e^1} \right) + \sum_{j=2}^4 2 c_{10j} \left( (\lambda_e^j)^2 - \frac{1}{\lambda_e^j} \right) \end{aligned} \quad (7.7)$$

folgt. Gemäß Gl. (7.1) gilt für die Streckungen der multiplikative Zusammenhang

$$\lambda = \lambda_e^j \lambda_i^j \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_e^j = \frac{\lambda}{\lambda_i^j}. \quad (7.8)$$

Dies erlaubt die Neuformulierung von Gl. (7.7) als eine Funktion, die von  $\lambda$  und  $\lambda_i^j$  abhängt

$$\begin{aligned} T_{11} = & \left[ 2 c_{10} + 4 c_{20} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) + 6 c_{30} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right)^2 \right] \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \\ & + 6 c_{301} \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} + \frac{2 \lambda_i^1}{\lambda} - 3 \right)^2 \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} - \frac{\lambda_i^1}{\lambda} \right) + \sum_{j=2}^4 2 c_{10j} \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^j)^2} - \frac{\lambda_i^j}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Bezüglich des Gleichgewichtsanteils stehen alle notwendigen Daten für die Auswertung zur Verfügung. Die Parameter  $c_{10}$ ,  $c_{20}$  und  $c_{30}$  sind in Kap. 6.2 quantifiziert worden, vergleiche Tabelle 6.1. Hinsichtlich der überlagerten Nichtgleichgewichtsspannungen muss die Kinematik der Dämpferelemente in Form von  $\lambda_i^j$  allerdings noch ermittelt werden. Die Evolutionsgleichungen Gl. (6.15) bzw. Gl. (6.16) müssen zu diesem Zweck ebenso bezüglich des uniaxialen Belastungsfalls betrachtet werden.

Da die Vorgehensweise für beide Evolutionsgleichungen analog vonstattengeht, wird die numerische Integration der Evolutionsgleichungen anhand des komplexeren Falls für Gl. (6.15) durchgeführt. Für den weniger komplexen Fall des Neo-Hookeschen Ansatzes in Gl. (6.16) werden im Anschluss die wesentlichen Gleichungen zusammenfassend zur Verfügung gestellt.

Die Evolutionsgleichung des ersten Maxwell-Elements

$$\dot{\mathbf{C}}_i^1 = \frac{12}{r^1} (\mathbf{I}_{\mathbf{B}_e^1} - 3)^2 \left[ \mathbf{C} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{C} \cdot (\mathbf{C}_i^1)^{-1}) \mathbf{C}_i^1 \right] \quad (7.10)$$

ergibt in Bezug auf den uniaxialen Lastfall

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{C}}_i^1 &= \frac{d}{dt} \mathbf{C}_i^1 \hat{=} \begin{bmatrix} 2 \lambda_i^1 \dot{\lambda}_i^1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\dot{\lambda}_i^1}{(\lambda_i^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\dot{\lambda}_i^1}{(\lambda_i^1)^2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{12 \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} + \frac{2 \lambda_i^1}{\lambda} - 3 \right)^2}{r^1} \left( \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \frac{\lambda^3 + 2 (\lambda_i^1)^3}{(\lambda_i^1)^2 \lambda} \begin{bmatrix} (\lambda_i^1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_i^1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_i^1} \end{bmatrix} \right).
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Jede Gleichung dieses Systems führt zum identischen Ergebnis. Anhand der ersten Gleichung folgt als skalare Evolutionsgleichung zur Ermittlung der inelastischen Streckung

$$\begin{aligned}
2 \lambda_i^1 \dot{\lambda}_i^1 &= \frac{12 \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} + \frac{2 \lambda_i^1}{\lambda} - 3 \right)^2}{r^1} \left[ \lambda^2 - \frac{1}{3} \frac{\lambda^3 + 2 (\lambda_i^1)^3}{\lambda} \right] \\
\Leftrightarrow \dot{\lambda}_i^1 &= \frac{4}{r^1} \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} + \frac{2 \lambda_i^1}{\lambda} - 3 \right)^2 \left( \frac{\lambda^2}{\lambda_i^1} - \frac{(\lambda_i^1)^2}{\lambda} \right)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

für das erste Maxwell-Element. Diese nichtlineare Gleichung kann mithilfe eines zeitlichen Euler-Rückwärts-Verfahrens mit dem Differenzenquotienten

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i^1 &\approx \frac{\lambda_i^1(t_{n+1}) - \lambda_i^1(t_n)}{\Delta t} \\
&= \frac{4}{r^1} \left( \frac{\lambda^2(t_{n+1})}{\lambda_i^1(t_{n+1})^2} + \frac{2 \lambda_i^1(t_{n+1})}{\lambda(t_{n+1})} - 3 \right)^2 \left( \frac{\lambda(t_{n+1})^2}{\lambda_i^1(t_{n+1})} - \frac{\lambda_i^1(t_{n+1})^2}{\lambda(t_{n+1})} \right)
\end{aligned} \tag{7.13}$$

integriert werden.  $\Delta t$  stellt die Differenz zwischen den Zeitschritten  $t_n$  und  $t_{n+1}$



dar. Gl. (7.13) lässt sich als Funktion in Abhängigkeit der gesuchten inelastischen Streckung  $\lambda_i^1(t_{n+1})$  schreiben. Man erhält

$$\begin{aligned} f((\lambda_i^1)(t_{n+1})) &= \lambda_i^1(t_{n+1}) - \lambda_i^1(t_n) \\ &\quad - \frac{4 \Delta t}{r^1} \left( \frac{\lambda(t_{n+1})^2}{\lambda_i^1(t_{n+1})^2} + \frac{2 \lambda_i^1(t_{n+1})}{\lambda(t_{n+1})} - 3 \right)^2 \left( \frac{\lambda(t_{n+1})^2}{\lambda_i^1(t_{n+1})} - \frac{\lambda_i^1(t_{n+1})^2}{\lambda(t_{n+1})} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Diese nichtlineare Funktion muss im Sinne eines Newton-Verfahrens linearisiert werden. Dazu wird eine Taylor-Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied

$$f((\lambda_i^1)^k(t_{n+1})) + \frac{\partial f((\lambda_i^1)^k(t_{n+1}))}{\partial (\lambda_i^1)^k(t_{n+1})} ((\lambda_i^1)^{k+1}(t_{n+1}) - (\lambda_i^1)^k(t_{n+1})) = 0 \tag{7.15}$$

angewandt. Dabei steht der zusätzliche, hochgestellte Index  $k$  für den Iterationsindex im Newton-Verfahren. Der Ableitungsterm in Gl. (7.15) repräsentiert die tangentielle Steifigkeit  $K_T^1$

$$\begin{aligned} K_T^1 &= \frac{\partial f((\lambda_i^1)^k(t_{n+1}))}{\partial (\lambda_i^1)^k(t_{n+1})} \\ &= 1 + \frac{4 \Delta t}{r^1} \left( \frac{\lambda^2}{\lambda_i^1} - \frac{(\lambda_i^1)^2}{\lambda} \right) \left( \frac{4 \lambda^4}{(\lambda_i^1)^5} + \frac{4 \lambda}{(\lambda_i^1)^2} - \frac{8 \lambda_i^1}{\lambda^2} - \frac{12 \lambda^2}{(\lambda_i^1)^3} + \frac{12}{\lambda} \right) \\ &\quad + \frac{4 \Delta t}{r^1} \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} + \frac{2 \lambda_i^1}{\lambda} - 3 \right)^2 \left( \frac{\lambda^2}{(\lambda_i^1)^2} - \frac{2 \lambda_i^1}{\lambda} \right) \Big|_k. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Aus Übersichtlichkeitsgründen wurde bei der Notation von Gl. (7.16) auf die Mitnahme des Zeitschritts ( $t_{n+1}$ ) verzichtet. Der Iterationsindex ist an dem vertikalen Balken angegeben. Alle Streckungen  $\lambda$  und  $\lambda_i^1$  sind hinsichtlich des Zeitschritts ( $t_{n+1}$ ) und des  $k$ -ten Iterationsschritts zu betrachten. Das Inkrement für das Update des Newton-Verfahrens ergibt sich gemäß Gl. (7.15) als

$$\Delta \lambda_i^1(t_{n+1}) = (\lambda_i^1)^{k+1}(t_{n+1}) - (\lambda_i^1)^k(t_{n+1}) = - \frac{f((\lambda_i^1)^k(t_{n+1}))}{K_T^1}, \tag{7.17}$$

und damit folgt für den neuen Iterationsschritt  $k + 1$  die inelastische Streckung

$$(\lambda_i^1)^{k+1}(t_{n+1}) = (\lambda_i^1)^k(t_{n+1}) + \Delta \lambda_i^1(t_{n+1}). \tag{7.18}$$

Als Abbruchkriterium wird der Betrag der Funktion  $|f((\lambda_i^1)^{k+1}(t_{n+1}))|$  mit einem Toleranzmaß  $10^{-8}$  verglichen. Wird dieses nicht erfüllt, wird für den Algorithmus der Iterationsschritt  $k + 1$  zum neuen Iterationsschritt  $k$  und das Verfahren wird so lange fortgeführt bis das Abbruchkriterium erreicht wird. Im Anschluss kann der nächste Zeitschritt betrachtet werden.

Bei den verbleibenden drei Maxwell-Elementen mit dem Neo-Hookeschen Ansatz ist das beschriebene Verfahren analog durchzuführen. Daher werden an dieser Stelle nur zusammenfassend die wesentlichen Zusammenhänge bereitgestellt. Die Evolutionsgleichungen für die Maxwell-Elemente  $j = 2 \dots 4$  in skalarer Form lauten

$$\dot{\lambda}_i^j = \frac{4}{3 r^j} \left( \frac{\lambda^2}{\lambda_i^j} - \frac{(\lambda_i^j)^2}{\lambda} \right), \quad (7.19)$$

womit sich der funktionale Zusammenhang

$$\begin{aligned} f(\lambda_i^j(t_{n+1})) &= \lambda_i^j(t_{n+1}) - \lambda_i^j(t_n) - \frac{4 \Delta t}{3 r^j} \left[ \frac{\lambda^2(t_{n+1})}{\lambda_i^j(t_{n+1})} - \frac{(\lambda_i^j(t_{n+1}))^2}{\lambda(t_{n+1})} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

ergibt. Die resultierende tangentielle Steifigkeit lautet

$$K_T^j = 1 + \frac{4 \Delta t}{3 r^j} \left[ \frac{\lambda^2(t_{n+1})}{((\lambda_i^j)^k(t_{n+1}))^2} + \frac{2 (\lambda_i^j)^k(t_{n+1})}{\lambda(t_{n+1})} \right]. \quad (7.21)$$

Da die Relaxationszeiten  $r^j$  als prozessabhängige Funktionen vorliegen, müssen die darin vorkommenden Prozessgrößen ebenso auf den uniaxialen Zugversuch bezogen werden. Für die Norm der Deformationsgeschwindigkeit  $\|\mathbf{D}\|$  folgt

$$\|\mathbf{D}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}. \quad (7.22)$$

Bezüglich der vierten Relaxationszeit  $r^4$  muss zudem die Norm des rechten inelastischen Cauchy-Green Deformationstensor  $\|\mathbf{C}_i^4\|$  berücksichtigt werden, welche sich für den uniaxialen Lastfall auf den skalaren Zusammenhang

$$\|\mathbf{C}_i^4\| = \sqrt{(\lambda_i^4)^4 + \frac{2}{(\lambda_i^4)^2}} \quad (7.23)$$

reduziert.

## 7.3 Parameteridentifikation

Zur Identifikation der Materialparameter werden die numerische Umsetzung auf Basis der uniaxialen Daten aus dem vorangegangenen Kap. 7.2 und die zugrunde gelegten experimentellen Daten aus Kap. 6 herangezogen.

Das Verfahren zur Parameteridentifikation ist ein inverses Problem, bei dem ein Vergleich der experimentell gewonnenen Daten mit dem entwickelten Materialmodell durchgeführt wird. Beim Modell wiederum werden mit geeigneten Optimierungsalgorithmen sämtliche Materialparameter  $\mathbf{p}$  so lange variiert, bis eine möglichst gute Übereinstimmung der experimentellen und simulierten Daten vorliegt. Zu diesem Zweck wird eine Zielfunktion  $f(\mathbf{p})$  eingeführt, welche ein Maß für die Übereinstimmung der beiden Datensätze ist. Sie wird als normierte Differenz der Frobenius-Norm der uniaxialen Daten von Simulation und Experiment

$$f(\mathbf{p}) := \sum_j \sum_i^{n_j} \frac{\|T_{11,exp}^i - T_{11,sim}^i(\mathbf{p})\|_j}{n_j \|T_{11,exp}^i + T_{11,sim}^i(\mathbf{p})\|_j} \rightarrow \min \quad (7.24)$$

definiert. Der Index  $i$  kennzeichnet die Einzelkomponenten des Spannungsvektors über einen Versuch. Sie werden zunächst auf die Anzahl der Datenpunkte  $n_j$  für jeden Versuch normiert, so dass Versuche mit einer größeren Zahl an Datenpunkten nicht stärker ins Gewicht fallen. Für die Parameteridentifikation werden die Fehler aller  $j$  Versuche letztendlich aufsummiert. Die weitere Normierung auf die Summe der Spannungen erfolgt, da für größere Spannungswerte die absolute Differenz zu größeren Werten tendiert. Eine Gewichtung des Fehlermaß wird somit realisiert. Die Funktion (7.24) gilt es durch Variation des Parametersatzes  $\mathbf{p}$  zu minimieren. Diesbezüglich werden die numerischen Algorithmen aus Kap. 7.2 in *Matlab*<sup>®</sup> umgesetzt und die Resultate mit den eingelesenen, experimentellen Daten gemäß der Funktion (7.24) verglichen. Zur Minimierung dieser Funktion stehen in *Matlab*<sup>®</sup> mehrere Optimierungsalgorithmen zur Verfügung. Da sie in der vorliegenden Arbeit nur als Hilfsmittel genutzt werden, sei der Leser für genauere Details zu den Optimierungsstrategien auf die folgende Literatur verwiesen.

Bei der Parameteridentifikation in dieser Arbeit werden drei Optimierungsstrategien eingesetzt. Neben den *Evolutionstrategien* [86, 138] werden die Verfahren *fmin-search* [130] sowie *pattern search* [103, 168] eingesetzt. Eine alternierende Nutzung der drei Verfahren hat sich als sinnvoll gezeigt. Die Variation der Einzelparameter erfolgt auf verschiedene Art und Weise. Gerade beim Verfahren *pattern search* wird

ein größerer Suchradius für die Wahl eines neuen Parametersatzes betrachtet. Diese Methode ist daher hilfreich, sofern die Optimierung in einem lokalen Minimum der Zielfunktion stagniert und ein größerer Variationsbereich notwendig wird, um dieses zu überwinden.

Des Weiteren ist es trotz der verschiedenen Suchradien zu empfehlen, alle Materialparameter auf die gleiche Größenordnung zu normieren. Diesbezüglich ist die Logarithmierung der einzelnen Parameter sinnvoll.

Für die Grundelastizität wurden bereits in Kap. 6.2 die ermittelten Parameter vorgestellt. Diese werden bei der Identifikation des viskoelastischen Parametersatzes fixiert, so dass lediglich die Nichtgleichgewichtsparameter variiert werden. Für die vier Maxwell-Elemente ergibt sich der Parametersatz in Tabelle 7.1. Als Grundlage für die Parameteridentifikation dienen sämtliche zuvor vorgestellte Experimente.

Maxwell-Element 1	$c_{301}$ [MPa]	$r_{11}$ [s]				
	0,0009	81000				
Maxwell-Element 2	$c_{102}$ [MPa]	$r_{21}$ [s]	$r_{22}$ [s]		$k_{21}$ [s]	
	0,1045	35,48	2650		$10^{15}$	
Maxwell-Element 3	$c_{103}$ [MPa]	$r_{31}$ [s]	$r_{32}$ [s]	$r_{33}$ [s]	$k_{31}$ [s]	$k_{32}$ [s]
	0,065	9,81	512,9	392000	32,45	$10^{15}$
Maxwell-Element 4	$c_{104}$ [MPa]	$r_{41}$ [s]	$r_{42}$ [s]	$r_{43}$ [s]	$k_{41}$ [s]	
	3,382	0,1	0,073	6,5	134,53	

Tabelle 7.1: Identifizierte Parameter bezüglich der Viskoelastizität.

Der Parameter  $r_{41}$  wird dabei auf den positiven Wert 0,1 fixiert, so dass für einen Zustand ohne inelastische Dehnungen  $\|\mathbf{C}_i^4\|$  im vierten Maxwell-Element die Relaxationszeit nicht 0 wird. Die Evolutionsgleichung (6.16) würde sonst singulär.

Bei der Betrachtung des letztendlich identifizierten Parametersatzes fällt eine Besonderheit auf. Die Parameter  $k_{21}$  sowie  $k_{32}$  werden in Richtung eines oberen Grenzwerts mit  $10^{15}$  ermittelt. Diese Wahl der Parameter resultiert im deutlich unterschiedlichen Verhalten für den statischen Relaxationsprozess gegenüber Experimenten mit einer Dehnrates ungleich Null, d. h. für nichtstationäre Prozesse.

Für den Relaxationsprozess nehmen bezüglich der Relaxationszeiten  $r^j$  in Gl. (6.18) die Exponentialfunktionen des jeweiligen Arrhenius-Terms aufgrund der fehlenden Deformationsgeschwindigkeit  $\|\mathbf{D}\| = 0$  den Wert Eins an. Damit werden die entsprechenden Relaxationszeiten  $r_{22}$  und  $r_{33}$  für stationäre Prozesse hinzugeschaltet, um das Langzeitverhalten, welches bei konstant gehaltener Deformation beobachtet werden konnte, in adäquater Weise abzubilden.

Sobald jedoch eine Dehnrates im Prozess vorliegt, d. h. sobald die Deformations-

geschwindigkeit  $||\mathbf{D}||$  ungleich Null ist, kommen die Relaxationszeiten  $r_{22}$  und  $r_{33}$  nicht mehr zum Tragen, da die jeweiligen Exponentialfunktionen die beiden Parameter hinreichend klein skalieren.

Somit wird auch der Nutzen der doppelt ausgeführten Arrhenius-Funktion bei der Relaxationszeit  $r^3$  deutlich. Das entsprechende Maxwell-Element vermag zwei verschiedene Prozesse abzubilden. Bei Prozessen mit vorhandener Dehnrate ungleich Null wird der mittlere Term, d. h. die Relaxationszeit  $r_{32}$  beachtet, während die  $r_{33}$  eliminiert wird. Für stationäre Prozesse jedoch ist die Relaxationszeit  $r_{33}$  eindeutig dominant.

## 7.4 Ergebnisse & Diskussion

Anhand der identifizierten Parameter soll im Folgenden der Vergleich zwischen den simulierten Daten und dem Experiment aufbereitet werden. Die Grundelastizität wurde bereits in einem vorherigen Schritt in Kap. 6.2 betrachtet. Der Verlauf konnte qualitativ und quantitativ sehr gut abgebildet werden.

Bezüglich der zeitabhängigen Effekte wird das Augenmerk zunächst auf die zyklischen Experimente gerichtet. Die wesentliche Charakteristik, welche das Modell abbilden soll, ist die ausgeprägte Hysterese, die selbst bei geringen Dehnraten vorhanden ist. Des Weiteren soll die Änderung der Form der Hysterese inklusive des Spannungsmaximums bei Variation der Dehnrate nur in geringem Maße erfolgen. Abb. 7.1 zeigt den Vergleich der Modellbeschreibung mit den durchgeführten, zyklischen Versuchen für die Raten  $0,00273 \text{ s}^{-1}$ ,  $0,0273 \text{ s}^{-1}$  und  $0,273 \text{ s}^{-1}$ . Das beschriebene Materialverhalten kann mithilfe des Modells in sehr guter Art und Weise abgebildet werden. Die Abweichung für geringe Dehnungen ist zu erklären, da im realen Experiment für die entstehenden Druckspannungen das weiche Probenmaterial ausbuckelt. In der Simulation wiederum können die Druckspannungen dargestellt werden.

Auch das Relaxationsverhalten auf Basis des Modells stimmt für verschiedene Dehnungsniveaus bei einer Haltezeit von einer Stunde sehr gut mit dem Experiment überein. Es fallen lediglich Abweichungen zu Beginn des Relaxationsprozesses auf. Zudem kann hinsichtlich längerer Zeitskalen das Relaxationsverhalten auch über 20000 s hinaus am Beispiel der Dehnungsstufe  $\lambda=1,76$  abgebildet werden. Abb. 7.2 zeigt die gute Übereinstimmung für die Versuche mit beiden Haltezeiten.

Ein Vergleich der drei Dehnungsstufen in Abb. 7.2 zeigt die gute Übereinstimmung.

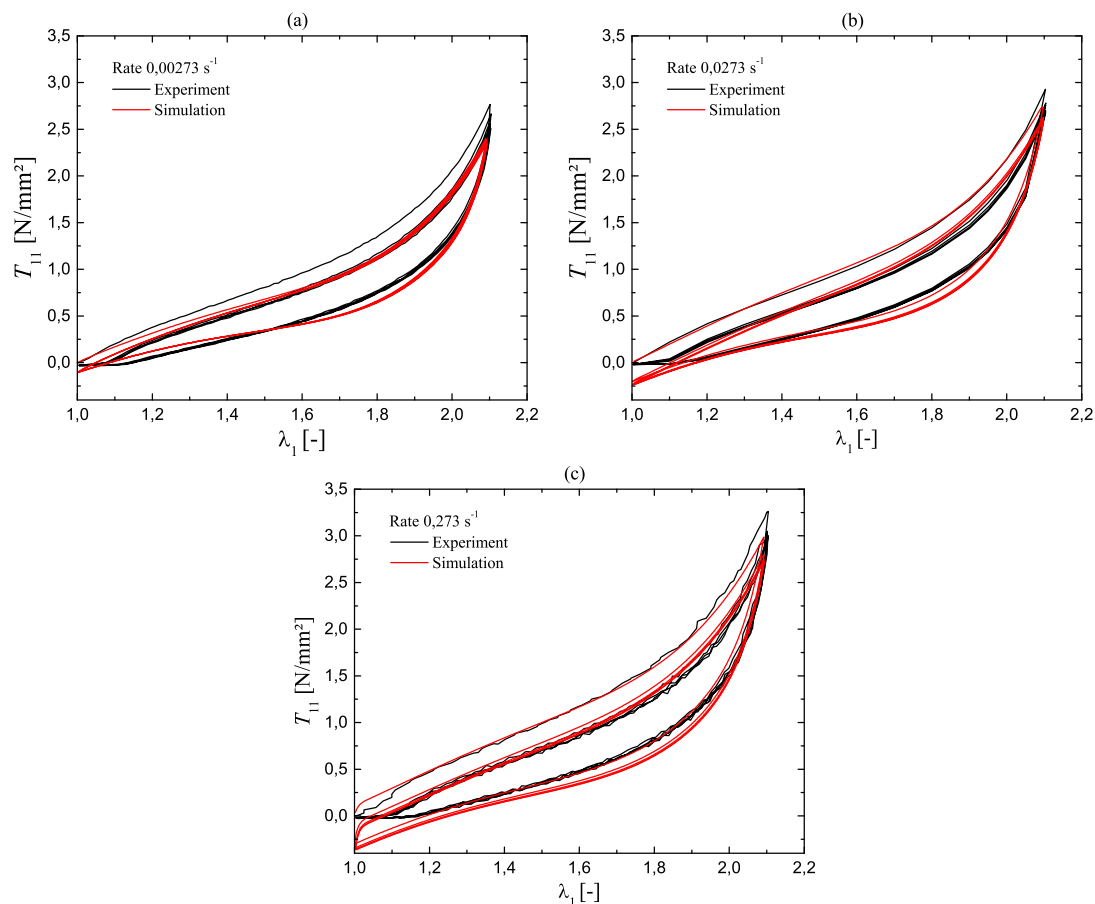


Abbildung 7.1: Vergleich von Simulation und Experiment für zyklische Versuche bei verschiedenen Dehnraten:  
a):  $0,00273 \text{ s}^{-1}$ , b):  $0,0273 \text{ s}^{-1}$ , c):  $0,273 \text{ s}^{-1}$ .

Hinsichtlich längerer Zeitskalen kann das Verhalten auch über 20000 s Haltezeit abgebildet werden, wie in Abb. 7.2 für die Dehnungsstufe  $\lambda=1,76$  zu sehen ist.

Wie bereits bei der Parameteridentifikation in Kap. 7.3 beschrieben wurde, beeinflussen die Materialparameter  $k_{21}$  sowie  $k_{32}$  und damit auch  $r_{22}$  und  $r_{33}$  die Beschreibung des Relaxationsprozesses maßgeblich.

In Bezug auf den Payne-Effekt wird zunächst der Versuch bei einer Vordeformation von 60 % und variierender dynamischer Amplitude betrachtet. Obwohl kein spezieller Anteil des Modells zur Beschreibung des amplitudenabhängigen Verhaltens entwickelt wurde, bietet das Materialmodell die Möglichkeit das amplitudenabhängige Verhalten abzubilden. Eine steigende dynamische Amplitude resultiert in einem geringeren Speichermodul  $G'$ . Abb. 7.3 zeigt den Vergleich des Modells mit den aus dem Experiment gewonnenen Daten.

Dies deutet darauf hin, dass die Nichtlinearitäten im Materialmodell die Möglichkeit bieten, die beschriebenen Wechselwirkungen im Material in Bezug auf Abb.

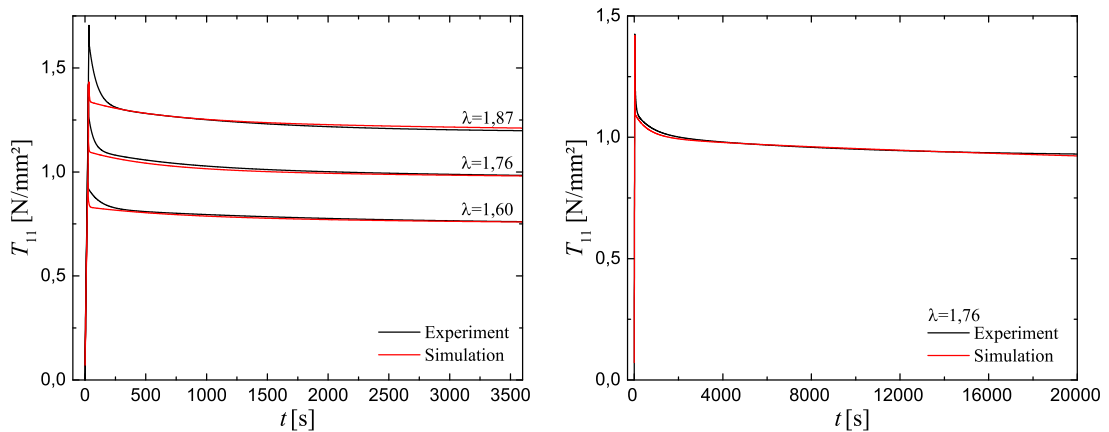


Abbildung 7.2: Vergleich von Simulation und Experiment:

links: Relaxationsprozesse an verschiedenen Dehnungsstufen, über eine Haltezeit von einer Stunde.

rechts: Relaxationsprozess bei  $\lambda=1,76$  über eine Haltezeit von 20000 s.

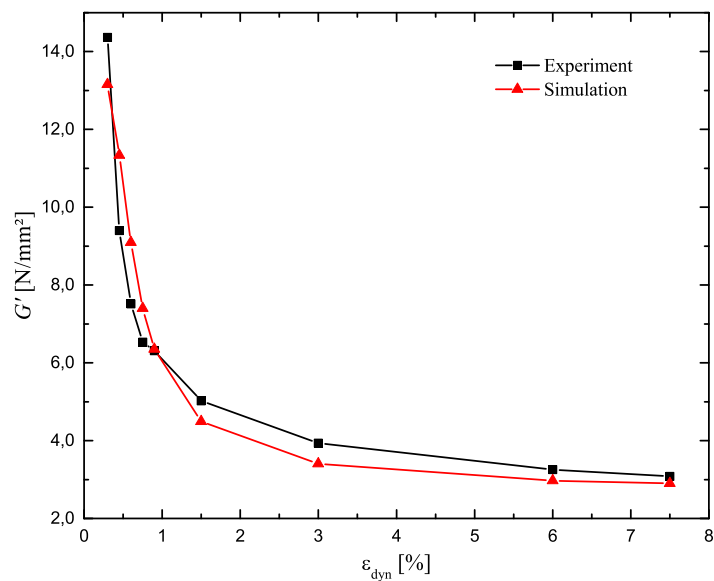


Abbildung 7.3: Vergleich von Simulation und Experiment für einen zyklischen Versuch mit variierender dynamischer Amplitude bei einer Vordeformation von 60 % und einer Belastungsfrequenz von 1 Hz.

6.3 abzubilden. Der amplitudenabhängige Payne-Effekt in Form der Anzahl der weichen Füllcluster, die während der zyklischen Belastung aufbrechen und reagglomerieren, ist auch im Modell enthalten.

Werden zudem noch beim Payne-Effekt unterschiedliche Vordeformationen untersucht, benötigt das Modell ebenso keinen Zusatz in der Beschreibung. Die Nichtli-

nearität der Grundelastizität, welche mithilfe des Yeoh-Ansatzes beschrieben wird, resultiert in unterschiedlichen lokalen Steifigkeiten entlang der Gleichgewichtsspannung. Die beginnende Erweichung mit anschließender Steigerung der Steifigkeit für höhere Deformationen in der Gleichgewichtskurve (siehe Abb. 6.8) äußert sich ebenso bei zyklischer Belastung um die entsprechenden Mitteldehnungen.

Der Vergleich des Modells mit den experimentellen Ergebnissen für verschiedene Deformationen wird in Abb. 7.4 dargestellt. Ohne Einbeziehung der entsprechenden experimentellen Daten bei der Parameteridentifikation kann das Modell den Verlauf der Amplitudenabhängigkeit bezüglich verschiedener Vordeformationen bereits abbilden. Bezüglich der maximalen Vordeformation wird der Speichermodul allerdings leicht überschätzt.

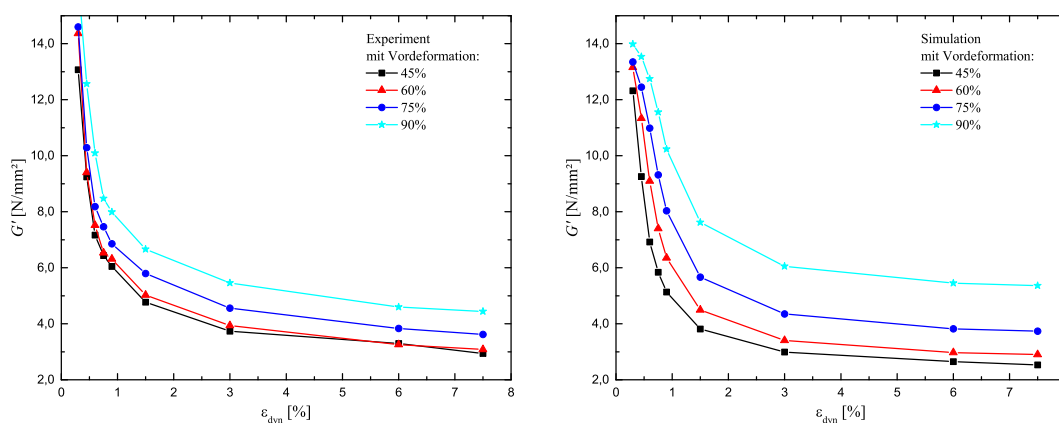


Abbildung 7.4: Untersuchungen bezüglich des Payne-Effekts für verschiedene Vordeformationen:  
links: Experiment; rechts: Simulation.

Zuletzt soll noch überprüft werden, ob die in den Kapiteln 7.1 sowie 7.2 vorgestellten numerischen Verfahren übereinstimmen. Beide Verfahren basieren auf unterschiedlichen Ansätzen und sind in verschiedenen Programmierumgebungen implementiert.

Anhand zweier Experimente zeigt Abb. 7.5 allerdings, dass beide Methoden bezüglich des zugrunde gelegten uniaxialen Lastfalls zu identischen Ergebnissen führen. Sowohl für den Relaxationsversuch als auch für das zyklische Experiment liefern beide Implementierungen die selben Zusammenhänge. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind beim zyklischen Versuch lediglich die ersten eineinhalb Zyklen dargestellt. Auch für mehrere Zyklen bilden beide Methoden das Materialverhalten identisch nach.

Eine wesentliche Problematik hinsichtlich der Modellbeschreibung äußert sich in der Parameteridentifikation. Die Ursache kann in den komplexen Funktionen, mit



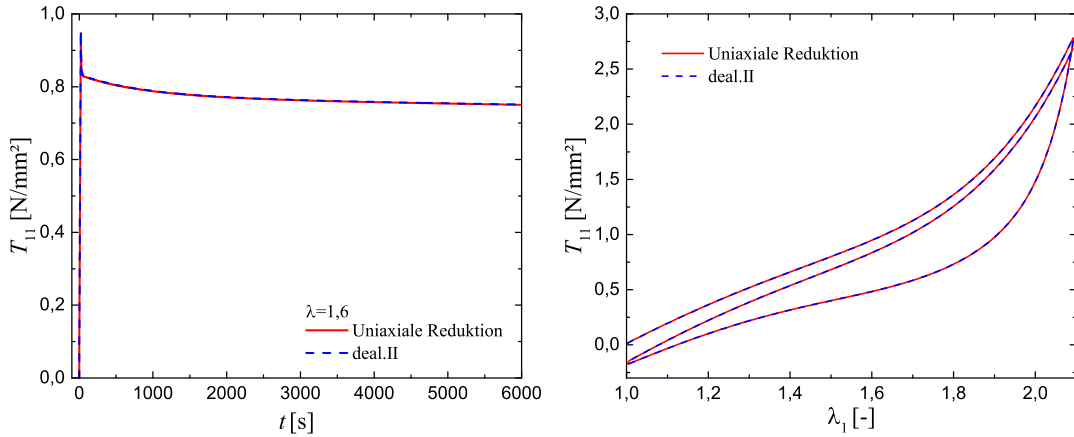


Abbildung 7.5: Vergleich der beiden numerischen Verfahren für einen Relaxationsversuch bei  $\lambda=1,6$  (links) und einen zyklischen Versuch bei einer Rate von  $0,0273\text{s}^{-1}$  (rechts).

welchen die Relaxationszeiten  $r^j$  in Gl. (6.18) formuliert werden, gesehen werden. Bezüglich jeder Relaxationszeit  $r^j$  koppeln mehrere Parameter miteinander in Form der Summanden und Exponentialfunktionen in Gl. (6.18).

Die Zielfunktion wird aufgrund dessen hinreichend viele lokale Minima aufweisen. Des Weiteren zeigt ein Vergleich der im Rahmen dieser Arbeit erfolgten Parameteridentifikation unter Einbeziehung der zyklischen Versuche bei der Betrachtung des Payne-Effekts mit den Resultaten in der Dissertation von Koprowski-Theiß [86] unterschiedliche identifizierte Parametersätze. Der Vergleichsparametersatz aus ihrer Dissertation kann Tabelle 7.2 entnommen werden. Die angegebene prozentuelle Abweichung gibt den Unterschied des im Rahmen dieser Arbeit identifizierten Parametersatzes in Bezug auf die Parameter von Koprowski-Theiß [86] wider. Bei der zugrunde gelegten Parameteridentifikation wurden dabei die Versuche bezüglich des Payne-Effekts nicht einbezogen. Allerdings weichen bezüglich der Relaxationsversuche aus Abb. 6.9 und der zyklischen Versuche in Abb. 6.12 die Simulationen anhand beider Parametersätze nicht sichtlich voneinander ab.

Einen ein-eindeutig identifizierten, optimalen Parametersatz zu finden ist aufgrund der Komplexität des Modellcharakters ein sehr schwieriges Unterfangen. Mehrere Parametersätze können für verschiedene Versuche nahezu identische Ergebnisse liefern. Bei der Einbeziehung neuer Experimente mit einem Startparametersatz aus vorangegangenen Untersuchungen ist die alternierende Nutzung verschiedener Optimierungsstrategien unbedingt zu empfehlen, da die Gefahr einer Stagnation in einem lokalen Minimum besteht.

Maxwell-Element 1	$c_{301}$ [MPa]	$r_{11}$ [s]				
	0,002	$10^6$				
Abweichung [%]	-55	-92				
Maxwell-Element 2	$c_{102}$ [MPa]	$r_{21}$ [s]	$r_{22}$ [s]		$k_{21}$ [s]	
	0,057	40	4000		$10^{14}$	
Abweichung [%]	83	-11	-34		900	
Maxwell-Element 3	$c_{103}$ [MPa]	$r_{31}$ [s]	$r_{32}$ [s]	$r_{33}$ [s]	$k_{31}$ [s]	$k_{32}$ [s]
	0,061	23	529	400000	32,08	$10^{14}$
Abweichung [%]	7	-58	-3	-2	1	900
Maxwell-Element 4	$c_{104}$ [MPa]	$r_{41}$ [s]	$r_{42}$ [s]	$r_{43}$ [s]	$k_{41}$ [s]	
	3	0,1	0,22	20,74	131,82	
Abweichung [%]	13	0	-67	-69	2	

Tabelle 7.2: Vergleichsparametersatz für die identifizierten Parameter bezüglich der Viskoelastizität aus der Dissertation von Koprowski-Theiß [86].

# 8

---

## Optimierung des experimentellen Prozesses zur Ermittlung der Grundelastizität

---

Das in der vorliegenden Arbeit untersuchte rußgefüllte EPDM zeichnet sich durch ein ausgeprägtes nichtlinear-viskoelastisches Materialverhalten aus. Dieses äußert sich bei zyklischen Belastungen selbst für langsamste Dehnraten in einer ausgeprägten Hysterese. Des Weiteren laufen stationäre Belastungen in Form von Relaxationsversuchen auf sehr großen Zeitskalen ab.

Aus dem beschriebenen Verhalten ergibt sich, dass die klassischen Experimente zur Ermittlung der Grundelastizität, wie in Kap. 6.2 bereits beschrieben, nicht genutzt werden können. Die Versuchsführung zur Trennung von Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsspannungen ist ein komplexer Prozess.

Gerade aufgrund der beobachtbaren ausgeprägten Inelastizitäten ist allerdings in einer rein viskoelastischen Beschreibung die Bereitstellung einer zuverlässigen Modellbasis in Form der Grundelastizität ein signifikanter Schritt.

Letztendlich wurden zur Ermittlung der Gleichgewichtskurve in Abb. 6.8 zyklische Versuche genutzt. Für die Versuchsführung wurden in Kap. 6.2 die Prozessparameter lediglich auf Basis von Erfahrungswerten festgelegt. Da das vorliegende Verhalten typisch für gefüllte Elastomere ist, widmet sich dieses Kapitel, auch im Hinblick auf Folgeuntersuchungen an weiteren gefüllten Elastomeren, der Optimierung des experimentellen Prozesses zur Ermittlung der Grundelastizität. Die

Grundlage bildet das vorgestellte Modell. Dabei werden Simulationen des Experiments bei fixierten Materialparametern gemäß der Tabellen 6.1 sowie 7.1 zur Optimierung genutzt.

Um die Gleichgewichtsspannungen zu gewinnen, wurden bereits in der Modellentwicklung zyklische Belastungen um eine Mitteldehnung aufgebracht. Dabei fällt die resultierende Hystereseschleife von Zyklus zu Zyklus ab, bis sich schließlich eine stationäre Position und Gestalt der Hysterese einstellt (siehe Abb. 6.7).

Sedlan [157] hat sich in seiner Arbeit mit der Stabilisierung der Hysterese für die beschriebenen Belastungen beschäftigt. Basierend auf seinen Untersuchungen ist zu erwarten, dass dieses Verhalten jedoch stark von der Wahl der Versuchsparameter abhängt. Daher soll in der Optimierung des Experiments überprüft werden, ob die Wahl der Prozessparameter auf Erfahrungsbasis sinnvoll war. Außerdem stellt sich die Frage, ob ein allgemeiner Leitfaden für zuverlässige und reproduzierbare Experimente in der Betrachtung der Grundelastizität erstellt werden kann.

Sedlan [157] konnte im Rahmen seiner Studien beobachten, dass der in Abb. 6.7 beschriebene Abfall der Hysterese bei zyklischer Belastung sehr stark vom Verhältnis von der Zykluszeit  $T$  und der Relaxationszeit  $r$  der angeregten Maxwell-Elemente abhängt. Die Zykluszeit stellt dabei die Zeit für eine gesamte Lastperiode dar. Wird ein Maxwell-Element mit der Relaxationszeit  $r$  zyklisch um eine Mitteldehnung belastet, so bildet sich eine Hysterese aus. Abb. 8.1 zeigt die Auswirkung der Variation des Verhältnisses  $T/r$  auf das hysteretische Verhalten anhand von einhalb Belastungszyklen.

Während bei dem geringsten Verhältnis  $T/r = 1$  die beiden Belastungspfade deutlich voneinander abweichen, kommen für das 100-fache Verhältnis  $T/r = 100$  beide Belastungspfade nahezu aufeinander zu liegen. Größere Verhältnisse  $T/r$  benötigen eine geringere Zahl an Zyklen, um eine stabile Lage der Hystereseschleife zu erreichen. Es kann daher vermutet werden, dass die Wahl eines größeren Verhältnisses schneller zu einer Stabilität in der Hystereseschleife führt. Allerdings ist die Relaxationszeit  $r$  als Materialparameter fixiert. Zur Variation des Verhältnisses  $T/r$  kann somit nur die Zykluszeit verändert werden. Ein größeres Verhältnis resultiert damit in längeren Zykluszeiten und kann auch zu längeren Versuchsdauern führen. Es gilt daher, einen optimierten Zusammenhang zwischen der Zykluszeit und der Anzahl an notwendigen Zyklen für eine geeignete Vorkonditionierung zu ermitteln. Während bei der Bestimmung der Grundelastizität in Kap. 6.2 noch die mittlere Spannung zwischen Belastungs- und Entlastungspfad bezüglich der betrachteten Mitteldehnung im letzten Belastungszyklus als Gleichgewichtsspannung herangezogen wurde, soll für den optimierten Prozess eine alternative Versuchsführung

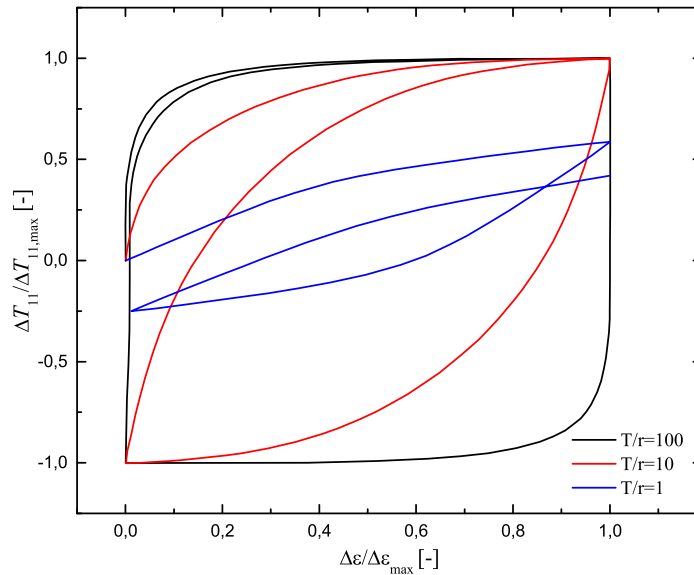


Abbildung 8.1: Vergleich von zyklischen Versuchen bei Variation des Verhältnisses von Zykluszeit und Relaxationszeit  $T/r$  (in Anlehnung an Sedlan [157]).

genutzt werden.

Vorversuche zeigen, dass die beschriebenen Zyklen um eine Mitteldehnung ebenso als Vorkonditionierungsmaßnahme genutzt werden können. Für die Dehnungsstufe  $\lambda=1,6$  werden vor einem Relaxationsversuch zyklische Deformationen um diese Dehnung aufgebracht und der Relaxationsversuch angeschlossen. Die Wahl der Prozessparameter erfolgt zunächst zufällig. 20 Zyklen mit einer Belastungsfrequenz von 1 Hz und einer Deformationsamplitude von 3 % werden betrachtet. Abb. 8.2 zeigt, dass selbst bei der willkürlichen Wahl der Versuchsparameter bezüglich der Vorkonditionierung der anschließende Relaxationsprozess der eigentlichen Gleichgewichtsspannung deutlich angenähert werden kann.

Für die Versuchsführung soll zunächst mithilfe der zyklischen Belastung eine stationäre Hysterese erreicht werden. Beginnend mit dem so erreichten Zustand wird eine Haltezeit auf der Mitteldehnung angeschlossen. Zur Ermittlung der Grundelastizität dienen schließlich das betrachtete Dehnungsmaß sowie der Spannungswert zum Ende der Relaxationsphase. Der damit resultierende experimentelle Prozess, den es zu optimieren gilt, ist in Abb. 8.3 dargestellt.

Die Prozessparameter, die im Sinne der Optimierung variiert werden können, sind die Belastungsfrequenz  $f$ , respektive die Zyklusdauer  $T$ , die Anzahl an Zyklen  $n$ , die Belastungsamplitude  $\Delta\varepsilon$  sowie die Dauer der Haltezeit für die Relaxation  $t_H$ . Der Zusammenhang zwischen Belastungsfrequenz  $f$  und Zyklusdauer  $T$  ist über  $f = 1/T$  gegeben.

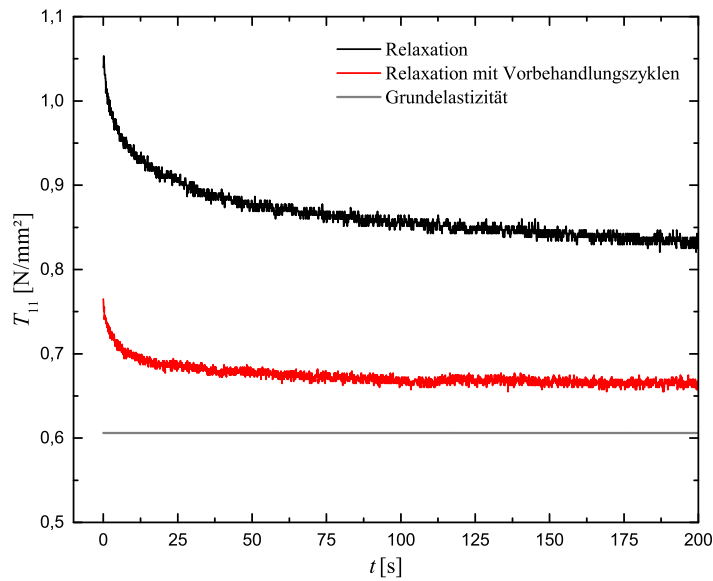


Abbildung 8.2: Einfluss von 20 Vorkonditionierungszyklen bei 1 Hz auf das Relaxationsverhalten für die Dehnungsstufe  $\lambda = 1,6$ .

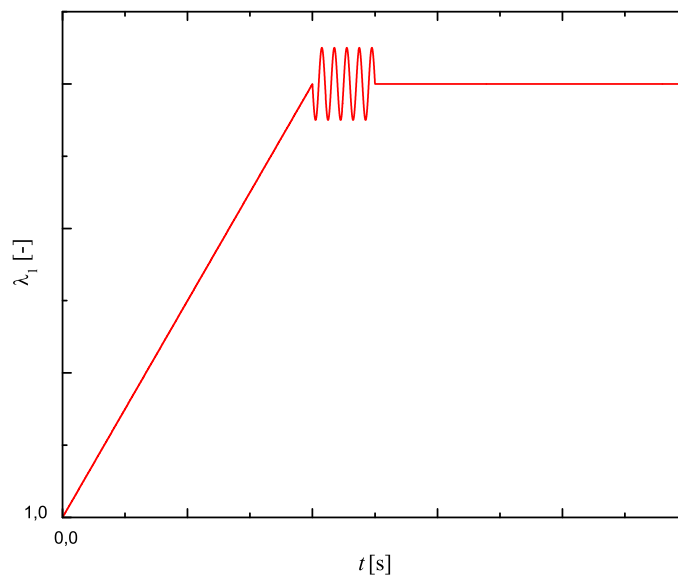


Abbildung 8.3: Schematischer Ablauf des Experiments zur Ermittlung der Grundelastizität.

Bei der Optimierung wird als Zielfunktion zunächst nur der Betrag der Nichtgleichgewichtsspannung zum Versuchsende betrachtet. Dabei wird die Versuchsdauer auf maximal eine Stunde beschränkt. Als Optimierungsstrategien werden die identischen Methoden in *Matlab*<sup>®</sup> genutzt, wie bereits bei der Ermittlung der

Materialparameter in Kap. 7.3 beschrieben.

Abb. 8.4 zeigt am Beispiel der Dehnungsstufe  $\lambda = 1,6$  sechs verschiedene Parameterkombinationen und die resultierenden numerisch ausgewerteten Experimente im Vergleich zur Grundelastizität. Die verschiedenen Zustände sind dabei in der Art gewählt, dass der Einfluss einzelner Prozessparameter auf das Versuchsergebnis herausgearbeitet werden kann. Im Folgenden werden anhand der Nummerierung

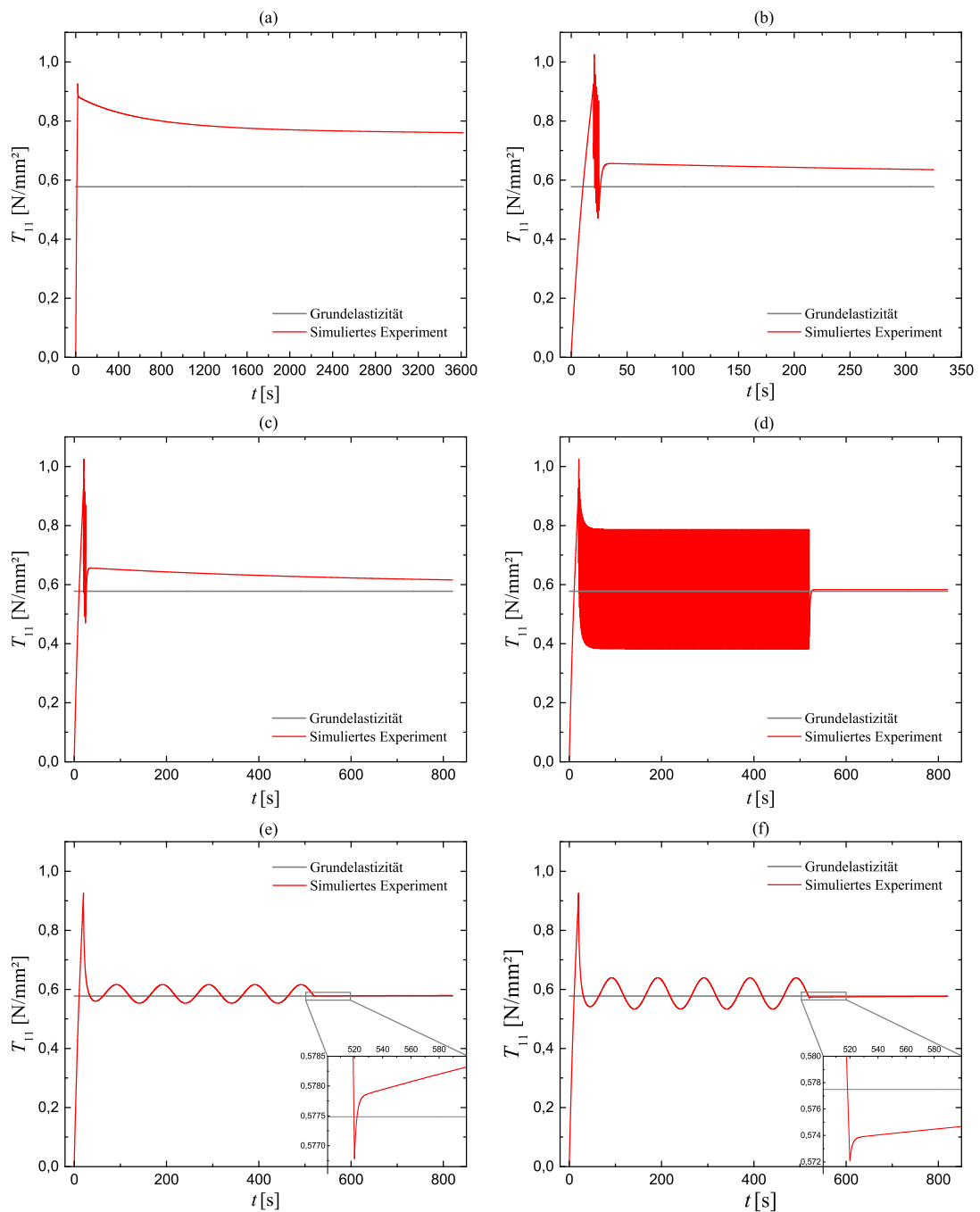


Abbildung 8.4: Vergleich mehrerer Experimente mit der Grundelastizität.

der Bilder in Abb. 8.4 die Parametersätze sowie Kernaussagen bezüglich der Ergebnisse bereitgestellt.

- a) Als Referenzexperiment wird der Relaxationsversuch ohne jegliche Vorkonditionierung über eine Haltezeit von einer Stunde betrachtet. Zum Ende der Haltezeit beträgt die Nichtgleichgewichtsspannung weiterhin  $T_{11}^{neq} = 0,18 \text{ N/mm}^2$ . Im Vergleich zum Gleichgewichtsanteil  $T_{11}^{eq} = 0,577 \text{ N/mm}^2$  ist dies ein Anteil von mehr als einem Drittel und stellt somit einen extrem hohen Wert dar. Das Ergebnis zeigt abermals auf, dass ein reiner Relaxationsversuch zur Ermittlung der Grundelastizität ungeeignet ist.
- b) Bereits die geringe Anzahl von fünf Vorkonditionierungszyklen bei einer Belastungsfrequenz von 1 Hz und einer dynamischen Amplitude  $\Delta \varepsilon = \pm 5\%$  reicht aus, um die deutlichen Vorteile der Vorkonditionierungsmaßnahmen sichtbar zu machen.  
Nach einer Haltezeit von fünf Minuten wird für eine, gegenüber des reinen Relaxationsprozesses um den Faktor 10 reduzierte Gesamtversuchsdauer, die Nichtgleichgewichtsspannung auf die beschriebene Art und Weise bereits auf den Wert  $T_{11}^{neq} = 0,05 \text{ N/mm}^2$  reduziert und ist somit nur noch ein Zehntel der Gleichgewichtsspannung.
- c) Eine Erhöhung der Haltezeit auf 13 Minuten bei ansonsten identischen Versuchsparametern zeigt keinen deutlichen Nutzen. Die Lücke zwischen Experiment und Grundelastizität kann zwar weiter geschlossen werden, allerdings beträgt zum Ende des Experiments die Nichtgleichgewichtsspannung immer noch  $T_{11}^{neq} = 0,038 \text{ N/mm}^2$ , d. h.  $\frac{T_{11}^{neq}}{T_{11}^{eq}} = \frac{1}{20}$ .

Es wird deutlich, dass die zyklische Vorkonditionierung weitaus größeren Einfluss auf das Endergebnis hat als die anschließende Haltezeit bei konstanter Deformation. Daher wird für die weitere Optimierung die gesamte Versuchsdauer auf die aus Versuch c) resultierenden 820 s fixiert. Außerdem wird aufgrund des geringen Einflusses der Relaxationsphase die Haltezeit mit fünf Minuten festgelegt. Auch für das reale Experiment ergibt sich somit eine akzeptable Versuchsdauer. Reproduzierbare Ergebnisse können erzielt werden, da über den vergleichsweise kurzen Versuchszeitraum klimatisch konstante Bedingungen realisierbar sind.

- d) Im Vergleich zu den vorangegangenen Versuchen wird die Anzahl der Zyklen um ein Vielfaches erhöht. Bei identischer Frequenz von 1 Hz und einer



Amplitude  $\Delta \varepsilon = \pm 5\%$  werden 500 Vorkonditionierungszyklen aufgebracht. Der Einfluss der Zyklen gegenüber dem Relaxationsvorgang ist erkennbar. Es wird bereits ein akzeptables Ergebnis erzielt. Die Überspannung am Ende des Versuchs beträgt mit  $T_{11}^{neq} = 0,005 \text{ N/mm}^2$  nur noch 1% der Gleichgewichtsspannung.

Basierend auf den Überlegungen von Sedlan [157] führen größere Verhältnisse  $T/r$  bei geringerer Anzahl an Zyklen zu einer Stabilisierung der Lage der Hysteresen. Da die langsamen Relaxationszeiten die wesentliche Problematik in der Versuchsführung mit sich bringen, ist die bisherige Belastungsfrequenz von 1 Hz mutmaßlich zu schnell für ein optimales Versuchsergebnis. Daher wird für die folgenden Experimente die Belastungsfrequenz auf 0,01 Hz reduziert.

- e) Bei dieser Zykluszeit reichen nur fünf Zyklen bei einer Deformationsamplitude von  $\Delta \varepsilon = \pm 3\%$  aus, um das Ergebnis weiter zu verbessern. Die Nichtgleichgewichtsspannung nach den genannten 820s beträgt nur noch  $T_{11}^{neq} = 0,002 \text{ N/mm}^2$ .
- f) Anhand einer letzten Variation der Parameter mit einer Änderung der Dehnungsamplitude auf  $\Delta \varepsilon = \pm 5\%$  bei ansonsten identischen Versuchsbedingungen ist ein bemerkenswertes Ergebnis erkennbar, welches eindeutig auf eine optimale Versuchsführung hindeutet. Die geringe Änderung bei  $\Delta \varepsilon$  im Vergleich zu den Prozessparametern in Versuch e), führt dazu, dass ein Vorzeichenwechsel in der Nichtgleichgewichtsspannung auftritt. Sie beträgt zum Ende der Relaxation  $T_{11}^{neq} = -0,0009 \text{ N/mm}^2$ . Der Relaxationsprozess verläuft am Ende des Experiments von geringeren Werten nach oben hin zur Grundelastizität. Die Anregung der Maxwell-Elemente über die zyklische Vorkonditionierung führt bei geeigneter Parameterwahl somit dazu, dass der Gleichgewichtszustand erreicht wird und eine Relaxation nahezu überflüssig wird.

Die Detaildarstellungen in den Abbildungen Abb. 8.4 e) und Abb. 8.4 f) verdeutlichen, dass sämtliche Maxwell-Elemente bei der Vorkonditionierung angeregt werden. Während zu Beginn der Relaxationsphase beide Experimente noch negative Nichtgleichgewichtsspannungen aufweisen, ist in Versuch e) das langsamste Maxwell-Element weiterhin auf Zugspannung belastet, so dass nach einigen Sekunden ein erneuter Vorzeichenwechsel in Richtung positiver Überspannungen erfolgt.

Versuch f) wiederum zeigt, dass alle Maxwell-Elemente auf Druck belastet sind. Für diesen Fall geht der Relaxationsprozess schneller vonstatten und liefert ein im Vergleich noch besseres Ergebnis.

Die vorgestellte Prozessoptimierung zeigt, dass bei der Parameterwahl für die zyklischen Versuche zur Bestimmung der Grundelastizität in Kap. 6.2 keine optimalen Versuchsbedingungen definiert wurden. Dennoch ist anhand des deutlichen Einflusses der Vorkonditionierungsmaßnahmen erkennbar, dass die grundsätzliche Vorgehensweise bei dem vorliegenden Verhalten eindeutig zu empfehlen ist.

Ohne genaue Kenntnis über das Materialverhalten wird zudem geraten, wie bereits bei der Modellbildung angesprochen, den Belastungs- und Entlastungsprozess in einem Treppenversuch zu betrachten und die Endwerte zu vergleichen. Dabei werden auf jeder Stufe vor dem eigentlichen Relaxationsprozess die beschriebenen Vorkonditionierungszyklen vorgeschaltet. Grundlegend ist die Wahl weniger langsamer Zyklen eher zu empfehlen, anstatt mit schneller Belastungsfrequenz zu zyklisieren.

Die Übertragbarkeit der Versuchsführung auf andere Probleme wurde in der Veröffentlichung von Scheffer et al. [156] überprüft. Das Wissen über eine optimierte Versuchsführung konnte sowohl auf eine weitere Füller-Matrix-Kombination bei einem Silica-gefüllten HNBR-Elastomer (Hydrierter Acrylnitrilbutadien-Kautschuk) als auch für andere Lastzustände an einem rußgefüllten Naturkautschuk angewendet werden. Da die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit sich dem rußgefüllten EPDM widmen, sei der Leser für die genaueren Details auf die entsprechende Literatur [156] verwiesen.

Es lässt sich allerdings feststellen, dass das beobachtete Materialverhalten charakteristisch für gefüllte Elastomere im Allgemeinen ist und dass die Erkenntnisse auch für weitere Folgeuntersuchungen an derartigen Materialien genutzt werden können.

# 9

---

## Alternativer Modellansatz auf Basis einer statischen Hysterese

---

Bei der Parameteridentifikation bezüglich des vorgestellten Modells hat sich gezeigt, dass aufgrund der Komplexität der Modellformulierung eine Optimierung der Zielfunktion sehr aufwendig ist. Ein Vergleich der Ergebnisse für die zyklischen Versuche bezüglich dreier Dehnraten in Abb. 6.12 und für die Relaxationsvorgänge in Abb. 6.9 in dieser Arbeit mit denen aus der Dissertation von Koprowski-Theiß [86] lässt erkennen, dass zwei unterschiedliche Parametersätze die Experimente gleich gut nachbilden können. Die eindeutige Festlegung eines optimalen Parametersatzes ist daher fraglich.

Die wesentliche Ursache dafür wird in der starken Kopplung der einzelnen Parameter in den prozessabhängigen funktionalen Formulierungen der Relaxationszeiten  $r^j$  gesehen. Das folgende Kapitel stellt einen Ansatz vor, welcher diese Problematik umgeht und auf konstanten Materialparametern basiert.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine Modellbeschreibung umgesetzt, die keine Plastizität im Materialverhalten beinhaltet. Da nach Entlastung und mit ausreichender Wartezeit die Probekörper ihre Ursprungsgeometrie wieder vollständig einnehmen, liegen keine bleibenden Dehnungen vor. Dennoch deutet das Verhalten, vor allem bezüglich der ausgeprägten Hysterese für langsame Dehnraten, auf irreversible, ratenunabhängige Anteile in der Modellcharakteristik hin.

Zur Interpretation des mechanischen Verhaltens von plastischen Materialien werden in rheologischen Modellen Reibelemente genutzt. Anhand der mikroskopischen Vorstellung des Materialverhaltens aus Abb. 6.3 und aufgrund der beobachteten Effekte in den Experimenten wird das Materialverhalten maßgeblich von der Interaktion der Füller im Matrixmaterial beeinflusst. Wird ein gefülltes Elastomer gedehnt und brechen in Bezug auf Abb. 6.3 Füllercluster auseinander, so können diese bei weiterer Belastung aneinander vorbeigleiten. Es entsteht Reibung zwischen den Füllern. Reibung, als dehnratunabhängiger Effekt, äußert sich dabei im Materialverhalten ähnlich zu plastischem Verhalten. Lorenz et al. [114] bezeichnen die Mechanismen als innere Reibung.

Mit der Grundlage dieser Interpretation des Materialverhaltens wird im Folgenden ein Modell vorgestellt, welches als Kernaussage eine statische Hysterese beinhaltet. Eine solche Beschreibung wird gewählt, da die beobachteten zeitabhängigen Phänomene auf solch großen Zeitskalen ablaufen, dass sie für eine Vielzahl an Anwendungen nicht relevant sind. Des Weiteren kann bei der rein viskoelastischen Betrachtung nur angenommen werden, dass eine weitere Verringerung der Deformationsgeschwindigkeiten in zyklischen Versuchen zum Aufeinanderliegen von Belastungs- und Entlastungspfad führt. Eine experimentelle Untersuchung langsamerer Prozesse ist mit den zur Verfügung stehenden Mitteln nicht möglich. Die angesprochenen Punkte sprechen für eine alternative Beschreibung mit statischen Anteilen.

Die vergleichsweise geringe Veränderung in der Gestalt der Hysteresen bei Variation der Dehnrate sowie das Relaxationsverhalten werden weiterhin mit einer viskoelastischen Beschreibung behandelt. Somit ergibt sich als Kombination des ursprünglichen Modellgedankens für viskoelastisches Materialverhalten mit der Reibung der Füllerpartikel das in Abb. 9.1 dargestellte rheologische Modell.

Zum in Abb. 4.1 vorgestellten rheologischen Modell der Viskoelastizität werden parallel zwei Kombinationen aus Federn und Reibelementen hinzugeschaltet. Die Kombination der beiden Elemente wird auch Prandtl-Körper genannt. Ein ähnlicher Ansatz wird in der Arbeit von Vandenbroucke et. al [176] verfolgt. Auch in ihrer Arbeit werden die Prandtl-Elemente zur Verkörperung der Gestalt der Hysterese genutzt.

Die Parallelschaltung der beiden Prandtl-Körper wird gewählt, da somit eine Entkopplung von dem viskoelastischen Teilmodell erfolgt. Eine Reihenschaltung eines Reibelements zum viskoelastischen Modell würde unmittelbar über die Summe der Dehnungen mit dem Belastungsprozess koppeln und wäre zeitabhängig. Allerdings sollen die hinzugefügten Elemente im rheologischen Modell gerade die statischen

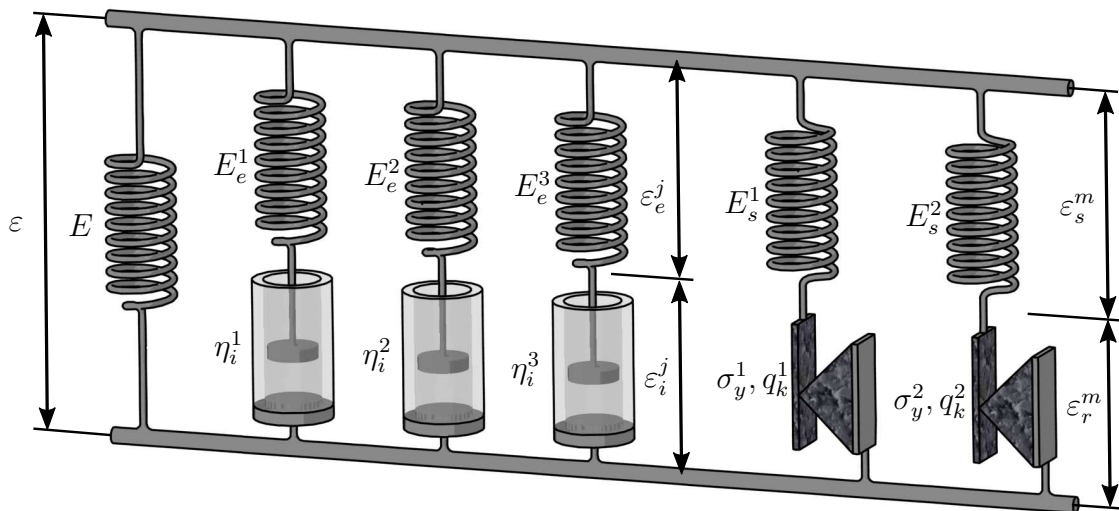


Abbildung 9.1: Rheologisches Modell der Viskoelastizität mit parallel geschalteten Prandtl-Körpern.

Prozesse ohne jegliche Ratenabhängigkeit abbilden. Durch die Parallelschaltung hängt die Spannungsantwort der Prandtl-Elemente nur von der aufgetragenen Deformation ab.

Sowohl bei den Maxwell-Elementen als auch bei den Prandtl-Körpern kann jeweils eine beliebige Anzahl zur Darstellung des Materialverhaltens parallel geschaltet werden. Die folgenden Ausführungen beschränken sich allerdings auf die in Abb. 9.1 vorgestellte Wahl von drei Maxwell-Elementen und zwei Prandtl-Elementen.

Die Ausarbeitung des Modells in einer Formulierung für finite Deformationen kann im zeitlichen Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht mehr realisiert werden. Daher beschränkt sich die folgende Vorstellung des, aus dem Modell resultierenden Gleichungssatzes, auf geometrisch lineare Gleichungen. Die Zusammenhänge werden in einer Dimension bereitgestellt, d. h. ohne dreidimensionalen Charakter. Effekte, wie die Querkontraktion sowie die Inkompressibilität werden mit der angewendeten Vorgehensweise vernachlässigt. Zudem ist ein quantitativer Vergleich des Modellergebnisses mit den vorgestellten Experimenten für finite Deformationen bis über 100% Dehnung sicherlich in Frage zu stellen. Dennoch ermöglicht die folgende Ausarbeitung des Modells mit dem Vergleich an den in der Arbeit durchgeführten Versuchen, die Vorteile und das Potential dieses alternativen Modellvorschlags im Sinne eines ingenieurmäßigen Ansatzes hervorzuheben.

Nach Abb. 9.1 teilt sich die Gesamtdehnung  $\varepsilon$  bei den Maxwell-Elementen in einen

elastischen Anteil  $\varepsilon_e^j$  und einen inelastischen Anteil  $\varepsilon_i^j$

$$\varepsilon = \varepsilon_e^j + \varepsilon_i^j \quad (9.1)$$

für jedes Maxwell-Element auf. Bei den Prandtl-Körpern erfolgt die Aufteilung der Dehnung  $\varepsilon_s^m$  der jeweiligen Feder und der Dehnung des Reibelements  $\varepsilon_r^m$  analog über

$$\varepsilon = \varepsilon_s^m + \varepsilon_r^m . \quad (9.2)$$

Die Wahl der Indizierung erfolgt in der vorgestellten Art und Weise, da die Federn der Prandtl-Elemente die Spannung in der statischen Hysterese widerspiegeln sollen, während die Reibelemente die Reibung der Füllerpartikel darstellen. Der hochgestellte Index dient jeweils der Nummerierung der Elemente. Die Spannungen addieren sich bezüglich der Parallelschaltung zur Gesamtspannung  $\sigma$  auf

$$\sigma = \sigma_{eq} + \sum_{j=1}^3 \sigma_{neq}^j + \sum_{m=1}^2 \sigma_s^m , \quad (9.3)$$

mit der Gleichgewichtsspannung  $\sigma_{eq}$ , der Nichtgleichgewichtsspannung  $\sigma_{neq}^j$  in jedem Maxwell-Element und dem statischen Anteil der Spannung  $\sigma_s^m$  aufgrund von Reibung für jeden Prandtl-Körper. Für die einzelnen Spannungen gelten folgende Zusammenhänge. Die Spannung der Gleichgewichtsfeder  $\sigma_{eq}$  hängt proportional von der aufgebrachten Deformation ab

$$\sigma_{eq} = E \varepsilon . \quad (9.4)$$

Die Spannung in den Maxwell-Elementen baut sich in den Nichtgleichgewichtsfedern auf, so dass

$$\sigma_{neq}^j = E_e^j \varepsilon_e^j = E_e^j (\varepsilon - \varepsilon_i^j) \quad (9.5)$$

folgt. Analog gilt für die Prandtl-Elemente

$$\sigma_s^m = E_s^m \varepsilon_s^m = E_s^m (\varepsilon - \varepsilon_r^m) . \quad (9.6)$$

Die folgenden Betrachtungen widmen sich der Kinematik der Nichtgleichgewichtsanteile. Für die Dämpferelemente gilt der Zusammenhang

$$\dot{\varepsilon}_i^j = \frac{1}{\eta_i^j} \sigma_{neq}^j = \frac{E_e^j}{\eta_i^j} (\varepsilon - \varepsilon_i^j) . \quad (9.7)$$

Zur Bestimmung der Deformation der Dämpfer  $\varepsilon_i^j$  kann ein Einschritt-Verfahren in Form des Euler-Rückwärts-Verfahrens genutzt werden. Mit dem Differenzenquotienten

$$\dot{\varepsilon}_i^j = \frac{\varepsilon_i(t_{n+1}) - \varepsilon_i(t_n)}{\Delta t} \quad (9.8)$$

folgt durch Kombination von Gl. (9.7) und (9.8) die inelastische Deformation  $\varepsilon_i^j(t_{n+1})$  für den aktuellen Zeitschritt  $t_{n+1}$  mit

$$\varepsilon_i^j(t_{n+1}) = \frac{\frac{E_e^j \Delta t}{\eta_i^j} \varepsilon(t_{n+1}) + \varepsilon_i^j(t_n)}{1 + \frac{E_e^j \Delta t}{\eta_i^j}}. \quad (9.9)$$

Die Betrachtung der Prandtl-Körper, insbesondere des Reibelements, erfolgt in Anlehnung an die Arbeiten von Armero [5] sowie Simo & Hughes [161]. Für jedes Reibelement wird eine Fließbedingung

$$f^m(\sigma_s^m, q_k^m) = (\sigma_s^m - q_k^m)^2 - (\sigma_y^m)^2 \quad (9.10)$$

definiert. Hierin stellt  $\sigma_y^m$  die Fließspannung für den Reibprozess und  $q_k^m$  eine kinematische Verfestigung dar, die aufgrund der Nichtlinearitäten des Materialverhaltens und der Hystereseschleife zugrunde gelegt wird. Die Verfestigung ist über den linearen Zusammenhang

$$\dot{q}_k^m = c_k^m \dot{\varepsilon}_r^m \quad (9.11)$$

gegeben. Die Überprüfung der Fließbedingung in Gl. (9.10) erfolgt in Form eines sogenannten *trial state*. Hierin wird zunächst die Dehnung des Reibelements im aktuellen Zeitschritt  $\varepsilon_r^m(t_{n+1})$  auf den letzten Zeitschritt  $\varepsilon_r^m(t_n)$  eingefroren und anhand der resultierenden Größen wird die Fließbedingung (9.10) geprüft. Die entsprechende Trial-Spannung für das Reibelement lautet

$$\sigma_s^{m,tr}(t_{n+1}) = E_s^m (\varepsilon(t_{n+1}) - \varepsilon_r^m(t_n)). \quad (9.12)$$

Analog bleibt die Verfestigung  $q_k^m(t_n)$  als Größe des Reibelements zunächst unverändert bezüglich des letzten Zeitschritts, so dass sich für den *trial state* die

Fließbedingung zu

$$\begin{aligned} f^{m,tr}(\sigma_s^{m,tr}, q_k^{m,tr}) &= (\sigma_s^{m,tr} - q_k^{m,tr})^2 - (\sigma_y^m)^2 \\ &= (E_s^m (\varepsilon(t_{n+1}) - \varepsilon_r^m(t_n)) - q_k^m(t_n))^2 - (\sigma_y^m)^2 \end{aligned} \quad (9.13)$$

ergibt. Ist das Ergebnis negativ, so kann unmittelbar mit dem nächsten Zeitschritt weiter verfahren werden, da das Verhalten des Prandtl-Elements folglich als elastisch gilt. Wird die Negativität der Fließbedingung allerdings nicht erfüllt, muss die Entwicklung der Dehnung des Reibelements  $\varepsilon_r^m(t_{n+1})$  und der Verfestigung  $q_k^m(t_{n+1})$  im Sinne eines *Return Mapping Algorithmus* erfolgen. Dieser besagt, dass sich die beiden Größen insofern entwickeln müssen, dass für den neuen Zeitschritt

$$f^m(\sigma_s^m(t_{n+1}), q_k^m(t_{n+1})) \stackrel{!}{=} 0 \quad (9.14)$$

erfüllt wird. Der aktuelle Zustand wird somit auf die Fließfläche zurückgezogen. Die Bedingung (9.14) führt zu

$$(E_s^m (\varepsilon(t_{n+1}) - \varepsilon_r^m(t_{n+1})) - q_k^m(t_{n+1}))^2 - (\sigma_y^m)^2 = 0. \quad (9.15)$$

Für die Verfestigung erfolgt eine Zeitdiskretisierung

$$\frac{q_k^m(t_{n+1}) - q_k^m(t_n)}{\Delta t} = c_k^m \frac{\varepsilon_r^m(t_{n+1}) - \varepsilon_r^m(t_n)}{\Delta t} \quad (9.16)$$

und folglich

$$q_k^m(t_{n+1}) = c_k^m (\varepsilon_r^m(t_{n+1}) - \varepsilon_r^m(t_n)) + q_k^m(t_n). \quad (9.17)$$

Für die eindimensionale Formulierung führt die Lösung des Gleichungssystems, bestehend aus Gl. (9.15) und Gl. (9.17), zum Ergebnis für die Dehnung des aktuellen Zeitschritts  $t_{n+1}$ . Die Dehnung des Reibelements ergibt

$$\varepsilon_r^m(t_{n+1}) = \frac{\pm \sigma_y^m - E_s^m \varepsilon(t_{n+1}) - c_k^m \varepsilon_r(t_n) + q_k^m(t_n)}{-E_s^m - c_k^m} \quad (9.18)$$

und kann in Gl. (9.17) eingesetzt werden. Das Vorzeichen der Fließspannung  $\sigma_y^m$  ergibt sich anhand des Prozesses. Für Belastungen ist es positiv, während bei der Entlastung des Modells  $\sigma_y^m$  die negative Lösung annimmt. Der Übergang zum nächsten Zeitschritt kann erfolgen. Die Auswertung geht analog vonstatten, bis das gesamte zugrunde gelegte Experiment abgebildet wird. Für eine dreidimensionale



Betrachtung würde zudem die Bestimmung der Fließrichtung mit einem Newton-Verfahren erforderlich, beispielsweise durch Auswertung der Normalenregel.

Da sich die wesentliche Charakteristik des Materialverhaltens in zyklischen Versuchen sowie in langen Relaxationszeiten äußert, wird das vorgestellte Modell mit diesen Datensätzen verglichen. Bereits erste Analysen mit unterschiedlicher Wahl der Parameter haben gezeigt, dass die Kernaussage, welche es abzubilden gilt, erfüllt werden kann. Allerdings werden für größere Deformationen die Spannungen stets unterschätzt, sofern der Anfangsbereich quantitativ abgebildet wird. Dieses Ergebnis lässt sich erklären, da auch beim vorgestellten Modell der finiten Viskoelastizität sowohl für die Gleichgewichtsspannung als auch für ein Maxwell-Element nichtlineare Ansätze verfolgt werden, um die versteifenden Effekte für größere Deformationen abbilden zu können.

Es liegt zwar nur eine lineare Theorie vor, allerdings werden zur Lösung der beschriebenen Problematik im Gleichgewichtsanteil und für ein Maxwell-Element Spannungs-Deformations-Zusammenhänge in höherer Ordnung gewählt. Wie bereits beim Yeoh-Ansatz in Kap. 6.2 wird auch die Gleichgewichtsfeder im vorliegenden Fall in dritter Ordnung zugrunde gelegt, d. h.

$$\sigma_{eq} = E \varepsilon^3. \quad (9.19)$$

Da für die lineare Theorie die Überspannungen für große Dehnungen noch stärker vom linearen Zusammenhang abweichen, wird für das dritte Maxwell-Element, mit  $j=3$ , die Ordnung neun gewählt. Der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhang lautet

$$\sigma_{neq}^3 = E_e^3 (\varepsilon_e^3)^9 = E_e^3 (\varepsilon - \varepsilon_i^3)^9. \quad (9.20)$$

Für die Parameteridentifikation werden die Methoden genutzt, die bereits in Kap. 7.3 angewandt wurden. Da die lineare Theorie die Hystereseschleifen jedoch noch nicht vollständig abbilden kann und daher die Minimierung der Zielfunktion ebenso nur in gewissem Maße möglich ist, erfolgt die weitere Parameteranpassung auf Basis des daraus resultierenden Startparametersatzes manuell. Dabei zeigt sich der wesentliche Vorteil der Modellbeschreibung mit statischem Anteil gegenüber der nichtlinear-viskoelastischen Betrachtung.

Bei der manuellen Parametersuche können die Einflüsse der Einzelparameter klar voneinander getrennt werden und sind in den Resultaten unmittelbar ersichtlich. Währenddessen ist bei der nichtlinear-viskoelastischen Beschreibung eine solche Trennung aufgrund der komplexen funktionalen Zusammenhänge kaum möglich.

Die Parameter koppeln zu stark, als dass sich die Einflüsse der Einzelparameter vollständig herausarbeiten lassen können.

Mit der beschriebenen Vorgehensweise ergibt sich der in Tabelle 9.1 gezeigte Parametersatz. Auf Basis dieser Parameter wird ein Vergleich mit den experimentel-

$E$ [MPa]	0,6311	$E_e^1$ [MPa]	0,9077	$E_s^1$ [MPa]	0,6047
		$E_e^2$ [MPa]	0,351	$E_s^2$ [MPa]	0,5803
		$E_e^3$ [MPa]	0,3908	$\sigma_y^1$ [MPa]	0,169
		$\eta_i^1$ [s <sup>-1</sup> ]	1,1411	$\sigma_y^2$ [MPa]	0,1749
		$\eta_i^1$ [s <sup>-1</sup> ]	26,6792	$c_k^1$ [MPa]	1,0321
		$\eta_i^1$ [s <sup>-1</sup> ]	4111	$c_k^1$ [MPa]	1,0485

Tabelle 9.1: Identifizierte Parameter für den alternativen Modellvorschlag mit statischer Hysterese.

len Ergebnissen durchgeführt. Für die zyklischen Versuche sind zwei wesentliche Merkmale von großer Bedeutung. Selbst für die langsamste Dehnrates muss eine deutliche Hystereseschleife erkennbar sein. Außerdem darf die Änderung der Hystereseschleifen bei Variation der Dehnrates nur wenig ausgeprägt sein. Die Ergebnisse der Simulation sind in Abb. 9.2 dargestellt.

Bereits auf der Grundlage der geometrisch linearen Beschreibung zeigt sich, dass der vorgestellte Alternativansatz die Möglichkeit bietet, die beschriebenen Effekte abzubilden. Auch das Relaxationsverhalten kann abgebildet werden. Wie Abb. 9.3 an der Dehnungsstufe  $\lambda = 1,87$  zeigt, gibt das Modell die Relaxation über einen Zeitraum von einer Stunde sehr gut wieder. Die sehr langen Relaxationszeiten  $r^j$  des viskoelastischen Modells sind im Alternativmodell nicht mehr vorhanden, so dass die Abbildung der Relaxation über mehrere Tage nicht möglich ist. Eine Erweiterung um langsamere Maxwell-Elemente wäre erforderlich. Dabei muss jedoch die Frage gestellt werden, ob die Zeitskalen überhaupt für die jeweilige reale Anwendung von Interesse sind.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der alternative Modellvorschlag die wesentlichen Merkmale des Materialverhaltens abzubilden vermag und die Parameteridentifikation aufgrund der fehlenden direkten Kopplung der Materialparameter deutlich einfacher verläuft. Zu einer Erweiterung des Modellgedankens im Hinblick auf eine Beschreibung für finite Deformationen wird daher geraten, um einen repräsentativen Vergleich der beiden vorgestellten Modelle durchführen zu können. Dieser Schritt soll in zukünftigen Untersuchungen erarbeitet werden.

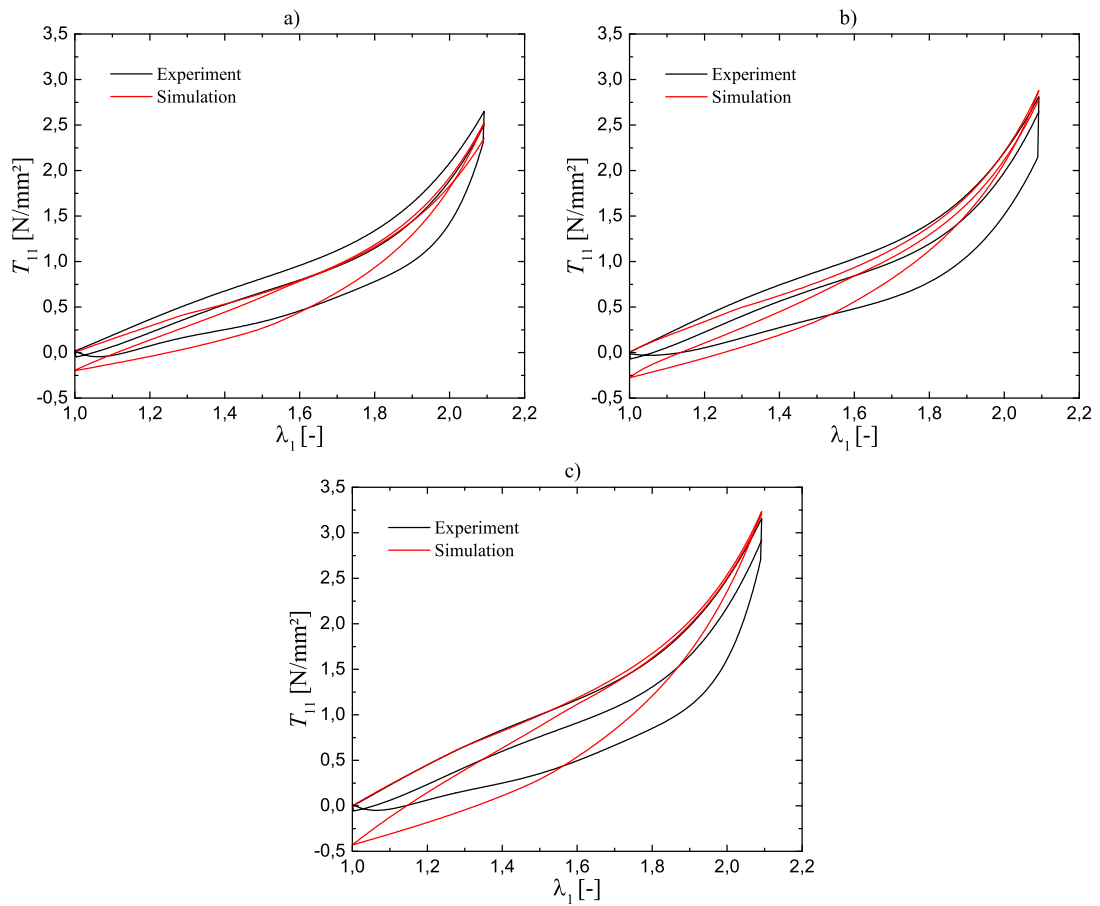


Abbildung 9.2: Vergleich der zyklischen Experimente mit dem Modell der statischen Hysterese: a):  $0,00273 \text{ s}^{-1}$ , b):  $0,0273 \text{ s}^{-1}$ , c):  $0,273 \text{ s}^{-1}$ .

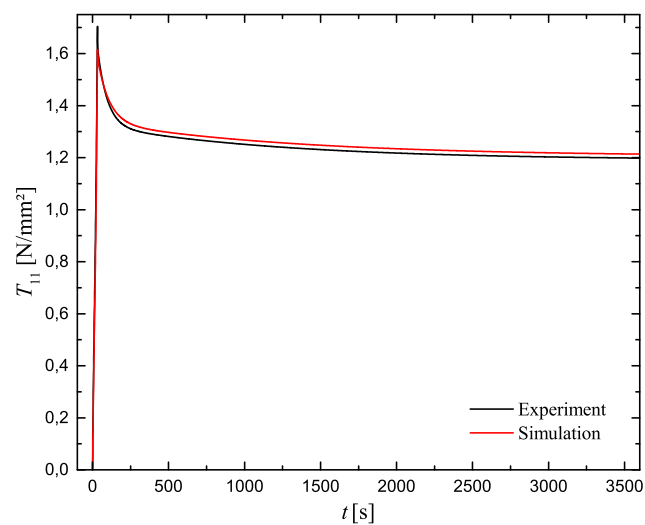


Abbildung 9.3: Vergleich des Relaxationsversuchs für  $\lambda = 1,87$  mit dem Modell der statischen Hysterese.



# 10

---

## Zusammenfassung & Ausblick

---

Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, die mechanische Charakterisierung eines rußgefüllten Elastomers beginnend beim Experiment, über die Modellentwicklung bis hin zur numerischen Umsetzung und Parameteridentifikation bereitzustellen. Die Basis des Modells waren die Ansätze aus der Dissertation von Koprowski-Theiß [86].

Das untersuchte rußgefüllte EPDM zeichnet sich durch ausgeprägte inelastische Materialeigenschaften aus. Wesentliche Punkte sind eine deutliche Hysterese bei sehr langsamen Dehnraten sowie eindeutiges viskoelastisches Verhalten im Relaxationsprozess. Dabei laufen die zeitabhängigen Mechanismen auf Zeitskalen von einigen Tagen ab. Dies begründet die Beschreibung des Materialverhaltens über eine nichtlineare Viskoelastizität. Zu den bereits angesprochenen Experimenten wurde dabei zusätzlich der amplitudenabhängige Payne-Effekt untersucht.

Die Ursache der beobachteten Effekte im mechanischen Materialverhalten wird im Wesentlichen in der Wechselwirkung der Füllpartikel untereinander und mit der Elastomermatrix gesehen. Diese Interpretation liefert eine Vorstellung über die Gestalt des Materialmodells.

Es konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe der prozessabhängigen Relaxationszeiten als zentraler Punkt des Modells die nichtlineare Viskoelastizität das Materialverhalten in guter Übereinstimmung abgebildet werden kann. Die Erweiterung des experimentellen Datensatzes um die Untersuchungen zum Payne-Effekt erforder-

ten keine weitere Anpassung des Modells. Lediglich die Parameter mussten neu identifiziert werden. Auch die Abhängigkeit der Vordeformation ist bereits im Modell beinhaltet.

Da der Grundgedanke des Materialmodells die Beschreibung als rein viskoelastisches Material ohne plastische Anteile war, wurde ein besonderes Augenmerk auf die experimentelle Ermittlung der Gleichgewichtsspannungen gelegt. Sie gelten letztendlich als Basis für die Beschreibung der zeitabhängigen Nichtgleichgewichtsspannungen. Die Erkenntnisse für eine optimale Prozessführung bei der Ermittlung der Grundelastizität sind ein sehr wichtiger Schritt, auch im Hinblick auf Folgeuntersuchungen an weiteren gefüllten Elastomeren.

Die Ursache der komplexen Parameteridentifikation wird in der prozessabhängigen Formulierung der Materialparameter gesehen. Wie ein Vergleich der resultierenden Parametersätze aus dieser Arbeit mit dem aus der Dissertation von Koprowski-Theiß [86] zeigt, ist es schwierig eindeutig von einem optimalen Parametersatz zu sprechen. Die Kopplung der Einzelparameter hat zu großen Einfluss. Obwohl es das vorgestellte Materialmodell auf Basis einer nichtlinearen Viskoelastizität vermag, eine Vielzahl an Lastzuständen über einen langen Zeitraum hinweg abbilden zu können, sollte fallspezifisch abgewogen werden, ob es sinnvoll ist, die für die Anwendung relevanten Zeitskalen auf ein gewisses Maß zu beschränken.

Basierend auf dieser Restriktion wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein alternativer Modellansatz vorgeschlagen. Die ausgeprägte Hysterese, welche in zyklischen Versuchen mit langsamen Dehnraten weiterhin deutlich sichtbar ist, wird im Sinne einer statischen Hysterese behandelt. Sie liegt dehnratenunabhängig bei zyklischer Belastung vor. Entsprechend wird das rheologische Modell der Viskoelastizität um Prandtl-Elemente erweitert. Die Reibelemente hierin spiegeln die Reibung von Füllpartikeln wider, welche unter Deformation aneinander vorbeigleiten. Die Umsetzung der Modellbeschreibung erfolgt aus zeitlichen Gründen lediglich in einer geometrisch linearen Formulierung. Der Vergleich zwischen Simulation und experimentellen Daten für große Deformationen wird dennoch gezogen, da sich somit das Potential der alternativen Modellbeschreibung bereits deutlich äußert. Der Einfluss der einzelnen Materialparameter auf das Materialverhalten ist klar ersichtlich, da im Alternativmodell keine direkte Kopplung der Einzelparameter vorliegt. Bereits auf der Basis der geometrisch linearen Theorie kann eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erreicht werden.

Auf Grundlage der vorgestellten Arbeit ist es möglich auch weitere gefüllte Elastomere zu beschreiben. Da der Aufwand in der experimentellen Charakterisierung

aufgrund des typischen, komplexen Materialverhaltens enorm hoch ist, kann mit den Erkenntnissen aus der vorliegenden Arbeit eine deutliche Steigerung in der Effizienz der Datenaufbereitung erfolgen. Zudem kann mithilfe der vorgestellten Methoden gewährleistet werden, dass ein zuverlässiger Datensatz zugrunde liegt. Gerade für rein viskoelastische Beschreibungen stellt dabei die optimierte Versuchsführung zur Ermittlung der Gleichgewichtsspannungen einen zentralen und signifikanten Punkt dar. In der Veröffentlichung von Scheffer et al. [156] wurde bereits aufgezeigt, dass die beobachteten Erkenntnisse in der experimentellen Charakterisierung auf weitere Füller-Matrix-Kombinationen übertragbar sind. Außerdem wurde in dieser Veröffentlichung herausgearbeitet, dass auch für mehraxiale Experimente die entwickelten Vorkonditionierungsmaßnahmen Verwendung finden können.

Dies stellt zugleich einen wichtigen Punkt für Folgeuntersuchungen dar. Mit dem vorhandenen Probenmaterial waren lediglich uniaxiale Versuche realisierbar. Daher sollen Untersuchungen an einem weiteren gefüllten Elastomer mit ausreichendem Probenmaterial zeigen, dass die vorgestellten Modellansätze auch für den mehraxialen Lastfall anwendbar sind. Eine formale Einbeziehung der zweiten Invarianten in die elastischen Teilstoffgesetze ist dabei problemlos möglich, falls dies erforderlich ist.

Einen wesentlichen Punkt, den es in der Zukunft zu erarbeiten gilt, ist die Erweiterung des in Kap. 9 vorgestellten Modells im Hinblick auf eine räumlich dreidimensionale Theorie finiter Deformationen. Diese konnte nicht mehr im zeitlichen Rahmen der Arbeit untergebracht werden und soll daher in Folgebetrachtungen erfolgen.

Auf diese Art und Weise stehen somit zwei grundsätzlich unterschiedliche Ansätze zur Verfügung, um das für gefüllte Elastomere charakteristische Materialverhalten abbilden zu können.





---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] ALEXANDER, H. [1968]. ‘A constitutive relation for rubber-like materials.’ *Int. J. Eng. Sci.*, **6**(9), pp. 549–563.
- [2] ALTENBACH, J. & H. ALTENBACH [1994]. *Einführung in die Kontinuums-Mechanik*. Teubner.
- [3] AMIN, A., A. LION & P. HÖFER [2010]. ‘Effect of temperature history on the mechanical behaviour of a filler-reinforced NR/BR blend: Literature review and critical experiments.’ *Z. Angew. Math. Mech.*, **90**(5), pp. 347–369.
- [4] AMIN, A., A. LION, S. SEKITA & Y. OKUI [2006]. ‘Nonlinear dependence of viscosity in modeling the rate-dependent response of natural and high damping rubbers in compression and shear: Experimental identification and numerical verification.’ *Int. J. Plast.*, **22**(9), pp. 1610–1657.
- [5] ARMERO, F. [2004]. ‘Elastoplastic and viscoplastic deformations in solids and structures.’ *Encyclopedia of computational mechanics*.
- [6] ARRUDA, E. M. & M. C. BOYCE [1993]. ‘A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **41**(2), pp. 389–412.
- [7] BAASER, H., C. HOPMANN & A. SCHOBEL [2013]. ‘Reformulation of strain invariants at incompressibility.’ *Arch. Appl. Mech.*, **83**(2), pp. 273–280.
- [8] BANGERTH, W., R. HARTMANN & G. KANSCHAT [2007]. ‘deal.II – a General Purpose Object Oriented Finite Element Library.’ *ACM Trans. Math. Softw.*, **33**(4), pp. 24/1–24/27.

- [9] BANGERTH, W., T. HEISTER, L. HELTAI, G. KANSCHAT, M. KRONBICHLER, M. MAIER, B. TURCK SIN & T. D. YOUNG [2013]. ‘The deal.II Library, Version 8.1.’
- [10] BEATTY, F. & S. KRISHNASWAMY [2000]. ‘The Mullins effect in equibiaxial deformation.’ *Z. Angew. Math. Phys.*, **51**(6), pp. 984–1015.
- [11] BEDA, T. [2007]. ‘Modeling hyperelastic behavior of rubber: A novel invariant-based and a review of constitutive models.’ *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.*, **45**(13), pp. 1713–1732.
- [12] BEDA, T. [2014]. ‘An approach for hyperelastic model-building and parameters estimation a review of constitutive models.’ *Eur. Polym. J.*, **50**, pp. 97–108.
- [13] BERGSTRÖM, J. S. & M. C. BOYCE [1998]. ‘Constitutive modeling of the large strain time-dependent behavior of elastomers.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **46**(5), pp. 931–954.
- [14] BERGSTRÖM, J. S. & M. C. BOYCE [2000]. ‘Large strain time-dependent behavior of filled elastomers.’ *Mech. Mater.*, **32**(11), pp. 627–644.
- [15] BESDO, D. & J. IHLEMANN [2003]. ‘A phenomenological constitutive model for rubberlike materials and its numerical applications.’ *Int. J. Plast.*, **19**(7), pp. 1019–1036.
- [16] BESDO, D. & J. IHLEMANN [2003]. ‘Properties of rubberlike materials under large deformations explained by self-organizing linkage patterns.’ *Int. J. Plast.*, **19**(7), pp. 1001–1018.
- [17] BOEHLER, J. [1977]. ‘On irreducible representations for isotropic scalar functions.’ *Z. Angew. Math. Mech.*, **57**(6), pp. 323–327.
- [18] BOEHLER, J.-P. [1987]. *Representations for isotropic and anisotropic non-polynomial tensor functions*. Springer.
- [19] DE BOER, R. & W. EHLERS [1986]. *Theorie der Mehrkomponentenkontinua mit Anwendung auf bodenmechanische Probleme*. Forschungsberichte aus dem Bauwesen. Universität Essen.
- [20] BOWEN, R. [1976]. ‘Theory of mixtures, editor: AC Eringen.’ *Continuum Physics*, Academic Press, New York.

- [21] BOYCE, M. C. & E. M. ARRUDA [2000]. ‘Constitutive models of rubber elasticity: A review.’ *Rubber Chem. Technol.*, **73**(3), pp. 504–523.
- [22] BRUCK, H., S. MCNEILL, M. A. SUTTON & W. PETERS III [1989]. ‘Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction.’ *Exp. Mech.*, **29**(3), pp. 261–267.
- [23] BUECHE, F. [1961]. ‘Mullins Effect and Rubber-Filler Interaction.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **5**, pp. 271–281.
- [24] CHU, T., W. RANSON & M. SUTTON [1985]. ‘Applications of digital-image-correlation techniques to experimental mechanics.’ *Exp. Mech.*, **25**(3), pp. 232–244.
- [25] COLEMAN, B. & W. NOLL [1963]. ‘The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.’ *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **13**(1), pp. 167–178.
- [26] COLEMAN, B. D. & M. E. GURTIN [1967]. ‘Thermodynamics with internal state variables.’ *J. Chem. Phys.*, **47**(2), pp. 597–613.
- [27] COLEMAN, B. D. & W. NOLL [1961]. ‘Foundations of linear viscoelasticity.’ *Rev. Mod. Phys.*, **33**(2), pp. 239–249.
- [28] DHONDT, G. [2004]. *The finite element method for three-dimensional thermomechanical applications*. John Wiley & Sons.
- [29] DIANI, J., B. FAYOLLE & P. GILORMINI [2009]. ‘A review on the Mullins effect.’ *Eur. Polym. J.*, **45**(3), pp. 601–612.
- [30] DIEBELS, S. [2000]. *Mikropolare Zweiphasenmodelle: Formulierung auf der Basis der Theorie Poröser Medien*. Habilitation, Universität Stuttgart.
- [31] DIERCKS, N. [2015]. *The dynamic behaviour of rubber under consideration of the Mullins and the Payne effect: Experiments, Modelling and Simulation*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München.
- [32] DIPPEL [2015]. *Experimentelle Charakterisierung, Modellierung und FE-Berechnung thermomechanischer Kopplungen am Beispiel eines rußgefüllten Naturkautschuks*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München.
- [33] DOMININGHAUS, H. [2007]. *Die Kunststoffe und ihre Eigenschaften, Auflage vol. 4*. Düsseldorf: VDI-Verlag GmbH.

- [34] DOMININGHAUS, H. [2013]. *Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendungen*. Springer-Verlag.
- [35] DONNET, J. & E. CUSTODERO [2013]. *The Science and Technology of Rubber*, chapter Reinforcement of elastomers by particulate fillers, pp. 383–416. Elsevier Academic, London.
- [36] DONNET, J.-B. [1998]. ‘Black and white fillers and tire compound.’ *Rubber Chem. Technol.*, **71**(3), pp. 323–341.
- [37] DRUCKER, D. C. [1957]. ‘A definition of stable inelastic material.’ Technical report, DTIC Document.
- [38] EHLERS, W. [1996]. ‘Grundlegende Konzepte in der Theorie poröser Medien.’ *Techn. Mech.*, **16**, pp. 63–76.
- [39] EHRET, A. [2015]. ‘On a molecular statistical basis for Ogden’s model of rubber elasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **78**, pp. 249–268.
- [40] ENIKOLOPYAN, N. S. [1990]. *Filled polymers I*. Springer-Verlag.
- [41] FLECK, F., V. FROLTSOV & M. KLÜPPEL [2014]. ‘Polymer-Filler Interphase Dynamics and Reinforcement of Elastomer Nanocomposites.’ *Soft Mater.*, **12**(sup1), pp. S121–S134.
- [42] FLETCHER, W. & A. GENT [1954]. ‘Nonlinearity in the dynamic properties of vulcanized rubber compounds.’ *Rubber Chem. Technol.*, **27**(1), pp. 209–222.
- [43] FLORY, P. [1961]. ‘Thermodynamic relations for high elastic materials.’ *Trans. Faraday Soc.*, **57**, pp. 829–838.
- [44] FREUND, M. & J. IHLEMANN [2010]. ‘Generalization of one-dimensional material models for the finite element method.’ *Z. Angew. Math. Mech.*, **90**(5), pp. 399–417.
- [45] FREUND, M., H. LORENZ, D. JUHRE, J. IHLEMANN & M. KLÜPPEL [2011]. ‘Finite element implementation of a microstructure-based model for filled elastomers.’ *Int. J. Plast.*, **27**(6), pp. 902–919.
- [46] GENT, A. & A. THOMAS [1958]. ‘Forms for the stored (strain) energy function for vulcanized rubber.’ *J. Polym. Sci., Part A: Polym. Chem.*, **28**(118), pp. 625–628.

- [47] GESSLER, A. & A. PAYNE [1963]. ‘Dynamic properties of butyl containing attrited black.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **7**(5), pp. 1815–1832.
- [48] GÖKTEPE, S. & C. MIEHE [2005]. ‘A micro–macro approach to rubber-like materials. Part III: The micro-sphere model of anisotropic Mullins-type damage.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **53**(10), pp. 2259–2283.
- [49] GOLDSCHMIDT, F. [2015]. *Modellierung und Simulation von Klebeverbindungen mit gradierten mechanischen Eigenschaften*. Dissertation, Universität der Saarlandes.
- [50] GOVINDJEE, S. & S. REESE [1997]. ‘A presentation and comparison of two large deformation viscoelasticity models.’ *J. Eng. Mater. Technol.*, **119**(3), pp. 251–255.
- [51] GOVINDJEE, S. & J. SIMO [1991]. ‘A micro-mechanically based continuum damage model for carbon black-filled rubbers incorporating Mullins’ effect.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **39**(1), pp. 87–112.
- [52] GUMBRELL, S., L. MULLINS & R. RIVLIN [1953]. ‘Departures of the elastic behaviour of rubbers in simple extension from the kinetic theory.’ *Trans. Faraday Soc.*, **49**, pp. 1495–1505.
- [53] HABERSTROH, E. & A. KREMERS [2004]. ‘Expansion von chemisch geschäumten Kautschukmischungen.’ *Kautsch. Gummi Kunstst.*, **3**(57), pp. 105–108.
- [54] HABERSTROH, E., A. KREMERS & K. EPPING [2005]. ‘Extrusion von physikalisch geschäumten Kautschukprofilen.’ *Kautsch. Gummi Kunstst.*, **58**(9), pp. 449–454.
- [55] HANSON, D. E., M. HAWLEY, R. HOULTON, K. CHITANVIS, P. RAE, E. B. ORLER & D. A. WROBLESKI [2005]. ‘Stress softening experiments in silica-filled polydimethylsiloxane provide insight into a mechanism for the Mullins effect.’ *Polym.*, **46**(24), pp. 10989–10995.
- [56] HARPER, C. A. [1975]. *Handbook of plastics and elastomers*. McGraw-Hill.
- [57] HARTMANN, S. [2001]. ‘Parameter estimation of hyperelasticity relations of generalized polynomial-type with constraint conditions.’ *Int. J. Solids Struct.*, **38**(44), pp. 7999–8018.

- [58] HARWOOD, J., L. MULLINS & A. PAYNE [1965]. ‘Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part II. Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **9**(9), pp. 3011–3021.
- [59] HAUPT, P. [2000]. *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer.
- [60] HAUPT, P. & A. LION [2001]. ‘A generalisation of the Mooney-Rivlin model to finite linear viscoelasticity.’ *Constitutive Models for Rubber II*, pp. 57–64.
- [61] HAUPT, P. & A. LION [2002]. ‘On finite linear viscoelasticity of incompressible isotropic materials.’ *Acta Mech.*, **159**(1-4), pp. 87–124.
- [62] HAUPT, P., A. LION & E. BACKHAUS [2000]. ‘On the dynamic behaviour of polymers under finite strains: Constitutive modelling and identification of parameters.’ *Int. J. Solids Struct.*, **37**(26), pp. 3633–3646.
- [63] HAUPT, P. & K. SEDLAN [2001]. ‘Viscoplasticity of elastomeric materials: experimental facts and constitutive modelling.’ *Arch. Appl. Mech.*, **71**(2-3), pp. 89–109.
- [64] HAUPT, P. & C. TSAKMAKIS [1989]. ‘On the application of dual variables in continuum mechanics.’ *Continuum Mech. Thermodyn.*, **1**(3), pp. 165–196.
- [65] HEINRICH, G. & M. KALISKE [1997]. ‘Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity.’ *Comput. Theor. Polym. Sci.*, **7**(3), pp. 227–241.
- [66] HEINRICH, G. & M. KLÜPPEL [2002]. ‘Recent advances in the theory of filler networking in elastomers.’ In *Filled Elastomers Drug Delivery Systems*, pp. 1–44. Springer.
- [67] HEINRICH, G. & T. VILGIS [1993]. ‘Contribution of entanglements to the mechanical properties of carbon black-filled polymer networks.’ *Macromol.*, **26**(5), pp. 1109–1119.
- [68] HENANN, D. L. & L. ANAND [2009]. ‘A large deformation theory for rate-dependent elastic–plastic materials with combined isotropic and kinematic hardening.’ *Int. J. Plast.*, **25**(10), pp. 1833–1878.
- [69] HILL, R. [1958]. ‘A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **6**(3), pp. 236–249.

- [70] HÖFER, P. [2009]. *Dynamische Eigenschaften technischer Gummiwerkstoffe*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München.
- [71] HOLZAPFEL, G. A. [2000]. *Nonlinear solid mechanics*, volume 24. Wiley Chichester.
- [72] HORSTEMEYER, M. F. & D. J. BAMMANN [2010]. ‘Historical review of internal state variable theory for inelasticity.’ *Int. J. Plast.*, **26**(9), pp. 1310–1334.
- [73] HOSSAIN, M., A. AMIN & M. N. KABIR [2015]. ‘Eight-chain and full-network models and their modified versions for rubber hyperelasticity: a comparative study.’ *J. Mech. Behav. Mater.*, **24**(1-2), pp. 11–24.
- [74] IHLEMANN, J. [2002]. *Kontinuumsmechanische Nachbildung hochbelasteter technischer Gummiwerkstoffe*. Number 18. Fortschrittberichte VDI, VDI-Verlag, 288th edition.
- [75] JOHLITZ, M. [2008]. *Experimentelle Untersuchung und Modellierung von Maßstabeffekten in Klebungen*. Dissertation, Universität des Saarlandes.
- [76] JOHLITZ, M. & S. DIEBELS [2011]. ‘Characterisation of a polymer using biaxial tension tests. Part I: Hyperelasticity.’ *Arch. Appl. Mech.*, **81**(10), pp. 1333–1349.
- [77] JOHLITZ, M. & S. DIEBELS [2011]. ‘Effective mechanical behavior of filled polymers.’ *Mech. Adv. Mater. Struct.*, **18**(2), pp. 106–114.
- [78] JOHLITZ, M., H. STEEB, R. JÄNICKE & S. DIEBELS [2008]. ‘Effective properties and size effects in filled polymers.’ *GAMM-Mitteilungen*, **31**(2), pp. 210–224.
- [79] JOHNSON, A., C. QUIGLEY & J. MEAD [1994]. ‘Large strain viscoelastic constitutive models for rubber, part I: Formulations.’ *Rubber Chem. Technol.*, **67**(5), pp. 904–917.
- [80] JUHRE, D., R. RAGHUNATH, M. KLÜPPEL & H. LORENZ [2013]. ‘A microstructure-based model for filled elastomers including time-dependent effects.’ *Constitutive Models for Rubber VIII*, p. 293.
- [81] JUNG, A., L. A. A. BEEX, S. DIEBELS & S. P. A. BORDAS [2015]. ‘Open-Cell Aluminium Foams with Graded Coatings as Passively Controllable Energy Absorbers.’ *Mater. Des.*, **87**, pp. 36–41.

- [82] JUNG, A., T. GRAMMES & S. DIEBELS [2015]. ‘Micro structural motivated phenomenological modelling of metal foams - Experiments and Modelling.’ *Arch. Appl. Mech.*, **85** (8), pp. 1147–1160.
- [83] KALISKE, M. & G. HEINRICH [1999]. ‘An extended tube-model for rubber elasticity: statistical-mechanical theory and finite element implementation.’ *Rubber Chem. Technol.*, **72**(4), pp. 602–632.
- [84] KALISKE, M. & H. ROTHERT [1998]. ‘Constitutive approach to rate-independent properties of filled elastomers.’ *Int. J. Solids Struct.*, **35**(17), pp. 2057–2071.
- [85] KLÜPPEL, M. & J. SCHRAMM [2000]. ‘A generalized tube model of rubber elasticity and stress softening of filler reinforced elastomer systems.’ *Macromol. Theor. Simul.*, **9**(9), pp. 742–754.
- [86] KOPROWSKI-THEISS, N. [2011]. *Kompressible, viskoelastische Werkstoffe: Experimente, Modellierung und FE-Umsetzung*. Dissertation, Universität des Saarlandes.
- [87] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2011]. ‘Characterizing the time dependence of filled EPDM.’ *Rubber Chem. Technol.*, **84**(2), pp. 147–165.
- [88] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2011]. ‘Modelling of a cellular rubber with nonlinear viscosity functions.’ *Exp. Mech.*, **51**(5), pp. 749–765.
- [89] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2012]. ‘Compressible rubber materials: Experiments and simulations.’ *Arch. Appl. Mech.*, **82**(8), pp. 1117–1132.
- [90] KOPROWSKI-THEISS, N., M. JOHLITZ & S. DIEBELS [2012]. ‘Pressure dependent properties of a compressible polymer.’ *Exp. Mech.*, **52**(3), pp. 257–264.
- [91] KRAUS, G. [1977]. ‘Reinforcement of elastomers by carbon black.’ *Angew. Makromol. Chem.*, **60**(1), pp. 215–248.
- [92] KRAUS, G., C. CHILDERS & K. ROLLMANN [1966]. ‘Stress softening in carbon black reinforced vulcanizates. Strain rate and temperature effects.’ *Rubber Chem. Technol.*, **39**(5), pp. 1530–1543.



- [93] KREMPL, E. & F. KHAN [2003]. ‘Rate (time)-dependent deformation behavior: an overview of some properties of metals and solid polymers.’ *Int. J. Plast.*, **19**(7), pp. 1069–1095.
- [94] KRISHNASWAMY, S. & M. F. BEATTY [2000]. ‘The Mullins effect in compressible solids.’ *Int. J. Eng. Sci.*, **38**(13), pp. 1397–1414.
- [95] KRÖNER, E. [1959]. ‘Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen.’ *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **4**(1), pp. 273–334.
- [96] KUHN, W. [1934]. ‘Über die Gestalt fadenförmiger Moleküle in Lösungen.’ *Kolloid-Zeitschrift*, **68**(1), pp. 2–15.
- [97] LAIARINANDRASANA, L., R. PIQUES & A. ROBISSON [2003]. ‘Visco-hyperelastic model with internal state variable coupled with discontinuous damage concept under total Lagrangian formulation.’ *Int. J. Plast.*, **19**(7), pp. 977–1000.
- [98] LAURENT, H., A. VANDENBROUCKE, G. RIO & N. A. HOCINE [2011]. ‘A simplified methodology to identify material parameters of a hyperelasto-visco-hysteresis model: application to a fluoro-elastomer.’ *Modell. Simul. Mater. Sci. Eng.*, **19**(8), pp. 1–19.
- [99] LE TALLEC, P., C. RAHIER & A. KAISS [1993]. ‘Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains: formulation and numerical approximation.’ *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **109**(3), pp. 233–258.
- [100] LEBLANC, J. L. [2009]. *Filled polymers: science and industrial applications*. CRC Press.
- [101] LEE, E. [1969]. ‘Elastic-plastic deformation at finite strains.’ *J. Appl. Mech.*, **36**, pp. 1.
- [102] LEE, E. H. & D. T. LIU [1967]. ‘Finite-strain elastic - Plastic theory with application to plane-wave analysis.’ *J. Appl. Phys.*, **38**(1), pp. 19–27.
- [103] LEWIS, R. M. & V. TORCZON [1999]. ‘Pattern search algorithms for bound constrained minimization.’ *SIAM J. Optimiz.*, **9**(4), pp. 1082–1099.
- [104] LION, A. [1996]. ‘A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation.’ *Continuum Mech. Thermodyn.*, **8**(3), pp. 153–169.

- [105] LION, A. [1997]. ‘A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers.’ *Acta Mech.*, **123**(1-4), pp. 1–25.
- [106] LION, A. [1997]. ‘On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **45**(11-12), pp. 1805–1834.
- [107] LION, A. [2000]. ‘Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models.’ *Int. J. Plast.*, **16**(5), pp. 469–494.
- [108] LION, A. [2000]. *Thermomechanik von Elastomeren*. Berichte des Institut für Mechanik 1/2000, Universität Kassel.
- [109] LION, A. [2004]. ‘Phenomenological Modelling of the Material Behaviour of Carbon Black-Filled Rubber in Continuum Mechanics.’ *KGK Kautsch. Gummi Kunstst.*, **57**(4), pp. 184–190.
- [110] LION, A. & C. KARDELKY [2004]. ‘The Payne effect in finite viscoelasticity: Constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales.’ *Int. J. Plast.*, **20**(7), pp. 1313–1345.
- [111] LITVINOV, V., R. ORZA, M. KLUPPEL, M. VAN DUIN & P. MAGUSIN [2011]. ‘Rubber–filler interactions and network structure in relation to stress–strain behavior of vulcanized, carbon black filled EPDM.’ *Macromol.*, **44**(12), pp. 4887–4900.
- [112] LORENZ, H., M. FREUND, D. JUHRE, J. IHLEMANN & M. KLÜPPEL [2011]. ‘Constitutive Generalization of a Microstructure-Based Model for Filled Elastomers.’ *Macromol. Theory Simul.*, **20**(2), pp. 110–123.
- [113] LORENZ, H. & M. KLÜPPEL [2012]. ‘Microstructure-based modelling of arbitrary deformation histories of filler-reinforced elastomers.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **60**(11), pp. 1842–1861.
- [114] LORENZ, H., J. MEIER & M. KLÜPPEL [2010]. ‘Micromechanics of Internal Friction of Filler Reinforced Elastomers.’ *Elastomere Friction*, pp. 27–52.
- [115] LUBARDA, V. A. [2004]. ‘Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics.’ *Appl. Mech. Rev.*, **57**(2), pp. 95–108.
- [116] LUBLINER, J. [1985]. ‘A model of rubber viscoelasticity.’ *Mech. Res. Commun.*, **12**(2), pp. 93–99.

- [117] LULEI, F. [2002]. *Mikromechanisch motivierte Modelle zur Beschreibung finiter Deformationen gummiartiger Polymere: physikalische Modellbildung und numerische Simulation*. Dissertation, Bericht Nr. I-09 des Instituts für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- [118] MARCKMANN, G. & E. VERRON [2006]. ‘Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials.’ *Rubber Chem. Technol.*, **79**(5), pp. 835–858.
- [119] MARVALOVA, B. [2007]. ‘Viscoelastic properties of filled rubber. experimental observations and material modelling.’ *Engineering Mechanics*, **14**(1-2), pp. 81–89.
- [120] MEDALIA, A. [1973]. ‘Elastic modulus of vulcanizates as related to carbon black structure.’ *Rubber Chem. Technol.*, **46**(4), pp. 877–896.
- [121] MEDALIA, A. [1974]. ‘Filler aggregates and their effect on reinforcement.’ *Rubber Chem. Technol.*, **47**(2), pp. 411–433.
- [122] MEDALIA, A. [1978]. ‘Effect of carbon black on dynamic properties of rubber vulcanizates.’ *Rubber Chem. Technol.*, **51**(3), pp. 437–523.
- [123] MEGGYES, A. [2001]. ‘Multiple decomposition in finite deformation theory.’ *Acta Mech.*, **146**(3-4), pp. 169–182.
- [124] MIEHE, C. & S. GÖKTEPE [2005]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials. Part II: The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **53**(10), pp. 2231–2258.
- [125] MIEHE, C., S. GÖKTEPE & F. LULEI [2004]. ‘A micro-macro approach to rubber-like materials - Part I: The non-affine micro-sphere model of rubber elasticity.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **52**(11), pp. 2617–2660.
- [126] MIEHE, C. & J. KECK [2000]. ‘Superimposed finite elastic–viscoelastic–plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation.’ *J. Mech. Phys. Solids*, **48**(2), pp. 323–365.
- [127] MOONEY, M. [1940]. ‘A theory of large elastic deformation.’ *J. Appl. Phys.*, **11**(9), pp. 582–592.
- [128] MULLINS, L. [1948]. ‘Effect of stretching on the properties of rubber.’ *Rubber Chem. Technol.*, **21**(2), pp. 281–300.

- [129] MULLINS, L. & N. TOBIN [1965]. ‘Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **9**(9), pp. 2993–3009.
- [130] NELDER, J. A. & R. MEAD [1965]. ‘A simplex method for function minimization.’ *Comput. J.*, **7**(4), pp. 308–313.
- [131] OGDEN, R. [1972]. ‘Large deformation isotropic elasticity-on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids.’ *Proc. R. Soc. A*, **326**(1567), pp. 565–584.
- [132] ÖSTERLÖF, R. [2014]. *Modelling of the Fletcher-Gent effect and obtaining hyperelastic parameters for filled elastomers*. KTH Royal Institute of Technology. Licentiate Thesis.
- [133] PAYNE, A. [1965]. ‘A note on the conductivity and modulus of carbon black-loaded rubbers.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **9**(3), pp. 1073–1082.
- [134] PAYNE, A. R. [1962]. ‘The dynamic properties of carbon black-loaded natural rubber vulcanizates. Part I.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **6**(19), pp. 57–63.
- [135] PAYNE, A. R. [1962]. ‘The dynamic properties of carbon black loaded natural rubber vulcanizates. Part II.’ *J. Appl. Polym. Sci.*, **6**(21), pp. 368–372.
- [136] PRZYBYŁO, P. & E. ARRUDA [1998]. ‘Experimental investigations and numerical modeling of incompressible elastomers during non-homogeneous deformations.’ *Rubber Chem. Technol.*, **71**(4), pp. 730–749.
- [137] RAGHUNATH, R., D. JUHRE & M. KLÜPPEL [2015]. ‘A physically motivated model for filled elastomers including strain rate and amplitude dependency in finite viscoelasticity.’ *Int. J. Plast.*. accepted for publication.
- [138] RECHENBERG, I. [1994]. *Evolutionstrategie '94*. Werkstatt Bionik und Evolutionstechnik. Frommann-Holzboog. ISBN 9783772816420.
- [139] REESE, S. [2000]. *Thermomechanische Modellierung gummiartiger Polymerstrukturen*. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Hannover.
- [140] REESE, S. [2003]. ‘A micromechanically motivated material model for the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers.’ *Int. J. Plast.*, **19**(7), pp. 909–940.

- [141] REESE, S. & S. GOVINDJEE [1998]. ‘A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects.’ *Int. J. Solids Struct.*, **35**(26-27), pp. 3455–3480.
- [142] REESE, S. & P. WRIGGERS [1997]. ‘A material model for rubber-like polymers exhibiting plastic deformation: Computational aspects and a comparison with experimental results.’ *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **148**(3-4), pp. 279–298.
- [143] RENDEK, M. [2011]. *Transient effects of filler-reinforced rubber with respect to the Payne effect: experiments, constitutive modelling and FEM implementation.*
- [144] RENDEK, M. & A. LION [2010]. ‘Amplitude dependence of filler-reinforced rubber: Experiments, constitutive modelling and FEM - Implementation.’ *Int. J. Solids Struct.*, **47**(21), pp. 2918–2936.
- [145] RENDEK, M. & A. LION [2010]. ‘Strain induced transient effects of filler reinforced elastomers with respect to the payne-effect: Experiments and constitutive modelling.’ *Z. Angew. Math. Mech.*, **90**(5), pp. 436–458.
- [146] REY, T., G. CHAGNON, D. FAVIER & J.-B. LE CAM [2014]. ‘Hyperelasticity with rate-independent microsphere hysteresis model for rubberlike materials.’ *Comput. Mater. Sci.*, **90**, pp. 89–98.
- [147] RIEGER, A. [2005]. *Zur Parameteridentifikation komplexer Materialmodelle auf der Basis realer und virtueller Testdaten.* Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- [148] RIVLIN, R. [1948]. ‘Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts.’ *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **240**(822), pp. 459–490.
- [149] RIVLIN, R. [1948]. ‘Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. IV. Further Developments of the General Theory.’ *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B*, **241**, pp. 397–397.
- [150] RIVLIN, R. S. & D. SAUNDERS [1951]. ‘Large elastic deformations of isotropic materials. VII. Experiments on the deformation of rubber.’ *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A*, **243**(865), pp. 251–288.
- [151] ROFF, W. J. & J. R. SCOTT [2013]. *Fibres, films, plastics and rubbers: a handbook of common polymers.* Elsevier.

- [152] RÖTHEMEYER, F. & F. SOMMER [2013]. *Kautschuktechnologie: Werkstoffverarbeitung-Produkte*. Carl Hanser Verlag GmbH Co KG.
- [153] ROTHON, R. [2003]. *Particulate-filled polymer composites*. iSmithers Rapra Publishing.
- [154] SCHEFFER, T. [2010]. *Untersuchung des dynamischen Materialverhaltens eines rußgefüllten Elastomers*. Diplomarbeit, Universität der Saarlandes.
- [155] SCHEFFER, T., F. GOLDSCHMIDT & S. DIEBELS [2015]. ‘Characterisation of filled rubber with a pronounced non-linear viscoelasticity.’ *Proc. Appl. Math. Mech.*, **15**, pp. 353–354.
- [156] SCHEFFER, T., H. SEIBERT & S. DIEBELS [2013]. ‘Optimisation of a pretreatment method to reach the basic elasticity of filled rubber materials.’ *Arch. Appl. Mech.*, **83(11)**, pp. 1659–1678.
- [157] SEDLAN, K. [2001]. *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Berichte des Institut für Mechanik 2/2001, Universität Kassel.
- [158] SEDLAN, K. & P. HAUPT [1999]. ‘Nichtlineare Viskoelastizität von gummiartigen Werkstoffen: Experimentelle Untersuchung, Modellierung und Identifikation.’ *Techn. Mech.*, **19**.
- [159] SEIBERT, H., T. SCHEFFER & S. DIEBELS [2014]. ‘Biaxial testing of elastomers - Experimental setup, measurement and experimental optimisation of specimen’s shape.’ *Techn. Mech.*, **34(2)**, pp. 72–89.
- [160] SIDOROFF, F. [1974]. ‘Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire.’ *J. méc.*, **13(4)**, pp. 679–713.
- [161] SIMO, J. C. & T. J. HUGHES [2006]. *Computational inelasticity*, volume 7. Springer Science & Business Media.
- [162] SJÖBERG, M. & L. KARI [2003]. ‘Nonlinear isolator dynamics at finite deformations: an effective hyperelastic, fractional derivative, generalized friction model.’ *Nonlinear Dyn.*, **33(3)**, pp. 323–336.
- [163] SMITH, G. [1971]. ‘On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors.’ *Int. J. Eng. Sci.*, **9(10)**, pp. 899–916.

- [164] STERNSTEIN, S. & A.-J. ZHU [2002]. ‘Reinforcement mechanism of nano-filled polymer melts as elucidated by nonlinear viscoelastic behavior.’ *Macromol.*, **35**(19), pp. 7262–7273.
- [165] SUTTON, M., J. YAN, V. TIWARI, H. SCHREIER & J. ORTEU [2008]. ‘The effect of out-of-plane motion on 2D and 3D digital image correlation measurements.’ *Opt. Lasers Eng.*, **46**(10), pp. 746–757.
- [166] SUTTON, M. A., J. J. ORTEU & H. SCHREIER [2009]. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements: basic concepts, theory and applications*. Springer Science & Business Media.
- [167] SUZUKI, N., M. ITO & F. YATSUYANAGI [2005]. ‘Effects of rubber/filler interactions on deformation behavior of silica filled SBR systems.’ *Polym.*, **46**(1), pp. 193–201.
- [168] TORCZON, V. [1997]. ‘On the convergence of pattern search algorithms.’ *SIAM J. Optimiz.*, **7**(1), pp. 1–25.
- [169] TRELOAR, L. [1943]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules. I.’ *Trans. Faraday Soc.*, **39**, pp. 36–41.
- [170] TRELOAR, L. [1943]. ‘The elasticity of a network of long-chain molecules—II.’ *Trans. Faraday Soc.*, **39**, pp. 241–246.
- [171] TRELOAR, L. [1976]. ‘Mechanics of rubber elasticity.’ *Proc. R. Soc. A*, **351**(1666), pp. 301–330.
- [172] TRELOAR, L. [2005]. *The physics of rubber elasticity*. OUP Oxford.
- [173] TRUESDELL, C. & W. NOLL [2004]. *The non-linear field theories of mechanics*. Springer.
- [174] TRUESDELL, C. & R. TOUPIN [1960]. *The classical field theories*. Springer.
- [175] ULMER, J. [1996]. ‘Strain dependence of dynamic mechanical properties of carbon black-filled rubber compounds.’ *Rubber Chem. Technol.*, **69**(1), pp. 15–47.
- [176] VANDENBROUCKE, A., H. LAURENT, N. A. HOCINE & G. RIO [2010]. ‘A Hyperelasto-Visco-Hysteresis model for an elastomeric behaviour: experimental and numerical investigations.’ *Comput. Mater. Sci.*, **48**(3), pp. 495–503.

- [177] VROOMEN, G., G. CHOONOO, T. ODENHAMN & M. HATTA [2004]. ‘EPDM-Moosgummi für die Tür- und Fensterdichtungen von Kraftfahrzeugen.’ *KGK Kautsch. Gummi Kunstst.*, **57**(3), pp. 163–175.
- [178] WADDELL, W. H. & L. R. EVANS [1996]. ‘Use of nonblack fillers in tire compounds.’ *Rubber Chem. Technol.*, **69**(3), pp. 377–423.
- [179] WALL, F. T. [1942]. ‘Statistical thermodynamics of rubber. II.’ *J. Chem. Phys.*, **10**(7), pp. 485–488.
- [180] WANG, C.-C. [1970]. ‘A new representation theorem for isotropic functions: An answer to Professor GF Smith’s criticism of my papers on representations for isotropic functions.’ *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **36**(3), pp. 166–197.
- [181] WANG, J., G. HAMED, K. UMETSU & C. ROLAND [2005]. ‘The Payne effect in double network elastomers.’ *Rubber Chem. Technol.*, **78**(1), pp. 76–83.
- [182] WOLLSCHIED, D. [2014]. *Predeformation and frequency dependence of filler-reinforced rubber under vibration: Experiments-Modelling-Finite Element Implementation*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München.
- [183] WOLLSCHIED, D. & A. LION [2014]. ‘The benefit of fractional derivatives in modelling the dynamics of filler-reinforced rubber under large strains: a comparison with the Maxwell-element approach.’ *Comput. Mech.*, **53**(5), pp. 1015–1031.
- [184] WULF, H. & J. IHLEMANN [2011]. ‘Simulation of self-organization processes in filled rubber considering thermal agitation.’ *Constitutive Models for Rubber VII*, p. 125.
- [185] YATSUYANAGI, F., N. SUZUKI, M. ITO & H. KAIKOU [2001]. ‘Effects of secondary structure of fillers on the mechanical properties of silica filled rubber systems.’ *Polym.*, **42**(23), pp. 9523–9529.
- [186] YEOH, O. [1990]. ‘Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates.’ *Rubber Chem. Technol.*, **63**(5), pp. 792–805.
- [187] YEOH, O. & P. FLEMING [1997]. ‘A new attempt to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity.’ *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.*, **35**(12), pp. 1919–1932.



---

# Veröffentlichungen, Proceedings, Vorträge

---

## A Veröffentlichungen & Proceedings

1. T. Scheffer, H. Seibert & S. Diebels [2013]  
Optimisation of a pretreatment method to reach the basic elasticity of filled rubber materials  
Arch. Appl. Mech. 83 (11), 1659-1678.
2. Z. Chen, T. Scheffer, H. Seibert & S. Diebels [2013]  
Macroindentation of a soft polymer: Identification of hyperelasticity and validation by uni/biaxial tensile tests  
Mech. Mater. 64, 111-127.
3. A. Hewer, J. Weickert, H. Seibert, T. Scheffer & S. Diebels [2013]  
Lagrangian Strain Tensor Computation with higher order variational models  
British Machine Vision Conference BMVC, 1:10.
4. H. Seibert, T. Scheffer & S. Diebels [2013]  
Biaxial testing of elastomers - Experimental setup, measurement and experimental optimisation of specimen's shape  
Techn. Mech., 34(2): 72-89.
5. T. Scheffer & S. Diebels [2014]  
Material modelling of a filled rubber material with different approaches in the representation of a statical hysteresis  
Proc. Appl. Math. Mech., 14:345-346.

6. V. Dörlich, J. Linn, T. Scheffer & S. Diebels [2015]  
Towards viscoplastic constitutive models for Cosserat rods  
Proceedings ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics. Barcelona, ISBN: 978-84-944244-0-3.
7. V. Dörlich, J. Linn, T. Scheffer & S. Diebels [2015]  
Towards viscoplastic constitutive models for Cosserat rods  
Arch. Mech. Eng., *accepted*
8. S. Diebels, A. Jung, Z. Chen, H. Seibert & T. Scheffer [2015]  
Experimentelle Mechanik: Von der Messung zum Materialmodell  
GAMM Rundbrief, Heft 2, 10-16.
9. T. Scheffer, F. Goldschmidt & S. Diebels [2015]  
Characterisation of filled rubber with a pronounced non-linear viscoelasticity  
Proc. Appl. Math. Mech., 15:353-354.
10. T. Scheffer, F. Goldschmidt & S. Diebels [2015]  
Implementation of the strongly pronounced non-linear viscoelasticity of an incompressible filled rubber  
Techn. Mech., 35(2):118-132.
11. T. Scheffer, H. Seibert, F. Goldschmidt & S. Diebels [2015]  
The modeling process of strongly pronounced non-linear viscoelasticity for incompressible filled rubber material  
Lat. Am. J. Solids Struct. *in review*.
12. H. Seibert, T. Scheffer & S. Diebels [2015]  
Thermomechanical characterisation of cellular rubber  
Continuum Mechanics and Thermodynamics, *in review*.
13. C. Röhrig, T. Scheffer & S. Diebels [2016]  
Mechanical characterization of a short fiber reinforced polymer: Experimental setup, optical measurement and modeling approach  
Exp. Mech. *planned to submit*.

## B Vorträge

1. T. Scheffer & S. Diebels  
Untersuchung des dynamischen Materialverhaltens eines rußgefüllten Elastomers  
Workshop Kontinuumsmechanik 2010, Goslar.
2. T. Scheffer & S. Diebels  
Optimisation of a pretreatment method to reach the equilibrium stress of a carbon black-filled rubber  
Fourth Saar-Lor-Lux Colloquium in Mechanics SLLCM 2011, Nancy.
3. T. Scheffer & S. Diebels  
Softening effects of carbon black-filled rubber  
2<sup>nd</sup> International Conference on Material Modelling ICMM 2011, Paris.
4. T. Scheffer & S. Diebels  
Entfestigungseffekte bei rußgefüllten Elastomeren  
AK Stoffgesetze 2012, Saarbrücken.
5. T. Scheffer, H. Seibert & S. Diebels  
Optimisation of a pretreatment method to reach the basic elasticity of filled rubber materials  
5<sup>th</sup> GACM Colloquium on Computational Mechanics 2013, Hamburg.
6. T. Scheffer & S. Diebels  
Material modelling of a filled rubber material with different approaches in the representation of a statical hysteresis  
85. Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik GAMM 2014, Erlangen.
7. T. Scheffer, F. Goldschmidt & S. Diebels  
Characterisation of filled rubber with a pronounced nonlinear viscoelasticity  
86. Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik GAMM 2015, Lecce.

8. V. Dörlich, J. Linn, T. Scheffer, & S. Diebels  
Towards viscoplastic constitutive models for Cosserat rods  
ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2015, Barcelona.
9. V. Dörlich, T. Scheffer, & S. Diebels  
Experimental Characterization of Inelastic Cables & Hoses  
IPS User Conference 2015, Deidesheim.
10. T. Scheffer, H. Seibert & S. Diebels  
Strongly pronounced nonlinear viscoelasticity of incompressible filled rubber material  
Eingeladener Vortrag: 9<sup>th</sup> International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting 2015, München.
11. S. Diebels, T. Scheffer & H. Seibert  
Characterization and modelling of the thermomechanical behaviour of foamed rubber  
9<sup>th</sup> International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting 2015, München.
12. T. Scheffer & S. Diebels  
Comparison of two different modeling approaches to describe the non-linear viscoelastic behavior of filled rubber material, 87. Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik GAMM 2016, Braunschweig.