Zur Darstellungs- und Spektraltheorie für nichtvertauschende Operatortupel

Commutant-Lifting-Satz, charakteristische Funktion und Hilbert-Samuel-Polynom

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von

Dominik Faas

Saarbrücken, 2008

Tag des Kolloquiums:	16.12.2008
Dekan:	Prof. Dr. Joachim Weickert
Prüfungsausschuss:	Vorsitzender:
	Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
	Berichterstatter:
	Prof. Dr. Jörg Eschmeier
	Prof. Dr. Ernst Albrecht
	Akademischer Mitarbeiter:
	Dr. Bernhard Burgeth

Meiner Familie

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit behandelt verschiedene Aspekte endlicher, nicht notwendig vertauschender Tupel stetig linearer Operatoren auf Banach- oder Hilberträumen. Sie enthält Verallgemeinerungen beziehungsweise Analoga von Ergebnissen für einzelne Operatoren oder vertauschende Operatortupel auf den nichtkommutativen mehrdimensionalen Fall.
Der erste Teil beschäftigt sich mit der Darstellungstheorie solcher nichtvertauschender Tupel. Dabei werden Multiplikationsoperatoren zwischen Fockräumen betrachtet und ein spezieller Commutant-Lifting-Satz gezeigt. Wir untersuchen außerdem die charakteristische Funktion zu einer n-Kontraktion auf einem Hilbertraum.
Im zweiten Teil stehen Semi-Fredholmtupel auf Banachräumen im Mittelpunkt. Für diese Tupel führen wir ein Hilbert-Samuel-Polynom ein und bestimmen dessen Grad und Leitkoeffizienten. Weiterhin untersuchen wir die in der kommutativen lokalen Spektraltheorie wohlbekannten Spektralräume. Dabei zeigen wir einen Abgeschlossenheitssatz für holomorphe Semi-Fredholmfunktionen.

Abstract

In this thesis, various aspects of finite - not necessarily commuting - tuples of continuous linear operators on Banach spaces or Hilbert spaces are considered. We derive generalizations and analogues of some results which are well known for single operators and commuting tuples.
In the first part we study the representation theory for such non-commuting tuples. To be more precisely, we consider multiplication operators between Fock spaces and prove a certain Commutant-Lifting theorem. Moreover, the characteristic function of an n-contraction is analyzed.
The main focus in the second part is put on semi-Fredholm tuples. We introduce the Hilbert-Samuel polynomial for such tuples and compute its degree and leading coefficient. Furthermore, we prove that the range of certain semi-Fredholm functions is closed in order to analyze some spectral subspaces, which are well known in the commutative local spectral theory.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt verschiedene Aspekte endlicher, nicht notwendig vertauschender Tupel stetig linearer Operatoren auf Banach- oder Hilberträumen. Sie enthält Verallgemeinerungen beziehungsweise Analoga von Ergebnissen für einzelne Operatoren oder vertauschende Operatortupel auf den nichtkommutativen mehrdimensionalen Fall.

Der erste Teil beschäftigt sich mit der Darstellungstheorie solcher nichtvertauschender Tupel. Dabei werden Multiplikationsoperatoren zwischen Fockräumen betrachtet und ein spezieller Commutant-Lifting-Satz gezeigt. Außerdem untersuchen wir die charakteristische Funktion zu einer n-Kontraktion auf einem Hilbertraum.

Sind $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ Hilberträume und ist $\phi : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskugel $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$, so nennen wir ϕ einen (kommutativen) Multiplikator, falls durch

$$(\phi f)(z) = \phi(z)\ f(z) \quad (f \in H(\mathbb{B}, \mathcal{E}),\ z \in \mathbb{B})$$

ein Operator

$$M_\phi : H(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \to H(\mathbb{B}, \mathcal{E}_*),\ f \mapsto \phi f$$

zwischen den Arveson-Drury-Räumen mit Werten in $\mathcal{E}$ beziehungsweise $\mathcal{E}_*$ definiert wird. Ein Resultat von J. Eschmeier und M. Putinar (siehe [**19**]) besagt, dass jeder solche Multiplikator ϕ mit $\|M_\phi\| \leq 1$ durch eine kontraktive Operatormatrix ('colligation')

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*) \quad (\mathcal{H} \text{ Hilbertraum})$$

dargestellt werden kann.
Wir entwickeln im ersten Kapitel dieser Arbeit ein entsprechendes Konzept für nichtkommutative Multiplikatoren ϕ, die zugehörige Multiplikationsoperatoren $M_\phi : \mathcal{F}^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ zwischen den Fockräumen über $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$ besitzen. Die Idee dazu geht zurück auf verschiedene Arbeiten von G. Popescu (siehe etwa [**48**]). Wir definieren zu einer Matrixkontraktion U wie oben

den zugehörigen nichtkommutativen Multiplikator (Definition 1.15) und zeigen, dass analog zum oben genannten Resulat für den kommutativen Fall auf diese Weise alle kontraktiven Multiplikatoren dargestellt werden. Wir erhalten dies als Spezialfall unseres Commutant-Lifting-Satzes (Satz 1.22). Darin werden alle Kontraktionen charakterisiert, die mit den Kompressionen der Rechtsvorwärtsshifts auf gegebene $*$-invariante Teilräume von $\mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ beziehungsweise $\mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ vertauschen. Schließlich beenden wir das Kapitel mit einigen grundlegenden Beobachtungen über die Zusammenhänge zwischen kommutativen und nichtkommutativen Multiplikatoren.

Im zweiten Kapitel behandeln wir die charakteristische Funktion zu einer nichtvertauschenden n-Kontraktion auf einem Hilbertraum. In [**46**] zeigt G. Popescu Modellsätze für $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen und vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen und folgert daraus, dass zwei vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen genau dann unitär äquivalent sind, wenn ihre charakteristischen Funktionen übereinstimmen.
Wir geben neue Beweise für diese Resultate, indem wir Methoden aus dem kommutativen Fall (vergleiche [**9**]) benutzen. Außerdem zeigen wir, dass eine n-Kontraktion genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist, wenn ihre charakteristische Funktion invertierbar ist (Satz 2.31). Im Fall einer einzelnen Kontraktion ist dies ein klassisches Resultat von B. Sz.-Nagy (siehe [**51**]).

Im zweiten Teil stehen Semi-Fredholmtupel auf Banachräumen X im Mittelpunkt. Damit sind hier Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ gemeint mit

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty.$$

Für solche Tupel führen wir ein Hilbert-Samuel-Polynom ein und untersuchen die in der kommutativen lokalen Spektraltheorie wohlbekannten Spektralräume. Dabei zeigen wir einen Abgeschlossenheitssatz für holomorphe Semi-Fredholmfunktionen.

Ist $T \in \mathcal{L}(X)^n$ ein Semi-Fredholmtupel auf einem Banachraum X, so bilden die durch

$$M_0 = X \text{ und } M_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} T_j M_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

definierten Teilräume M_k $(k \in \mathbb{N})$ eine absteigende Folge von abgeschlossenen Teilräumen mit endlicher Kodimension in X. Ein Ziel des dritten Kapitels dieser Arbeit ist die Beschreibung des Wachstums der Kodimesionen von M_k für $k \to \infty$. Wir betrachten dabei die zu T assoziierte Garbe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(T) = \mathcal{O}_D^X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\mathcal{O}_D^X$$

über der offenen Nullumgebung

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C}^n;\ \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)X \right) < \infty \right\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Dann ist $\mathcal{H}$ eine kohärente $\mathcal{O}_D$-Garbe. Es sei $\mathcal{H}_0$ der Halm von $\mathcal{H}$ in 0 und $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_0$ das maximale Ideal des lokalen noetherschen Rings $\mathcal{O}_0$ der in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^n$ konvergenten Potenzreihen. Wir definieren damit das Hilbert-Samuel-Polynom von T als das eindeutig bestimmte Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit

$$p(k) = \dim \left(\mathcal{H}_0 / \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 \right)$$

für genügend große $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass stets

$$\dim \left(\mathcal{H}_0 / \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 \right) \leq \dim \left(X / M_k \right) \quad (k \in \mathbb{N})$$

gilt (Korollar 3.23). Ist T ein vertauschendes Tupel, so erhalten wir sogar Gleichheit. Damit folgt, dass unsere Definition des Hilbert-Samuel-Polynoms im vertauschenden Fall mit der von R. Douglas und K. Yan (vergleiche [**13**]) übereinstimmt. Falls $M_1 \neq X$ ist, ist $p \neq 0$ und lässt sich in der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{x}{d-i} \quad (x \in \mathbb{Q})$$

schreiben, wobei $d = \deg p \in \{0, \ldots, n\}$ ist und $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Z}$ ganzzahlig mit $c_0 \neq 0$ sind. Ein Hauptresultat des dritten Kapitels ist, dass der Grad d von p gleich der Dimension der analytischen Menge

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}^n;\ 0 < \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)X \right) < \infty \right\} \subset D$$

im Nullpunkt ist (Satz 3.29). In [**17**] zeigt J. Eschmeier für den Fall $d = n$, oder äquivalent, dass 0 ein innerer Punkt von A ist, dass der Leitkoeffizient c_0 von p der stabilisierten Bild-Kodimension

$$c(T) = \min_{z \in D_0} \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)X \right)$$

von T entspricht. Dabei ist $D_0 \subset D$ die Zusammenhangskomponente mit $0 \in D_0$. Wir stellen uns in dieser Arbeit die Frage nach einem entsprechenden Resultat für den Fall $d < n$. Falls zusätzlich angenommen wird, dass 0 ein glatter Punkt der Menge A ist, ersetzen wir $c(T)$ durch die 'in

A stabilisierte Bild-Kodimension' $c_A(T)$ von T und zeigen, dass dann die Abschätzung $c_0 \geq c_A(T)$ richtig bleibt (Korollar 3.39), die Gleichheit dabei jedoch im Allgemeinen nicht mehr erwartet werden kann (Beispiel 3.41 (b)).

Für ein Semi-Fredholmtupel $T \in \mathcal{L}(X)^n$ auf einem Banachraum X betrachten wir den abgeschlossenen Teilraum

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \subset X$$

mit den Teilräumen $M_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ wie oben. In [**22**] stellt X. Fang die Frage, ob die Identität

$$\sum_{j=1}^{n} T_j M = M$$

gültig ist, falls X ein Hilbertraum und T vertauschend ist. Es ist wohlbekannt, dass dies der Fall ist, wenn $n = 1$ ist. Eine weitere bekannte Tatsache, die damit in engem Zusammenhang steht, ist, dass M (für $n = 1$) mit dem lokalen Spektralraum $X_T(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ von T über $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ übereinstimmt. Im vierten Kapitel dieser Arbeit wird zunächst gezeigt, dass die Inklusion

$$M \subset X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$$

für beliebige Tupel T richtig bleibt und dass Gleichheit gilt, falls T vertauschend ist (Satz 4.3). Weiterhin wird dort der folgende Abgeschlossenheitssatz (Satz 4.21) für holomorphe Semi-Fredholmfunktionen bewiesen: Sind X, Y Banachräume und ist $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X)$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subset \mathbb{C}^n$ mit $\dim(X/\alpha(0)Y) < \infty$, so haben die induzierten stetig linearen Abbildungen $\alpha_U : \mathcal{O}(U, Y) \to \mathcal{O}(U, X)$ zwischen Frécheträumen für alle genügend kleinen Steinschen offenen Nullumgebungen $U \subset D$ abgeschlossenes Bild. Für ein Semi-Fredholmtupel T lässt sich dieser Abgeschlossenheitssatz auf die Funktion

$$\alpha = \alpha_T : \mathbb{C}^n \to \mathcal{L}(X^n, X),\ z \mapsto (z_1 - T_1, \ldots, z_n - T_n) \quad \text{(Zeilenoperator)}$$

anwenden. Es folgt, dass für genügend kleine Steinsche offene Nullumgebungen $U \subset \mathbb{C}^n$ die globalen Spektralräume $\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U)$ von T über $\mathbb{C}^n \setminus U$ abgeschlossen in X sind. Falls T zusätzlich vertauschend ist, folgt daraus schließlich, dass stets eine offene Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ mit

$$X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U)$$

existiert (Korollar 4.22).

Für weitere Erläuterungen zu den einzelnen Kapiteln verweisen wir an dieser Stelle außerdem auf die jeweiligen ausführlichen Einleitungsabschnitte.

Danksagung

Ich möchte mich bei vielen Menschen bedanken, die in den vergangenen Jahren an meiner Seite gestanden haben und mich bei der Anfertigung dieser Arbeit in verschiedener Hinsicht unterstützt haben.
Allen voran gilt mein Dank dabei Herrn Prof. Dr. Jörg Eschmeier. Er hat durch seine Anregungen zu verschiedenen Fragestellungen wie auch durch seine fachlich hervorragende und geduldige Betreuung wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Ich möchte ihm auch für seine Begleitung meiner mathematischen Ausbildung danken, die von Beginn an durch seine zahlreichen verständlichen und gehaltvollen Lehrveranstaltungen in weiten Teilen mitgeprägt wurde.
Ein Kollege und Freund, dem ich zu Dank verpflichtet bin, ist Herr Dr. Christoph Barbian. Bei der Bewältigung unzähliger großer und kleiner Probleme, die im Verlauf dieser Arbeit aufgetreten sind, hat er mich kompetent und energisch unterstützt. Vielen Dank dafür!
Ich danke Herrn Prof. Dr. Ernst Albrecht für sein Interesse an meiner Arbeit und seine fachlichen Anmerkungen und Fragen zu meinen Vorträgen in unserem Oberseminar.
Mein Dank geht auch an Herrn Prof. Dr.Wolfram Decker und Herrn Dr. Michael Kunte für ihre geduldigen und verständlichen Erklärungen zu einigen Sachverhalten aus der kommutativen Algebra.
Vielen weiteren Professoren, Mitarbeitern und Studenten des Fachbereichs gilt mein Dank für die gute Zusammenarbeit und die freundliche Atmosphäre. Ich habe mich hier während meiner Zeit als Student und Mitarbeiter immer sehr wohl gefühlt und dabei viele Freundschaften geschlossen.
Ein besonderer Dank geht an meine Freundin Esther, die mir Liebe und Geborgenheit gegeben hat. Bei der Bewältigung dieser Arbeit hat sie mir stets Rückhalt und Unterstützung geboten.
Ich danke meinen Eltern, die mich in meinem Studium und meinem Promotionsvorhaben moralisch und finanziell unterstützt haben. Ihnen und meiner gesamten Familie danke ich dafür, mir einen Ort geschaffen zu haben, an dem ich zuhause bin.

Teil 1

Multiplikatoren und charakteristische Funktion

KAPITEL 1

Commutant-Lifting-Satz

Einleitung

Für eine gegebene Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ konstruieren B. Sz.-Nagy und C. Foiaş in [**50**] die minimale isometrische Dilatation $V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$. Für diese gilt

$$V^*\mathcal{H} \subset \mathcal{H} \text{ und } V^*h = T^*h \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Außerdem ist

$$\mathcal{K} = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} V^k \mathcal{H}.$$

Darauf aufbauend zeigte B. Sz.-Nagy dann in [**51**], dass zu einem Operator X, der zwei Kontraktionen vertauscht, ein normgleicher Operator Y existiert, der ihre minimalen isometrischen Dilatationen vertauscht und für den Y^* eine Fortsetzung von X^* ist. Dieses Resultat wird üblicherweise als Commutant-Lifting-Satz bezeichnet.
Ist $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ ein vertauschendes Tupel von Kontraktionen, so zeigt S. Parrotts Beispiel (siehe [**44**]), dass die Existenz eines vertauschenden Tupels $V = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ aus unitären Dilatationen V_j für T_j $(j = 1, \ldots, n)$ im allgemeinen nicht erwartet werden kann, falls $n > 2$ ist.
Anstatt eines Tupels von einzelnen Kontraktionen betrachten wir im Folgenden n-Kontraktionen, das heißt Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$, die der Bedingung

$$\sum_{j=1}^{n} T_j T_j^* \leq I_H$$

genügen.
Basierend auf einer geeigneten von Neumann-Ungleichung, die erstmals von Drury in [**14**] gezeigt wurde, erhält W. Arveson in [**5**] einen Modellsatz für vertauschende n-Kontraktionen, der eine Verallgemeinerung der Ergebnisse von B. Sz.-Nagy und C. Foiaş (siehe [**50**]) darstellt. Darin erhält man eine Dilatation von T, die als direkte Summe eines Shifts und eines sphärisch unitären Tupels geschrieben werden kann und für die $\mathcal{H}$ ein $*$-invarianter Teilraum ist. Der Shiftanteil ist dabei gegeben als Amplifikation des Tupels

$(M_{z_1}, \dots, M_{z_n})$ der Multiplikationsoperatoren auf dem Raum

$$H(\mathbb{B}) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha;\ a_\alpha \in \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|a_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} < \infty \right\} \subset \mathcal{O}(\mathbb{B})$$

mit $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$. Eine äquivalente Version dieses Modellsatzes findet sich bereits bei V. Müller und F.-H. Vasilescu in [**43**].

Jede vertauschende n-Kontraktion T, die zusätzlich eine geeignete $C_{\cdot 0}$-Bedingung erfüllt, ist (bis auf unitäre Äquivalenz) Kompression des Multiplikationstupels $M_z \in \mathcal{L}\left(H(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E}\right)^n$ ($\mathcal{E}$ geeigneter Hilbertraum) auf einen $*$-invarianten Teilraum $\mathcal{N} \subset H(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E}$. Ist $X \in \mathcal{L}(\mathcal{N})$ ein Operator, der mit den Kompressionen $P_{\mathcal{N}} M_{z_j}|_{\mathcal{N}}$ $(j = 1, \dots, n)$ vertauscht, so lässt sich X normerhaltend zu einem Operator $Y \in \mathcal{L}\left(H(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E}\right)$ liften, der mit den M_{z_j} vertauscht und somit selbst ein Multiplikationsoperator auf $H(\mathbb{B}) \otimes \mathcal{E}$ ist. Dieses Resultat erhält man als Spezialfall aus allgemeinereren Commutant-Lifting-Sätzen für funktionale Hilberträume mit Nevanlinna-Pick Kernen. Man vergleiche dazu Arbeiten von C. G. Ambrozie und D. Timotin (siehe [**2**]), J. A. Ball, T. T. Trent und V. Vinnikov (siehe [**7**]) und C. Barbian (siehe [**8**]). Man hat damit eine Verallgemeinerung des eindimensionalen Commutant-Lifting-Satzes aus [**50**] für vertauschende n-Kontraktionen, die zusätzlich die $C_{\cdot 0}$-Bedingung erfüllen.

Ziel dieses Kapitels ist es, ein entsprechendes Resultat für den nichtvertauschenden Fall zu zeigen.

Man beachte zunächst, dass auch für beliebige (nicht notwendig vertauschende) n-Kontraktionen ein geeigneter Modellsatz existiert. Dieser leitet sich aus der Wold-Zerlegung für Tupel von Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern und der Konstruktion einer minimalen isometrischen Dilatation für eine gegebene n-Kontraktion ab, beides zeigt G. Popescu in [**47**]. Ein alternativer Beweis für den Modellsatz, der der Methodik von W. Arveson aus [**5**] folgt, wird in [**20**] gegeben.

Der Shiftanteil im Modell für eine n-Kontraktion wird in der nichkommutativen Theorie durch den n-Shift $S \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ auf dem Fockraum $\mathcal{F}^2$ gegeben. Wir führen in diesem Kapitel zunächst eine geeignete Schreibweise für Multiplikatoren zwischen vektorwertigen Fockräumen ein.

Dann gehen wir nochmals auf den kommutativen Fall ein und zitieren ein Ergebnis von J. Eschmeier und M. Putinar, das zeigt, dass jeder kontraktive (kommutative) Multiplikator eine Darstellung ('fractional transform') durch eine kontraktive beziehungsweise unitäre Operatormatrix ('colligation') besitzt. Vergleiche dazu [**19**]. Diese Darstellung der Multiplikatoren wurde unabhängig davon auch von J. A. Ball, T. T. Trent und V. Vinnikov in [**7**] entwickelt.

Wir konstruieren im Folgenden zu einer solchen Matrixkontraktion auch einen Multiplikator für die nichtkommutative Situation. Damit zeigen wir den angestrebten Commutant-Lifting-Satz und folgern daraus ein Analogon zum obigen Resultat von J. Eschmeier und M. Putinar.
Schließlich erlaubt uns dieses Resultat, eine natürliche Beziehung zwischen den kommutativen und den nichtkommutativen Multiplikatoren herzustellen. Grundlegend dabei ist die Identifizierung von $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ mit dem symmetrischen Fockraum.
Abschließend sei noch erwähnt, dass G. Popescu in [**47**] einen Commutant-Lifting-Satz zeigt, der sich auf die dort konstruierte minimale isometrische Dilatation bezieht und eine direkte Verallgemeinerung des ursprünglichen Satzes von B. Sz.-Nagy und C. Foiaş ist. Seine Beweismethoden unterscheiden sich jedoch grundsätzlich von denen in dieser Arbeit.

Bezeichnungen

Gegeben sei eine positive natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}^*$.
Wir betrachten die freie Halbgruppe über n Erzeugern

$$F = \{0\} \ \cup \ \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{1, \dots, n\}^k.$$

Dabei sei 0 neutrales Element von F und für $a = (a_1, \dots, a_k),\ b = (b_1, \dots, b_l)$ definiert

$$a \cdot b = (a, b) = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$$

das Produkt von a und b in F.
Weiter sei der Betrag für ein Element aus F gegeben durch $|0| = 0$ und $|a| = k$, falls $a \in \{1, \dots, n\}^k$. Damit ist offenbar

$$|(a, b)| = |a| + |b| \quad (a, b \in F).$$

Für ein Element $0 \neq a = (a_1, \dots, a_k) \in F$ schreiben wir

$$a' = (a_k, \dots, a_1) \in F.$$

Zusätzlich sei $0' = 0$. Offenbar gilt $a'' = a,\ |a| = |a'|$ und

$$(a, b)' = \big(b', a'\big)$$

für alle $a, b \in F$.
Ist ein Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(H)^n$ von stetig linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H gegeben, so definieren wir eine Abbildung

$$F \to \mathcal{L}(H),\ a \mapsto T_a$$

durch $T_0 = I_H$ und

$$T_a = T_{a_1} \dots T_{a_k}, \quad \text{falls } a = (a_1, \dots, a_k) \in F \setminus \{0\}.$$

Es gilt dann

$$T_{(a,b)} = T_a T_b \quad (a, b \in F).$$

Wir schreiben in diesem Sinne stets

$$T_a^* = (T_a)^* \in \mathcal{L}(H) \quad (a \in F)$$

für den adjungierten Operator zu T_a.
Für einen Hilbertraum $\mathcal{E}$ betrachten wir

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}) = \{(x_a)_{a\in F};\ x_a \in \mathcal{E} \text{ für } a \in F\}$$

und

$$\mathcal{F}^2(\mathcal{E}) = \{(x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}(\mathcal{E});\ \sum_{a\in F} \|x_a\|^2 < \infty\}\ .$$

Bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle\ (x_a)_{a\in F}\ ,\ (y_a)_{a\in F}\ \rangle_{\mathcal{F}^2(\mathcal{E})}\ =\ \sum_{a\in F} \langle x_a, y_a\rangle_{\mathcal{E}}$$

ist dann $\mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ wieder ein Hilbertraum. Dieser heißt Fockraum über $\mathcal{E}$. Wir schreiben kurz $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^2(\mathbb{C})$. Eine Orthonormalbasis dieses skalarwertigen Fockraums ist

$$(e_a,\ a \in F)$$

mit $e_a = (\delta_{a,b})_{b\in F}$ für $a \in F$.
Wir können $\mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ mit dem Hilbertraum-Tensorprodukt $\mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{E}$ identifizieren, denn es gibt eine (eindeutige) unitäre Abbildung $U : \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{E} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$, die Elementartensoren der Form $(\lambda_a)_{a\in F} \otimes x$ auf die Familie $(\lambda_a \cdot x)_{a\in F}$ abbildet. Wir schreiben ein Element $(x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ demzufolge auch in der Form

$$\sum_{a\in F} e_a \otimes x_a.$$

Man sieht hier insbesondere, dass

$$\{e_a \otimes x;\ a \in F,\ x \in \mathcal{E}\} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$$

eine totale Teilmenge ist.
Wir definieren nun einige stetig lineare Operatoren auf dem Fockraum. Zunächst betrachten wir dazu den skalarwertigen Fall.
Für $i = 1, \ldots, n$ sei $S_i \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ der stetig lineare Operator mit

$$S_i e_a = e_{(i,a)} \quad (a \in F).$$

Das Tupel $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ heißt Linksvorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$.
Entsprechend ist der Rechtsvorwärtsshift $R = (R_1, \ldots, R_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ gegeben durch

$$R_i e_a = e_{(a,i)} \quad (a \in F,\ i = 1, \ldots, n).$$

Schließlich sei

$$P_0 : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2,\ (x_a)_{a\in F} \mapsto x_0 e_0$$

die orthogonale Projektion auf $\langle e_0\rangle$ in $\mathcal{F}^2$.
In der folgenden Proposition stellen wir grundlegende Eigenschaften dieser Operatoren zusammen.

Proposition 1.1.

(a) *Die Tupel S und R sind n-Shifts mit wanderndem Unterraum $\langle e_0\rangle$, das heißt, $S_1,\ldots,S_n,R_1,\ldots,R_n$ sind Isometrien und es ist*

$$\bigoplus_{a\in F} S_a\langle e_0\rangle = \bigoplus_{a\in F} R_a\langle e_0\rangle = \mathcal{F}^2.$$

Damit sind insbesondere die Bilder von $S_1,\ldots,S_n$ (beziehungsweise die von $R_1,\ldots R_n$) paarweise orthogonal.

(b) *Es gilt*

$$I - P_0 = \sum_{i=1}^n S_i S_i^* \ = \ \sum_{i=1}^n R_i R_i^*.$$

(c) *Die Tupel S und R vertauschen, das heißt es gilt*

$$S_i R_j = R_j S_i \quad (i,j = 1,\ldots,n).$$

Vermöge der Identifizierung $\mathcal{F}^2(\mathcal{E}) = \mathcal{F}^2 \otimes \mathcal{E}$ definieren wir die entsprechenden Operatoren in $\mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(\mathcal{E})\right)$ als Tensorprodukt mit der Identität auf $\mathcal{E}$

$$S_i^{\mathcal{E}} = S_i \otimes I_{\mathcal{E}},\ R_i^{\mathcal{E}} = R_i \otimes I_{\mathcal{E}},\ P_0^{\mathcal{E}} = P_0 \otimes I_{\mathcal{E}} \quad (i = 1,\ldots,n).$$

Man beachte, dass 1.1 sinngemäß auch für diese Operatoren gilt. (Man ersetze dabei $\langle e_0\rangle$ durch $\langle e_0\rangle \otimes \mathcal{E}$.)

Bemerkung 1.2.
Indem wir ein Element $x \in \mathcal{E}$ mit $e_0 \otimes x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ identifizieren, können wir $\mathcal{E}$ im Folgenden stets als Teilraum von $\mathcal{F}^2(E)$ auffassen. Wir schreiben

$$P^{\mathcal{E}} : \mathcal{F}^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{E},\ (x_a)_{a\in F} \mapsto x_0$$

für die Projektion von $\mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ auf $\mathcal{E}$.
Für $a \in F$ gilt

$$e_a = S_a e_0 = R_{a'} e_0.$$

Daher gilt für ein Element $x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ vermöge obiger Identifizierung $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$

$$x = \sum_{a\in F} e_a \otimes x_a = \sum_{a\in F} S_a^{\mathcal{E}} x_a = \sum_{a\in F} R_{a'}^{\mathcal{E}} x_a.$$

Multiplikatoren zwischen Fockräumen

Es seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ Hilberträume. In diesem Abschnitt wollen wir Multiplikationsoperatoren zwischen den Fockräumen über $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$ einführen und ihre grundlegenden Eigenschaften festhalten.
Wir schreiben

$$\mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \ = \ \{(\phi_a)_{a \in F};\ \phi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \text{ für } a \in F\} \ .$$

Für $\phi = (\phi_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ und $x = (x_b)_{b \in F} \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ definieren wir $\phi \bullet x$ und $x \bullet \phi$ in $\mathcal{F}(\mathcal{E}_*)$ durch

$$(\phi \bullet x)_c = \sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b$$

und

$$(x \bullet \phi)_c = \sum_{(a,b)=c} \phi_b x_a$$

für $c \in F$. Man beachte, dass diese Summen stets endlich sind.
Wir interessieren uns nun für die Elemente $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ mit

$$\phi \bullet \mathcal{F}^2(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*).$$

Definition 1.3.
Sei $\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$.
Dann heißt ϕ (Links-)Multiplikator von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$, falls

$$\phi \bullet x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*) \text{ für alle } x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$$

gilt. In diesem Fall bezeichnet man mit

$$M_\phi : \mathcal{F}^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*),\ x \mapsto \phi \bullet x$$

den zu ϕ gehörigen (Links-)Multiplikationsoperator.
Es sei

$$\mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) = \{\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*);\ \phi \text{ ist Multiplikator}\}$$

und

$$M(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) = \{M_\phi;\ \phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass jeder Multiplikationsoperator von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$ stetig ist. Dies ist eine einfache Folgerung aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Satz 1.4.
Es gilt

$$M(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \ \subset \ \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(\mathcal{E}), \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)\right),$$

das heißt also, dass M_ϕ für alle $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ stetig linear ist.

Beweis.
Sei $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$. Man sieht sofort, dass M_ϕ linear ist.
Seien weiterhin

$$x = (x_b)_{b\in F},\ x^m = (x_b^m)_{b\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}) \quad (m \in \mathbb{N})$$

und

$$y = (y_c)_{c\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$$

gegeben, so dass

$$x^m \xrightarrow{m} x \text{ in } \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$$

und

$$\phi \bullet x^m \xrightarrow{m} y \text{ in } \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*).$$

Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, genügt es zu zeigen, dass $\phi \bullet x = y$ ist. Dazu beachte man, dass für alle $c \in F$

$$\begin{aligned}(\phi \bullet x)_c &= \sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b \\ &= \sum_{(a,b)=c} \phi_a \left(\lim_{m\to\infty} x_b^m\right) \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b^m \\ &= \lim_{m\to\infty} (\phi \bullet x^m)_c \quad = y_c\end{aligned}$$

gilt. Folglich ist $\phi \bullet x = y$. □

Bemerkung 1.5.

(a) Entsprechend betrachten wir auch die Menge der Rechtsmultiplikatoren

$$\mathcal{R}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*) = \{\phi \in \mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*);\ x \bullet \phi \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*) \text{ für alle } x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})\}$$

und die entsprechenden Rechtsmultiplikationsoperatoren

$$R_\phi : \mathcal{F}^2(\mathcal{E}) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*),\ x \mapsto x \bullet \phi \quad (\phi \in \mathcal{R}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)).$$

Auch hier gilt

$$R(\mathcal{E},\mathcal{E}_*) = \{R_\phi;\ \phi \in \mathcal{R}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)\} \subset \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(\mathcal{E}), \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)\right).$$

(b) Ist $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$ mit $\phi_a = 0$ für fast alle $a \in F$, so ist

$$\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*) \cap \mathcal{R}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*).$$

Ist speziell $\mathcal{E} = \mathcal{E}_*$ und $\phi = \left(\delta_{(i),a} \cdot I_{\mathcal{E}}\right)_{a\in F}$ für ein $i = 1,\ldots,n$, so ist $M_\phi = S_i^{\mathcal{E}}$ und $R_\phi = R_i^{\mathcal{E}}$. Die Komponenten der Shifts sind also Links- beziehungsweise Rechtsmultiplikationsoperatoren.

Im weiteren Verlauf beschränken wir uns auf das Studium der Linksmultiplikatoren und ihren zugehörigen Operatoren. Dabei gilt alles natürlich auch entsprechend für Rechtsmultiplikatoren.
Es ist oft nützlich, die Wirkung der Multiplikationsoperatoren wie folgt zu beschreiben. Für $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ ist

$$M_\phi \left(e_b \otimes x\right) = \sum_{a\in F} e_{(a,b)} \otimes \phi_a x \quad (b \in F,\ x \in \mathcal{E}).$$

Im nächsten Satz geben wir eine erste Charakterisierung der Multiplikationsoperatoren und zeigen, dass $M(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ genau aus den stetig linearen Operatoren besteht, die die Rechtsvorwärtsshifts $R^{\mathcal{E}}$ und $R^{\mathcal{E}_*}$ vertauschen. Wir beweisen dies analog zum Fall $\mathcal{E} = \mathcal{E}_* = \mathbb{C}$, vergleiche dazu etwa Satz 1.6.4 in [**20**].

Satz 1.6.
Für einen stetig linearen Operator $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(\mathcal{E}), \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)\right)$ sind die beiden folgenden Bedingungen äquivalent:

(1) Es ist $A \in M(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$.
(2) Es gilt

$$AR_i^{\mathcal{E}} = R_i^{\mathcal{E}_*} A \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Beweis.
Sei zunächst $A = M_\phi$ mit $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$.
Wir fixieren ein $i \in \{1, \dots, n\}$ sowie $b \in F$ und $x \in \mathcal{E}$.
Dann ist

$$AR_i^{\mathcal{E}} \left(e_b \otimes x\right) = A\left(e_{(b,i)} \otimes x\right) = \sum_{a\in F} e_{(a,b,i)} \otimes \phi_a x$$

und

$$R_i^{\mathcal{E}_*} A \left(e_b \otimes x\right) = R_i^{\mathcal{E}_*} \left(\sum_{a\in F} e_{(a,b)} \otimes \phi_a x_b\right) = \sum_{a\in F} e_{(a,b,i)} \otimes \phi_a x.$$

Da die Vektoren der Form $e_b \otimes x$ $(b \in F,\ x \in \mathcal{E})$ eine totale Teilmenge von $\mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ bilden, folgt daraus die behauptete Gleichung

$$AR_i^{\mathcal{E}} = R_i^{\mathcal{E}_*} A.$$

Gelte umgekehrt (2) für ein $A \in \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(\mathcal{E}), \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)\right)$.
Für $a \in F$ sei $\phi_a \in \mathcal{L}\left(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*\right)$ definiert durch

$$\phi_a x = \left(A\ e_0 \otimes x\right)_a \quad (x \in \mathcal{E}).$$

Dann ist $(\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ und für alle $x = \sum_b e_b \otimes x_b \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ gilt

$$\begin{aligned}
(Ax)_c &= \sum_{b\in F} (A\ e_b \otimes x_b)_c \\
&= \sum_{b\in F} \left(AR_{b'}^{\mathcal{E}}\ e_0 \otimes x_b\right)_c \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{b\in F} \left(R_{b'}^{\mathcal{E}_*} A\ e_0 \otimes x_b\right)_c \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{(a,b)=c} (A\ e_0 \otimes x_b)_a \\
&= \sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b \\
&= (\phi \bullet x)_c \quad (c \in F).
\end{aligned}$$

Man beachte in $(*)$, dass

$$\left(R_{b'}^{\mathcal{E}_*} y\right)_c = \begin{cases} y_a & , \text{ falls ein } a \in F \text{ mit } (a,b) = c \text{ existiert} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $y \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ gilt.

Wir können nun folgern, dass $\phi \bullet x = Ax$ für alle $x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ gilt. Also ist $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ mit $M_\phi = A$. □

BEMERKUNG 1.7.

(a) Aus 1.6 folgt, dass $M(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \subset \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(\mathcal{E}), \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)\right)$ abgeschlossen ist. Daher wird durch

$$\|\phi\| = \|M_\phi\| \quad (\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$$

eine Norm auf der Menge der Multiplikatoren definiert, die $\mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ zu einem Banachraum macht.
Wir schreiben

$$\mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) = \{\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*);\ \|\phi\| \leq 1\}$$

für die abgeschlossene Einheitskugel dieses Raumes.

(b) Nach 1.2 und 1.6 gilt für einen Multiplikator $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ und ein Element $x = (x_b)_{b\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$, dass

$$M_\phi x = M_\phi \left(\sum_{b\in F} R_{b'}^{\mathcal{E}} x_b\right) = \sum_{b\in F} M_\phi R_{b'}^{\mathcal{E}} x_b = \sum_{b\in F} R_{b'}^{\mathcal{E}_*} M_\phi x_b.$$

Insbesondere folgt, dass ein Multiplikationsoperator schon durch seine Einschränkung auf $\mathcal{E}$ eindeutig bestimmt ist.

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir noch die Wirkungsweise des adjungierten Operators zu einem Multiplikationsoperator beschreiben.

LEMMA 1.8.
Für $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ *und* $y = (y_c)_{c\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ *gilt*

$$M_\phi^* y = \left(\sum_{a\in F} \phi_a^* y_{(a,b)}\right)_{b\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}).$$

BEWEIS.
Für $c \in F$ und $x = (x_b)_{b\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle x, M_\phi^*\, e_c \otimes y_c\rangle &= \langle M_\phi x, e_c \otimes y_c\rangle \\
&= \langle \big(M_\phi x\big)_c, y_c\rangle \\
&= \langle \sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b, y_c\rangle \\
&= \sum_{(a,b)=c} \langle x_b, \phi_a^* y_c\rangle \\
&= \langle x, \sum_{(a,b)=c} e_b \otimes \phi_a^* y_c\rangle.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$M_\phi^*\, e_c \otimes y_c = \sum_{(a,b)=c} e_b \otimes \phi_a^* y_c \quad (c \in F).$$

Für $b \in F$ ist damit

$$\big(M_\phi^*\, e_c \otimes y_c\big)_b = \begin{cases} \phi_a^* y_c &, \text{ falls ein } a \in F \text{ mit } (a,b) = c \text{ existiert,} \\ 0 &, \text{ sonst} \end{cases}$$

für alle $c \in F$ und da M_ϕ^* stetig linear ist, folgt

$$\big(M_\phi^* y\big)_b = \sum_{c\in F} \big(M_\phi^*\, e_c \otimes y_c\big)_b = \sum_{a\in F} \phi_a^* y_{(a,b)}.$$

Dies entspricht der Behauptung. □

Kommutative Multiplikatoren

Wir wollen in diesem Abschnitt Multiplikatoren auf dem Arveson-Drury-Raum $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ($\mathcal{E}$ ein Hilbertraum) erklären. In [**19**] wurde gezeigt, dass jeder kontraktive Multiplikationsoperator von $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ nach $H(\mathbb{B}, \mathcal{E}_*)$ eine natürliche Darstellung mittels einer unitären Operatormatrix hat. Ziel im Folgenden ist es, eine entsprechende Version für Multiplikatoren im Sinne des vorigen Abschnitts herzuleiten.

Zunächst definieren wir den Raum $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ und zeigen, wie er in den Fockraum $\mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ eingebettet werden kann. Man vergleiche dazu auch [**5**]. Es sei

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$$

die offene euklidische Einheitskugel im $\mathbb{C}^n$. Für $\alpha \in \mathbb{N}^n$ sei

$$\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum und

$$H(\mathbb{B}, \mathcal{E}) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha z^\alpha;\ f_\alpha \in \mathcal{E} \text{ mit } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\|f_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} < \infty \right\}.$$

Bekanntlich ist $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha z^\alpha, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} g_\alpha z^\alpha \rangle_{H(\mathbb{B}, \mathcal{E})} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{\langle f_\alpha, g_\alpha \rangle_{\mathcal{E}}}{\gamma_\alpha}$$

ein Hilbertraum. Da die auftretenden Potenzreihen kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{B}$ konvergieren, können wir $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ als Unterraum des Raumes $\mathcal{O}(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ der holomorphen $\mathcal{E}$-wertigen Funktionen auf $\mathbb{B}$ auffassen. Man beachte, dass $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ im Fall $n = 1$ mit dem Hardyraum über der Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ übereinstimmt. Wir zeigen nun, dass man $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ auch mit dem symmetrischen Teil $\mathcal{F}^2_+(\mathcal{E})$ des Fockraums über $\mathcal{E}$ identifizieren kann. Dazu sei $\mu : F \to \mathbb{N}^n$ definiert durch $\mu(0) = 0$ und

$$\mu(a_1, \ldots, a_k) = \big(\#\{j = 1, \ldots, k;\ a_j = i\}\big)_{i=1}^n \quad (k \geq 1).$$

Offenbar ist $\mu(a, b) = \mu(a) + \mu(b)$ $(a, b \in F)$ und man rechnet nach, dass

$$\#\mu^{-1}(\alpha) \ = \ \gamma_\alpha \ (\alpha \in \mathbb{N}^n)$$

gilt. Nun können wir eine Einbettung $H(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \hookrightarrow \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ definieren.

Lemma 1.9.

(a) *Die Abbildung*

$$i^{\mathcal{E}} : H(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{E}), \ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha z^\alpha \mapsto \left(\frac{f_{\mu(a)}}{\gamma_{\mu(a)}} \right)_{a \in F}$$

ist eine (wohldefinierte) Isometrie mit Bild

$$\mathcal{F}^2_+(\mathcal{E}) = \{(x_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E});\ x_a = x_b \textit{ für } \mu(a) = \mu(b)\} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E}).$$

Man nennt $\mathcal{F}^2_+(\mathcal{E})$ den symmetrischen Fockraum über $\mathcal{E}$.

(b) *Der adjungierte Operator $P_+^{\mathcal{E}} = (i^{\mathcal{E}})^* : \mathcal{F}^2(E) \to H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ ist gegeben durch*

$$P_+^{\mathcal{E}} x = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{a \in \mu^{-1}(\alpha)} x_a \right) z^\alpha \quad \textit{für } x = (x_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}).$$

Beweis.

(a) Für $f = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{a\in F} \left\| \frac{f_{\mu(a)}}{\gamma_{\mu(a)}} \right\|^2 &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} \frac{\|f_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha^2} \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|f_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} \quad (\text{denn } \#\mu^{-1}(\alpha) = \gamma_\alpha) \\ &= \|f\|^2_{H(\mathbb{B},\mathcal{E})}.\end{aligned}$$

Also ist $i^\mathcal{E}$ wohldefiniert und isometrisch. Es ist $i^\mathcal{E} H(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \subset \mathcal{F}^2_+(\mathcal{E})$. Für die umgekehrte Inklusion sei $x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2_+(\mathcal{E})$ gegeben. Zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existiert also ein Element $f_\alpha \in \mathcal{E}$ mit $x_a = f_\alpha$ für alle $a \in \mu^{-1}(\alpha)$. Es sei $f = \sum_\alpha (\gamma_\alpha f_\alpha) z^\alpha$. Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|\gamma_\alpha f_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \gamma_\alpha \|f_\alpha\|^2 \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} \|f_\alpha\|^2 \quad (\text{denn } \#\mu^{-1}(\alpha) = \gamma_\alpha) \\ &= \sum_{a\in F} \|x_a\|^2 = \|x\|^2 \quad < \infty\end{aligned}$$

ist $f \in H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ und wie man leicht sieht, ist $i^\mathcal{E} f = x$.

(b) Für alle $x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ gilt wegen $\#\mu^{-1}(\alpha) = \gamma_\alpha$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left\| \sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} x_a \right\|^2 \leq \gamma_\alpha \cdot \sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} \|x_a\|^2 \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n).$$

Daraus folgt, dass die Summe in Teil (b) ein Element in $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ definiert. Ist $x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ und $f = \sum_\alpha f_\alpha z^\alpha \in H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$, so gilt

$$\begin{aligned}\langle P^\mathcal{E}_+ x, f\rangle = \langle x, i^\mathcal{E} f\rangle &= \langle x, \left(\frac{f_{\mu(a)}}{\gamma_{\mu(a)}}\right)_a \rangle \\ &= \sum_{a\in F} \frac{1}{\gamma_{\mu(a)}} \cdot \langle x_a, f_{\mu(a)}\rangle \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{1}{\gamma_\alpha} \cdot \langle \sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} x_a, f_\alpha\rangle \\ &= \langle \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \left(\sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} x_a \right) z^\alpha, f\rangle.\end{aligned}$$

Folglich wirkt $P^\mathcal{E}_+$ in der angegebenen Weise.

$\square$

Bemerkung 1.10.
Für $z \in \mathbb{B}$ und $a \in F$ schreiben wir im Folgenden kurz $z_a = z^{\mu(a)}$. Weiterhin betrachten wir $\epsilon_z = (\bar{z}_a)_{a \in F}$ für $z \in \mathbb{B}$. Wegen

$$\sum_{a \in F} |\bar{z}_a|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|a|=k} |z_a|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \right)^k = \frac{1}{1-|z|^2} < \infty$$

ist $\epsilon_z \in \mathcal{F}^2$ mit

$$\|\epsilon_z\|^2 = \frac{1}{1-|z|^2} \quad (z \in \mathbb{B}).$$

Weiterhin gilt offenbar

$$\langle e_a, \epsilon_z \rangle = z_a \quad (a \in F, \; z \in \mathbb{B}).$$

Fasst man die Elemente von $H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ als holomorphe Funktionen auf, so erhält man aus 1.9 (b)

$$P_+^{\mathcal{E}} x \; (z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{a \in \mu^{-1}(\alpha)} x_a \right) z^\alpha = \sum_{a \in F} z_a x_a = \big(\langle \cdot, \epsilon_z \rangle \otimes I_{\mathcal{E}} \big) \; x$$

für $x = (x_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ und $z \in \mathbb{B}$. Die auftretenden Reihen konvergieren dabei absolut.

Es sei nun $\mathcal{E}_*$ ein weiterer Hilbertraum. Wir wollen an den Begriff des Multiplikators von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$ in der kommutativen Situation erinnern.

Definition 1.11.
Eine holomorphe Funktion

$$\phi : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

heißt kommutativer Multiplikator von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$, falls für jedes $f \in H(\mathbb{B}, \mathcal{E})$ die Funktion

$$\phi f : \mathbb{B} \to \mathcal{E}_*, \; z \mapsto \phi(z) f(z)$$

in $H(\mathbb{B}, \mathcal{E}_*)$ liegt.
In diesem Fall heißt

$$M_\phi : H(\mathbb{B}, \mathcal{E}) \to H(\mathbb{B}, \mathcal{E}_*), \; f \mapsto \phi f$$

der zu ϕ gehörige kommutative Multiplikationsoperator.
Wir bezeichnen die Menge der kommutativen Multiplikatoren von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$ mit $\mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ und schreiben

$$M^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) = \{ M_\phi; \; \phi \in \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \} \subset \mathcal{L}\left(H(\mathbb{B}, \mathcal{E}), H(\mathbb{B}, \mathcal{E}_*) \right)$$

für die Menge der zugehörigen Multiplikationsoperatoren.

Bemerkung 1.12.
Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen zeigt man, dass auch alle kommutativen Multiplikationsoperatoren stetig linear sind.
Bekanntlich ist $\mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ mit der durch

$$\|\phi\| = \|M_\phi\| \quad (\phi \in \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*))$$

gegebenen Norm ein Banachraum.
Wir schreiben

$$\mathcal{M}_1^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) = \{\phi \in \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*);\ \|\phi\| \leq 1\}$$

für die abgeschlossene Einheitskugel dieses Raums.

Der folgende Satz charakterisiert die kontraktiven kommutativen Multiplikatoren. Er besagt, dass jeder solche Multiplikator, durch eine kontraktive Operatormatrix dargestellt werden kann und wurde in [**19**] von J. Eschmeier und M. Putinar gezeigt.

Satz 1.13.
Für eine Funktion $\phi : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.

(1) Es ist $\phi \in \mathcal{M}_1^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$.
(2) Es existieren ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine Kontraktion

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$$

mit

$$\phi(z) = D + C\left(I_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^n z_j A_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^n z_j B_j\right)$$

für alle $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{B}$.

Für eine Kontraktion U und eine Funktion $\phi : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ wie in 1.13 (2) bezeichnen wir ϕ als den von U dargestellten kommutativen Multiplikator und schreiben $\phi = \phi_U^c$.

Bemerkung 1.14.
In [**19**] wurde auch gezeigt, dass die Matrixkontraktion U in 1.13 (2) stets unitär gewählt werden kann.

Commutant-Lifting-Satz

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst zu jeder kontraktiven Operatormatrix wie im vorhergehenden Abschnitt auch einen nichtkommutativen kontraktiven Multiplikator. Wir wollen schließlich analog zum Resultat 1.13 zeigen, dass jeder dieser Multiplikatoren von solch einer Matrix dargestellt wird. Diese Charakterisierung der kontraktiven Multiplikatoren zwischen Fockräumen erhalten wir durch den Beweis eines Commutant-Lifting-Satzes. Dieser beschreibt alle kontraktiven Operatoren, die Kompressionen der Rechtsvorwärtsshifts vertauschen und somit nach 1.6 insbesondere die Multiplikationsoperatoren.
Im Folgenden seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}_*$ Hilberträume.

Definition 1.15.
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien

$$A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ B_j : \mathcal{E} \to \mathcal{H},\ C : \mathcal{H} \to \mathcal{E}_*,\ D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_* \quad (j = 1, \ldots, n)$$

stetig lineare Operatoren, so dass

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$$

eine Kontraktion ist. Wir definieren

$$\phi = \phi_U = (\phi_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

durch $\phi_0 = D$ und

$$\phi_{(a,j)} = C A_a B_j \quad (a \in F,\ j = 1, \ldots, n).$$

Wir nennen ϕ den von U dargestellten Multiplikator. Diese Bezeichnung wird durch den nächsten Satz gerechtfertigt.

Satz 1.16.
Ist $U : \mathcal{H} \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*$ eine Kontraktion ($\mathcal{H}$ ein Hilbertraum) und $\phi = \phi_U$ wie in 1.15, so ist

$$\phi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*).$$

Beweis.
Wir schreiben U wie in Definition 1.15 mit geeigneten stetig linearen Operatoren A_j, B_j, C, D $(j = 1, \ldots, n)$.
Sei $x = (x_b)_{b \in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ und $y = (y_c)_{c \in F} = \phi \bullet x \in \mathcal{F}(\mathcal{E}_*)$. Es ist zu zeigen, dass $y \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ ist und $\|y\| \leq \|x\|$ gilt.

Für alle $c = (c_1, \dots, c_k) \in F$ gilt

$$
\begin{aligned}
\|y_c\|^2_{\mathcal{E}_*} &= \left\| \sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b \right\|^2_{\mathcal{E}_*} = \left\| D x_c + \sum_{l=1}^{k} C A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} \right\|^2_{\mathcal{E}_*} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ C \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} + D x_c \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*} \\
&= \left\| \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} \\ x_c \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*} \\
&\quad - \left\| \begin{pmatrix} A_1 \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} + B_1 x_c \\ \vdots \\ A_n \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} + B_n x_c \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2_{\mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*} \\
&\le \left\| \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} \right\|^2_{\mathcal{H}} + \|x_c\|^2_{\mathcal{E}} \\
&\quad - \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{l=1}^{k} A_{(j,c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} + B_j x_c \right\|^2_{\mathcal{H}},
\end{aligned}
$$

denn U ist kontraktiv.

Damit folgt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{|c| \le m} \|y_c\|^2_{\mathcal{E}_*} \\
= \; & \sum_{k=0}^{m} \sum_{|c|=k} \|y_c\|^2_{\mathcal{E}_*} \\
\le \; & \sum_{k=0}^{m} \sum_{|c|=k} \left(\left\| \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} \right\|^2_{\mathcal{H}} + \|x_c\|^2_{\mathcal{E}} \right) \\
& - \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{|c|=k-1} \sum_{j=1}^{n} \left\| \sum_{l=1}^{k-1} A_{(j,c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_{k-1})} + B_j x_c \right\|^2_{\mathcal{H}} \\
= \; & \sum_{k=0}^{m} \sum_{|c|=k} \left(\left\| \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} \right\|^2_{\mathcal{H}} + \|x_c\|^2_{\mathcal{E}} \right) \\
& - \sum_{k=1}^{m+1} \sum_{|c|=k} \left\| \sum_{l=1}^{k} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_k)} \right\|^2_{\mathcal{H}} \\
= \; & \sum_{k=0}^{m} \sum_{|c|=k} \|x_c\|^2_{\mathcal{E}} - \sum_{|c|=m+1} \left\| \sum_{l=1}^{m+1} A_{(c_1,\dots,c_{l-1})} B_{c_l} \; x_{(c_{l+1},\dots,c_{m+1})} \right\|^2_{\mathcal{H}} \\
\le \; & \sum_{|c| \le m} \|x_c\|^2_{\mathcal{E}} \\
\le \; & \|x\|^2_{\mathcal{F}^2(\mathcal{E})} .
\end{aligned}
$$

Mit $m \to \infty$ folgt daraus, dass $y \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ mit $\|y\| \le \|x\|$ ist. Dies entspricht der Behauptung. $\square$

Wir schreiben im Folgenden kurz $M_U = M_{\phi_U}$ für den Multiplikationsoperator zu dem durch eine Kontraktion $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ dargestellten Multiplikator.

Um den angestrebten Commutant-Lifting-Satz beweisen zu können, brauchen wir noch einige Hilfsmittel. Zunächst definieren wir einen stetig linearen Operator $\Psi_U : \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*) \to \mathcal{H}$ zu einer gegebenen Matrixkontraktion $U : \mathcal{H} \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*$. Weiterhin zeigen wir, dass Ψ_U kontraktiv ist und erhalten zwei wichtige Gleichungen für Ψ_U.

Lemma 1.17.
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$$

eine Kontraktion. Dann ist der Operator

$$\Psi_U : \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*) \to \mathcal{H},\ (y_a)_{a\in F} \mapsto \sum_{a\in F} A_a^* C^* y_a.$$

wohldefiniert und stetig linear mit $\|\Psi_U\| \leq 1$.
Zusätzlich erfüllt er die folgenden beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \Psi_U &= \sum_{i=1}^n A_i^* \Psi_U (R_i^{\mathcal{E}_*})^* \ + \ C^* P^{\mathcal{E}_*} \quad (I) \\ P^{\mathcal{E}} M_U^* &= \sum_{i=1}^n B_i^* \Psi_U (R_i^{\mathcal{E}_*})^* \ + \ D^* P^{\mathcal{E}_*} \quad (II). \end{aligned}$$

Beweis.
Für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$\sum_{i=1}^n \|A_i h\|^2 + \|Ch\|^2 = \left\| U \begin{pmatrix} h \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 \leq \|h\|^2.$$

Angewendet auf $A_a h$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \|CA_a h\|^2 &\leq \|A_a h\|^2 - \sum_{i=1}^n \|A_i A_a h\|^2 \\ &= \|A_a h\|^2 - \sum_{i=1}^n \left\|A_{(i,a)} h\right\|^2 \quad (a \in F). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{|a|\leq m} \|CA_a h\|^2 &\leq \sum_{|a|\leq m} \|A_a h\|^2 - \sum_{|a|\leq m} \sum_{i=1}^n \left\|A_{(i,a)} h\right\|^2 \\ &= \|h\|^2 - \sum_{|a|=m+1} \|A_a h\|^2 \\ &\leq \|h\|^2. \end{aligned}$$

Mit $m \to \infty$ folgt, dass $(CA_a h)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ ist und $\|(CA_a h)_{a\in F}\| \leq \|h\|$ gilt. Folglich ist der Operator

$$\Omega_U : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*),\ h \mapsto (CA_a h)_{a\in F}$$

eine wohldefinierte, stetig lineare Kontraktion.
Es ist nun klar, dass Ψ_U der adjungierte Operator zu Ω_U ist, insbesondere ist Ψ_U wohldefiniert und kontraktiv.
Nun sind noch die beiden behaupteten Gleichungen für Ψ_U zu zeigen.
Für alle $(y_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^n A_i^*\Psi_U(R_i^{\mathcal{E}_*})^* \;+\; C^*P^{\mathcal{E}_*}\right)(y_a)_{a\in F}\\
=\;& \sum_{i=1}^n A_i^*\Psi_U\left(y_{(a,i)}\right)_{a\in F} \;+\; C^*y_0\\
=\;& \sum_{i=1}^n \sum_{a\in F} A_{(a,i)}^*C^*y_{(a,i)} \;+\; A_0^*C^*y_0\\
=\;& \sum_{a\in F} A_a^*C^*y_a\\
=\;& \Psi_U(y_a)_{a\in F}\;.
\end{aligned}$$

Also folgt Gleichung (I).
Wir schreiben $\phi_U = (\phi_a)_{a\in F}$ mit $\phi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$ $(a\in F)$.
Für $y = (y_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ und $x \in \mathcal{E}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\langle P^{\mathcal{E}}M_U^*y, x\rangle &= \langle y, \phi_U \bullet (e_0\otimes x)\rangle\\
&= \langle y, (\phi_a x)_{a\in F}\rangle\\
&= \langle y_0, \phi_0 x\rangle \;+\; \sum_{i=1}^n\sum_{a\in F}\langle y_{(a,i)}, \phi_{(a,i)}x\rangle\\
&= \langle D^*y_0, x\rangle \;+\; \sum_{i=1}^n \langle B_i^*\left(\sum_{a\in F} A_a^*C^*y_{(a,i)}\right), x\rangle,
\end{aligned}$$

denn gemäß der Definition von ϕ_U gilt $\phi_0 = D$ und

$$\phi_{(a,i)} = CA_aB_i \quad (a\in F,\; i = 1,\dots,n).$$

Außerdem gilt $y_0 = P^{\mathcal{E}_*}y$ und

$$\sum_{a\in F} A_a^*C^*y_{(a,i)} = \Psi_U\left(y_{(a,i)}\right)_{a\in F} = \Psi_U\left(R_i^{\mathcal{E}_*}\right)^* y \quad (i = 1,\dots,n).$$

Setzt man dies oben ein, folgt

$$\langle P^{\mathcal{E}}M_U^*y, x\rangle = \langle\left(\sum_{i=1}^n B_i^*\Psi_U\left(R_i^{\mathcal{E}_*}\right)^* \;+\; D^*P^{\mathcal{E}_*}\right)y, x\rangle.$$

Da $x\in\mathcal{E}$ und $y \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ beliebig waren, folgt Gleichung (II). □

Wir erinnern an dieser Stelle kurz an die Begriffe von n-Kontraktion und $C_{\cdot 0}$-Kontraktion. Ein Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ von stetig linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H heißt n-Kontraktion, falls

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}$$

gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\Sigma_T : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H),\ X \mapsto \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^*$$

eine Kontraktion ist.
Eine n-Kontraktion T auf H heißt $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, falls

$$\mathrm{SOT} - \lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} T_a T_a^* = 0$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} \|T_a^* h\|^2 = 0$$

für alle $h \in H$ gilt.
Wir betrachten außerdem die Abbildung

$$\nabla_T : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H),\ X \mapsto X - \sum_{i=1}^{n} T_i X T_i^*$$

für ein Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$.
Wir zeigen nun für eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion T, dass $\nabla_T(X)$ höchstens dann positiv sein kann, wenn X bereits positiv ist.

Lemma 1.18.
Sei $T \in \mathcal{L}(H)^n$ eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion und $X \in \mathcal{L}(H)$ mit $\nabla_T(X) \geq 0$. Dann ist $X \geq 0$.

Beweis.
Für alle $h \in H$ gilt $\langle \nabla_T(X)h, h\rangle \geq 0$ und damit

$$\langle Xh, h\rangle \geq \sum_{i=1}^{n} \langle T_i X T_i^* h, h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle X T_i^* h, T_i^* h\rangle.$$

Folglich gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{|a|=k} \langle X T_a^* h, T_a^* h\rangle &\geq \sum_{|a|=k} \sum_{i=1}^{n} \langle X T_i^* T_a^* h, T_i^* T_a^* h\rangle \\ &= \sum_{|a|=k+1} \langle X T_a^* h, T_a^* h\rangle\end{aligned}$$

und man erhält induktiv

$$\langle Xh, h\rangle \geq \sum_{|a|=k} \langle XT_a^* h, T_a^* h\rangle \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert mit $k \to \infty$ wegen

$$\left| \sum_{|a|=k} \langle XT_a^* h, T_a^* h\rangle \right| \leq \left(\sum_{|a|=k} \|T_a^* h\|^2 \right) \cdot \|X\|$$

und da T eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion ist, gegen 0 und es folgt

$$\langle Xh, h\rangle \geq 0 \quad (h \in H),$$

was zu zeigen war. □

Definition 1.19.
Sei H ein Hilbertraum. Ein abgeschlossener Unterraum $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^2(H)$ heißt rechts-$*$-invariant, falls er $*$-invariant für die Komponenten R_i^H $(i = 1, \ldots, n)$ des Rechtsvorwärtsshifts ist.
Für einen rechts-$*$-invarianten Unterraum $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^2(H)$ schreiben wir

$$R^{\mathcal{N}} = \left(R_1^{\mathcal{N}}, \ldots, R_n^{\mathcal{N}} \right) \in \mathcal{L}(\mathcal{N})^n$$

für die Kompression von R auf $\mathcal{N}$, das heißt es gilt

$$R_i^{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} R_i^H|_{\mathcal{N}} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Dabei sei $P_{\mathcal{N}} : \mathcal{F}^2(\mathcal{H}) \to \mathcal{N}$ die Projektion von $\mathcal{F}^2(\mathcal{H})$ auf $\mathcal{N}$.

Bemerkung 1.20.
Für einen Hilbertraum H ist $R^H \in \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2(H)\right)^n$ eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, denn für alle $x = (x_b)_{b \in F} \in \mathcal{F}^2(H)$ gilt

$$\sum_{|a|=k} \left\| (R_a^H)^* x \right\|^2 = \sum_{|a|=k} \sum_{b \in F} \left\| x_{(b,a)} \right\|^2 = \sum_{|c| \geq k} \|x_c\|^2 \xrightarrow{k} 0.$$

Ist weiterhin $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^2(H)$ ein rechts-$*$-invarianter Unterraum, so ist damit $R^{\mathcal{N}}$ als Kompression von R^H auf einen $*$-invarianten Teilraum ebenfalls eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion. Damit können wir Lemma 1.18 mit $T = R^{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})^n$ anwenden.

Im Folgenden betrachten wir rechts-$*$-invariante Teilräume

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E}),\ \mathcal{N}_* \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*).$$

Im nachfolgenden Commutant-Lifting-Satz zeigen wir, dass alle Kontraktionen $\mathcal{N} \to \mathcal{N}_*$, die $R^{\mathcal{N}}$ und $R^{\mathcal{N}_*}$ vertauschen, Kompressionen von Multiplikationsoperatoren sind, die von einer Matrixkontraktion dargestellt werden. Zur Vorbereitung brauchen wir noch ein weiteres Lemma.

LEMMA 1.21.
Ist $X \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$ mit

$$XR_i^{\mathcal{N}} = R_i^{\mathcal{N}_*} X \quad (i = 1, \dots, n),$$

so gilt

$$\langle \nabla_{R^{\mathcal{N}_*}} (XX^*)\, x, y \rangle = \langle P^{\mathcal{E}} X^* x, P^{\mathcal{E}} X^* y \rangle$$

für alle $x, y \in \mathcal{N}_*$.

BEWEIS.
Für alle $x \in \mathcal{N}_*$ und alle $i = 1, \dots, n$ gilt nach der vorausgesetzten Vertauschungseigenschaft und da $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ rechts-$*$-invariant ist

$$X^*(R_i^{\mathcal{N}_*})^* x = (R_i^{\mathcal{N}})^* X^* x = (R_i^{\mathcal{E}})^* X^* x.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{R^{\mathcal{N}_*}} (XX^*)\, x, y \rangle &= \langle \left(XX^* - \sum_{i=1}^{n} (R_i^{\mathcal{N}_*}) XX^* (R_i^{\mathcal{N}_*})^* \right) x, y \rangle \\
&= \langle X^* x, X^* y \rangle \ - \ \sum_{i=1}^{n} \langle X^* (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x, X^* (R_i^{\mathcal{N}_*})^* y \rangle \\
&= \langle X^* x, X^* y \rangle \ - \ \sum_{i=1}^{n} \langle (R_i^{\mathcal{E}})^* X^* x, (R_i^{\mathcal{E}})^* X^* y \rangle \\
&= \langle \left(I_{\mathcal{F}^2(\mathcal{E})} - \sum_{i=1}^{n} (R_i^{\mathcal{E}})(R_i^{\mathcal{E}})^* \right) X^* x, X^* y \rangle \\
&= \langle P_0^{\mathcal{E}} X^* x, X^* y \rangle \quad \text{(nach 1.1)} \\
&= \langle P^{\mathcal{E}} X^* x, P^{\mathcal{E}} X^* y \rangle
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathcal{N}_*$ gilt. □

Es folgt der angekündigte Commutant-Lifting-Satz.

SATZ 1.22. *(Commutant-Lifting-Satz)*
Ist $X \in \mathcal{L}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_*)$ mit $\|X\| \leq 1$ und

$$XR_i^{\mathcal{N}} = R_i^{\mathcal{N}_*} X \quad (i = 1, \dots, n),$$

so existieren ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine Kontraktion $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ mit

$$X = P_{\mathcal{N}_*} M_U|_{\mathcal{N}}.$$

Man kann dabei $\mathcal{H} = \mathcal{N}_*$ wählen.

Beweis.
Da X kontraktiv ist, ist

$$\Gamma = I_{\mathcal{N}_*} - XX^* \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_*)$$

ein positiver Operator.
Wir setzen

$$\mathcal{K} = \bigvee \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} x \\ P^{\mathcal{E}} X^* x \end{pmatrix} ;\ x \in \mathcal{N}_* \right\} \subset \mathcal{N}_* \oplus \mathcal{E}$$

und

$$\mathcal{K}_* = \bigvee \left\{ \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_1^{\mathcal{N}_*})^* x \\ \vdots \\ \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_n^{\mathcal{N}_*})^* x \\ P^{\mathcal{E}_*} x \end{pmatrix} ;\ x \in \mathcal{N}_* \right\} \subset \mathcal{N}_*^n \oplus \mathcal{E}_*.$$

Nach 1.21 (angewendet auf $I_{\mathcal{N}_*}$ und auf X) gilt für alle $x, y \in \mathcal{N}_*$

$$\begin{aligned} & \langle P^{\mathcal{E}_*} x, P^{\mathcal{E}_*} y \rangle \ - \ \langle P^{\mathcal{E}} X^* x, P^{\mathcal{E}} X^* y \rangle \\ = \ & \langle \nabla_{R^{\mathcal{N}_*}} (I_{\mathcal{N}_*})\, x, y \rangle \ - \ \langle \nabla_{R^{\mathcal{N}_*}} (XX^*)\, x, y \rangle \\ = \ & \langle \nabla_{R^{\mathcal{N}_*}} (\Gamma)\, x, y \rangle \\ = \ & \langle \Gamma x, y \rangle \ - \ \sum_{i=1}^{n} \langle (R_i^{\mathcal{N}_*}) \Gamma (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x, y \rangle \\ = \ & \langle \Gamma^{\frac{1}{2}} x, \Gamma^{\frac{1}{2}} y \rangle \ - \ \sum_{i=1}^{n} \langle \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x, \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* y \rangle \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \langle P^{\mathcal{E}_*} x, P^{\mathcal{E}_*} y \rangle \ + \ \sum_{i=1}^{n} \langle \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x, \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* y \rangle \\ = \ & \langle P^{\mathcal{E}} X^* x, P^{\mathcal{E}} X^* y \rangle \ + \ \langle \Gamma^{\frac{1}{2}} x, \Gamma^{\frac{1}{2}} y \rangle. \end{aligned}$$

Also existiert eine unitäre Abbildung $V : \mathcal{K} \to \mathcal{K}_*$ mit

$$V \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} x \\ P^{\mathcal{E}} X^* x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_1^{\mathcal{N}_*})^* x \\ \vdots \\ \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_n^{\mathcal{N}_*})^* x \\ P^{\mathcal{E}_*} x \end{pmatrix} \quad (x \in \mathcal{N}_*)$$

Setzt man V auf $(\mathcal{N}_* \oplus \mathcal{E}) \ominus \mathcal{K}$ durch 0 fort, so erhält man eine Kontraktion

$$U : \mathcal{N}_* \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{N}_*^n \oplus \mathcal{E}_*.$$

Wir wählen nun stetig lineare Operatoren

$$A_j : \mathcal{N}_* \to \mathcal{N}_*,\ B_j : \mathcal{E} \to \mathcal{N}_*,\ C : \mathcal{N}_* \to \mathcal{E}_*,\ D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_* \quad (j = 1, \ldots, n)$$

mit

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Für alle $x \in \mathcal{N}_*$ gilt

$$\begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} x \\ P^{\mathcal{E}} X^* x \end{pmatrix} = V^* \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_1^{\mathcal{N}_*})^* x \\ \vdots \\ \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_n^{\mathcal{N}_*})^* x \\ P^{\mathcal{E}_*} x \end{pmatrix} = U^* \begin{pmatrix} \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_1^{\mathcal{N}_*})^* x \\ \vdots \\ \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_n^{\mathcal{N}_*})^* x \\ P^{\mathcal{E}_*} x \end{pmatrix},$$

denn V^* wird durch U^* fortgesetzt.
Aus der Matrixdarstellung für U^* erhält man nun für alle $x \in \mathcal{N}_*$ die folgenden beiden Gleichungen.

$$\begin{aligned} \Gamma^{\frac{1}{2}} x &= \sum_{i=1}^{n} A_i^* \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x \ + \ C^* P^{\mathcal{E}_*} x \quad (I^+) \\ P^{\mathcal{E}} X^* x &= \sum_{i=1}^{n} B_i^* \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x \ + \ D^* P^{\mathcal{E}_*} x \quad (II^+). \end{aligned}$$

Wir betrachten nun zu der Kontraktion U den Operator $\Psi_U \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*), \mathcal{N}_*)$ wie in 1.17 und setzen

$$\alpha = \Gamma^{\frac{1}{2}} - \Psi_U|_{\mathcal{N}_*} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_*).$$

Aus den Gleichungen (I) (siehe 1.17) und (I^+) folgt

$$\begin{aligned} \alpha x &= \sum_{i=1}^{n} A_i^* \Gamma^{\frac{1}{2}} (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x \ - \ \sum_{i=1}^{n} A_i^* \Psi_U (R_i^{\mathcal{E}_*})^* x \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i^* \left(\Gamma^{\frac{1}{2}} - \Psi_U \right) (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x \\ &= \sum_{i=1}^{n} A_i^* \alpha (R_i^{\mathcal{N}_*})^* x \quad (x \in \mathcal{N}_*). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^{n} A_i^* \alpha (R_i^{\mathcal{N}_*})^* \\ &= \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}^* \left(R_1^{\mathcal{N}_*} \alpha^* \dots R_n^{\mathcal{N}_*} \alpha^* \right)^*. \end{aligned}$$

Damit können wir folgern, dass

$$\begin{aligned}
&\alpha^*\alpha \\
= \;& \left(R_1^{\mathcal{N}_*}\alpha^* \dots R_n^{\mathcal{N}_*}\alpha^*\right) \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}^* \left(R_1^{\mathcal{N}_*}\alpha^* \dots R_n^{\mathcal{N}_*}\alpha^*\right)^* \\
\leq \;& \left(R_1^{\mathcal{N}_*}\alpha^* \dots R_n^{\mathcal{N}_*}\alpha^*\right) \left(R_1^{\mathcal{N}_*}\alpha^* \dots R_n^{\mathcal{N}_*}\alpha^*\right)^* \qquad \left(\text{denn } \left\| \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \right\| \leq 1 \right) \\
= \;& \sum_{i=1}^n (R_i^{\mathcal{N}_*})\alpha^*\alpha(R_i^{\mathcal{N}_*})^*.
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\nabla_{R^{\mathcal{N}_*}}(-\alpha^*\alpha) = -\alpha^*\alpha + \sum_{i=1}^n (R_i^{\mathcal{N}_*})\alpha^*\alpha(R_i^{\mathcal{N}_*})^* \geq 0.$$

Nach 1.18 (und der zugehörigen Bemerkung 1.20) ist $-\alpha^*\alpha \geq 0$ und somit muss $\alpha = 0$ gelten. Damit haben wir gezeigt, dass

$$\Gamma^{\frac{1}{2}} = \Psi_U|_{\mathcal{N}_*}$$

gilt.

Nun können wir die Gleichungen (II) und (II^+) benutzen, um zu zeigen, dass X die Kompression des zu U gehörigen Multiplikationsoperators M_U auf $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}_*$ ist.

Sei $x \in \mathcal{N}_*$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}
P^{\mathcal{E}}X^*x &= \sum_{i=1}^n B_i^*\Gamma^{\frac{1}{2}}(R_i^{\mathcal{N}_*})^*x + D^*P^{\mathcal{E}_*}x \quad \text{nach } (II^+) \\
&= \sum_{i=1}^n B_i^*\Psi_U(R_i^{\mathcal{N}_*})^*x + D^*P^{\mathcal{E}_*}x \\
&= P^{\mathcal{E}}M_U^*x \quad \text{nach } (II).
\end{aligned}$$

Da für alle $a \in F$ auch $(R_a^{\mathcal{E}_*})^*x \in \mathcal{N}_*$ ist, können wir diese Gleichung auch mit $(R_a^{\mathcal{E}_*})^*x$ statt x anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}
(X^*x)_a &= P^{\mathcal{E}}(R_a^{\mathcal{E}})^*X^*x \\
&= P^{\mathcal{E}}X^*(R_a^{\mathcal{E}_*})^*x \\
&= P^{\mathcal{E}}M_U^*(R_a^{\mathcal{E}_*})^*x \\
&= P^{\mathcal{E}}(R_a^{\mathcal{E}})^*M_U^*x \\
&= (M_U^*x)_a \quad (a \in F).
\end{aligned}$$

für alle $a \in F$. Man beachte dabei, dass

$$X^*(R_a^{\mathcal{E}_*})^*x = X^*(R_a^{\mathcal{N}_*})^*x = (R_a^{\mathcal{N}})^*X^*x = (R_a^{\mathcal{E}})^*X^*x$$

nach den Voraussetzungen an die Räume $\mathcal{N}, \mathcal{N}_*$ und den Operator X gilt und dass nach 1.6

$$M_U R_a^{\mathcal{E}} = R_a^{\mathcal{E}_*} M_U.$$

Es folgt $X^*x = M_U^*x$ für beliebiges $x \in \mathcal{N}_*$ und damit ist

$$X = P_{\mathcal{N}_*} M_U|_{\mathcal{N}}.$$

Die Behauptung ist gezeigt. □

Als Folgerung dieses Commutant-Lifting-Satzes erhalten wir nun zusammen mit 1.6 eine Charakterisierung der kontraktiven Multiplikatoren. Jeder solche lässt sich in der Form ϕ_U mit einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ und einer Kontraktion $U : \mathcal{H} \oplus \mathcal{E} \to \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*$ darstellen.

Korollar 1.23.
Zu jedem $\phi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ existieren ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ und eine Kontraktion $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ mit $\phi = \phi_U$. Man kann dabei $\mathcal{H} = \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ wählen.

Beweis.
Wir wenden 1.22 auf den Fall $\mathcal{N} = \mathcal{F}^2(\mathcal{E}),\ \mathcal{N}_* = \mathcal{F}^2(\mathcal{E}_*)$ und $X = M_\phi$ an. Dazu beachte man, dass

$$M_\phi R_i^{\mathcal{E}} = R_i^{\mathcal{E}_*} M_\phi \ (i = 1, \ldots, n)$$

nach 1.6 gilt. Wir erhalten dadurch $\mathcal{H}$ und U wie gewünscht mit

$$M_\phi = M_U = M_{\phi_U}.$$

Da ein Multiplikator bereits durch seinen Multiplikationsoperator eindeutig bestimmt ist, folgt $\phi = \phi_U$, was zu zeigen war. □

Bemerkung 1.24.
Im Beweis von 1.22 kann man durch geeignete Wahl von $\mathcal{H}$ zusätzlich erreichen, dass U in 1.22 (und 1.23) unitär gewählt werden kann.

Kommutative und nichtkommutative Multiplikatoren

Wie zuvor seien Hilberträume $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*$ gegeben.
Ziel dieses Abschnitts ist es, eine kanonische Zuordnung zwischen den nichtkommutativen und den kommutativen Multiplikatoren von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$ zu definieren. Dabei nutzen wir aus, dass jeder Multiplikator $\phi \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ nach 1.23 von einer kontraktiven Operatormatrix dargestellt wird. Diese

stellt aber nach 1.13 auch einen kommutativen Multiplikator ϕ^c dar, den wir ϕ zuordnen wollen. Wir zeigen, dass so eine wohldefinierte Surjektion

$$\mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \to \mathcal{M}_1^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

entsteht. Diese kann auf einfache Weise dargestellt werden und lässt sich zu einem kontraktiven Banachraum-Epimorphismus

$$\mathcal{S} : \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \to \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

fortsetzen, der das Liften mit Konstante 1 erlaubt.
Zunächst zeigen wir dass der von einer Matrixkontraktion dargestellte kommutative Multiplikator schon durch den von ihr dargestellten nichtkommutativen Multiplikator eindeutig bestimmt ist.

Lemma 1.25.

(a) Für $\phi = (\phi_a)_{a \in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ und $z \in \mathbb{B}$ konvergiert

$$\mathcal{S}(\phi)\ (z) = \sum_{a \in F} z_a \phi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

bezüglich der starken Operatortopologie. Weiter gilt

$$\|\mathcal{S}(\phi)\ (z)\| \leq \left(\frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\phi\| .$$

(b) Ist $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ eine Kontraktion, so gilt

$$\phi_U^c(z) = \mathcal{S}(\phi_U)\ (z)$$

für alle $z \in \mathbb{B}$.

(c) Sind $\mathcal{H}, \hat{\mathcal{H}}$ Hilberträume und

$$U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*),\ \hat{U} \in \mathcal{L}(\hat{\mathcal{H}} \oplus \mathcal{E}, \hat{\mathcal{H}}^n \oplus \mathcal{E}_*)$$

Kontraktionen mit $\phi_U = \phi_{\hat{U}}$, so gilt auch $\phi_U^c = \phi_{\hat{U}}^c$.

Beweis.

(a) Für $x \in \mathcal{E}$ ist

$$\sum_{a \in F} \|\phi_a x\|^2 = \|\phi \bullet (e_0 \otimes x)\|^2 \leq \|\phi\|^2 \cdot \|x\|^2 .$$

Wegen

$$\sum_{a \in F} |z_a|^2 = \frac{1}{1 - |z|^2} \quad \text{(siehe 1.10)}$$

folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sum_{a \in F} \|z_a \cdot \phi_a x\| \leq \left(\frac{1}{1 - |z|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\phi\| \cdot \|x\| \quad (x \in \mathcal{E}).$$

Dies impliziert die Behauptung.

(b) Wir schreiben

$$U = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \vdots & \vdots \\ A_n & B_n \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit

$$A_j : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ B_j : \mathcal{E} \to \mathcal{H},\ C : \mathcal{H} \to \mathcal{E}_*,\ D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_* \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Nach Definition von ϕ_U gilt dann $\phi_{U,0} = D$ und

$$\phi_{U,(a,j)} = CA_aB_j \quad (a \in F,\ j = 1, \ldots, n).$$

Es folgt (siehe Satz 1.13)

$$\begin{aligned} \phi_U^c(z) &= D + C\left(I_{\mathcal{H}} - \sum_{j=1}^n z_jA_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=1}^n z_jB_j\right) \\ &= D + C\sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{j=1}^n z_jA_j\right)^k\left(\sum_{j=1}^n z_jB_j\right) \\ &= D + C\sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{|a|=k} z_aA_a\right)\left(\sum_{j=1}^n z_jB_j\right) \\ &= D + \sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{|a|=k}\sum_{j=1}^n z_az_jCA_aB_j\right) \\ &= \phi_{U,0} + \sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{|a|=k}\sum_{j=1}^n z_{(a,j)}\phi_{U,(a,j)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty\left(\sum_{|a|=k} z_a\phi_{U,a}\right) \quad (z \in \mathbb{B}). \end{aligned}$$

mit Konvergenz bezüglich der Operatornorm. Mit (a) folgt nun für alle $z \in \mathbb{B}$ und alle $x \in \mathcal{E}$, dass

$$\mathcal{S}(\phi_U)(z)\ x = \sum_{a\in F} z_a\phi_{U,a}x = \sum_{k=0}^\infty\sum_{|a|=k} z_a\phi_{U,a}x = \phi_U^c(z)\ x$$

gilt, was zu zeigen war.

(c) Dies ist klar nach (b).

□

Nun können wir zeigen, dass eine natürliche lineare und kontraktive Surjektion $\mathcal{S} : \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \to \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ besteht, die auch die Darstellungen durch Operatormatrizen respektiert. Dies ist das Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 1.26.
Die Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \to \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

mit

$$\mathcal{S}(\phi)\ (z) = SOT - \sum_{a \in F} z_a \phi_a \quad (\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*),\ z \in \mathbb{B})$$

ist wohldefiniert, linear, kontraktiv und surjektiv.
Weiterhin gilt

$$\mathcal{S}(\phi_U) = \phi_U^c$$

für eine Kontraktion $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ *(*$\mathcal{H}$ *Hilbertraum).*

Beweis.
Nach 1.23 und 1.25 (c) können wir eine Abbildung

$$\mathcal{S}_1 : \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \to \mathcal{M}_1^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

definieren durch

$$\mathcal{S}_1(\phi_U) = \phi_U^c,$$

falls $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ eine Kontraktion ist.
Nach 1.25 (b) gilt

$$\mathcal{S}_1(\phi)\ (z) = \mathrm{SOT} - \sum_{a \in F} z_a \phi_a$$

für alle $z \in \mathbb{B}$ und alle $\phi = (\phi_a)_{a \in F} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$.
Nach 1.13 ist $\mathcal{S}_1$ surjektiv.
Ist nun ein beliebiger (nicht notwendig kontraktiver) nichtkommutativer Multiplikator $\phi = (\phi_a)_{a \in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ mit $\phi \neq 0$ gegeben, so ist

$$\frac{\phi}{\|\phi\|} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$$

und es gilt

$$\|\phi\| \cdot \left(\mathcal{S}_1 \left(\frac{\phi}{\|\phi\|} \right)\ (z) \right) = \|\phi\| \cdot \left(\mathrm{SOT} - \sum_{a \in F} z_a \frac{\phi_a}{\|\phi\|} \right) = \mathrm{SOT} - \sum_{a \in F} z_a \phi_a$$

für alle $z \in \mathbb{B}$. Dies zeigt, dass

$$\mathcal{S}(\phi) : \mathbb{B} \to \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*),\ \mathcal{S}(\phi)\ (z) = \mathrm{SOT} - \sum_{a \in F} z_a \phi_a$$

ein kommutativer Multiplikator ist. Die Abbildung

$$\mathcal{S} : \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*) \to \mathcal{M}^c(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*),\ \phi \mapsto \mathcal{S}(\phi)$$

ist damit wohldefiniert. Offenbar ist $\mathcal{S}$ eine lineare Fortsezung von $\mathcal{S}_1$.
Wegen $\mathcal{S}\mathcal{M}_1(\mathcal{E},\mathcal{E}_*) = \mathcal{M}_1^c(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$ ist $\mathcal{S}$ kontraktiv und surjektiv.
Aus 1.25 (b) folgt schliesslich

$$\mathcal{S}(\phi_U) = \phi_U^c$$

für eine Kontraktion $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{E}, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{E}_*)$ ($\mathcal{H}$ Hilbertraum). □

Bemerkung 1.27.
Wir können die Surjektivitätsaussage in 1.26 noch verbessern. Wie wir im Beweis gesehen haben gilt

$$\mathcal{S}\mathcal{M}_1(\mathcal{E},\mathcal{E}_*) = \mathcal{M}_1^c(\mathcal{E},\mathcal{E}_*).$$

Folglich erlaubt $\mathcal{S}$ das Liften mit Konstante 1, dass heißt man kann zu jedem Element aus $\mathcal{M}^c(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$ ein normgleiches Urbild unter $\mathcal{S}$ in $\mathcal{M}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$ finden.

Abschließend wollen wir für einen Multiplikator $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*)$ zeigen, dass der Multiplikationsoperator zu $\mathcal{S}(\phi)$ gerade die Kompression von M_ϕ ist, wenn man die Räume $H(\mathbb{B},\mathcal{E})$ und $H(\mathbb{B},\mathcal{E}_*)$ mit Teilräumen der entsprechenden Fockräume identifiziert. Man vergleiche dazu auch 1.9.
Zur Vorbereitung brauchen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 1.28.
Für $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E},\mathcal{E}_*),\ x = (x_b)_{b\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ und $z \in \mathbb{B}$ konvergiert

$$\sum_{(a,b)\in F\times F} z_a z_b \phi_a(x_b)$$

in $\mathcal{E}_*$ absolut.

Beweis.
Nach dem Beweis von 1.25 (a) ist

$$\sum_{a\in F} \|z_a\phi_a x_b\| \le \left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \|\phi\| \cdot \|x_b\|$$

für alle $b \in F$. Damit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{b\in F}\left(\sum_{a\in F} \|z_a\phi_a x_b\|\right)^2 &\le \frac{1}{1-|z|^2}\cdot\|\phi\|^2\cdot\sum_{b\in F}\|x_b\|^2\\ &= \frac{1}{1-|z|^2}\cdot\|\phi\|^2\cdot\|x\|^2.\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{b\in F}|z_b|^2 = \frac{1}{1-|z|^2} \quad \text{(siehe 1.10)}$$

folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{(a,b)\in F\times F} \|z_a z_b \phi_a(x_b)\| &= \sum_{b\in F} |z_b| \cdot \left(\sum_{a\in F} \|z_a \phi_a x_b\| \right) \\ &\leq \frac{1}{1-|z|^2} \cdot \|\phi\| \cdot \|x\| < \infty.\end{aligned}$$

□

Nun können wir zeigen, dass der angekündigte Zusammenhang zwischen den Multiplikationsoperatoren zu ϕ und $\mathcal{S}(\phi)$ besteht.

Satz 1.29.
Für alle $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ gilt

$$M_{\mathcal{S}(\phi)} P_+^{\mathcal{E}} = P_+^{\mathcal{E}_*} M_\phi.$$

Insbesondere ist

$$M_{\mathcal{S}(\phi)} = P_+^{\mathcal{E}_*} M_\phi i^{\mathcal{E}}.$$

Beweis.
Seien $\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$, $x = (x_b)_{b\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ und $z \in \mathbb{B}$.
Nach 1.10 und 1.26 gilt

$$\begin{aligned}\left(P_+^{\mathcal{E}_*} M_\phi x\right)(z) &= \sum_{c\in F} z_c \left(M_\phi x\right)_c \\ &= \sum_{c\in F} \sum_{(a,b)=c} z_a z_b \phi_a(x_b) \\ &= \sum_{a,b\in F\times F} z_a z_b \phi_a(x_b) \\ &= \sum_{a\in F} \left(z_a \phi_a \left(\sum_{b\in F} z_b x_b \right)\right) \\ &= \sum_{a\in F} \left(z_a \phi_a \left(P_+^{\mathcal{E}} x\ (z)\right)\right) \\ &= \left(\mathcal{S}(\phi)\ (z)\right) \left(P_+^{\mathcal{E}} x\ (z)\right) \\ &= \left(M_{\mathcal{S}(\phi)} P_+^{\mathcal{E}} x\right)(z).\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass die auftretenden Summen nach 1.28 absolut konvergieren. Da $x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ und $z \in \mathbb{B}$ beliebig waren, folgt nun

$$P_+^{\mathcal{E}_*} M_\phi = M_{\mathcal{S}(\phi)} P_+^{\mathcal{E}}.$$

Die zweite behauptete Gleichung folgt aus der ersten, da $i^{\mathcal{E}} = \left(P_+^{\mathcal{E}}\right)^*$ eine Isometrie ist (siehe 1.9). □

KAPITEL 2

Die charakteristische Funktion

Einleitung

In diesem Kapitel untersuchen wir die charakteristische Funktion zu einer (nichtvertauschenden) n-Kontraktion T auf einem Hilbertraum. Diese definieren wir als Multiplikationsoperator zu einem geeigneten Multiplikator zwischen den Defekträumen von T und T^*, der von einer unitären Operatormatrix dargestellt wird.
Wir erhalten damit im Wesentlichen den Begriff der charakteristischen Funktion, der von G. Popescu in [**46**] untersucht wird. Wir geben dann neue Beweise für einige Resultate aus dieser Arbeit. Dazu gehören Modellsätze für $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen beziehungsweise für vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen (vergleiche Satz 4.1 in [**46**]) und die Folgerung daraus, dass zwei vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen genau dann unitär äquivalent sind, wenn ihre charakteristischen Funktionen übereinstimmen (vergleiche Satz 5.4 in [**46**]).
Für vertauschende n-Kontraktionen wurden entsprechende Resultate von T. Bhattacharyya, J. Eschmeier und J. Sarkar (vergleiche [**9**], Satz 4.4) gezeigt. Teilweise lassen sich die Beweisideen aus dieser Arbeit auch in unserem Fall einsetzen.
Außerdem untersuchen wir die Frage, wann eine n-Kontraktion T ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist. Dazu benutzen wir die minimale isometrische Dilatation von T und orthogonale Zerlegungen des Raumes, auf dem sie definiert ist (siehe dazu [**47**]). Wir können zeigen, dass T genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist, wenn die charakteristische Funktion von T invertierbar ist. Dieses Kriterium wurde im Fall $n = 1$ bereits von B. Sz.-Nagy in [**51**] gezeigt.

Definition und einfache Eigenschaften

Im Folgenden sei $\mathcal{H}$ stets ein Hilbertraum und $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$, das heißt, es gilt

$$\sum_{i=1}^{n} T_i T_i^* \leq I_{\mathcal{H}}.$$

Damit ist der Zeilenoperator

$$T : \mathcal{H}^n \to \mathcal{H},\ (h_i)_{i=1}^n \mapsto \sum_{i=1}^n T_i h_i$$

eine Kontraktion. Weiterhin betrachten wir die zu T beziehungsweise T^* gehörigen Defektoperatoren

$$D_T = (I_{\mathcal{H}^n} - T^*T)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H}^n\right) \text{ und } D_{T^*} = (I_{\mathcal{H}} - TT^*)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

und die entsprechenden Defekträume

$$\mathcal{D}_T = \overline{D_T \mathcal{H}^n} \subset \mathcal{H}^n \text{ und } \mathcal{D}_{T^*} = \overline{D_{T^*}\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass

$$TD_T = D_{T^*}T$$

gilt. Folglich ist $T\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T^*}$.
Außerdem erhält man durch Adjungieren die Gleichung

$$D_T T^* = T^* D_{T^*}$$

und somit folgt $T^*\mathcal{D}_{T^*} \subset \mathcal{D}_T$.
Ist H ein Hilbertraum und $j = 1, \ldots, n$, so schreiben wir im Folgenden

$$P_j^H : H^n \to H,\ (h_i)_{i=1}^n \mapsto h_j$$

für die Projektion von H^n auf die j-te Komponente.
Die folgende einfache Proposition ist später nützlich.

Proposition 2.1.
Es gilt

$$P_j^{\mathcal{H}} D_T^2 (P_i^{\mathcal{H}})^* = \delta_{i,j} I_{\mathcal{H}} - T_j^* T_i$$

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

Beweis.
Offenbar gilt $T(P_i^{\mathcal{H}})^* = T_i$ und $P_j^{\mathcal{H}}(P_i^{\mathcal{H}})^* = \delta_{i,j} I_{\mathcal{H}}$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$. Also folgt

$$\begin{aligned} P_j^{\mathcal{H}} D_T^2 (P_i^{\mathcal{H}})^* &= P_j^{\mathcal{H}} \left(I_{\mathcal{H}} - T^*T\right) (P_i^{\mathcal{H}})^* \\ &= P_j^{\mathcal{H}}(P_i^{\mathcal{H}})^* - \left(T(P_j^{\mathcal{H}})^*\right)^* T(P_i^{\mathcal{H}})^* \\ &= \delta_{i,j} I_{\mathcal{H}} - T_j^* T_i \quad (i, j = 1, \ldots, n). \end{aligned}$$

□

Wir betrachten im Folgenden zu T die Operatormatrix

$$U_T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T, \mathcal{H}^n \oplus \mathcal{D}_{T^*}\right),$$

die durch

$$\begin{aligned} A = T^* &\quad : \quad \mathcal{H} \to \mathcal{H}^n, \\ B = D_T|_{\mathcal{D}_T} &\quad : \quad \mathcal{D}_T \to \mathcal{H}^n, \\ C = D_{T^*} &\quad : \quad \mathcal{H} \to \mathcal{D}_{T^*}, \\ D = -T|_{\mathcal{D}_T} &\quad : \quad \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{T^*}. \end{aligned}$$

definiert wird. Es gilt das folgende Lemma.

Lemma 2.2.
Der Operator U_T zur n-Kontraktion T ist unitär.

Beweis.
Mit

$$U_T^* = \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}$$

erhält man

$$U_T U_T^* = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & AC^* + BD^* \\ CA^* + DB^* & CC^* + DD^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathcal{H}^n} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{D}_{T^*}} \end{pmatrix},$$

wie man leicht nachrechnet.
Ebenso sieht man, dass $U_T^* U_T = I_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{D}_T}$ gilt. Es folgt die Behauptung. □

Nun sind wir in der Lage, die charakteristische Funktion zu T zu definieren.

Definition 2.3.
Für eine n-Kontraktion T erhalten wir zu U_T gemäß 1.16 einen Multiplikator

$$\theta_T = \phi_{U_T} \in \mathcal{M}_1\left(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}\right).$$

Der zugehörige kontraktive Multiplikationsoperator

$$M_{\theta_T} : \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$$

heißt charakteristische Funktion zu T.

In der folgenden Bemerkung geben wir eine explizite Beschreibung der Komponenten von θ_T in Abhängigkeit von T.

Bemerkung 2.4.

(a) Schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}$$

als Spaltenoperatoren, so gilt

$$A_j = T_j^* \text{ und } B_j = P_j^{\mathcal{H}} D_T|_{\mathcal{D}_T} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Für $a \in F$ erhält man

$$A_a = T_{a'}^*.$$

(b) Für $\theta_T = (\theta_{T,a})_{a \in F}$ erhält man aus (a) und der Definition des von einer Matrixkontraktion dargestellten Multiplikators (siehe Definition 1.15), dass

$$\theta_{T,0} = -T|_{\mathcal{D}_T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}\right)$$

und

$$\theta_{T,(a,j)} = D_{T^*} T_{a'}^* P_j^{\mathcal{H}} D_T|_{\mathcal{D}_T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}\right) \quad (a \in F,\ j = 1, \ldots, n).$$

(c) Die zugehörigen adjungierten Operatoren ergeben sich als

$$\theta_{T,0}^* = -T^*|_{\mathcal{D}_{T^*}} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_{T^*}, \mathcal{D}_T\right)$$

(beachte, dass $T^* \mathcal{D}_{T^*} \subset \mathcal{D}_T$) und

$$\theta_{T,(a,j)}^* = D_T (P_j^{\mathcal{H}})^* T_{a'} D_{T^*}|_{\mathcal{D}_{T^*}} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_{T^*}, \mathcal{D}_T\right) \quad (a \in F,\ j = 1, \ldots, n).$$

Wir wollen an dieser Stelle kurz auf einen Vergleich mit der von G. Popescu konstruierten charakteristischen Funktion eingehen. In [**46**] wird die charakteristische Funktion von T als Operator

$$\mathcal{D}_T \to \mathcal{F}^2\left(\mathcal{D}_{T^*}\right), \ x \mapsto \left(\phi_a x\right)_{a \in F}$$

mit $\phi_0 = -T|_{\mathcal{D}_T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}\right)$ und

$$\phi_{(j,a)} = D_{T^*} T_a^* P_j^{\mathcal{D}_T} D_T|_{\mathcal{D}_T} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*}\right) \quad (a \in F, j = 1, \ldots, n).$$

definiert.

Dies unterscheidet sich von unserer Definition nur insofern, als dass durch dieses Tupel $(\phi_a)_{a \in F}$ ein Rechtsmultiplikator (an Stelle eines Linksmultiplikators) von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}_*$ gegeben ist und dass nur die Einschränkung des zugehörigen Multiplikationsoperators auf $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$ betrachtet wird. Letzteres bedeutet jedoch nach 1.7 (b) keinen Verlust an Information. Die Unterschiede der beiden Definitionen für die charakteristische Funktion sind also rein formaler Natur.

Im Folgenden wollen wir die Frage untersuchen, inwieweit eine n-Kontraktion durch ihre charakteristische Funktion schon eindeutig bestimmt ist. Zur Vorbereitung beweisen wir ein einfaches Lemma.

LEMMA 2.5.
Seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}_*}$ Hilberträume und

$$\phi = (\phi_a)_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*), \;\; \tilde{\phi} = (\tilde{\phi_a})_{a\in F} \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}_*})$$

Multiplikatoren. Für Operatoren

$$\tau : \mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}, \;\; \tau_* : \mathcal{E}_* \to \tilde{\mathcal{E}_*}$$

sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(i) Es gilt

$$M_{\tilde{\phi}} \circ (I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau) = (I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*) \circ M_\phi.$$

(ii) Es gilt

$$M_{\tilde{\phi}}|_{\tilde{\mathcal{E}}} \circ \tau = (I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*) \circ M_\phi|_{\mathcal{E}}.$$

(iii) Es gilt

$$\tilde{\phi_a} \circ \tau = \tau_* \circ \phi_a$$

für alle $a \in F$.

BEWEIS.
Für alle $x \in \mathcal{E}$ gilt

$$(M_{\tilde{\phi}}|_{\tilde{\mathcal{E}}})\tau x \;\; = \;\; (\tilde{\phi_a} \tau x)_{a\in F}$$

und

$$(I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*)\,(M_\phi|_{\mathcal{E}})x \;\; = \;\; (\tau_* \phi_a x)_{a\in F}\,.$$

Damit folgt die Äquivalenz von (ii) und (iii).
Die Implikation $(i) \Rightarrow (ii)$ folgt unmittelbar durch Einschränken auf $\mathcal{E}$.
Wir setzen nun (iii) voraus. Für alle $x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{E})$ gilt

$$\begin{aligned}
M_{\tilde{\phi}}\,(I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau)\,x \;\; &= \;\; \left(\sum_{(a,b)=c} \tilde{\phi_a} \tau x_b\right)_{c\in F} \\
&= \;\; \left(\sum_{(a,b)=c} \tau_* \phi_a x_b\right)_{c\in F} \qquad \text{nach } (iii) \\
&= \;\; (I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*)\left(\sum_{(a,b)=c} \phi_a x_b\right)_{c\in F} \\
&= \;\; (I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*)\,M_\phi x.
\end{aligned}$$

Damit folgt (i) und dies beendet den Beweis. $\square$

DEFINITION 2.6.
Seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}_*, \tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}_*}$ Hilberträume.
Definitionsgemäß stimmen Multiplikatoren $\phi \in \mathcal{M}(\mathcal{E}, \mathcal{E}_*)$ und $\tilde{\phi} \in \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\mathcal{E}_*})$ überein, wenn es unitäre Operatoren $\tau : \mathcal{E} \to \tilde{\mathcal{E}}$ und $\tau_* : \mathcal{E}_* \to \tilde{\mathcal{E}_*}$ gibt, die die äquivalenten Bedingungen (i) bis (iii) aus 2.5 erfüllen.
In diesem Fall sagt man auch, dass die entsprechenden Multiplikationsoperatoren M_ϕ und $M_{\tilde{\phi}}$ übereinstimmen.

Sei nun $\tilde{\mathcal{H}}$ ein weiterer Hilbertraum und $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})^n$ eine n-Kontraktion auf $\tilde{\mathcal{H}}$. Man nennt T und $\tilde{T}$ unitär äquivalent, wenn es einen unitären Operator $\sigma : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ gibt mit

$$\tilde{T}_j \sigma = \sigma T_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit der Beobachtung, dass die charakteristischen Funktionen zweier unitär äquivalenter n-Kontraktionen stets übereinstimmen.

SATZ 2.7.
Falls T und $\tilde{T}$ unitär äquivalent sind, so stimmen ihre charakteristischen Funktionen überein.

BEWEIS.
Es sei $\sigma : \mathcal{H} \to \tilde{\mathcal{H}}$ unitär mit $\tilde{T}_j \sigma = \sigma T_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist auch

$$\sigma^{(n)} = \bigoplus_{j=1}^{n} \sigma : \mathcal{H}^n \to \tilde{\mathcal{H}}^n$$

unitär. Man kann leicht nachrechnen, dass

$$\sigma^{(n)} D_T^2 = D_{\tilde{T}}^2 \sigma^{(n)} \text{ und } \sigma D_{T^*}^2 = D_{\tilde{T}^*}^2 \sigma$$

gilt. Da $D_T, D_{\tilde{T}}, D_{T^*}, D_{\tilde{T}^*}$ positiv sind, folgt daraus

$$\sigma^{(n)} D_T = D_{\tilde{T}} \sigma^{(n)} \text{ und } \sigma D_{T^*} = D_{\tilde{T}^*} \sigma.$$

Damit sind die Operatoren

$$\tau = \sigma^{(n)}|_{\mathcal{D}_T} : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{\tilde{T}} \quad \text{und} \quad \tau_* = \sigma|_{\mathcal{D}_{T^*}} : \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{\tilde{T}^*}$$

wohldefiniert und unitär.
Wir betrachten nun die Multiplikatoren

$$\theta_T = (\theta_{T,a})_{a \in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$$

sowie

$$\theta_{\tilde{T}} = (\theta_{\tilde{T},a})_{a \in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{D}_{\tilde{T}}, \mathcal{D}_{\tilde{T}^*})$$

zu den charakteristischen Funktionen von T und $\tilde{T}$.
Es genügt zu zeigen, dass

$$\theta_{\tilde{T},a} \circ \tau = \tau_* \circ \theta_{T,a} \quad (a \in F)$$

gilt (vergleiche (iii) in 2.5).
Zunächst betrachten wir $a = 0$. Nach 2.4(b) gilt

$$\theta_{T,0} = -T|_{\mathcal{D}_T} \text{ und } \theta_{\tilde{T},0} = -\tilde{T}|_{\mathcal{D}_{\tilde{T}}}.$$

Für alle $x = (x_j)_{j=1}^n \in \mathcal{D}_T \subset \mathcal{H}^n$ folgt

$$\big(\tau_* \circ \theta_{T,0}\big)x = -\sigma T x = -\sum_{j=1}^n \sigma T_j x_j = -\sum_{j=1}^n \tilde{T}_j \sigma x_j = -\tilde{T}\sigma^{(n)}x = \big(\theta_{\tilde{T},0} \circ \tau\big)x.$$

Sei nun $a \in F$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$. Bemerkung 2.4(b) liefert hier

$$\theta_{T,(a,j)} = D_{T^*} T_{a'}^* P_j^{\mathcal{H}} D_T|_{\mathcal{D}_T}$$

und entsprechend

$$\theta_{\tilde{T},(a,j)} = D_{\tilde{T}^*} \tilde{T}_{a'}^* P_j^{\tilde{\mathcal{H}}} D_{\tilde{T}}|_{\mathcal{D}_{\tilde{T}}}.$$

Damit folgt für $x \in \mathcal{D}_T \subset \mathcal{H}^n$

$$\begin{aligned}\big(\tau_* \circ \theta_{T,(a,j)}\big)x &= \sigma D_{T^*} T_{a'}^* P_j^{\mathcal{H}} D_T x \\ &= D_{\tilde{T}^*} \tilde{T}_{a'}^* P_j^{\tilde{\mathcal{H}}} D_{\tilde{T}} \sigma^{(n)} x \\ &= \big(\theta_{\tilde{T},(a,j)} \circ \tau\big)x,\end{aligned}$$

denn offenbar ist $\sigma P_j^{\mathcal{H}} = P_j^{\tilde{\mathcal{H}}} \sigma^{(n)}$ und alle anderen benötigten Vertauschungsrelationen für σ und $\sigma^{(n)}$ wurden bereits oben erwähnt.
Es folgt die Behauptung. □

Modellsätze und unitäre Äquivalenz

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass für vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen in 2.7 auch die Umkehrung gilt. Dazu beweisen wir zunächst Modellsätze für $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen und vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen.
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf $\mathcal{H}$, weiterhin seien U_T und θ_T wie zuvor.
Wir betrachten nun den kontraktiven Operator $L = L_T = \Psi_{U_T}$ wie in 1.17.
Mit dieser Definition und 2.4(a) erhält man

$$L : \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \to \mathcal{H}, \ (x_a)_{a \in F} \mapsto \sum_{a \in F} T_{a'} D_{T^*} x_a$$

und

$$L^* : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}), \ x \mapsto \big(D_{T^*} T_{a'}^* x\big)_{a \in F}.$$

Bemerkung 2.8.
Da T eine n-Kontraktion ist, folgt induktiv, dass

$$\left(\sum_{|a|=k} T_a T_a^*\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

eine monoton fallende Folge positiver Operatoren ist. Somit existiert

$$T_\infty = \mathrm{SOT} - \lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} T_a T_a^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Dieser Operator T_∞ ist positiv und hat Norm ≤ 1.

Wir betrachten weiterhin wie in [**47**] die orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

von $\mathcal{H}$ in die Räume

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \{x \in \mathcal{H};\ \sum_{|a|=k} \|T_a^* x\|^2 \xrightarrow{k} 0\} = \ker T_\infty,\\
\mathcal{H}_1 &= \{x \in \mathcal{H};\ \sum_{|a|=k} \|T_a^* x\|^2 = \|x\|^2 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\} = \ker\left(I - T_\infty\right),\\
\mathcal{H}_2 &= \mathcal{H} \ominus \left(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1\right).
\end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, nennt man T eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, falls $T_\infty = 0$ gilt, oder äquivalent, wenn $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$ ist. Man nennt T vollständig nicht koisometrisch, falls $\mathcal{H}_1 = \{0\}$ ist. Somit ist jede $C_{\cdot 0}$-Kontraktion vollständig nicht koisometrisch. Im folgenden Lemma charakterisieren wir diese Begriffe mithilfe des Operators L.

Lemma 2.9.

(a) Der Operator L erfüllt die Gleichung

$$LL^* = I_{\mathcal{H}} - T_\infty.$$

Insbesondere ist T genau dann eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, wenn L^* isometrisch ist.

(b) Es ist $\ker L^* = \mathcal{H}_1$.
Folglich ist T genau dann vollständig nicht koisometrisch, wenn L^* injektiv ist, also genau dann, wenn L dichtes Bild hat.

Beweis.

(a) Sei $x \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} LL^*x &= L\left(D_{T^*}(T_{a'})^*x\right)_{a\in F} \\ &= \sum_{a\in F} T_{a'} D_{T^*}^2 T_{a'}^* x \\ &= \sum_{a\in F} T_a \left(I - \sum_{i=1}^n T_i T_i^*\right) T_a^* x \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{|a|=k} \left(T_a T_a^* x - \sum_{i=1}^n T_{(a,i)} T_{(a,i)}^* x\right) \\ &= \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{|a|=k} T_a T_a^* x - \sum_{|a|=k+1} T_a T_a^* x\right) \\ &= x - \lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} T_a T_a^* x \\ &= x - T_\infty x \end{aligned}$$

und somit ist

$$LL^* = I_{\mathcal{H}} - T_\infty.$$

(b) Aus (a) folgt mit $\ker L^* = \ker LL^*$, dass

$$\ker L^* = \{x \in \mathcal{H};\ T_\infty x = x\}.$$

Gilt nun $T_\infty x = x$ für ein $x \in \mathcal{H}$, so folgt

$$\|x\|^2 \geq \langle \sum_{|a|=k} T_a T_a^* x, x\rangle \geq \langle T_\infty x, x\rangle = \|x\|^2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Also ist dann $x \in \mathcal{H}_1$.
Ist umgekehrt $x \in \mathcal{H}_1$, so folgt wie oben

$$\langle T_\infty x, x\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle \sum_{|a|=k} T_a T_a^* x, x\rangle = \lim_{k\to\infty} \sum_{|a|=k} \|T_a^* x\|^2 = \|x\|^2$$

und da T_∞ kontraktiv ist, muss $T_\infty x = x$ gelten.

□

Wir wollen nun den Operator L in Verbindung mit der charakteristischen Funktion von T bringen. Zur Vorbereitung benötigen wir das folgende technische Lemma, das die Operatoren

$$\theta_{T,a}\theta_{T,b}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_{T^*}) \quad (a, b \in F)$$

beschreibt.

Lemma 2.10.
Seien $x, y \in \mathcal{D}_{T^*}$ gegeben.

(a) Für $a, b \in F$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$\begin{aligned} & \langle \theta^*_{T,(a,i)} x, \theta^*_{T,(b,j)} y \rangle \\ = \quad & \delta_{i,j} \cdot \langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle - \langle T_{(a,i)'} D_{T^*} x, T_{(b,j)'} D_{T^*} y \rangle. \end{aligned}$$

(b) Für $b \in F \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle \theta^*_{T,0} x, \theta^*_{T,b} y \rangle = -\langle D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle.$$

(c) Schließlich gilt

$$\langle \theta^*_{T,0} x, \theta^*_{T,0} y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle D_{T^*} x, D_{T^*} y \rangle.$$

Beweis.

(a) Nach 2.4(c) und 2.1 gilt

$$\begin{aligned} & \langle \theta^*_{T,(a,i)} x, \theta^*_{T,(b,j)} y \rangle \\ = \quad & \langle D_T (P_i^{\mathcal{H}})^* T_{a'} D_{T^*} x, D_T (P_j^{\mathcal{H}})^* T_{b'} D_{T^*} y \rangle \\ = \quad & \langle \big(\delta_{i,j} I_{\mathcal{H}} - T_j^* T_i \big) T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle \\ = \quad & \delta_{i,j} \cdot \langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle - \langle T_{(a,i)'} D_{T^*} x, T_{(b,j)'} D_{T^*} y \rangle. \end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$T D_T (P_j^{\mathcal{H}})^* = D_{T^*} T (P_j^{\mathcal{H}})^* = D_{T^*} T_j \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Wir schreiben $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Mit 2.4(c) folgt

$$\begin{aligned} \langle \theta^*_{T,0} x, \theta^*_{T,b} y \rangle \quad &= \quad \langle -T^* x, D_T (P_{b_m}^{\mathcal{H}})^* T_{b_{m-1}} \ldots T_{b_1} D_{T^*} y \rangle \\ &= \quad -\langle x, D_{T^*} T_{b_m} T_{b_{m-1}} \ldots T_{b_1} D_{T^*} y \rangle \\ &= \quad -\langle D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle. \end{aligned}$$

(c) Nach 2.4(c) ist $\theta^*_{T,0} = -T^*|_{\mathcal{D}_{T^*}}$ und folglich gilt

$$\langle \theta^*_{T,0} x, \theta^*_{T,0} y \rangle = \langle T^* x, T^* y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle D_{T^*} x, D_{T^*} y \rangle.$$

Die Behauptung ist damit gezeigt.

□

Der folgende Satz liefert einen essentiellen Zusammenhang zwischen dem Operator L und der charakteristischen Funktion von T und bildet so die Grundlage für das weitere Vorgehen.

Satz 2.11.
Es gilt die Identität

$$L^* L + M_{\theta_T} M_{\theta_T}^* = I_{\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})}.$$

Beweis.
Es genügt zu zeigen, dass

$$\langle L\ e_a \otimes x, L\ e_b \otimes y \rangle + \langle M_{\theta_T}^*\ e_a \otimes x, M_{\theta_T}^*\ e_b \otimes y \rangle = \langle e_a \otimes x, e_b \otimes y \rangle$$

für alle $a, b \in F$ und alle $x, y \in \mathcal{D}_{T^*}$ gilt.
Wir betrachten zunächst die beiden Summanden auf der linken Seite dieser Gleichung. Nach Definition von L gilt

$$\langle L\ e_a \otimes x, L\ e_b \otimes y \rangle = \langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle.$$

Nach 1.8 gilt mit $\theta_T = (\theta_{T,c})_{c \in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$, dass

$$\begin{aligned}
\langle M_{\theta_T}^*\ e_a \otimes x, M_{\theta_T}^*\ e_b \otimes y \rangle &= \langle \sum_{(c,r)=a} e_r \otimes \theta_{T,c}^* x, \sum_{(d,s)=b} e_s \otimes \theta_{T,d}^* y \rangle \\
&= \sum_{(c,r)=a,\ (d,s)=b} \langle e_r, e_s \rangle \cdot \langle \theta_{T,c}^* x, \theta_{T,d}^* y \rangle \\
&= \sum_{(c,r)=a,\ (d,r)=b} \langle \theta_{T,c}^* x, \theta_{T,d}^* y \rangle,
\end{aligned}$$

denn es ist $\langle e_r, e_s \rangle = \delta_{r,s}$ $(r, s \in F)$.
Auf der rechten Seite ergibt sich

$$\langle e_a \otimes x, e_b \otimes y \rangle = \langle e_a, e_b \rangle \cdot \langle x, y \rangle = \begin{cases} \langle x, y \rangle & , \text{ falls } a = b, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Wir wollen die Gleichheit nun durch Fallunterscheidung nach a und b zeigen.
Sei zunächst $a = b = 0$.
Für $c, d, r \in F$ gilt dann $(c, r) = a$ und $(d, r) = b$ nur mit $c = d = r = 0$. Mit 2.10 (c) folgt

$$\begin{aligned}
\langle M_{\theta_T}^*\ e_a \otimes x, M_{\theta_T}^*\ e_b \otimes y \rangle &= \langle \theta_{T,0}^* x, \theta_{T,0}^* y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle - \langle D_{T^*} x, D_{T^*} y \rangle \\
&= \langle x, y \rangle - \langle L\ e_a \otimes x, L\ e_b \otimes y \rangle,
\end{aligned}$$

wie gewünscht.
Nun betrachten wir den Fall, dass $a = b = (a_1, \ldots, a_m) \in F \setminus \{0\}$ gilt.
Für $c, r, d \in F$ mit $(c, r) = a$ gilt $(d, r) = b$ genau dann, wenn $d = c$ ist.

Mit 2.10 (a) und (c) folgt

$$\begin{aligned}
& \langle M^*_{\theta_T}\ e_a \otimes x, M^*_{\theta_T}\ e_b \otimes y\rangle \\
= & \sum_{(c,r)=a} \langle \theta^*_{T,c} x, \theta^*_{T,c} y\rangle \\
= & \langle \theta^*_{T,0} x, \theta^*_{T,0} y\rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle \theta^*_{T,(a_1,\dots,a_k)} x, \theta^*_{T,(a_1,\dots,a_k)} y\rangle \\
= & \langle x, y\rangle - \langle D_{T^*} x, D_{T^*} y\rangle \\
& + \sum_{k=1}^{m} \langle T_{a_{k-1}} \dots T_{a_1} D_{T^*} x, T_{a_{k-1}} \dots T_{a_1} D_{T^*} y\rangle \\
& - \sum_{k=1}^{m} \langle T_{a_k} \dots T_{a_1} D_{T^*} x, T_{a_k} \dots T_{a_1} D_{T^*} y\rangle \\
= & \langle x, y\rangle - \langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{a'} D_{T^*} y\rangle \\
= & \langle x, y\rangle - \langle L\ e_a \otimes x, L\ e_b \otimes y\rangle .
\end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Fall die zu zeigende Gleichheit.
Sei nun $a = 0$ und $b = (b_1, \dots, b_l) \neq 0$.
Dann ist $(c, r) = a$ und $(d, r) = b$ nur mit $c = r = 0$ und $d = b$ möglich.
Mit 2.10 (b) folgt

$$\begin{aligned}
& \langle M^*_{\theta_T}\ e_a \otimes x, M^*_{\theta_T}\ e_b \otimes y\rangle \\
= & \langle \theta^*_{T,0} x, \theta^*_{T,b} y\rangle \\
= & -\langle D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y\rangle \\
= & -\langle L\ e_a \otimes x, L\ e_b \otimes y\rangle .
\end{aligned}$$

Dies entspricht der Behauptung.
Für den nächsten Fall, den wir betrachten wollen, sei $a = (a_1, \dots, a_m) \neq 0$ und

$$b = (b_1, \dots, b_l, a)$$

mit $l \geq 1$. Insbesondere haben wir also $a \neq b$.
Dann gilt für $c, r, d \in F$ mit $(c, r) = a$ die Identität $(d, r) = b$ genau dann, wenn $d = (b_1, \dots, b_l, c)$ ist. Mit 2.10 (a) und (b) folgt

$$\begin{aligned}
& \langle M_{\theta_T}^* \; e_a \otimes x, M_{\theta_T}^* \; e_b \otimes y \rangle \\
= \; & \sum_{(c,r)=a} \langle \theta_{T,c}^* x, \theta_{T,(b_1,\ldots,b_l,c)}^* y \rangle \\
= \; & \langle \theta_{T,0}^* x, \theta_{T,(b_1,\ldots,b_l)}^* y \rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle \theta_{T,(a_1,\ldots,a_k)}^* x, \theta_{T,(b_1,\ldots,b_l,a_1,\ldots,a_k)}^* y \rangle \\
= \; & -\langle D_{T^*} x, T_{b_l} \ldots T_{b_1} D_{T^*} y \rangle \\
& + \sum_{k=1}^{m} \langle T_{a_{k-1}} \ldots T_{a_1} D_{T^*} x, T_{a_{k-1}} \ldots T_{a_1} T_{b_l} \ldots T_{b_1} D_{T^*} y \rangle \\
& - \sum_{k=1}^{m} \langle T_{a_k} \ldots T_{a_1} D_{T^*} x, T_{a_k} \ldots T_{a_1} T_{b_l} \ldots T_{b_1} D_{T^*} y \rangle \\
= \; & -\langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle \\
= \; & -\langle L \; e_a \otimes x, L \; e_b \otimes y \rangle .
\end{aligned}$$

Auch dies entspricht der behaupteten Gleichheit.
Falls $a = (a_1, \ldots, a_l, b)$ mit $l \geq 1$ und $b \in F$ beliebig ist, können wir genauso wie in den beiden vorigen Fällen vorgehen, indem wir die Rollen von a und b vertauschen.
Nun nehmen wir an, dass wir $a = (\hat{a}, i)$ und $b = (\hat{b}, j)$ schreiben können, wenn $\hat{a}, \hat{b} \in F$ und $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ geeignet gewählt werden. Auch hier gilt also insbesondere $a \neq b$.
In diesem Fall ist $(c, r) = a$ und $(d, r) = b$ nur erfüllt für

$$r = 0, \; c = a, \text{ und } d = b.$$

Es folgt mit 2.10 (a)

$$\begin{aligned}
\langle M_{\theta_T}^* \; e_a \otimes x, M_{\theta_T}^* \; e_b \otimes y \rangle &= \langle \theta_{T,a}^* x, \theta_{T,b}^* y \rangle \\
&= -\langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle \\
&= -\langle L \; e_a \otimes x, L \; e_b \otimes y \rangle ,
\end{aligned}$$

wie behauptet.
Tritt keiner der bisher behandelten Fälle ein, muss das Folgende gelten.
Es existieren $\hat{a}, \hat{b}, s \in F$ mit $s = (s_1, \ldots, s_m) \neq 0$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$, so dass

$$a = (\hat{a}, i, s) \text{ und } b = (\hat{b}, j, s).$$

Auch hier gilt also $a \neq b$.
Für $r, c, d \in F$ ist damit $(c, r) = a$ und $(d, r) = b$ genau dann, wenn

$$c = (\hat{a}, i, s_1, \ldots, s_k), \; d = (\hat{b}, j, s_1, \ldots, s_k), \text{ und } r = (s_{k+1}, \ldots, s_m)$$

für ein geeignetes $k = 0, \dots, m$ gilt.
Mit 2.10 (a) folgt

$$\begin{aligned}
& \langle M_{\theta_T}^* \; e_a \otimes x, M_{\theta_T}^* \; e_b \otimes y \rangle \\
= \; & \langle \theta^*_{T,(\hat{a},i)} x, \theta^*_{T,(\hat{b},j)} y \rangle + \sum_{k=1}^{m} \langle \theta^*_{T,(\hat{a},i,s_1,\dots,s_k)} x, \theta^*_{T,(\hat{b},j,s_1,\dots,s_k)} y \rangle \\
= \; & -\langle T_{(\hat{a},i)'} D_{T^*} x, T_{(\hat{b},j)'} D_{T^*} y \rangle \\
& + \sum_{k=1}^{m} \langle T_{(\hat{a},i,s_1,\dots,s_{k-1})'} D_{T^*} x, T_{(\hat{b},j,s_1,\dots,s_{k-1})'} D_{T^*} y \rangle \\
& - \sum_{k=1}^{m} \langle T_{(\hat{a},i,s_1,\dots,s_k)'} D_{T^*} x, T_{(\hat{b},j,s_1,\dots,s_k)'} D_{T^*} y \rangle \\
= \; & -\langle T_{a'} D_{T^*} x, T_{b'} D_{T^*} y \rangle \\
= \; & -\langle L \; e_a \otimes x, L \; e_b \otimes y \rangle.
\end{aligned}$$

Die Behauptung ist gezeigt. □

Für den Fall, dass T eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion ist, erhalten wir aus 2.11 eine erste Folgerung in Bezug auf die charakteristische Funktion M_{θ_T}.

Korollar 2.12.
Ist T eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion, so ist M_{θ_T} eine partielle Isometrie.

Beweis.
Falls T die $C_{\cdot 0}$-Bedingung erfüllt, so ist L nach 2.9 eine Koisometrie und damit ist $L^*L \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}))$ eine Orthogonalprojektion. Nach 2.11 ist

$$M_{\theta_T} M_{\theta_T}^* \;=\; I_{\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} - L^*L$$

dann ebenfalls eine Orthogonalprojektion, folglich ist M_{θ_T} eine partielle Isometrie. □

Aus 2.11 wollen wir Modellsätze für $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen beziehungsweise für vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen folgern. Dazu brauchen wir außerdem das folgende Lemma.

Lemma 2.13.
Für $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* L^* = L^* T_j^*.$$

Insbesondere ist $L^*\mathcal{H} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$ ein rechts-$*$-invarianter Teilraum.

Beweis.

Für $j = 1, \ldots, n$ und $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$\begin{aligned}
\left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* L^* h &= \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* \left(D_{T^*} T^*_{a'} h\right)_{a \in F} \\
&= \left(D_{T^*} T^*_{(a,j)'} h\right)_{a \in F} \\
&= \left(D_{T^*} T^*_{a'} T^*_j h\right)_{a \in F} \\
&= L^* T^*_j h.
\end{aligned}$$

□

Ein bekannter Modellsatz zeigt, dass jede n-Kontraktion unitär äquivalent zu einem Operatortupel ist, das aus der Summe eines n-Shifts und eines sphärisch unitären Tupels durch Kompression auf einen $*$-invarianten Teilraum hervorgeht (man vergleiche etwa Satz 2.4.6 in [**20**]). Im $C_{\cdot 0}$-Fall entfällt dabei der sphärisch unitäre Anteil.

Wir wollen nun ein solches Modell $\mathbb{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{H})^n$ für eine $C_{\cdot 0}$-Konstruktion T konstruieren. Dabei ergibt sich $\mathbb{H} \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$ als orthogonales Komplement des Bildes der charakteristischen Funktion M_{θ_T} von T.

Satz 2.14. *(Modellsatz für $C_{\cdot 0}$-Kontraktionen)*
Sei T eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion auf $\mathcal{H}$.
Der Teilraum

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_T = \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \ominus M_{\theta_T} \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \ \subset \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$$

ist rechts-$*$-invariant.
Sei weiterhin $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_n)$ die Kompression des Rechtsvorwärtsshifts auf $\mathbb{H}$, das heißt es gilt

$$\mathbb{T}_j = P_{\mathbb{H}} R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}|_{\mathbb{H}} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Dann sind T und $\mathbb{T}$ unitär äquivalent.

Beweis.

Da T eine $C_{\cdot 0}$-Kontraktion ist, ist

$$L^* : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$$

nach 2.9 eine Isometrie. Damit ist $L^* L$ die Orthogonalprojektion auf $L^* \mathcal{H}$.
Nach 2.11 gilt

$$M_{\theta_T} M^*_{\theta_T} = I - L^* L.$$

Somit ist $M_{\theta_T} M^*_{\theta_T}$ die Orthogonalprojektion auf $M_{\theta_T} \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$ und es gilt

$$L^* \mathcal{H} = \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \ominus M_{\theta_T} \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) = \mathbb{H}.$$

Folglich ist $L^* : \mathcal{H} \to \mathbb{H}$ ein unitärer Operator.
Nach 2.13 ist $\mathbb{H} = L^*\mathcal{H}$ ein rechts-$*$-invariante Teilraum und es gilt

$$\left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* L^* = L^* T_j^* \quad (j = 1, \dots, n).$$

Wir haben also

$$\mathbb{T}_j^* L^* h = \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* L^* h = L^* T_j^* h \quad (h \in \mathcal{H},\ j = 1, \dots, n).$$

Damit sind die Tupel T und $\mathbb{T}$ unitär äquivalent. $\square$

Wir wollen nun diesen Modellsatz auf den Fall verallgemeinern, dass T eine vollständig nicht koisometrische n-Kontraktion ist.
Dazu betrachten wir den Defektoperator $\Delta = \Delta_T$ der charakteristischen Funktion von T, das heißt es ist

$$\Delta = \left(I - M_{\theta_T}^* M_{\theta_T}\right)^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)).$$

(Man beachte, dass $\|M_{\theta_T}\| \leq 1$ gilt.)
Da der Operator L^* in diesem Fall nicht mehr notwendig isometrisch ist, ergänzen wir ihn in geeigneter Weise zu einem isometrischen Spaltenoperator.

Lemma 2.15.
Sei T vollständig nicht koisometrisch.
Dann gibt es genau eine stetig lineare Abbildung $k : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$ mit

$$kL = -\Delta M_{\theta_T}^*.$$

Diese ist kontraktiv und erfüllt die folgenden Bedingungen.

(i) Das Bild von k ist im Abschluss des Bildes von Δ enthalten.
(ii) Es gilt

$$\|L^* h\|^2 + \|kh\|^2 = \|h\|^2 \quad (h \in \mathcal{H}),$$

das heißt der Spaltenoperator

$$\begin{pmatrix} L^* \\ k \end{pmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T),\ h \mapsto \begin{pmatrix} L^* h \\ kh \end{pmatrix}$$

ist isometrisch.
(iii) Der Operator

$$kk^* + \Delta^2 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T))$$

ist die Orthogonalprojektion auf den Abschluss des Bildes von Δ.

BEWEIS.
Für alle $x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$ gilt

$$\begin{aligned} \| - \Delta M_{\theta_T}^* x\|^2 &= \langle M_{\theta_T} \left(I - M_{\theta_T}^* M_{\theta_T}\right) M_{\theta_T}^* x, x\rangle \\ &= \langle \left(I - M_{\theta_T} M_{\theta_T}^*\right) M_{\theta_T} M_{\theta_T}^* x, x\rangle \\ &= \langle L^* L \,(I - L^* L)\, x, x\rangle \quad \text{(nach 2.11)} \\ &= \langle L^* \,(I - L L^*)\, L x, x\rangle \\ &= \|Lx\|^2 - \|L^* L x\|^2 \\ &\leq \|Lx\|^2 . \end{aligned}$$

Damit ist die Abbildung

$$\mathcal{H} \supset L\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T),\ Lx \mapsto -\Delta M_{\theta_T}^* x$$

wohldefiniert, linear und kontraktiv. Sie lässt sich damit zu einer linearen Kontraktion

$$k : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$$

fortsetzen. Nach Konstruktion gilt $kL = -\Delta M_{\theta_T}^*$.
Da L dichtes Bild hat, folgt die Eindeutigkeit von k und es gilt

$$k\mathcal{H} = k\overline{L\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} \subset \overline{kL\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} = \overline{\Delta M_{\theta_T}^* \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} \subset \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}.$$

Somit ist (i) gezeigt.
Ist $x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$ und $h = Lx \in \mathcal{H}$, so gilt

$$\begin{aligned} \|L^* h\|^2 + \|kh\|^2 &= \|L^* L x\|^2 + \|kLx\|^2 \\ &= \|L^* L x\|^2 + \left\|-\Delta M_{\theta_T}^* x\right\|^2 \\ &= \|L^* L x\|^2 + \|Lx\|^2 - \|L^* L x\|^2 \quad \text{(siehe oben)} \\ &= \|h\|^2 . \end{aligned}$$

Da L dichtes Bild hat, folgt (ii).
Weil $kk^* + \Delta^2$ ein selbstadjungierter Operator ist, dessen Bild in $\overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}$ enthalten ist, verschwindet er auf $\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \ominus \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}$.
Weiter gilt

$$-\Delta k L = \Delta^2 M_{\theta_T}^* = \left(I - M_{\theta_T}^* M_{\theta_T}\right) M_{\theta_T}^* = M_{\theta_T}^* \left(I - M_{\theta_T} M_{\theta_T}^*\right) = M_{\theta_T}^* L^* L$$

nach 2.11. Da L dichtes Bild hat, folgt $\Delta k = -M_{\theta_T}^* L^*$ und somit

$$k^* \Delta = -L M_{\theta_T}.$$

Daraus ergibt sich nun

$$\left(kk^* + \Delta^2\right) \Delta = -kLM_{\theta_T} + \Delta^3 = \Delta M_{\theta_T}^* M_{\theta_T} + \Delta^3 = \Delta(I - \Delta^2) + \Delta^3 = \Delta$$

und somit wirkt $kk^* + \Delta^2$ auf $\overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}$ wie die Identität. Es folgt (iii). $\square$

Sei T im Folgenden vollständig nicht koisometrisch. Wir haben in 2.15 eine Isometrie

$$V_0 = \begin{pmatrix} L^* \\ k \end{pmatrix} : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$$

konstruiert. Die Abbildung

$$W = \begin{pmatrix} M_{\theta_T} \\ \Delta \end{pmatrix} : \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$$

ist ebenfalls eine Isometrie, denn es gilt

$$\|Wx\|^2 = \|M_{\theta_T}x\|^2 + \|\Delta x\|^2 = \langle M_{\theta_T}^* M_{\theta_T} x, x\rangle + \langle \left(I - M_{\theta_T}^* M_{\theta_T}\right) x, x\rangle = \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$.

Wir zeigen nun, dass sich die Bilder der Isometrien V_0 und W orthogonal zu $\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}$ summieren und erhalten so das Bild von V_0.

Lemma 2.16.

Bezeichnet $P_\Delta \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T))$ die Orthogonalprojektion auf den Abschluss des Bildes von Δ, so gilt

$$V_0 V_0^* + WW^* = I_{\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} \oplus P_\Delta.$$

Damit ist das Bild von V_0 gerade der Teilraum

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_T = \left(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}\right) \ominus \{(M_{\theta_T}x, \Delta x);\ x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)\}.$$

Beweis.

Es gilt

$$\begin{aligned} V_0V_0^* + WW^* &= \begin{pmatrix} L^* \\ k \end{pmatrix} \left(L, k^*\right) + \begin{pmatrix} M_{\theta_T} \\ \Delta \end{pmatrix} \left(M_{\theta_T}^*, \Delta\right) \\ &= \begin{pmatrix} L^*L + M_{\theta_T} M_{\theta_T}^* & L^*k^* + M_{\theta_T}\Delta \\ kL + \Delta M_{\theta_T}^* & kk^* + \Delta^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} & 0 \\ 0 & P_\Delta \end{pmatrix} \quad \text{(nach 2.11 und 2.15)} \\ &= I_{\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})} \oplus P_\Delta. \end{aligned}$$

Da V_0 und W Isometrien sind, sind $V_0V_0^*$ und WW^* die Orthogonalprojektionen auf $V_0\mathcal{H}$ beziehungsweise $W\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$. Obige Rechnung zeigt, dass $V_0V_0^* + WW^*$ die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}$ ist. Daraus folgt, dass

$$V_0\mathcal{H} = \left(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}\right) \ominus W\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) = \mathbb{H}.$$

□

Wir fassen nun die Isometrie V_0 als Operator auf sein Bild auf und schreiben

$$V : \mathcal{H} \to \mathbb{H}, \ x \mapsto V_0 x.$$

Damit ist V unitär und wir erhalten vermöge V ein Modell

$$\mathbb{T} = (\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_n)_{j=1}^n \in \mathcal{L}(\mathbb{H})^n$$

für T, wobei

$$\mathbb{T}_j = VT_jV^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Der folgende Modellsatz beschreibt die Wirkung der $\mathbb{T}_j^*$. Dabei sei

$$\Delta^{-1} : \Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \to \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)} = (\ker\Delta)^\perp$$

die Inverse der bijektiven, linearen Abbildung

$$\Delta : (\ker\Delta)^\perp \to \Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T).$$

SATZ 2.17. *(Modellsatz im vollständig nicht koisometrischen Fall)*
Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine vollständig nicht koisometrische n-Kontraktion und seien

$$\mathbb{H} = \left(\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)}\right) \ominus \{(M_{\theta_T}x, \Delta x);\ x \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)\}$$

und

$$\mathbb{T}_j = VT_jV^* \in \mathcal{L}(\mathbb{H}) \quad (j = 1, \dots, n)$$

wie zuvor. Dann gilt

$$\mathbb{T}_j^*(y,x) = \left(\left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* y, \Delta^{-1}\left(R_j^{\mathcal{D}_T}\right)^* \Delta x\right) \quad \text{für alle } (y,x) \in \mathbb{H}.$$

(Insbesondere liegt der Term auf der rechten Seite stets wieder in $\mathbb{H}$.)
Die Tupel T und $\mathbb{T} = (\mathbb{T}_j)_{j=1}^n$ sind unitär äquivalent.

BEWEIS.
Seien $j = 1, \dots, n$ und $(y,x) \in \mathbb{H}$. Wähle ein $h \in \mathcal{H}$ mit

$$(y,x) = Vh = (L^*h, kh)\,.$$

Nach 2.13 gilt

$$L^*T_j^*h = \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* L^*h = \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* y.$$

Außerdem ist

$$kT_j^*h \in k\mathcal{H} \subset \overline{\Delta\mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)} = (\ker\Delta)^\perp$$

nach 2.15 und es gilt

$$\Delta k = -M_{\theta_T}^* L^*$$

nach dem Beweis von 2.15.
Es folgt

$$\begin{aligned} kT_j^*h &= \Delta^{-1}\Delta k T_j^* h \\ &= -\Delta^{-1} M_{\theta_T}^* L^* T_j^* h \\ &= -\Delta^{-1} M_{\theta_T}^* \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* L^* h \quad \text{(nach 2.13)} \\ &= -\Delta^{-1} \left(R_j^{\mathcal{D}_T}\right)^* M_{\theta_T}^* L^* h \quad \text{(nach 1.6)} \\ &= \Delta^{-1} \left(R_j^{\mathcal{D}_T}\right)^* \Delta k h \\ &= \Delta^{-1} \left(R_j^{\mathcal{D}_T}\right)^* \Delta\ x. \end{aligned}$$

Zusammen können wir nun schließen, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_j^*(y,x) &= VT_j^* V^* V h \\ &= VT_j^* h \quad (V \text{ isometrisch}) \\ &= \left(L^* T_j^* h, k T_j^* h\right) \\ &= \left(\left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* y, \Delta^{-1} \left(R_j^{\mathcal{D}_T}\right)^* \Delta x\right) \end{aligned}$$

gilt, was zu zeigen war. □

Mit diesem Modellsatz sind wir nun in der Lage, das Hauptresultat dieses Abschnitts zu beweisen. Wir zeigen, dass in 2.7 auch die Umkehrung gilt, wenn T und $\tilde{T}$ vollständig nicht koisometrisch sind.

Satz 2.18.
Seien T und $\tilde{T}$ vollständig nicht koisometrische n-Kontraktionen auf Hilberträumen $\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$. Dann sind T und $\tilde{T}$ genau dann unitär äquivalent, wenn ihre charakteristischen Funktionen übereinstimmen.

Beweis.
Nach 2.7 genügt es, die Rückrichtung zu zeigen.
Wir setzen also voraus, dass M_{θ_T} und $M_{\theta_{\tilde{T}}}$ übereinstimmen. Es existieren also unitäre Operatoren

$$\tau : \mathcal{D}_T \to \mathcal{D}_{\tilde{T}} \text{ und } \tau_* : \mathcal{D}_{T^*} \to \mathcal{D}_{\tilde{T}^*},$$

so dass

$$M_{\theta_{\tilde{T}}} \circ \Gamma = \Gamma_* \circ M_{\theta_T}$$

für die ebenfalls unitären Operatoren $\Gamma = I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau$ und $\Gamma_* = I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*$ gilt.
Wir betrachten gemäß 2.17 die zu T beziehungsweise $\tilde{T}$ unitär äquivalenten

Tupel

$$\mathbb{T} = (\mathbb{T}_1, \ldots, \mathbb{T}_n) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_T)^n \text{ und } \tilde{\mathbb{T}} = \left(\tilde{\mathbb{T}}_1, \ldots, \tilde{\mathbb{T}}_n\right) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}_{\tilde{T}})^n,$$

das heißt, für $(y,x) \in \mathbb{H}_T$, $(\tilde{y}, \tilde{x}) \in \mathbb{H}_{\tilde{T}}$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_j^*(y,x) &= \left(\left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}}\right)^* y, \Delta_T^{-1}\left(R_j^{\mathcal{D}_T}\right)^* \Delta_T x\right), \\ \tilde{\mathbb{T}}_j^*(\tilde{y},\tilde{x}) &= \left(\left(R_j^{\mathcal{D}_{\tilde{T}^*}}\right)^* \tilde{y}, \Delta_{\tilde{T}}^{-1}\left(R_j^{\mathcal{D}_{\tilde{T}}}\right)^* \Delta_{\tilde{T}} \tilde{x}\right). \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{T}$ und $\tilde{\mathbb{T}}$ unitär äquivalent sind.
Dazu betrachten wir den unitären Operator

$$\Gamma_* \oplus \Gamma : \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{\tilde{T}^*}) \oplus \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{\tilde{T}}).$$

Wir wollen zeigen, dass

$$(\Gamma_* \oplus \Gamma)\, \mathbb{H}_T = \mathbb{H}_{\tilde{T}}$$

gilt. Dazu beachte man zunächst, dass

$$\Delta_T = \left(I - M_{\theta_T}^* M_{\theta_T}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\Gamma^*\left(I - M_{\theta_{\tilde{T}}}^* M_{\theta_{\tilde{T}}}\right)\Gamma\right)^{\frac{1}{2}} = \Gamma^* \Delta_{\tilde{T}} \Gamma$$

gilt. Folglich ist $\Gamma \Delta_T = \Delta_{\tilde{T}} \Gamma$ und somit

$$\Gamma\ \overline{\Delta_T \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)} = \overline{\Gamma \Delta_T \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)} = \overline{\Delta_{\tilde{T}} \Gamma \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)} = \overline{\Delta_{\tilde{T}} \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{\tilde{T}})}.$$

Außerdem gilt für alle $(y,x) \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*}) \oplus \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)$

$$\begin{aligned} & \langle (y,x), (M_{\theta_T} z, \Delta_T z) \rangle \\ = \ & \langle y, M_{\theta_T} z \rangle + \langle x, \Delta_T z \rangle \\ = \ & \langle \Gamma_* y, \Gamma_* M_{\theta_T} z \rangle + \langle \Gamma x, \Gamma \Delta_T z \rangle \quad (\Gamma, \Gamma_* \text{ isometrisch}) \\ = \ & \langle \Gamma_* y, M_{\theta_{\tilde{T}}} \Gamma z \rangle + \langle \Gamma x, \Delta_{\tilde{T}} \Gamma z \rangle \quad (\text{siehe oben}) \\ = \ & \langle (\Gamma_* y, \Gamma x), (M_{\theta_{\tilde{T}}}(\Gamma z), \Delta_{\tilde{T}}(\Gamma z)) \rangle \quad (z \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)). \end{aligned}$$

Da $\Gamma : \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{\tilde{T}})$ surjektiv ist, folgt daraus die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & (y,x) \in \left\{(M_{\theta_T} z, \Delta_T z);\ z \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T)\right\}^{\perp} \\ \Leftrightarrow \quad & (\Gamma_* y, \Gamma x) \in \left\{\left(M_{\theta_{\tilde{T}}} \tilde{z}, \Delta_{\tilde{T}} \tilde{z}\right);\ \tilde{z} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{\tilde{T}})\right\}^{\perp}. \end{aligned}$$

Zusammen folgt nun

$$(\Gamma_* \oplus \Gamma)\, \mathbb{H}_T = \mathbb{H}_{\tilde{T}}$$

aus der Definition von $\mathbb{H}_T$ beziehungsweise $\mathbb{H}_{\tilde{T}}$.
Wir können nun schließen, dass $\Gamma_* \oplus \Gamma$ einen wohldefinierten unitären Operator

$$\sigma : \mathbb{H}_T \to \mathbb{H}_{\tilde{T}},\ (y,x) \mapsto (\Gamma_* y, \Gamma x)$$

induziert.
Wegen $\Gamma = I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau$ und $\Gamma_* = I_{\mathcal{F}^2} \otimes \tau_*$ gilt

$$\Gamma \left(R_j^{\mathcal{D}_T} \right)^* = \left(R_j^{\mathcal{D}_{\tilde{T}}} \right)^* \Gamma$$

und

$$\Gamma_* \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* = \left(R_j^{\mathcal{D}_{\tilde{T}^*}} \right)^* \Gamma_*$$

für $j = 1, \ldots, n$. Wir haben außerdem schon gesehen, dass

$$\Gamma \Delta_T = \Delta_{\tilde{T}} \Gamma$$

gilt. Dies impliziert zusätzlich

$$\Gamma \Delta_T^{-1} = \Delta_{\tilde{T}}^{-1} \Gamma$$

auf $\Delta_T \mathcal{F}^2 (\mathcal{D}_T)$.
Für alle $j = 1, \ldots, n$ folgt nun aus den angegebenen Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \sigma \mathbb{T}_j^*(y, x) &= \left(\Gamma_* \left(R_j^{\mathcal{D}_{T^*}} \right)^* y, \Gamma \Delta_T^{-1} \left(R_j^{\mathcal{D}_T} \right)^* \Delta_T x \right) \\ &= \left(\left(R_j^{\mathcal{D}_{\tilde{T}^*}} \right)^* \Gamma_* y, \Delta_{\tilde{T}}^{-1} \left(R_j^{\mathcal{D}_{\tilde{T}}} \right)^* \Delta_{\tilde{T}} \Gamma x \right) \\ &= \tilde{\mathbb{T}}_j^* \sigma(y, x) \end{aligned}$$

für alle $(y, x) \in \mathbb{H}_T$. Also gilt

$$\sigma \mathbb{T}_j^* = \tilde{\mathbb{T}}_j^* \sigma \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Damit sind die Tupel $\mathbb{T}$ und $\tilde{\mathbb{T}}$ unitär äquivalent, was zu zeigen war. $\square$

Ähnlichkeit von n-Kontraktionen zu sphärisch unitären Tupeln

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Frage, wann eine n-Kontraktion ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist. Mithilfe der minimalen isometrischen Dilatation (siehe [**47**]) zeigen wir, dass eine n-Kontraktion genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist, wenn ihre charakteristische Funktion invertierbar ist.
Zunächst definieren wir die grundlegenden Begriffe.

Definition 2.19.
Ein Tupel $W = (W_1, \ldots, W_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})^n$ von Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{G}$ heißt sphärisch unitär, falls

$$W_i^* W_j = \delta_{i,j} I_{\mathcal{G}} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} W_j W_j^* = I_{\mathcal{G}}$$

gilt.

Bemerkung 2.20.

(a) Offenbar ist ein Tupel $W = (W_1, \dots, W_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})^n$ genau dann sphärisch unitär, wenn der Zeilenoperator

$$W : \mathcal{G}^n \to \mathcal{G},\ (x_j)_{j=1}^n \mapsto \sum_{j=1}^n W_j x_j$$

unitär ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $W_1, \dots, W_n$ Isometrien sind, deren Bilder sich orthogonal zu $\mathcal{G}$ summieren.

(b) Für ein sphärisch unitäres Tupel $W = (W_1, \dots, W_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})^n$ auf $\mathcal{G}$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Raum

$$\mathcal{G}^{(k)} = \bigoplus_{|a|=k} \mathcal{G}$$

und den Operator

$$W^{(k)} : \mathcal{G}^{(k)} \to \mathcal{G},\ (g_a)_{|a|=k} \mapsto \sum_{|a|=k} W_a g_a$$

Dann ist $W^{(k)}$ unitär, wie man mit (a) und Induktion nach k leicht zeigen kann. Offenbar gilt

$$W^{(k)^*}(g) = \big(W_a^* g\big)_{|a|=k} \quad (g \in \mathcal{G}).$$

Definition 2.21.
Seien $\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ Hilberträume.
Zwei Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ und $\tilde{T} = (\tilde{T}_1, \dots, \tilde{T}_n) \in \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}})^n$ heißen ähnlich zueinander, falls ein invertierbarer Operator $s \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ existiert mit

$$T_j = s^{-1} \tilde{T}_j s \quad (j = 1, \dots, n).$$

Bemerkung 2.22.
Ein Operator $s \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{H}})$ zwischen Hilberträumen $\mathcal{H}$ und $\tilde{\mathcal{H}}$ ist aufgrund des Prinzips der stetigen Inversen genau dann invertierbar, wenn $s\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$ gilt und eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$\|sx\| \geq c \cdot \|x\| \quad (x \in \mathcal{H}).$$

Wir wollen an dieser Stelle an den Begriff des wandernden Unterraums erinnern. Ist $V \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ ein Tupel von Isometrien auf einem Hilbertraum $\mathcal{K}$, so heißt ein abgeschlossener Teilraum $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ wandernd für V, falls

$$V_a \mathcal{L} \perp V_b \mathcal{L} \quad (a, b \in F,\ a \neq b)$$

ist. In diesem Fall schreiben wir

$$M_F(\mathcal{L}) = M_F(\mathcal{L}, V) = \bigoplus_{a \in F} V_a \mathcal{L} \subset \mathcal{K}.$$

Damit ist offensichtlich

$$\mathcal{F}^2(\mathcal{L}) \to M_F(\mathcal{L}),\ (x_a)_{a\in F} \mapsto \sum_{a\in F} V_a x_a$$

ein unitärer Operator, insbesondere ist

$$M_F(\mathcal{L}) = \left\{ \sum_{a\in F} V_a x_a;\ (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2(\mathcal{L}) \right\}.$$

Im Folgenden sei $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})^n$ eine n-Kontraktion auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir fassen im nächsten Satz einige Resultate aus [**47**] zusammen (betrachte dort Satz 2.1 und Satz 2.8 mit Beweis).

Satz 2.23.

(a) *Es existiert eine (bis auf unitäre Äquivalenz eindeutige) minimale isometrische Dilatation $V = (V_1, \ldots, V_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{K})^n$ von T auf einem Hilbertraum $\mathcal{K} \supset \mathcal{H}$, das heißt $V_1, \ldots V_n$ sind Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern und es gilt $V_j^* h = T_j^* h$ $(h \in \mathcal{H},\ j = 1, \ldots, n)$ sowie*

$$\mathcal{K} = \bigvee_{a\in F} V_a \mathcal{H}.$$

(b) *Die Teilräume*

$$\mathcal{L} = \bigvee_{j=1}^{n} (V_j - T_j)\mathcal{H} \quad \textit{und} \quad \mathcal{L}_* = \overline{(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^*)\mathcal{H}}$$

von $\mathcal{K}$ sind wandernde Unterräume für V und mit

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{K};\ \sum_{|a|=k} \|V_a^* x\|^2 = \|x\|^2 \textit{ für alle } k \in \mathbb{N}\}$$

hat man die folgenden orthogonalen Zerlegungen von $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus M_F(\mathcal{L}) = \mathcal{R} \oplus M_F(\mathcal{L}_*).$$

Der Raum $\mathcal{R}$ ist reduzierend für $V_1, \ldots, V_n$ und das eingeschränkte Tupel $V|_{\mathcal{R}} = (V_1|_{\mathcal{R}}, \ldots, V_n|_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{L}(\mathcal{R})^n$ ist sphärisch unitär.
Weiterhin gilt $\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_* = \{0\}$.

(c) *Es existieren (eindeutig bestimmte) unitäre Operatoren $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{D}_T$ und $\phi_* : \mathcal{L}_* \to \mathcal{D}_{T^*}$ mit*

$$\phi\left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j\right) = D_T (h_j)_{j=1}^{n} \quad (h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H})$$

und

$$\phi_*\left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^*\right) h = D_{T^*} h \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Im Folgenden seien alle Bezeichnungen wie in 2.23 gewählt.
Wir betrachten die Projektion $P_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{R})$ von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{R}$. Wir werden sehen, dass ihre Einschränkung auf $\mathcal{H}$ genau dann invertierbar ist, wenn T ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist. Dazu beachte man zunächst das folgende Lemma.

Lemma 2.24.
(a) Für alle $h \in \mathcal{H}$ gilt

$$P_{\mathcal{R}} h = \lim_{k \to \infty} \sum_{|a|=k} V_a T_a^* h.$$

(b) Für alle $h \in \mathcal{H}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$P_{\mathcal{R}} h = \sum_{|a|=k} V_a P_{\mathcal{R}} T_a^* h.$$

Beweis.
(a) Siehe [**47**], Proposition 2.10.
(b) Sei $h \in \mathcal{H}$ und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{|a|=k} V_a P_{\mathcal{R}} T_a^* h &\overset{(a)}{=} \lim_{m \to \infty} \sum_{|a|=k} \sum_{|b|=m} V_a V_b T_b^* T_a^* h \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{|a|=k} \sum_{|b|=m} V_{(a,b)} T_{(a,b)}^* h \\
&= \lim_{m \to \infty} \sum_{|c|=k+m} V_c T_c^* h \\
&\overset{(a)}{=} P_{\mathcal{R}} h.
\end{aligned}$$

□

Damit erhalten wir ein erstes Kriterium dafür, dass T ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist.

Satz 2.25.
Die n-Kontraktion T ist genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel, wenn die Einschränkung

$$P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$$

von $P_{\mathcal{R}}$ auf $\mathcal{H}$ invertierbar ist.

Beweis.
Sei zunächst T ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel. Wir wählen einen

Hilbertraum $\mathcal{G}$, ein sphärisch unitäres Tupel $W = (W_1, \dots, W_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{G})^n$ und einen invertierbaren Operator $r \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{G})$ mit

$$T_j = r^{-1} W_j r \quad (j = 1, \dots, n).$$

Dann ist auch $s = r^* \in \mathcal{L}(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ invertierbar und es gilt

$$T_j^* = s W_j^* s^{-1} \ (j = 1, \dots, n).$$

Es folgt

$$T_a^* = s W_a^* s^{-1} \quad (a \in F).$$

Da die V_a mit $|a| = k$ (für festes $k \in \mathbb{N}$) Isometrien mit paarweise orthogonalen Bildern sind, folgt für alle $h \in \mathcal{H}$ und alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{|a|=k} V_a T_a^* h \Big\|^2 &= \Big\| \sum_{|a|=k} V_a s W_a^* s^{-1} h \Big\|^2 \\
&= \sum_{|a|=k} \big\| s W_a^* s^{-1} h \big\|^2 \\
&\geq \big\| s^{-1} \big\|^{-2} \cdot \sum_{|a|=k} \big\| W_a^* s^{-1} h \big\|^2 \\
&= \big\| s^{-1} \big\|^{-2} \cdot \| s^{-1} h \|^2 \quad \text{(nach 2.20 (b))} \\
&\geq \big\| s^{-1} \big\|^{-2} \cdot \| s \|^{-2} \cdot \| h \|^2 \\
&= c^2 \cdot \| h \|^2,
\end{aligned}$$

wobei wir $c = \big(\|s\| \cdot \|s^{-1}\| \big)^{-1} > 0$ setzen. Es folgt mit 2.24 (a)

$$\| P_{\mathcal{R}} h \| = \lim_{k \to \infty} \Big\| \sum_{|a|=k} V_a T_a^* h \Big\| \geq c \|h\| \quad (h \in \mathcal{H}).$$

Um zu zeigen, dass $P_{\mathcal{R}} \mathcal{H} = \mathcal{R}$ gilt, betrachten wir

$$\tilde{\mathcal{K}} = \left\{ \sum_{|a| \leq m} V_a h_a; \ m \in \mathbb{N}, \ h_a \in \mathcal{H} \text{ für } |a| \leq m \right\} \subset \mathcal{K}.$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass $P_{\mathcal{R}} \tilde{x} \in P_{\mathcal{R}} \mathcal{H}$ für alle $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{K}}$ gilt. Sei dazu

$$\tilde{x} = \sum_{|a| \leq m} V_a h_a \in \tilde{\mathcal{K}} \quad (m \in \mathbb{N}, \ h_a \in \mathcal{H})$$

gegeben. Da $\mathcal{R}$ ein reduzierender Teilraum für $V_1, \dots, V_n$ ist, vertauscht $P_{\mathcal{R}}$ mit den V_a $(a \in F)$ und es folgt

$$P_{\mathcal{R}} \tilde{x} = \sum_{|a| \leq m} V_a P_{\mathcal{R}} h_a = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|a|=k} V_a P_{\mathcal{R}} h_a.$$

Für jedes $k = 0, \ldots, m$ existiert wegen der Surjektivität des Operators $W^{(k)^*}$ ein $g_k \in \mathcal{G}$ mit

$$W_a^* g_k = s^{-1} h_a$$

für alle $a \in F$ mit $|a| = k$.
Mit $h_k = s g_k \in \mathcal{H}$ folgt für $a \in F$ mit $|a| = k$, dass

$$T_a^* h_k = s W_a^* s^{-1} s g_k = s s^{-1} h_a = h_a \quad (k = 0, \ldots, m)$$

gilt. Mit 2.24 (b) erhält man daraus

$$\sum_{|a|=k} V_a P_{\mathcal{R}} h_a = \sum_{|a|=k} V_a P_{\mathcal{R}} T_a^* h_k = P_{\mathcal{R}} h_k$$

für $k = 0, \ldots, m$ und insgesamt folgt

$$P_{\mathcal{R}} \tilde{x} = \sum_{k=0}^{m} P_{\mathcal{R}} h_k \in P_{\mathcal{R}} \mathcal{H}.$$

Sei nun $x \in \mathcal{R}$ beliebig. Wegen $\mathcal{K} = \bigvee_{a \in F} V_a \mathcal{H}$ ist $\tilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$ dicht und daher findet man eine Folge $(\tilde{x}_k)_k$ in $\tilde{\mathcal{K}}$ mit $\tilde{x}_k \xrightarrow{k} x$. Wie wir oben gezeigt haben, ist $P_{\mathcal{R}} \tilde{x}_k \in P_{\mathcal{R}} \mathcal{H}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit folgt

$$x = P_{\mathcal{R}} x = \lim_{k \to \infty} P_{\mathcal{R}} \tilde{x}_k \in \overline{P_{\mathcal{R}} \mathcal{H}}.$$

Wir haben bereits gesehen, dass $P_{\mathcal{R}}$ auf $\mathcal{H}$ nach unten beschränkt ist und daher ist $P_{\mathcal{R}} \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$ abgeschlossen. Folglich ist $x \in P_{\mathcal{R}} \mathcal{H}$ und somit haben wir gezeigt, dass $P_{\mathcal{R}} \mathcal{H} = \mathcal{R}$ gilt.
Zusammen folgt, dass $P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ invertierbar ist.
Sei nun

$$P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$$

und damit auch

$$s = (P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}})^* : \mathcal{R} \to \mathcal{H}$$

invertierbar.
Für $h \in \mathcal{H}$ und $j = 1, \ldots, n$ gilt nach 2.24 (b) mit $k = 1$

$$V_j^* P_{\mathcal{R}} h = \sum_{i=1}^{n} V_j^* V_i P_{\mathcal{R}} T_i^* h = P_{\mathcal{R}} T_j^* h,$$

denn es ist $V_j^* V_i = \delta_{i,j} I_{\mathcal{K}}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.
Da $\mathcal{R}$ reduzierend für V_j ist, folgt daraus

$$(V_j|_{\mathcal{R}})^* \, (P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}}) = (P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}}) \, T_j^*$$

und damit durch Adjungieren auch

$$s \, (V_j|_{\mathcal{R}}) = T_j s \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Damit ist T ähnlich zu dem sphärisch unitären Tupel $V|_{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{R})^n$. □

Bemerkung 2.26.
Ist K ein Hilbertraum und sind $H, R \subset K$ abgeschlossene Teilräume, so gilt

$$\langle P_R h, r\rangle = \langle h, r\rangle = \langle h, P_H r\rangle \quad (h \in H,\ r \in R).$$

Bezeichnen $P_H|_R$ und $P_R|_H$ die induzierten Operatoren $P_H : R \to H$ und $P_R : H \to R$, so ist folglich

$$P_H|_R = (P_R|_H)^* .$$

Insbesondere gilt

$$\|P_H|_R\| = \|P_R|_H\| .$$

Ist $P_R|_H$ invertierbar, so ist auch $P_H|_R$ invertierbar und es gilt

$$\left\|(P_H|_R)^{-1}\right\| = \left\|(P_R|_H)^{-1}\right\| .$$

Wir haben in 2.25 gesehen, dass die n-Kontraktion T genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist, wenn $P_{\mathcal{R}}|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{R}$ invertierbar ist. Wir wollen nun in diesem Kriterium die Räume $\mathcal{R}$ und $\mathcal{H}$ durch ihre orthogonalen Komplemente ersetzen. Dies ist aufgrund des folgenden Lemmas, das bereits von B. Sz.-Nagy and C. Foiaş (vergleiche [**50**], Chapter IX, Lemma 1.1) gezeigt wurde, möglich. Der Vollständigkeit halber geben wir auch einen Beweis des Lemmas an.

Lemma 2.27.
Ist K ein Hilbertraum und sind

$$H_1, H_2, R_1, R_2 \subset K$$

abgeschlossene Teilräume mit

$$K = H_1 \oplus H_2 = R_1 \oplus R_2,$$

so ist $P_{R_1}|_{H_1} : H_1 \to R_1$ genau dann invertierbar, wenn $P_{R_2}|_{H_2} : H_2 \to R_2$ invertierbar ist.
Sind $P_{R_1}|_{H_1}$ und $P_{R_2}|_{H_2}$ invertierbar, so gilt

$$\left\|(P_{R_1}|_{H_1})^{-1}\right\| = \left\|(P_{R_2}|_{H_2})^{-1}\right\| ,$$

falls $H_1, H_2, R_1, R_2 \neq K$ ist.

Beweis.
Aufgrund der Symmetrie des Problems genügt es, eine Implikation und eine Abschätzung in der behaupteten Gleichung zu zeigen.
Wir setzen voraus, dass $P_{R_1}|_{H_1} \in \mathcal{L}(H_1, R_1)$ invertierbar ist. Nach Bemerkung 2.26 ist dann auch der dazu adjungierte Operator $P_{H_1}|_{R_1} \in \mathcal{L}(R_1, H_1)$ invertierbar.

Wir wollen zunächst zeigen, dass $P_{R_2}|_{H_2} : H_2 \to R_2$ surjektiv ist.
Sei dazu $r_2 \in R_2$. Dann ist $P_{H_1} r_2 \in H_1$ und wegen der Surjektivität von $P_{H_1}|_{R_1}$ existiert ein $r_1 \in R_1$ mit

$$P_{H_1} r_1 = P_{H_1} r_2.$$

Wegen $P_{H_1}(r_2 - r_1) = 0$ ist $h_2 = r_2 - r_1 \in H_2$ und es gilt

$$P_{R_2} h_2 = P_{R_2} r_2 - P_{R_2} r_1 = r_2.$$

Dies zeigt die Surjektivität von $P_{R_2}|_{H_2}$.
Nach 2.26 gilt weiterhin

$$\left\| (P_{H_1}|_{R_1})^{-1} \right\| = \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\|.$$

Für alle $r_1 \in R_1$ folgt

$$\|r_1\| = \left\| (P_{H_1}|_{R_1})^{-1} P_{H_1} r_1 \right\| \leq \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\| \cdot \|P_{H_1} r_1\|$$

und damit

$$\|P_{H_2} r_1\|^2 = \|r_1\|^2 - \|P_{H_1} r_1\|^2 \leq \left(1 - \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\|^{-2}\right) \cdot \|r_1\|^2 .$$

(Wir nehmen dabei ohne Einschränkung an, dass $H_1, H_2, R_1, R_2 \neq K$ gilt. Damit ist $\left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\| \neq 0$.)
Wir folgern nun mit 2.26, dass

$$\|P_{R_1}|_{H_2}\|^2 = \|P_{H_2}|_{R_1}\|^2 \leq 1 - \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\|^{-2} .$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \|P_{R_2} h_2\|^2 &= \|h_2\|^2 - \|P_{R_1} h_2\|^2 \\ &\geq \|h_2\|^2 - \left(1 - \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\|^{-2}\right) \cdot \|h_2\|^2 \\ &= \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\|^{-2} \cdot \|h_2\|^2 \end{aligned}$$

für alle $h_2 \in H_2$.
Also ist $P_{R_2}|_{H_2}$ auch injektiv und damit invertierbar. Zusätzlich folgt

$$\left\| (P_{R_2}|_{H_2})^{-1} \right\| \leq \left\| (P_{R_1}|_{H_1})^{-1} \right\|,$$

was zu zeigen war. □

Wendet man dieses Lemma 2.27 auf die Zerlegungen

$$\mathcal{K} = \mathcal{R} \oplus M_F(\mathcal{L}_*) = \mathcal{H} \oplus M_F(\mathcal{L})$$

aus 2.23 an, so erhält man aus 2.25 das folgende Korollar.

Korollar 2.28.
Die n-Kontraktion T ist genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel, wenn der Operator

$$Q = P_{M_F(\mathcal{L}_*)}|_{M_F(\mathcal{L})} \in \mathcal{L}\left(M_F(\mathcal{L}), M_F(\mathcal{L}_*)\right)$$

invertierbar ist.

Wir wollen nun zeigen, dass der Operator Q aus 2.28 stets unitär äquivalent zur charakteristischen Funktion M_{θ_T} von T ist. Dazu betrachten wir zunächst die unitären Operatoren $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{D}_T$ und $\phi_* : \mathcal{L}_* \to \mathcal{D}_{T^*}$ wie in 2.23 (c). Das folgende Lemma bringt diese in einen Zusammenhang mit der charakteristischen Funktion von T.

Lemma 2.29.
Sei $\theta_T = (\theta_{T,a})_{a\in F} \in \mathcal{M}(\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_{T^*})$ der Multiplikator zur chararakteristischen Funktion von T. Für $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ gilt

$$(\phi_*)^* \,\theta_{T,0}\phi \left(\sum_{i=1}^n (V_i - T_i)h_i\right) = -\left(I - \sum_{j=1}^n V_j T_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^n T_i h_i\right)$$

und

$$(\phi_*)^* \,\theta_{T,(a,k)}\phi \left(\sum_{i=1}^n (V_i - T_i)h_i\right) = \left(I - \sum_{j=1}^n V_j T_j^*\right) T_{a'}^* \left(h_k - \sum_{i=1}^n T_k^* T_i h_i\right)$$

für alle $a \in F$ und $k = 1, \ldots, n$.

Beweis.
Seien $h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H}$ gegeben. Wegen $\theta_{T,0} = -T|_{\mathcal{D}_T}$ und $TD_T = D_{T^*}T$ gilt nach 2.23 (c)

$$\begin{aligned}
(\phi_*)^* \,\theta_{T,0}\phi \left(\sum_{i=1}^n (V_i - T_i)h_i\right) &= -\,(\phi_*)^*\, TD_T (h_i)_{i=1}^n \\
&= -\,(\phi_*)^*\, D_{T^*}T(h_i)_{i=1}^n \\
&= -\left(I - \sum_{j=1}^n V_j T_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^n T_i h_i\right).
\end{aligned}$$

Seien außerdem $a \in F$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$.
Dann ist $\theta_{T,(a,k)} = D_{T^*} T_{a'}^* P_k^{\mathcal{H}} D_T|_{\mathcal{D}_T}$ (siehe 2.4 (b)) und es folgt

$$\begin{aligned} & (\phi_*)^* \, \theta_{T,(a,k)} \phi \left(\sum_{i=1}^{n} (V_i - T_i) h_i \right) \\ = \; & (\phi_*)^* \, D_{T^*} T_{a'}^* P_k^{\mathcal{H}} D_T^2 (h_i)_{i=1}^n \\ = \; & \left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^* \right) T_{a'}^* \left(h_k - \sum_{i=1}^{n} T_k^* T_i h_i \right), \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Wir erweitern nun ϕ und ϕ_* auf einfache Weise zu wohldefinierten unitären Operatoren

$$\Phi : M_F(\mathcal{L}) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_T) \text{ und } \Phi_* : M_F(\mathcal{L}_*) \to \mathcal{F}^2(\mathcal{D}_{T^*})$$

durch

$$\Phi \left(\sum_{a \in F} V_a x_a \right) = (\phi \; x_{a'})_{a \in F} \quad ((x_a)_a \in \mathcal{F}^2(\mathcal{L}))$$

und

$$\Phi_* \left(\sum_{a \in F} V_a y_a \right) = (\phi_* \; y_{a'})_{a \in F} \quad ((y_a)_a \in \mathcal{F}^2(\mathcal{L}_*)).$$

Damit gilt der folgende Satz.

Satz 2.30.
Es gilt

$$(\Phi_*)^* \, M_{\theta_T} \Phi = Q.$$

Insbesondere sind M_{θ_T} und Q unitär äquivalent.

Beweis.
Die Elemente der Form

$$V_b \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \quad (b \in F, \; h_1, \ldots, h_n \in \mathcal{H})$$

bilden eine totale Teilmenge von $M_F(\mathcal{L})$. Es genügt also, die behauptete Gleichung auf diesen Elementen nachzurechnen.

Seien also $b \in F$ und $h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}$ gegeben. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_*)^* M_{\theta_T} \Phi V_b \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \\
&= (\Phi_*)^* M_{\theta_T} \; e_{b'} \otimes \phi \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \\
&= (\Phi_*)^* \sum_{a \in F} e_{(a,b')} \otimes \theta_{T,a} \phi \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \\
&= \sum_{a \in F} V_{(b,a')} (\phi_*)^* \theta_{T,a} \phi \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \\
&= V_b (\phi_*)^* \theta_{T,0} \phi \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \sum_{a \in F} V_{(b,k,a)} (\phi_*)^* \theta_{T,(a',k)} \phi \left(\sum_{j=1}^{n} (V_j - T_j) h_j \right) \\
&= -V_b \left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^* \right) \left(\sum_{i=1}^{n} T_i h_i \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \sum_{a \in F} V_{(b,k,a)} \left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^* \right) T_a^* \left(h_k - \sum_{i=1}^{n} T_k^* T_i h_i \right) \\
&= V_b \left[- \left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^* \right) \left(\sum_{i=1}^{n} T_i h_i \right) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{k=1}^{n} \sum_{a \in F} V_{(k,a)} \left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^* \right) T_a^* \left(h_k - \sum_{i=1}^{n} T_k^* T_i h_i \right) \right]
\end{aligned}
$$

nach 2.29. Weiter gilt für alle $h \in \mathcal{H}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{a \in F} V_a \left(I - \sum_{j=1}^{n} V_j T_j^* \right) T_a^* h &= \sum_{a \in F} \left(V_a T_a^* h - \sum_{j=1}^{n} V_{(a,j)} T_{(a,j)}^* h \right) \\
&= h - \lim_{m \to \infty} \sum_{|a|=m+1} V_a T_a^* h \\
&= (I - P_{\mathcal{R}}) h
\end{aligned}
$$

nach 2.24 (a). Weil $P_{\mathfrak{R}}$ mit den V_k $(k = 1, \dots, n)$ vertauscht, folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{a\in F} V_{(k,a)}\left(I-\sum_{j=1}^{n} V_j T_j^*\right) T_a^*\left(h_k-\sum_{i=1}^{n} T_k^* T_i h_i\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} V_k\left(\sum_{a\in F} V_a\left(I-\sum_{j=1}^{n} V_j T_j^*\right) T_a^*\left(h_k-\sum_{i=1}^{n} T_k^* T_i h_i\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} V_k\left(I-P_{\mathfrak{R}}\right)\left(h_k-\sum_{i=1}^{n} T_k^* T_i h_i\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} V_k h_k-\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} V_k T_k^* T_i h_i\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n} P_{\mathfrak{R}} V_k h_k+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} V_k P_{\mathfrak{R}} T_k^*\right) T_i h_i\\
&= \left(I-\sum_{j=1}^{n} V_j T_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n} T_i h_i\right)+\sum_{k=1}^{n}(V_k-T_k) h_k\\
&\quad -\sum_{k=1}^{n} P_{\mathfrak{R}} V_k h_k+\sum_{i=1}^{n} P_{\mathfrak{R}} T_i h_i \quad \text{(nach 2.24 (b) mit } k=1)\\
&= \left(I-\sum_{j=1}^{n} V_j T_j^*\right)\left(\sum_{i=1}^{n} T_i h_i\right)+\left(I-P_{\mathfrak{R}}\right)\sum_{k=1}^{n}(V_k-T_k) h_k .
\end{aligned}$$

Wir setzen dies oben ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\left(\Phi_*\right)^* M_{\theta_T}\Phi V_b\left(\sum_{j=1}^{n}(V_j-T_j) h_j\right) &= V_b\left[\left(I-P_{\mathfrak{R}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(V_k-T_k) h_k\right)\right]\\
&= Q V_b\left(\sum_{k=1}^{n}(V_k-T_k) h_k\right),
\end{aligned}$$

denn $P_{\mathfrak{R}}$ vertauscht mit V_b und es ist $Q = P_{M_F(\mathfrak{L}_*)}|_{M_F(\mathfrak{L})} = (I - P_{\mathfrak{R}})\,|_{M_F(\mathfrak{L})}$. Also gilt

$$\left(\Phi_*\right)^* M_{\theta_T}\Phi = Q,$$

was zu zeigen war. □

Wir kommen abschließend zum Hauptresultat dieses Abschnitts. Es besagt, dass eine n-Kontraktion genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel ist, wenn ihre charakteristische Funktion invertierbar ist. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus 2.28 und 2.30.

Satz 2.31.
Die n-Kontraktion T ist genau dann ähnlich zu einem sphärisch unitären Tupel, wenn M_{θ_T} invertierbar ist.

Betrachtet man in Satz 2.31 den Fall $n = 1$, so erhält man das entsprechende Resultat von B. Sz.-Nagy (vergleiche [**51**], Chapter 4) für eine einzelne Kontraktion $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dort wird gezeigt, dass T genau dann ähnlich zu einem unitären Operator ist, wenn der zu der charakteristischen Funktion von T gehörende Multiplikationsoperator $H^2(D_T) \to H^2(D_{T^*})$ zwischen den entsprechenden Hardyräumen invertierbar ist. Damit ist 2.31 eine vollständige Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf den Fall nichtvertauschender n-Kontraktionen.

Teil 2

Semi-Fredholmtupel

KAPITEL 3

Samuelvielfachheit

Einleitung

Für einen stetig linearen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ auf einem Banachraum X mit

$$\dim (X/TX) < \infty$$

gibt es ein Polynom $p = p(T) \in \mathbb{Z}[X]$ vom Grad $\deg p \leq 1$ und eine natürliche Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\dim \left(X/T^k X \right) = p(k) \quad (k \geq k_0)$$

gilt. Man nennt p das Hilbert-Samuel-Polynom des Operators T.
Schreibt man p in der Form

$$p = cX + d \quad (c, d \in \mathbb{Z} \text{ geeignet}),$$

so nennt man $c = c(T)$ die Samuelvielfachheit von T. Offenbar ist $c(T) \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$c(T) = \lim_{k \to \infty} \frac{\dim \left(X/T^k X \right)}{k}.$$

Die rechte wesentliche Resolventenmenge von T

$$\rho_r^{\text{ess}}(T) = \{z \in \mathbb{C};\ \dim (X/(z-T)X) < \infty\}$$

ist eine offene Nullumgebung. Man kann zeigen, dass eine geeignete Nullumgebung $U \subset \rho_r^{\text{ess}}(T)$ existiert, so dass

$$\dim (X/(z-T)X) = c(T) \leq \dim (X/TX)$$

für alle Punkte $z \in U \setminus \{0\}$ gilt.
Man verallgemeinert diese wohlbekannten Resultate, indem man den Operator T durch ein Tupel von Operatoren auf X ersetzt.
Für ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ mit

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty$$

betrachtet man die rekursiv definierten Teilräume

$$M_k = M_k(T) \subset X \quad (k \in \mathbb{N})$$

mit $M_0 = X$ und

$$M_{k+1} = T_1 M_k + \ldots + T_n M_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Diese sind abgeschlossen und von endlicher Kodimension in X. Es ist

$$M_{k+1} \subset M_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

In [**13**] betrachten R. Douglas und K. Yan zu einem solchen Tupel T das Hilbert-Samuel-Polynom $p = p(T) \in \mathbb{Q}[X]$. Dieses erfüllt

$$p(k) = \dim(X/M_k) \quad (k \geq k_0)$$

für ein geeignetes $k_0 \in \mathbb{N}$. Es ist $\deg p \leq n$ und man kann p in der Form

$$p(x) = c\binom{x}{n} + c_1\binom{x}{n-1} + \ldots + c_n\binom{x}{0} \quad (x \in \mathbb{Q})$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $c, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$ schreiben. Wir nennen den bei $\binom{x}{n}$ auftretenden Koeffizienten $c = c(T) \in \mathbb{N}$ die Samuelvielfachheit des Tupels T. Es gilt

$$c(T) = n! \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{\dim(X/M_k)}{k^n}.$$

R. Douglas und K. Yan definieren in [**13**] noch eine weitere Version für das Hilbert-Samuel-Polynom und die Samuelvielfachheit des Tupels T. Die rechte wesentliche Resolventenmenge von T

$$D = \rho_r^{\mathrm{ess}}(T) = \left\{ (z_j)_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n;\ \dim \left(X / \sum_{j=1}^n (z_j - T_j)X \right) < \infty \right\}$$

ist eine offene Nullumgebung und die Quotientengarbe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(T) = \mathcal{O}_D^X / \sum_{j=1}^n (z_j - T_j)\mathcal{O}_D^X$$

ist eine kohärente analytische Garbe über D. Demzufolge ist der Halm $\mathcal{H}_0$ dieser Garbe in 0 ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen lokalen Ring $\mathcal{O}_0$. Aus der kommutativen Algebra ist bekannt, dass dazu ein Polynom $p_{\mathrm{an}} = p_{\mathrm{an}}(T) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $\deg p_{\mathrm{an}} \leq n$ existiert, so dass

$$p_{\mathrm{an}}(k) = \dim \left(\mathcal{H}_0 / \mathfrak{m}(\mathcal{O}_0)^k \mathcal{H}_0 \right) \quad (k \geq k_0)$$

für ein geeignetes $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei ist $\mathfrak{m}(\mathcal{O}_0) \subset \mathcal{O}_0$ das maximale Ideal. Entsprechend betrachtet man

$$c_{\mathrm{an}} = c_{\mathrm{an}}(T) = n! \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{\dim \left(\mathcal{H}_0 / \mathfrak{m}(\mathcal{O}_0)^k \mathcal{H}_0 \right)}{k^n} \in \mathbb{N}$$

und bezeichnet $c_{\mathrm{an}}(T)$ als die analytische Samuelvielfachheit von T. Die Ungleichung $c_{\mathrm{an}}(T) \leq c(T)$ wurde bereits in [**13**] gezeigt. In der Tat stimmen beide Versionen der Samuelvielfachheit überein, es gilt also

$$c_{\mathrm{an}}(T) = c(T).$$

Dieses Ergebnis haben X. Fang in [**22**] und J. Eschmeier in [**17**] unabhängig voneinander und mit verschiedenen Methoden bewiesen.
Wir betrachten in diesem Kapitel zunächst beliebige (nicht notwendig vertauschende) Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ auf einem Banachraum X mit

$$0 < \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty$$

und die dazugehörigen Teilräume $M_k = M_k(T) \subset X \ (k \in \mathbb{N})$. Ein zentrales Ziel ist die Beschreibung des Wachstums von

$$\dim (X/M_k) \ \text{ für } k \to \infty.$$

Zunächst zeigen wir mit algebraischen Methoden eine Abschätzung nach oben gegen n^k für dieses Wachstum. Das Beispiel des n-Shifts $S \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ auf dem Fockraum $\mathcal{F}^2$ zeigt, dass diese Abschätzung im Allgemeinen nicht verbessert werden kann. Wir definieren dementsprechend für $n \geq 2$ eine nichtkommutative Version für die Samuelvielfachheit von T und betrachten dazu einige Beispiele.
Anschließend betrachten wir die zu T assoziierte Garbe $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$ und definieren das Hilbert-Samuel-Polynom von T als das eindeutige Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit

$$p(k) = \dim \left(\mathcal{H}_0 / \mathfrak{m} \left(\mathcal{O}_0 \right)^k \mathcal{H}_0 \right)$$

für genügend große $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass die Ungleichung

$$\dim (X/M_k) \geq p(k) \quad (k \geq k_0)$$

stets erfüllt ist, indem wir $\mathbb{C}$-lineare Surjektionen

$$\phi_k : X/M_k \to \mathcal{H}_0 / \mathfrak{m} \left(\mathcal{O}_0 \right)^k \mathcal{H}_0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

konstruieren. Falls T als vertauschend vorausgesetzt wird, sind diese Abbildungen auch injektiv und wir erhalten Gleichheit in obiger Abschätzung.
Schließlich untersuchen wir den Grad $d \in \{0, \ldots, n\}$ und den Leitkoeffizienten $c_0 \in \mathbb{N}^*$ des Hilbert-Samuel-Polynoms von T. Wir zeigen dabei zunächst, dass d der Dimension der analytischen Menge

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}^n ; \ 0 < \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X \right) < \infty \right\}$$

im Nullpunkt entspricht. Der Leitkoeffizient ist damit gegeben durch

$$c_0 = d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_0\right)^k \mathcal{H}_0\right)}{k^d} \in \mathbb{N}^*.$$

Wir nehmen dann zusätzlich an, dass 0 ein glatter Punkt der Menge A ist und betrachten die in A stabilisierte Bild-Kodimension von T

$$c_A(T) = \min_{z\in A\cap V} \dim\left(X/\sum_{j=1}^{n}(z_j - T_j)X\right) \in \mathbb{N}^*,$$

wobei eine Nullumgebung $V \subset \mathbb{C}^n$ so gewählt wird, dass $A \cap V$ eine zusammenhängende komplexe (d-dimensionale) Mannigfaltigkeit ist. In diesem Fall stellt sich heraus, dass das angegebene Minimum in allen Punkten außerhalb einer nirgends dichten analytischen Teilmenge von $A \cap V$ angenommen wird und dass

$$c_0 \geq c_A(T)$$

gilt. Dies verallgemeinert Teile eines Resultats von J. Eschmeier für $d = n$ (siehe [**17**]). Dort wird zusätzlich gezeigt, dass in diesem Fall sogar

$$c_0 = c_A(T)$$

gilt. Wir geben abschließend einige Beispiele an, die unter anderem zeigen, dass diese Gleichheit im Fall $d < n$ im allgemeinen nicht erfüllt ist.

Der nichtvertauschende Fall

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gegeben.
Wie im ersten Teil schreiben wir F für die freie Halbgruppe über n Erzeugern. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$F_k = \{a \in F;\ |a| = k\}.$$

Sei weiterhin X ein Banachraum und $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ ein Tupel von stetig linearen Operatoren auf X mit

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty.$$

Wir betrachten im Folgenden die Teilräume $M_k = M_k(T) \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$, die rekursiv durch

$$M_0 = X \text{ und } M_{k+1} = T_1 M_k + \ldots + T_n M_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

definiert werden.

Bemerkung 3.1.
Induktiv folgt, dass $M_{k+1} \subset M_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Ebenso folgt unmittelbar

$$M_k = \sum_{a \in F_k} T_a X \quad (k \in \mathbb{N})$$

und allgemeiner

$$M_{k+l} = \sum_{a \in F_k} T_a M_l \quad (k, l \in \mathbb{N}).$$

Nach Voraussetzung ist $\dim (X/M_1) < \infty$. Das folgende Lemma zeigt, dass alle M_k $(k \in \mathbb{N})$ von endlicher Kodimension sind.

Lemma 3.2.
(a) Für $k, l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k$ gilt

$$\dim (M_{k+1}/M_{l+1}) \leq n \cdot \dim (M_k/M_l) .$$

(b) Es gilt

$$\dim (X/M_k) \leq \frac{n^k - 1}{n - 1} \cdot \dim (X/M_1) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Insbesondere sind die Teilräume M_k $(k \in \mathbb{N})$ endlich kodimensional.

Beweis.
(a) Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq k$. Man zeigt leicht, dass die Abbildung

$$(M_k/M_l)^n \to (M_{k+1}/M_{l+1}), \ (x_i + M_l)_{i=1}^n \mapsto \left(\sum_{i=1}^n T_i x_i \right) + M_{l+1}$$

wohldefiniert, linear und surjektiv ist. Daraus folgt (a) unmittelbar.
(b) Aus (a) folgt induktiv

$$\dim (M_j/M_{j+1}) \leq n^j \cdot \dim (X/M_1) < \infty \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Wegen

$$X/M_k = M_0/M_k \cong (M_0/M_1) \oplus (M_1/M_2) \oplus \ldots \oplus (M_{k-1}/M_k)$$

folgt mit $n \geq 2$, dass

$$\begin{aligned} \dim (X/M_k) &= \sum_{j=0}^{k-1} \dim (M_j/M_{j+1}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} n^j \cdot \dim (X/M_1) \\ &= \frac{n^k - 1}{n - 1} \cdot \dim (X/M_1) \quad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3.
Wir haben soeben gezeigt, dass die Teilräume $M_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ endlich kodimensional sind. Für $k \in \mathbb{N}$ ist M_k außerdem gerade das Bild des stetig linearen Operators

$$\bigoplus_{a \in F_k} X \to X, \ (x_a)_{a \in F_k} \mapsto \sum_{a \in F_k} T_a x_a.$$

Folglich ist $M_k \subset X$ abgeschlossen $(k \in \mathbb{N})$.

Beispiel 3.4.
Sei $\mathcal{F}^2$ der Fockraum und

$$S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}\left(\mathcal{F}^2\right)^n$$

der Linksvorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$M_k(S) = \{(x_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}^2; \ x_a = 0 \text{ für alle } a \in F \text{ mit } |a| < k\}.$$

Folglich gilt

$$\dim\left(\mathcal{F}^2 / M_k(S)\right) = \#\{a \in F; \ |a| < k\} = \frac{n^k - 1}{n - 1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Die Abschätzung in 3.2 (b) ist in diesem Fall also eine Gleichheit. Man sieht damit auch, dass die Kodimensionen der M_k für nichtvertauschende Tupel exponentiell wachsen können, wenn $k \to \infty$ geht. Im Vergleich dazu, kann für vertauschende Tupel höchstens polynomielles Wachstum vom Grad n vorliegen (siehe Einleitungsabschnitt).

Wir wollen nun eine nichtkommutative Variante für die Samuelvielfachheit des Tupels T definieren. Diese gibt an, wie sich das Wachstum von $\dim(X/M_k)$ für $k \to \infty$ im Vergleich zum maximalen Wachstum $\frac{n^k-1}{n-1}$ verhält. Dazu zeigen wir das folgende Lemma.

Lemma 3.5.
Der Grenzwert

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\dim(X/M_k)}{n^k}$$

existiert, und es gilt

$$0 \leq (n-1) \cdot \lim_{k \to \infty} \frac{\dim(X/M_k)}{n^k} \leq \dim(X/M_1).$$

Beweis.
Aus der Zerlegung

$$X/M_{k+1} \cong (X/M_1) \oplus (M_1/M_{k+1})$$

und der nach 3.2 (a) geltenden Ungleichung

$$\dim(M_1/M_{k+1}) \leq n \cdot \dim(X/M_k)$$

folgern wir

$$\dim(X/M_{k+1}) \quad \leq \quad \dim(X/M_1) + n \cdot \dim(X/M_k) \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Setzen wir

$$a_k = \frac{\dim(X/M_k)}{n^k} \quad \text{und} \quad s_k = \frac{\dim(X/M_1)}{n^{k+1}} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

so folgt

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k + s_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $\sum_{k=0}^{\infty} s_k < \infty$. Damit folgt aus Lemma 2.1 in [**32**] die Konvergenz der Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus 3.2 (b). □

Definition 3.6.
Die Zahl

$$e(T) = (n-1) \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim(X/M_k)}{n^k} \in [0, \dim(X/M_1)]$$

heißt (nichtkommutative) Samuelvielfachheit von T.

Wir stellen zunächst fest, dass die soeben definierte Samuelvielfachheit nur dann von 0 verschieden sein kann, wenn das Tupel T keiner nichttrivialen polynomiellen Relation genügt. Dazu betrachten wir die Algebra

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{|a|\leq k} p_a e_a;\ k \in \mathbb{N},\ p_a \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathcal{F}^2$$

der Polynome in n nichtvertauschenden Variablen mit der durch

$$\left(\sum_{|a|\leq k} p_a e_a \right) \bullet \left(\sum_{|b|\leq l} q_b e_b \right) = \sum_{|c|\leq k+l} \left(\sum_{(a,b)=c} p_a \cdot q_b \right) e_c$$

gegebenen Multiplikation. Für ein solches Polynom $p = \sum_{|a|\leq k} p_a e_a \in \mathcal{P}$ sei

$$p(T) = \sum_{|a|\leq k} p_a T_a \in \mathcal{L}(X).$$

Dies liefert uns einen Algebrenhomomorphismus

$$\mathcal{P} \to \mathcal{L}(X),\ p \mapsto p(T).$$

Es gilt der folgende Satz.

Satz 3.7.
Falls ein $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ *mit* $p(T) = 0$ *existiert, so ist* $e(T) = 0$.

Beweis.
Sei $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ mit $p(T) = 0$ gegeben. Wir können p ohne Einschränkung in der Form

$$p = e_b - \sum_{a \in F'} p_a e_a$$

schreiben, wobei ein Element $b \in F \setminus \{0\}$, eine endliche Teilmenge

$$F' \subset \{a \in F;\ a \neq b,\ |a| \geq |b|\}$$

und Koeffizienten $p_a \in \mathbb{C}$ $(a \in F')$ geeignet gewählt wurden.
Wegen $p(T) = 0$ folgt dann

$$T_b = \sum_{a \in F'} p_a T_a.$$

Mit $m = |b| \in \mathbb{N}^*$ gilt daher für alle $k \in \mathbb{N}$

$$T_b M_k \subset \sum_{a \in F'} (T_a M_k) \subset \sum_{a \in F_m \setminus \{b\}} (T_a M_k) + M_{k+m+1}$$

und damit

$$M_{k+m} = \sum_{a \in F_m} (T_a M_k) \subset \sum_{a \in F_m \setminus \{b\}} (T_a M_k) + M_{k+m+1} \subset M_{k+m}.$$

Folglich ist für $k \in \mathbb{N}$ die wohldefinierte lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus\limits_{a \in F_m \setminus \{b\}} (M_k / M_{k+1}) & \rightarrow & (M_{k+m}/M_{k+m+1}), \\ (x_a + M_{k+1})_{a \in F_m \setminus \{b\}} & \mapsto & \left(\sum\limits_{a \in F_m \setminus \{b\}} T_a x_a \right) + M_{k+m+1} \end{array}$$

surjektiv. Da $F_m \setminus \{b\}$ genau $n^m - 1$ Elemente hat, folgt

$$\dim (M_{k+m}/M_{k+m+1}) \leq (n^m - 1) \cdot \dim (M_k / M_{k+1}) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Induktiv erhält man daraus mit $d = \dim (X/M_1)$ die Abschätzung

$$\begin{array}{rcl} \dim (M_{jm+k}/M_{jm+k+1}) & \leq & (n^m - 1)^j \cdot \dim (M_k/M_{k+1}) \\ & \leq & (n^m - 1)^j \cdot n^k \cdot d \end{array}$$

für alle $j, k \in \mathbb{N}$. Aus der Zerlegung

$$M_{jm}/M_{(j+1)m} \cong \bigoplus_{k=0}^{m-1} (M_{jm+k}/M_{jm+k+1})$$

folgt nun

$$\begin{aligned}\dim\big(M_{jm}/M_{(j+1)m}\big) &\leq (n^m-1)^j\cdot\sum_{k=0}^{m-1} n^k\cdot d\\ &= (n^m-1)^j\cdot\frac{n^m-1}{n-1}\cdot d \quad (j\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

Entsprechend haben wir die Zerlegung

$$X/M_{km}\cong\bigoplus_{j=0}^{k-1}\big(M_{jm}/M_{(j+1)m}\big)$$

und folgern daraus

$$\begin{aligned}\dim\left(X/M_{km}\right) &\leq \sum_{j=0}^{k-1}(n^m-1)^j\cdot\frac{n^m-1}{n-1}\cdot d\\ &= \frac{(n^m-1)^k-1}{n^m-2}\cdot\frac{n^m-1}{n-1}\cdot d \quad (k\in\mathbb{N}).\end{aligned}$$

Schließlich folgt für alle $k\in\mathbb{N}$

$$\frac{\dim\left(X/M_{km}\right)}{n^{km}}\leq\frac{(n^m-1)^k-1}{n^{km}}\cdot\frac{n^m-1}{(n^m-2)(n-1)}\cdot d$$

und die rechte Seite konvergiert mit $k\to\infty$ gegen 0. Also ist

$$e(T)=(n-1)\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\dim\left(X/M_{km}\right)}{n^{km}}=0,$$

was zu zeigen war. □

Zum Ende dieses Abschnitts betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 3.8.

(a) Gilt $T_iT_j=T_jT_i$ für zwei Indizes $i\neq j$, so ist $e(T)=0$. Dies folgt sofort aus 3.7. Insbesondere ist $e(T)=0$, wenn T ein vertauschendes Tupel ist.

(b) Sei $\mathcal{F}^2$ der Fockraum und $S\in\mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ der Linksvorwärtsshift. In 3.4 haben wir gesehen, dass

$$\dim\big(\mathcal{F}^2/M_k(S)\big)=\frac{n^k-1}{n-1}\quad (k\in\mathbb{N})$$

gilt. Es folgt

$$e(S)=(n-1)\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{\dim\big(\mathcal{F}^2/M_k(S)\big)}{n^k}=1.$$

Genauso zeigt man für einen endlichdimensionalen Hilbertraum $\mathcal{E}$ und $S^{\mathcal{E}}=S\otimes I_{\mathcal{E}}$, dass

$$e(S^{\mathcal{E}})=\dim\mathcal{E}$$

gilt.

(c) Sei S wie zuvor und $S^* = (S_1^*, \dots, S_n^*) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$. Es ist $S_i^*\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}^2$ für alle $i = 1, \dots, n$ und somit ist $M_1(S^*) = \mathcal{F}^2$. Folglich ist

$$e(S^*) = 0.$$

Man beachte, dass andererseits $p(S^*) \neq 0$ für alle $p \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ gilt. Dieses Beispiel zeigt also, dass in 3.7 nicht die Umkehrung gilt.

(d) Sei $n = 2$ und $S = (S_1, S_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^2$ der Shift. Wir betrachten das Tupel $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^2$ mit

$$T_1 = S_1 \text{ und } T_2 = S_2(I - P_0),$$

wobei $P_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ die Orthogonalprojektion auf $\langle e_0 \rangle$ sei.
Für $M_k = M_k(T)$ ergibt sich dann

$$M_k = \mathcal{F}^2 \ominus \big(\langle e_a,\ |a| < k\rangle \oplus \langle e_{(b,2)},\ |b| = k-1\rangle\big)$$

und damit

$$\dim(X/M_k) = 2^k - 1 + 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1} - 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Es folgt $e(T) = \frac{3}{2}$. Die nichtkommutative Samuelvielfachheit ist also nicht in allen Fällen ganzzahlig.

Die zu T assoziierte Garbe

Sei $n \in \mathbb{N}^*$ eine natürliche Zahl. In diesem Abschnitt wollen wir einem Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ von stetig linearen Operatoren auf einem Banachraum X mit

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^n T_j X\right) < \infty$$

eine kohärente analytische Garbe $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$ zuordnen. Diese wird definiert als eine geeignete Quotientengarbe der Garbe der holomorphen X-wertigen Funktionen über einer offenen Nullumgebung im $\mathbb{C}^n$. Wir stellen anschließend fest, dass der Träger der Garbe $\mathcal{H}$ in natürlicher Weise durch das Tupel T gegeben ist.
Wir wollen im Folgenden Ergebnisse aus der Theorie kohärenter Garben benutzen und führen zunächst einige grundlegende Bezeichnungen ein.
Für eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{C}^n$ und einen Banachraum X bezeichne

$$\mathcal{O}_D^X = \bigcup_{w \in D} \mathcal{O}_w^X$$

die Garbe der holomorphen X-wertigen Funktionen über D. Hierbei sei

$$\mathcal{O}_w^X = \left\{(f, D_f)_w;\ D_f \subset \mathbb{C}^n \text{ offene } w-\text{Umgebung und } f \in \mathcal{O}(D_f, X)\right\}$$

der Halm dieser Garbe in einem Punkt $w \in D$. Für eine holomorphe Funktion $f : D_f \to X$ auf einer w-Umgebung $D_f \subset \mathbb{C}^n$ schreiben wir dabei $(f, D_f)_w$ für die Äquivalenzklasse von (f, D_f) bezüglich der Relation $\sim$, die gegeben ist durch

$$\begin{aligned} & (g, D_g) \sim (h, D_h) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{Es gibt eine } w - \text{Umgebung } U \subset D_g \cap D_h \text{ mit } g|_U = h|_U. \end{aligned}$$

Man bezeichnet hierbei $(f, D_f)_w$ als die Lokalisierung von f in w. Wir schreiben dafür abkürzend auch $f_w = (f, D_f)_w$.
Für $w \in D$ lässt sich der Halm $\mathcal{O}_w^X$ bekanntlich mit der Menge der in einer w-Umgebung konvergenten X-wertigen Potenzreihen identifizieren. Wir schreiben demnach auch

$$\mathcal{O}_w^X = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} x_\alpha (z - w)^\alpha \text{ konvergent in einer } w - \text{Umgebung; } x_\alpha \in X \right\}.$$

Weiterhin seien $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ und $\mathcal{O}_w = \mathcal{O}_w^{\mathbb{C}}$ für $w \in D$.
Es ist $\mathcal{O}_D$ eine Garbe von Ringen und $\mathcal{O}_D^X$ eine $\mathcal{O}_D$-Modulgarbe ($\mathcal{O}_D$-Garbe).
Sind X, Y Banachräume und $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen, so betrachten wir für eine holomorphe Funktion $\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$ und eine offene Teilmenge $U \subset \Omega$ die Abbildung $\alpha_U : \mathcal{O}(U, Y) \to \mathcal{O}(U, X)$, die durch

$$(\alpha_U f)(z) = \alpha(z) f(z) \quad (f \in \mathcal{O}(U, Y),\ z \in U)$$

gegeben ist. Wir schreiben in diesem Fall abkürzend auch $\alpha f = \alpha_U f$.

Bemerkung 3.9.

(a) Sind X, Y Banachräume, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$ eine holomorphe Funktion, so induziert α für jede offene Menge $D \subset \Omega$ einen $\mathcal{O}_D$-Garbenmorphismus ($\mathcal{O}_D$-Morphismus)

$$\alpha : \mathcal{O}_D^Y \to \mathcal{O}_D^X,\ f_w \mapsto (\alpha f)_w .$$

(b) Ist in (a) $Y = X$ und $\alpha(z) = h(z) \cdot I_X$ $(z \in \Omega)$ für eine skalarwertige holomorphe Funktion $h : \Omega \to \mathbb{C}$, so entspricht der gemäß (a) induzierte $\mathcal{O}_D$-Morphismus gerade der Multiplikation mit h, wir schreiben in diesem Fall auch

$$h \cdot f_w = \alpha f_w = (h \cdot f)_w \quad (w \in D,\ f_w \in \mathcal{O}_w^X).$$

(c) Ist $T \in \mathcal{L}(Y, X)$ ein stetig linearer Operator und $\alpha(z) = T$ $(z \in \Omega)$, so wirkt der $\mathcal{O}_D$-Morphismus, den wir in (a) erhalten, durch die 'Komposition' mit T. Wir schreiben dann auch

$$T f_w = \alpha f_w = (T \circ f)_w \quad (w \in D,\ f_w \in \mathcal{O}_w^Y).$$

Für eine holomorphe Funktion $\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$ wie in 3.9 (a) betrachten wir die Menge aller Punkte $z \in \Omega$, für die das Bild von $\alpha(z)$ endlich kodimensional ist. Der folgende Satz besagt, dass die Quotientengarbe modulo der Bildgarbe von α über dieser Menge stets kohärent ist. Im Fall von Hilberträumen geht dieses Resulat auf A.Markoe zurück (siehe [**40**]). Für Banachräume findet man einen Beweis in einer Arbeit von J.Eschmeier (vergleiche dazu [**17**], Korollar 1.2(b)).

Satz 3.10.
Seien X, Y Banachräume, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$ holomorph. Dann ist die Menge

$$D = \{z \in \Omega;\ \dim(X/\alpha(z)Y) < \infty\} \subset \Omega$$

offen und die Quotientengarbe $\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y$ ist kohärent.

Wir wollen nun in der Situation von 3.10 den Träger der Garbe $\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y$ berechnen. Dazu benötigen wir einen Spezialfall von Lemma 2.1.5 aus [**18**]. Wir geben dieses Lemma der Vollständigkeit halber an.

Lemma 3.11.
Seien X, Y, Z Banachräume und seien

$$\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X) \text{ und } \beta : \Omega \to \mathcal{L}(X, Z)$$

holomorphe Funktionen auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, so dass

$$\beta(z) \circ \alpha(z) = 0 \quad (z \in \Omega)$$

gilt. Sei weiterhin $w \in \Omega$ mit

$$\ker \beta(w) = \text{Bild } \alpha(w).$$

Dann gibt es eine reelle Zahl $r_0 > 0$, so dass

$$\ker \beta_P = \text{Bild } \alpha_P$$

für jeden offenen Polyzylinder $P = P(w, r)$ mit Zentrum w und Radius $r \in (0, r_0)$ gilt.

Betrachtet man in 3.11 den Fall $Z = 0$, so erhält man das folgende Korollar.

Korollar 3.12.
Seien X, Y Banachräume, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$ holomorph. Dann gibt es zu jedem Punkt $w \in \Omega$, für den $\alpha(w)$ surjektiv ist, eine reelle Zahl $r_0 > 0$, so dass α_P für jeden offenen Polyzylinder $P = P(w, r)$ mit Zentrum w und Radius $r \in (0, r_0)$ ebenfalls surjektiv ist.

Wir betrachten nun zu einer holomorphen Funktion $\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$ wie zuvor den Träger der Garbe $\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y$.

Definitionsgemäß gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\left(\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y\right) &= \left\{w \in D;\ \left(\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y\right)_w \neq \{0\}\right\} \\ &= \left\{w \in D;\ \alpha\mathcal{O}_w^Y \neq \mathcal{O}_w^X\right\}.\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass der Halm eines Quotienten von $\mathcal{O}_D$-Garben in einem Punkt $w \in D$ als $\mathcal{O}_w$-Modul isomorph zum entsprechenden Quotienten der Halme ist. Im Folgenden nehmen wir dabei eine Identifizierung vor und schreiben

$$\left(\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y\right)_w = \mathcal{O}_w^X/\alpha\mathcal{O}_w^Y \quad (w \in D).$$

Wir zeigen nun, dass der Träger der Quotientengarbe $\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y$ gerade aus den Punkten $w \in D$ besteht, für die der Operator $\alpha(w) \in \mathcal{L}(Y,X)$ nicht surjektiv ist.

Satz 3.13.
In der Situation von 3.10 gilt

$$\operatorname{supp}\left(\mathcal{O}_D^X/\alpha\mathcal{O}_D^Y\right) = \{w \in D;\ \alpha(w) \textit{ ist nicht surjektiv}\}.$$

Beweis.
Sei zunächst $w \in D$ gegeben, so dass $\alpha(w)$ surjektiv ist. Wir wählen dazu ein $r_0 > 0$ gemäß 3.12. Jedes Element aus $\mathcal{O}_w^X$ kann in der Form f_w mit einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(P,X)$ auf einem Polyzylinder $P = P(w,r)$ mit Zentrum w und Radius $r \in (0,r_0)$ geschrieben werden. Wegen der Surjektivität von α_P gibt es dann eine Funktion $g \in \mathcal{O}(P,Y)$ mit $\alpha g = f$. Liest man α als $\mathcal{O}_D$-Morphismus, so folgt

$$f_w = (\alpha g)_w = \alpha g_w.$$

Somit ist $\mathcal{O}_w^X = \alpha\mathcal{O}_w^Y$ und damit ist $w \notin \operatorname{supp}\mathcal{H}$.
Sei umgekehrt $w \in D$ mit $w \notin \operatorname{supp}\mathcal{H}$. Dann ist $\mathcal{O}_w^X = \alpha\mathcal{O}_w^Y$.
Sei $x \in X$. Wir betrachten die holomorphe Funktion mit dem konstanten Wert x auf D und ihre Lokalisierung $x_w \in \mathcal{O}_w^X$ im Punkt w. Wir wählen dazu eine holomorphe Funktion $g : D_g \to Y$ auf einer geeigneten w-Umgebung $D_g \subset D$ mit $x_w = (\alpha g)_w$.
Dann gilt $x = \alpha(z)g(z)$ für alle Punkte z in einer geeigeten w-Umgebung. Insbesondere ist

$$x = \alpha(w)g(w).$$

Da $x \in X$ beliebig war, ist $\alpha(w)$ also surjektiv, was zu zeigen war. □

Es seien nun ein Banachraum X und ein Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ gegeben, so dass

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty$$

gilt. Wir betrachten nun speziell die holomorphe Funktion

$$\alpha = \alpha_T : \mathbb{C}^n \to \mathcal{L}(X^n, X), \ \alpha(z) = (z_1 - T_1, \dots, z_n - T_n)\,.$$

Für $z \in \mathbb{C}^n$ ist dann

$$\alpha(z) X^n = \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X$$

und die Menge D aus 3.10 ist gerade die wesentliche rechte Resolventenmenge des Tupels T, also

$$D = D(T) = \rho_r^{\text{ess}}(T) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n ;\ \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X \right) < \infty \right\}.$$

Aus 3.10 folgt, dass $D \subset \mathbb{C}^n$ offen ist. Nach Voraussetzung ist $0 \in D$.
Wir schreiben außerdem

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(T) = \mathcal{O}_D^X / \alpha \mathcal{O}_D^{X^n}\,.$$

Nach 3.10 ist $\mathcal{H}$ eine kohärente analytische Garbe. Insbesondere ist jeder ihrer Halme

$$\mathcal{H}_w = \mathcal{O}_w^X \Big/ \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, \mathcal{O}_w^X$$

ein endlich erzeugter Modul über $\mathcal{O}_w$ $(w \in D)$.

Wir schreiben

$$A = A(T) = \operatorname{supp} \mathcal{H} \subset D$$

für den Träger von $\mathcal{H}$. Aus 3.13 erhalten wir unmittelbar die folgende einfache Beschreibung von A durch das Tupel T.

Korollar 3.14.
Es gilt

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}^n ;\ 0 < \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X \right) < \infty \right\}.$$

Definition 3.15.
Die $\mathcal{O}_D$-Garbe $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$ heißt die zu T assoziierte Garbe.

Wir werden im nächsten Abschnitt einen Zusammenhang zwischen dieser Garbe $\mathcal{H}$ und den zuvor betrachteten Faktorräumen $X/M_k(T)$ $(k \in \mathbb{N})$ aufzeigen.

Das Hilbert-Samuel-Polynom von T

Wie bisher seien X ein Banachraum, $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ mit

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty$$

und

$$M_k = M_k(T) = \sum_{a \in F_k} T_a X \subset X \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wir wollen in diesem Abschnitt eine Definition für das Hilbert-Samuel-Polynom des Tupels T angeben. Diese erweitert die Definition von R. Douglas und K. Yan für den vertauschenden Fall. Wir benutzen dazu die zuvor definierte zu T assoziierte Garbe $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$.
Von besonderem Interesse ist dabei der Halm $\mathcal{H}_0$ von $\mathcal{H}$ im Nullpunkt. Da $\mathcal{H}$ eine kohärente Garbe ist, ist $\mathcal{H}_0$ ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_0$-Modul.
Wir wollen zunächst einige nützliche Tatsachen für den Ring $\mathcal{O}_0$ und seine Moduln angeben. Wie wir bereits gesehen haben, kann man die Elemente von $\mathcal{O}_0$ als Potenzreihen

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha \quad (a_\alpha \in \mathbb{C}),$$

die in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^n$ konvergent sind, schreiben.
Es sei

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(\mathcal{O}_0) = \mathcal{O}_0 \setminus (\mathcal{O}_0)^\times \subset \mathcal{O}_0$$

die Menge der nicht invertierbaren Elemente im Ring $\mathcal{O}_0$. Dann gilt

$$\mathfrak{m} = \{f_0 \in \mathcal{O}_0;\ f(0) = 0\} = \sum_{j=1}^{n} z_j \mathcal{O}_0.$$

Man sieht, dass $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_0$ ein Ideal ist. Folglich ist $\mathcal{O}_0$ ein lokaler Ring und $\mathfrak{m}$ ist das eindeutig bestimmte maximale Ideal in $\mathcal{O}_0$.
Für die Potenzen von $\mathfrak{m}$ gilt offenbar

$$\mathfrak{m}^k = \sum_{|\alpha|=k} z^\alpha \mathcal{O}_0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Allgemeiner folgt damit auch für jeden $\mathcal{O}_0$-Modul M

$$\mathfrak{m}^k M = \sum_{|\alpha|=k} z^\alpha M \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Indem man jede Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit der Lokalisierung der konstanten Funktion mit dem Wert a in 0 identifiziert, kann man $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}_0$ als multiplikativ und additiv abgeschlossene Teilmenge auffassen. Daher ist jeder $\mathcal{O}_0$-Modul M auch ein komplexer Vektorraum. Aus Lemma 2.1 in [**34**], Chapter V folgt, dass die Länge eines solchen $\mathcal{O}_0$-Moduls mit seiner Dimension als $\mathbb{C}$-Vektorraum übereinstimmt. Es gilt also

$$\ell_{\mathcal{O}_0}(M) = \dim_{\mathbb{C}} M \quad (M \text{ ein } \mathcal{O}_0 - \text{Modul}).$$

Es ist weiterhin bekannt, dass $\mathcal{O}_0$ noethersch ist (siehe etwa [**23**], 2.2.1). Wir benutzen das folgende Resultat aus der kommutativen Algebra (vergleiche [**26**], Lemma 5.5.1).

Satz 3.16.
Ist R ein noetherscher lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathcal{J} \subset R$ und ist M ein endlich erzeugter R-Modul, so existiert ein (eindeutiges) Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ und eine natürliche Zahl $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$p(k) = \ell_R\left(M/\mathcal{J}^k M\right) \quad (k \geq k_0).$$

Ist $\mathcal{J} \subset R$ von N Elementen erzeugt, so ist dabei $\deg p \leq N$.

Bemerkung 3.17.
In der Situation von 3.16 sei $p \neq 0$ und $d = \deg p \in \{0, \ldots, N\}$.
Wegen $p(k) \in \mathbb{Z}$ $(k \geq k_0)$ gibt es nach [**28**], Proposition 1.7.3 ganze Zahlen $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Z}$ mit $c_0 \neq 0$ und

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{x}{d-i} \quad (x \in \mathbb{Q}).$$

Nach den vorangestellten Erklärungen können wir Satz 3.16 auf den Ring $R = \mathcal{O}_0$ anwenden. Dabei wird das maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_0$ von den Elementen $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{O}_0$ erzeugt. Ist M ein endlich erzeugter $\mathcal{O}_0$-Modul, so existiert damit also ein Polynom $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg p \leq n$ und

$$p(k) = \ell_{\mathcal{O}_0}\left(M/\mathfrak{m}^k M\right) = \dim_{\mathbb{C}}\left(M/\mathfrak{m}^k M\right) \quad (k \geq k_0).$$

Benutzt man die Darstellung von p aus 3.17, so folgt, dass der Grenzwert

$$c(M) = n! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(M/\mathfrak{m}^k M\right)}{k^n} \in \mathbb{N}$$

existiert. Wir werden $c(M)$ als die Samuelvielfachheit von M bezeichnen. Wendet man diese Ergebnisse auf den endlich erzeugten $\mathcal{O}_0$-Modul

$$M = \mathcal{H}_0 = \mathcal{O}_0^X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\mathcal{O}_0^X$$

an, so sieht man, dass ein Polynom $p = p(T) \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg p \leq n$ existiert, so dass

$$p(k) = \dim_{\mathbb{C}}\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0\right) \quad (k \geq k_0)$$

für ein geeignetes $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt.

Definition 3.18.
Das Polynom $p = p(T) \in \mathbb{Q}[x]$ heißt Hilbert-Samuel-Polynom des Tupels T.

Das Hilbert-Samuel-Polynom beschreibt nach Konstruktion die Kodimensionen von $\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass diese mit den Kodimensionen der $M_k \subset X$ übereinstimmen, wenn T vertauschend ist. Für den nichtvertauschenden Fall bleibt noch eine Abschätzung gültig. Wir brauchen dazu zunächst einige Vorbereitungen.

Bemerkung 3.19.
Ist $u \in \mathcal{O}_0^X$, so schreiben wir

$$[u] = u + \sum_{j=1}^{n}(z_j - T_j)\mathcal{O}_0^X \in \mathcal{H}_0$$

für die Restklasse von u in $\mathcal{H}_0$. Für $u \in \mathfrak{m}^k\mathcal{O}_0^X$ ist offenbar auch $[u] \in \mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0$.

Wir überlegen uns in der folgenden Bemerkung, dass der Operator T_i einen (wohldefinierten) $\mathcal{O}_0$-Modulhomomorphismus auf $\mathcal{H}_0$ induziert, der der Multiplikation mit z_i entspricht $(i = 1, \ldots, n)$.

Bemerkung 3.20.

(a) Indem wir ein Element $x \in X$ mit der Lokalisierung der Funktion auf D mit dem konstanten Wert x in 0 identifizieren, fassen wir $X \subset \mathcal{O}_0^X$ als Unterraum auf. Einen stetig linearen Operator $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X)$ können wir wie in 3.9 (c) als $\mathcal{O}_0$-Modulhomomorphismus

$$\mathcal{T} : \mathcal{O}_0^X \to \mathcal{O}_0^X,\ f_0 \mapsto (\mathcal{T} \circ f)_0$$

verstehen. Dieser setzt dabei den ursprünglichen Operator $\mathcal{T}$ fort.

(b) Für $i, k = 1, \ldots, n$ und $u \in \mathcal{O}_0^X$ gilt

$$\begin{aligned} T_i(z_k - T_k)u &= (z_k - T_k)z_i u - (z_i - T_i)(z_k - T_k)u \\ &\in \sum_{j=1}^{n}(z_j - T_j)\mathcal{O}_0^X. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$T_i\left(\sum_{j=1}^{n}(z_j - T_j)\mathcal{O}_0^X\right) \subset \sum_{j=1}^{n}(z_j - T_j)\mathcal{O}_0^X$$

und somit induziert T_i einen wohldefinierten $\mathcal{O}_0$-Modulhomomorphismus

$$\bar{T}_i : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_0,\ \bar{T}_i[u] = [T_i u] \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Außerdem ist

$$(z_i - T_i)\mathcal{O}_0^X \subset \sum_{j=1}^{n}(z_j - T_j)\mathcal{O}_0^X.$$

Daher wirkt $\bar{T}_i$ wie die Multiplikation mit z_i, das heißt es gilt

$$\bar{T}_i u = z_i \cdot u \quad (u \in \mathcal{H}_0,\ i = 1, \ldots, n).$$

Wir betrachten nun die $\mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\phi : X \to \mathcal{H}_0,\ \phi x = [x].$$

Wir können aus 3.20 das folgende Korollar ableiten, das zeigt, dass ϕ für $k \in \mathbb{N}$ den Teilraum M_k nach $\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0$ abbildet. Dabei sei $\mu : F \to \mathbb{N}^n$ wie im ersten Teil dieser Arbeit durch $\mu(0) = 0$ und

$$\mu(a_1, \ldots, a_k) = \big(\#\{j = 1, \ldots, k;\ a_j = i\}\big)_{i=1}^n \quad (k \geq 1)$$

definiert.

Korollar 3.21.
Für alle $x \in X$ und alle $a \in F$ gilt

$$\phi T_a x = z^{\mu(a)} \cdot \phi x.$$

Folglich ist

$$\phi M_k \subset \mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Beweis.
Für $a = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $a = (a_1, \ldots, a_k) \in F \setminus \{0\}$. Nach 3.20 gilt für alle $x \in X$

$$\phi T_a x = [T_{a_1} \ldots T_{a_k} x] = \bar{T}_{a_1} \ldots \bar{T}_{a_k}[x] = z_{a_1} \cdots z_{a_k} \cdot \phi x = z^{\mu(a)} \cdot \phi x.$$

□

Nach 3.21 induziert ϕ wohldefinierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen

$$\phi_k : X/M_k \to \mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0,\ x + M_k \mapsto \phi x + \mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wir zeigen nun, dass diese Abbildungen surjektiv sind. Weiter berechnen wir ihren Kern und sehen, dass sie bijektiv sind, falls T vertauschend ist.

Lemma 3.22.
Sei $k \in \mathbb{N}$.

(a) *Die Abbildung $\phi_k : X/M_k \to \mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0$ ist surjektiv.*
(b) *Für $x \in X$ ist $x + M_k$ genau dann im Kern von ϕ_k, wenn es holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_n : U \to X$ auf einer offenen Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ gibt, so dass*

$$x - \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, f_j(z) \in M_k$$

für alle $z \in U$ gilt.
(c) *Ist T vertauschend, so ist ϕ_k auch injektiv.*

BEWEIS.

(a) Sei $u \in \mathcal{H}_0$ gegeben. Wir wählen ein $f_0 \in \mathcal{O}_0^X$ mit $u = [f_0]$. Indem wir f_0 als Potenzreihe schreiben, können wir $x_\alpha \in X$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| < k$ wählen, so dass

$$f_0 - \sum_{|\alpha|<k} x_\alpha z^\alpha \in \mathfrak{m}^k \mathcal{O}_0^X$$

gilt. Nach 3.19 ist dann

$$u + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 = [f_0] + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 = \left[\sum_{|\alpha|<k} x_\alpha z^\alpha \right] + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0.$$

Zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| < k$ fixieren wir nun ein (beliebig gewähltes) $a_\alpha \in F$ mit $\mu(a_\alpha) = \alpha$ und setzen

$$x = \sum_{|\alpha|<k} T_{a_\alpha} x_\alpha \in X.$$

Nach 3.21 folgt

$$\phi x = \sum_{|\alpha|<k} \phi T_{a_\alpha} x_\alpha = \sum_{|\alpha|<k} z^\alpha \cdot \phi x_\alpha = \left[\sum_{|\alpha|<k} x_\alpha z^\alpha \right].$$

Damit gilt

$$\phi_k(x + M_k) = \left[\sum_{|\alpha|<k} x_\alpha z^\alpha \right] + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 = u + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0$$

und dies zeigt die Surjektivität von ϕ_k.

(b) Sei zunächst $x \in X$ mit $x + M_k \in \ker \phi_k$. Dann ist $\phi x \in \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0$ und damit gibt es $u_\alpha \in \mathcal{H}_0$ ($|\alpha| = k$) mit

$$[x] = \phi x = \sum_{|\alpha|=k} z^\alpha \cdot u_\alpha.$$

Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| = k$ fixieren wir ein (beliebig gewähltes) $a_\alpha \in F_k$ mit $\mu(a_\alpha) = \alpha$ und wählen ein $(f_\alpha)_0 \in \mathcal{O}_0^X$ mit $[(f_\alpha)_0] = u_\alpha$. Nach 3.20 (b) folgt dann

$$[x] = \sum_{|\alpha|=k} z^\alpha \cdot u_\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \bar{T}_{a_\alpha} u_\alpha = \left[\left(\sum_{|\alpha|=k} T_{a_\alpha} \circ f_\alpha \right)_0 \right].$$

Daher gibt es holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_n : U \to X$ auf einer offenen Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ mit

$$x - \sum_{j=1}^n (z_j - T_j) f_j(z) = \sum_{|\alpha|=k} T_{a_\alpha} f_\alpha(z) \in M_k \quad (z \in U).$$

Seien umgekehrt eine Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_n : U \to X$ gegeben, so dass

$$f(z) = x - \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, f_j(z) \in M_k \quad (z \in U)$$

gilt. Damit ist $f : U \to M_k \subset X$ holomorph. Wir können also die Lokalisierung von f in 0 als Potenzreihe

$$f_0 = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} x_\alpha z^\alpha$$

mit Koeffizienten $x_\alpha \in M_k$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ schreiben. (Man beachte hierbei, dass $M_k \subset X$ nach 3.3 abgeschlossen ist.)
Es gilt $[x] = [f_0]$ und mit 3.19 folgt

$$[x] + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 = [f_0] + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0 = \left[\sum_{|\alpha|<k} x_\alpha z^\alpha \right] + \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0.$$

Wegen $x_\alpha \in M_k$ ist außerdem $\phi x_\alpha \in \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0$ nach 3.21 und somit ist

$$\left[\sum_{|\alpha|<k} x_\alpha z^\alpha \right] = \sum_{|\alpha|<k} z^\alpha \cdot \phi x_\alpha \in \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0.$$

Zusammen folgt $\phi x = [x] \in \mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0$ und damit ist $x + M_k \in \ker \phi_k$, was zu zeigen war.

(c) Sei T vertauschend und sei $x \in X$ mit $\xi = x + M_k \in \ker \phi_k$. Wir wählen gemäß (b) eine offene Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U, X)$ mit

$$x - \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, f_j(z) \in M_k \quad (z \in U).$$

Für $j = 1, \ldots, n$ gilt $T_j M_k \subset M_{k+1} \subset M_k$ und damit ist

$$\tilde{T}_j : X/M_k \to X/M_k,\ y + M_k \mapsto T_j y + M_k$$

ein wohldefinierter stetig linearer Operator auf dem Banachraum X/M_k. (Nach 3.3 ist $M_k \subset X$ abgeschlossen.) Das dadurch definierte Tupel $\tilde{T} = \left(\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n\right) \in \mathcal{L}\,(X/M_k)^n$ ist vertauschend und es gilt $\tilde{T}^\alpha = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}^n$ mit $|\alpha| \geq k$.
Wir betrachten außerdem die holomorphen Funktionen

$$\tilde{f}_j : U \to X/M_k,\ \tilde{f}_j(z) = f_j(z) + M_k \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Für $z \in U$ folgt

$$\xi - \sum_{j=1}^{n} \left(z_j - \tilde{T}_j\right) \tilde{f}_j(z) = \left(x - \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, f_j(z)\right) + M_k = 0.$$

Für $j = 1, \ldots, n$ schreiben wir nun die Funktion $\tilde{f}_j$ als Potenzreihen mit Entwicklungszentrum 0 und erhalten Koeffizienten

$$\xi_\alpha^j \in X/M_k \quad (\alpha \in \mathbb{N}^n),$$

so dass

$$\tilde{f}_j(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \xi_\alpha^j z^\alpha \quad (z \in U)$$

gilt. (Ohne Einschränkung verkleinere man dabei U zum Konvergenzbereich dieser Potenzreihen, falls dies notwendig ist.)
Wir erhalten durch Einsetzen (dabei sei $e_j \in \mathbb{N}^n$ der j-te Einheitsvektor)

$$\begin{aligned}
0 &= \xi - \sum_{j=1}^{n} \left(z_j - \tilde{T}_j\right) \tilde{f}_j(z) \\
&= \xi - \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \xi_\alpha^j z^{\alpha + e_j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\tilde{T}_j \xi_\alpha^j\right) z^\alpha \\
&= \left(\xi + \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_j \xi_0^j\right) + \sum_{0 \neq \alpha \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_j \xi_\alpha^j - \sum_{j, \alpha_j \geq 1} \xi_{\alpha - e_j}^j\right) z^\alpha
\end{aligned}$$

für $z \in U$. Es folgt mittels Koeffizientenvergleich

$$\xi = -\sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_j \xi_0^j$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{T}_j \xi_\alpha^j = \sum_{j, \alpha_j \geq 1} \xi_{\alpha - e_j}^j \quad (0 \neq \alpha \in \mathbb{N}^n).$$

Wir definieren die Folge $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in X/M_k durch

$$\xi_m = \sum_{|\alpha| = m} \sum_{j=1}^{n} \tilde{T}^{\alpha + e_j} \xi_\alpha^j \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Aus den oben gezeigten Gleichungen folgt $\xi = -\xi_0$ und

$$\begin{aligned}
\xi_{m+1} &= \sum_{|\alpha|=m+1} \tilde{T}^\alpha \sum_{j=1}^n \tilde{T}^j \xi_\alpha^j \\
&= \sum_{|\alpha|=m+1} \sum_{j,\alpha_j \geq 1} \tilde{T}^\alpha \xi_{\alpha-e_j}^j \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \sum_{j=1}^n \tilde{T}^{\alpha+e_j} \xi_\alpha^j \\
&= \xi_m \quad (m \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Man beachte dabei, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}
\{(\alpha, j);\ |\alpha| = m+1,\ \alpha_j \geq 1\} &\rightarrow \{(\alpha, j);\ |\alpha| = m,\ j = 1, \ldots, n\} \\
(\alpha, j) &\mapsto (\alpha - e_j, j)
\end{aligned}$$

eine Bijektion ist.

Es folgt nun, dass $\xi = -\xi_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ ist. Andererseits ist aber $\xi_m = 0$ für $m \geq k-1$. Also ist $\xi = 0$, was zu zeigen war.

□

Für $k \in \mathbb{N}$ haben wir also $\mathbb{C}$-lineare Surjektionen $X/M_k \rightarrow \mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0$ konstruiert, die Isomorphismen sind, falls T vertauschend ist. Wir erhalten damit den angekündigten Vergleich der Kodimensionen von $M_k \subset X$ und $\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$. Wir folgern außerdem, dass das Hilbert-Samuel-Polynom für vertauschende Tupel gerade das Wachstum von $\dim(X/M_k)$ für $k \rightarrow \infty$ beschreibt und für beliebige Tupel noch eine Abschätzung nach unten liefert.

Korollar 3.23.

(a) Es gilt

$$\dim(X/M_k) \geq \dim\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für das Hilbert-Samuel-Polynom p von T folgt damit

$$\dim(X/M_k) \geq p(k) \quad (k \geq k_0)$$

für ein geeignetes $k_0 \in \mathbb{N}$.

(b) Ist T vertauschend, so gilt in (a) beide Male Gleichheit.

Bemerkung 3.24.

Aus 3.22 (b) folgt, dass ϕ_1 für ein beliebiges (nicht nowendig vertauschendes) Tupel T injektiv ist. Es gilt also stets

$$\dim(X/M_1) = \dim\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^1\mathcal{H}_0\right).$$

Grad und Leitkoeffizient des Hilbert-Samuel-Polynoms

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Beschreibung des Grades und des Leitkoeffizienten des im vorigen Abschnitt definierten Hilbert-Samuel-Polynoms zu geben.

Wie zuvor betrachten wir ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ von Operatoren auf einem Banachraum X mit

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty.$$

Sei weiterhin $p = p(T) \in \mathbb{Q}[x]$ das Hilbert-Samuel-Polynom von T. Wir nehmen im Folgenden zusätzlich an, dass $p \neq 0$ ist. Äquivalent dazu ist (vergleiche 3.2), dass

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) > 0$$

gilt. Dies ist keine wesentliche Einschränkung.

Wir bezeichnen weiterhin mit

$$d = \deg p \in \{0, \ldots, n\}$$

den Grad von p und betrachten wie zuvor den Träger

$$A = \operatorname{supp} \mathcal{H} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n;\ 0 < \dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X\right) < \infty \right\}$$

(siehe 3.14) der zu T assoziierten Garbe $\mathcal{H} = \mathcal{H}(T)$. Da $\mathcal{H}$ nach 3.10 eine kohärente $\mathcal{O}_D$-Garbe über der offenen Nullumgebung

$$D = D(T) = \rho_r^{\text{ess}}(T)$$

ist, ist $A \subset D$ eine analytische Menge ([**23**], Chapter 4, §1.1). Nach Voraussetzung ist $0 \in A$.

Wir wollen an dieser Stelle an den Dimensionsbegriff für analytische Mengen erinnern (vergleiche dazu auch [**23**], Chapter 5).

Sei dabei zunächst $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beliebiger komplexer Raum. Man definiert die Dimension $\dim_x (X, \mathcal{O}_X)$ von X in einem Punkt $x \in X$ als die kleinstmögliche Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die eine offene x-Umgebung $U \subset X$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ existieren mit

$$N(f_1, \ldots, f_k) = \{y \in U;\ f_i(y) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k\} = \{x\}.$$

Man kann die Dimension komplexer Räume jedoch auch mithilfe von Dimensionsbegriffen aus der kommutativen Algebra charakterisieren. Wir wollen dies kurz erläutern.

Bemerkung 3.25.

(a) Ist R ein (kommutativer) Ring (mit Eins), so definiert man die Krulldimension von R

$$\dim^{\text{Krull}}(R) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

als die maximale Länge einer Kette von Primidealen in R. Ist M ein Modul über einem solchen Ring R, so ist die Dimension von M über R definiert durch

$$\dim_R M = \dim^{\text{Krull}}(R/\text{Ann}_R M),$$

wobei

$$\text{Ann}_R M = \{r \in R;\ r \cdot m = 0 \text{ für alle } m \in M\} \subset R$$

das Annihilatorideal von M in R ist.

(b) Ist R ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathcal{J} \subset R$, so ist die Chevalleydimension $\dim^{\text{Chev}}(R)$ von R definiert als die minimale Erzeugendenzahl für ein $\mathcal{J}$-primäres Ideal.
Ist R außerdem noethersch, so ist ein Ideal $I \subsetneq R$ genau dann $\mathcal{J}$-primär, wenn der Faktorring R/I artinsch ist. Dies erhält man leicht aus Satz 8.5 in [**6**].
Im Fall $R = \mathcal{O}_0/J$ (mit einem echten Ideal $J \subsetneq \mathcal{O}_0$) ist R/I genau dann artinsch für ein Ideal $I \subsetneq R$, wenn $\dim_{\mathbb{C}} R/I < \infty$ ist. Damit ist die Chevalleydimension von $\mathcal{O}_0/J$ die minimale Erzeugendenzahl eines Ideal $I \subsetneq \mathcal{O}_0/J$, derart dass der Faktorring $(\mathcal{O}_0/J)/I$ artinsch ist (beziehungsweise ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum ist).

(c) Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum und $\mathcal{O}_{X,x}$ der Halm der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von X in einem Punkt $x \in X$, so gilt

$$\dim^{\text{Chev}}(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim^{\text{Krull}}(\mathcal{O}_{X,x})$$

nach Satz 4.1.9 in [**30**].

Die Dimensionsformel in [**23**], Chapter 5, §1.2 besagt, dass die Dimension eines komplexen Raums $(X, \mathcal{O}_X)$ in einem Punkt $x \in X$ mit der Chevalleydimension des Halmes $\mathcal{O}_{X,x}$ der Strukturgarbe $\mathcal{O}_X$ von X in x übereinstimmt. Zusammen mit 3.25 (c) liefert dies den folgenden Satz.

Satz 3.26. *(Dimensionsformel)*
Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein komplexer Raum und sei $\mathcal{O}_{X,x}$ der Halm von $\mathcal{O}_X$ in einem Punkt $x \in X$. Dann gilt

$$\dim_x (X, \mathcal{O}_X) = \dim^{Chev}(\mathcal{O}_{X,x}) = \dim^{Krull}(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Menge und $B \subset \Omega$ eine analytische Teilmenge. Wir betrachten die Idealgarbe $\mathcal{J}_B \subset \mathcal{O}_\Omega$, die gegeben ist durch

$$(\mathcal{J}_B)_w = \left\{(f, D_f)_w \in \mathcal{O}_w;\ f|_{D_f \cap B} = 0\right\} \subset \mathcal{O}_w \quad (w \in \Omega).$$

Damit ist $\mathcal{J}_B$ eine kohärente $\mathcal{O}_\Omega$-Garbe ([**23**], Chapter 4, §2). Offenbar gilt

$$\operatorname{supp}(\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}_B) = B.$$

Wir versehen B mit der eingeschränkten Quotientengarbe $\mathcal{O}_B = (\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}_B)\,|_B$ und erhalten so einen komplexen Raum $(B, \mathcal{O}_B)$. Für einen Punkt $w \in B$ wird nun die Dimension von B in w definiert durch

$$\dim_w B = \dim_w (B, \mathcal{O}_B)$$

als die Dimension dieses komplexen Raums in w.

Bemerkung 3.27.
Man beachte, dass sich dieser Dimensionsbegriff für analytische Mengen nicht ändert, wenn man $\mathcal{J}_B$ durch eine beliebige kohärente Idealgarbe $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_\Omega$ mit $\operatorname{supp}(\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J}) = B$ ersetzt. Für ein solches $\mathcal{J}$ gilt

$$\dim_w B = \dim_w (B, (\mathcal{O}_\Omega/\mathcal{J})\,|_B) \quad (w \in B).$$

Man vergleiche dazu [**23**], Chapter 5, §1.3.

Um nun den Grad d des Hilbert-Samuel-Polynoms von T durch die analytische Menge A beschreiben zu können, benutzen wir noch die folgende Bedingung für den Grad des Hilbert-Samuel-Polynoms eines beliebigen endlich erzeugten Moduls über einem noetherschen lokalen Ring.

Bemerkung 3.28.
In der Situation von 3.16 gilt nach Korollar 5.5.6 in [**26**]

$$\deg p = \dim_R M = \dim^{\mathrm{Krull}}(R/\mathrm{Ann}_R M).$$

Nun kommen wir zu einem Hauptresultat dieses Abschnitts. Der Grad des Hilbert-Samuel-Polynoms von T entspricht der Dimension der analytischen Menge A im Nullpunkt.

Satz 3.29.
Für den Grad d des Hilbert-Samuel-Polynoms von T und die analytische Menge

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C}^n;\ 0 < \dim \left(X/\sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)X \right) < \infty \right\} \subset D$$

gilt

$$d = \dim_0 A.$$

Beweis.
Die Annihilatorgarbe $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_D}\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_D$ von $\mathcal{H}$ ist gegeben durch

$$\left(\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_D}\mathcal{H}\right)_w = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_w}\mathcal{H}_w \subset \mathcal{O}_w \quad (w \in D).$$

Da $\mathcal{H}$ eine kohärente $\mathcal{O}_D$-Garbe ist, ist $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_D}\mathcal{H} \subset \mathcal{O}_D$ nach [**23**], Annex §4.5 eine kohärente Idealgarbe. Offenbar ist

$$\mathrm{supp}\,(\mathcal{O}_D/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_D}\mathcal{H}) = \mathrm{supp}\,\mathcal{H} = A.$$

Mit 3.27 und 3.26 folgt

$$\begin{aligned} \dim_0 A &= \dim_0 (A, (\mathcal{O}_D/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_D}\mathcal{H})\,|_A) \\ &= \dim^{\mathrm{Krull}} (\mathcal{O}_D/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_D}\mathcal{H})_0 \\ &= \dim^{\mathrm{Krull}} (\mathcal{O}_0/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_0}\mathcal{H}_0) = d \end{aligned}$$

nach 3.28 und der Definition des Hilbert-Samuel-Polynoms. □

Als Folgerung aus 3.29 erhalten wir auch unmittelbar Kriterien dafür, dass die Fälle $d = 0$ beziehungsweise $d = n$ auftreten (vergleiche auch [**23**], Chapter 5, §1.1 und §3.2).

Korollar 3.30.
Es gilt genau dann $d = 0$, wenn 0 ein isolierter Punkt von A ist und genau dann $d = n$, wenn 0 ein innerer Punkt von A ist.

Nach 3.17 existieren ganze Zahlen $c_0, \ldots, c_d \in \mathbb{Z}$ mit $c_0 \neq 0$ und

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{x}{d-i} \quad (x \in \mathbb{Q}).$$

Wir untersuchen nun den 'Leitkoeffizienten' c_0 von p. Offenbar gilt

$$c_0 = d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{p(k)}{k^d} = d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}(\mathcal{H}_0)^k\mathcal{H}_0\right)}{k^d}.$$

Insbesondere folgt $c_0 > 0$ und man erhält aus 3.23 das folgende Korollar.

Korollar 3.31.
Seien die Teilräume

$$M_k = M_k(T) = \sum_{a\in F_k} T_a X \subset X \quad (k \in \mathbb{N})$$

wie zuvor. Dann gilt

$$d! \cdot \liminf_{k\to\infty} \frac{\dim (X/M_k)}{k^d} \geq c_0.$$

Ist T vertauschend, so gilt

$$d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim (X/M_k)}{k^d} = c_0.$$

In [**17**], Korollar 2.6 (und Korollar 3.1) zeigt J. Eschmeier das folgende Resultat für den Fall, dass T vertauschend ist und $d = n$ gilt.

Satz 3.32.
Sei T vertauschend und gelte $d = n$. Sei

$$D_0 \subset D = \rho_r^{ess}(T)$$

die Zusammenhangskomponente von D mit $0 \in D_0$. Dann gilt

$$c_0 = c(T) = \min_{z \in D_0} \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, X \right).$$

Weiterhin existiert eine analytische Teilmenge $S \subsetneq D_0$, so dass das obige Minimum gerade in allen Punkten außerhalb von S angenommen wird, es gilt also

$$c_0 = \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X \right) \quad (z \in D_0 \setminus S)$$

und

$$c_0 < \dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) X \right) \quad (z \in S).$$

Im Folgenden versuchen wir Teile dieses Resultates auf den Fall $d \leq n$ zu übertragen. Wir nehmen dazu zusätzlich an, dass $d > 0$ ist und betrachten zunächst eine allgemeinere Situation.
Sei Y ein weiterer Banachraum, $U \subset \mathbb{C}^d$ eine offene, zusammenhängende Nullumgebung und $\alpha : U \to \mathcal{L}(Y, X)$ eine holomorphe Funktion mit

$$\dim (Y / \alpha(w) X) < \infty \quad (w \in U).$$

Nach 3.10 ist dann

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{O}_U^X / \alpha \mathcal{O}_U^Y$$

eine kohärente analytische Garbe über dem Gebiet U.
Aus [**23**], Chapter 4, §4.2 folgt, dass die Menge

$$S_0 = \{w \in U;\ \mathcal{F} \text{ ist nicht lokal frei in } w\} \subset U$$

eine echte analytische Teilmenge ist.
Folglich ist $U \setminus S_0$ wieder ein Gebiet im $\mathbb{C}^d$ und der Rang $\mathrm{rk}_w(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ in $w \in U \setminus S_0$ ist konstant für alle $w \in U \setminus S_0$. Man definiert den Rang von $\mathcal{F}$ auf U (beziehungsweise in 0) als diesen konstanten Wert, also

$$\mathrm{rk}_U(\mathcal{F}) = \mathrm{rk}_0(\mathcal{F}) = \mathrm{rk}_w(\mathcal{F}) \quad (w \in U \setminus S_0).$$

In [**16**] (Seite 32) zeigt J. Eschmeier, dass dieser Rang von $\mathcal{F}$ in 0 der Samuelvielfachheit des Halmes $\mathcal{F}_w$ in einem beliebigen Punkt $w \in U$ entspricht.

Es gilt also

$$\mathrm{rk}_0(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}_w) = d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{F}_w/\mathfrak{m}\,(\mathcal{O}_w)^k \cdot \mathcal{F}_w\right)}{k^d} \quad (w \in U).$$

Wir wollen nun zeigen, dass man den Rang von $\mathcal{F}$ in 0 auch durch die Kodimensionen der Bilder der $\alpha(w)$ $(w \in U)$ ausdrücken kann. Dazu betrachten wir die Zahl

$$c = c_\alpha = \min\{\dim(X/\alpha(w)Y)\,;\ w \in U\} \in \mathbb{N}.$$

Wir nennen c die stabilisierte Bild-Kodimension von α (nahe 0).

Bemerkung 3.33.
In [**31**], Satz 1.5 zeigt W. Kaballo, dass eine analytische Teilmenge $S \subset U$ existiert mit

$$\dim(X/\alpha(w)Y) = c \quad \text{für alle } w \in U \setminus S$$

und

$$\dim(X/\alpha(w)Y) > c \quad \text{für alle } w \in S.$$

Nach Definition von c muss $S \subsetneq U$ eine echte analytische Teilmenge sein. Damit ist S insbesondere eine Nullmenge für das $(2n)$-dimensionale Lebesguemaß. Folglich enthält jede Nullumgebung $U_0 \subset U$ Punkte $w \in U_0$ mit

$$\dim(X/\alpha(w)Y) = c.$$

Im folgenden Lemma zeigen wir, dass die Garbe $\mathcal{F}$ in jedem Punkt außerhalb von S lokal frei vom Rang c ist.

Lemma 3.34.
Die Garbe $\mathcal{F}$ ist in jedem Punkt $w \in U \setminus S$ lokal frei vom Rang c.

Beweis.
Sei $w \in U \setminus S$ gegeben. Damit ist $\dim(X/\alpha(w)Y) = c$. Wir wählen einen c-dimensionalen Teilraum $M \subset X$, so dass

$$X = M \dot{+} \alpha(w)Y$$

als direkte Summe linearer Teilräume gilt und betrachten die holomorphe Abbildung $\beta : U \setminus S \to \mathcal{L}(Y \oplus M, X)$ mit

$$\beta(z)(y,m) = \alpha(z)y + m \quad (z \in U \setminus S,\ (y,m) \in Y \oplus M).$$

Dabei schreiben wir $Y \oplus M$ für die 1-direkte Summe von Banachräumen. Da $\beta(w)$ surjektiv ist, existiert nach 3.12 ein Polyzylinder $P \subset U \setminus S$ mit Mittelpunkt w, so dass auch die induzierte Abbildung

$$\beta_P : \mathcal{O}(P, Y \oplus M) \to \mathcal{O}(P, X)$$

surjektiv ist. Insbesondere sind damit alle Operatoren $\beta(z)$ $(z \in P)$ surjektiv. Durch erneutes Anwenden von 3.12 folgt, dass die von β induzierte Abbildung zwischen analytischen Garben über P

$$\beta : \mathcal{O}_P^{Y \oplus M} \to \mathcal{O}_P^X, \; f_z \mapsto (\beta f)_z$$

surjektiv ist.

Um die Behauptung des Satzes zu zeigen, betrachten wir nun

$$\Phi : \mathcal{O}_P^M \to \mathcal{F}|_P = \left(\mathcal{O}_D^X / \alpha \mathcal{O}_D^Y\right)|_P, \; f_z \mapsto f_z + \alpha \mathcal{O}_z^Y.$$

Da $\dim M = c < \infty$ gilt, ist $\mathcal{O}_P^M$ eine freie Garbe vom Rang c und damit genügt es zu zeigen, dass Φ ein Isomorphismus von $\mathcal{O}_P$-Garben ist.

Ist $z \in P$ und $g_z \in \mathcal{O}_z^X$, so existiert ein $f_z \in \mathcal{O}_z^{Y \oplus M}$ mit

$$\beta f_z = g_z.$$

Schreibt man dann $f_z = f_z^Y + f_z^M$ mit $f_z^Y \in \mathcal{O}_z^Y$ und $f_z^M \in \mathcal{O}_z^M$, so folgt

$$g_z = \beta f_z = f_z^M + \alpha f_z^Y$$

und damit ist

$$g_z + \alpha \mathcal{O}_z^Y = \Phi f_z^M.$$

Damit ist die Surjektivität von Φ gezeigt.

Für $z \in P$ betrachte man weiterhin die lineare Abbildung

$$P_z : M \to X/\alpha(z)Y, \; m \mapsto m + \alpha(z)Y.$$

Wir wollen zeigen, dass die P_z $(z \in P)$ Vektorraumisomorphismen sind. Die Surjektivität folgt unmittelbar aus der von $\beta(z)$. Wegen $P \subset U \setminus S$ ist

$$\dim (X/\alpha(z)Y) = c = \dim M$$

und damit ist P_z auch injektiv $(z \in P)$. Das bedeutet gerade, dass der Raum X sich für alle $z \in P$ durch $X = M \dot{+} \alpha(z)Y$ als direkte Summe linearer Teilräume schreiben lässt.

Um den Beweis zu beenden, zeigen wir nun die Injektivität von Φ.

Sei dazu $z \in P$ und $f_z \in \mathcal{O}_z^M$ mit $\Phi f_z = 0$. Dann gibt es ein $g_z \in \mathcal{O}_z^Y$ mit

$$f_z = \alpha g_z = (\alpha g)_z.$$

Sind f und g holomorphe Funktionen auf einer in P enthaltenen Umgebung um z, die die Keime f_z beziehungsweise g_z repräsentieren, so folgt

$$M \ni f(\lambda) = \alpha(\lambda) g(\lambda) \in \alpha(\lambda)Y$$

für alle λ in einer geeigneten z-Umgebung. Wegen $M \cap \alpha(\lambda)Y = \{0\}$ ist dort folglich $f \equiv 0$. Also ist $f_z = 0$. Dies zeigt, dass Φ injektiv ist. $\square$

Mit diesem Lemma 3.34 und den Vorbemerkungen können wir folgern, dass die Samuelvielfachheit der Halme $\mathcal{F}_w$ $(w \in U)$ gleich der stabilisierten Bild-Kodimension von α ist.

KOROLLAR 3.35.
Es gilt $S_0 \subset S$ *und* $c = rk_0(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}_w)$ *für alle* $w \in U$.

Wir wenden uns jetzt wieder dem Ziel zu, eine Verallgemeinerung von 3.32 für den Fall $0 < d \leq n$ zu geben.
Dazu nehmen wir an, dass 0 ein glatter Punkt der Menge A ist. Das heißt gerade, dass A in 0 eine komplexe d-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Es gibt also offene Nullumgebungen $U \subset \mathbb{C}^d,\ V \subset D$ und einen Homöomorphismus $\varphi : U \to A \cap V$ mit $\varphi(0) = 0$, der als Funktion

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \to \mathbb{C}^n$$

holomorph ist mit $\mathrm{rg} J_\varphi(w) = d$ für alle $w \in U$. Man kann zusätzlich erreichen, dass U und $A \cap V$ zusammenhängend sind.
Es sei nun $\alpha \in \mathcal{O}\left(U, \mathcal{L}(X^n, X)\right)$ definiert durch

$$\alpha(w) = \alpha_T\left(\varphi(w)\right) = (\varphi_1(w) - T_1, \ldots, \varphi_n(w) - T_n) \quad (w \in U).$$

Weiter sei

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{O}_U^X / \sum_{j=1}^n (\varphi_j(z) - T_j)\mathcal{O}_U^X$$

die zugehörige kohärente $\mathcal{O}_U$-Garbe. Nach 3.33 ist

$$c_A(T) = \min_{z \in A \cap V} \dim \left(X / \sum_{j=1}^n (z_j - T_j)X \right) = \min_{w \in U} \dim \left(X / \alpha(w) X^n \right)$$

unabhängig von der Wahl von V (beachte, dass $A \cap V$ und U zusammenhängend gewählt wurden).
Wir nennen $c_A(T)$ die in A stabilisierte Bild-Kodimension von T (nahe 0). Nach 3.14 ist $c_A(T) > 0$. Außerdem ist (siehe 3.33)

$$S = \{w \in U;\ \dim\left(X/\alpha(w)X^n\right) > c_A(T)\} \subset U$$

eine echte und damit nirgends dichte analytische Teilmenge von U. Folglich ist die Menge $\mathcal{S} = \varphi(S) \subsetneq A \cap V$ eine nirgends dichte analytische Teilmenge, und es gilt

$$c_A(T) = \dim \left(X / \sum_{i=1}^n (z_j - T_j)X \right) \quad \text{für alle } z \in (A \cap V) \setminus \mathcal{S}$$

und

$$c_A(T) < \dim \left(X / \sum_{i=1}^n (z_j - T_j)X \right) \quad \text{für alle } z \in \mathcal{S}.$$

Weiterhin folgt aus 3.34, dass $\mathcal{F}$ in jedem Punkt aus $U \setminus S$ lokal frei vom Rang $c_A(T)$ ist, und nach 3.35 gilt

$$c_A(T) = c(\mathcal{F}_w) = d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{F}_w/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_w)^k \cdot \mathcal{F}_w\right)}{k^d} \quad (w \in U).$$

Wir wollen im Folgenden zeigen, dass die in A stabilisierte Bild-Kodimension $c_A(T)$ von T kleiner oder gleich dem Leitkoeffizienten c_0 im Hilbert-Samuel-Polynom von T ist. Dazu konstruieren wir surjektive $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen

$$\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_0)^k \cdot \mathcal{H}_0\right) \to \left(\mathcal{F}_0/\mathfrak{m}(\mathcal{O}_0)^k \cdot \mathcal{F}_0\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Zunächst definieren wir für einen Punkt $w \in U$ mithilfe der holomorphen Karte $\varphi : U \to A \cap V \subset \mathbb{C}^n$ die Abbildungen

$$\Phi_w : \mathcal{O}_{\varphi(w)} \to \mathcal{O}_w,\ \left(f, D_f\right)_{\varphi(w)} \mapsto \left(f \circ \varphi,\ \overset{-1}{\varphi}(D_f)\right)_w$$

und

$$\Phi_w^X : \mathcal{O}^X_{\varphi(w)} \to \mathcal{O}^X_w,\ \left(g, D_g\right)_{\varphi(w)} \mapsto \left(g \circ \varphi,\ \overset{-1}{\varphi}(D_g)\right)_w.$$

Wir fassen einige einfache Eigenschaften dieser Abbildungen zusammen.

Lemma 3.36.
Für alle $w \in U$ gelten die folgenden Aussagen:

(a) Die Abbildung Φ_w ist ein (unitaler) $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus mit

$$\Phi_w \mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_{\varphi(w)}\right) \subset \mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_w\right).$$

(b) Die Abbildung Φ_w^X ist additiv und erfüllt

$$\Phi_w^X\left(f_{\varphi(w)} \cdot g_{\varphi(w)}\right) = \Phi_w\left(f_{\varphi(w)}\right) \cdot \Phi_w^X\left(g_{\varphi(w)}\right)$$

für alle $f_{\varphi(w)} \in \mathcal{O}_{\varphi(w)}$ und $g_{\varphi(w)} \in \mathcal{O}^X_{\varphi(w)}$.
Insbesondere ist Φ_w^X eine lineare Abbildung zwischen $\mathbb{C}$-Vektorräumen.

(c) Es ist

$$\Phi_w^X\left(\sum_{j=1}^n (z_j - T_j)\mathcal{O}^X_{\varphi(w)}\right) \subset \left(\sum_{j=1}^n (\varphi_j(z) - T_j)\mathcal{O}^X_w\right).$$

Folglich induziert Φ_w^X eine Abbildung

$$\Psi_w : \mathcal{H}_{\varphi(w)} \to \mathcal{F}_w.$$

Diese ist ebenfalls $\mathbb{C}$-linear und erfüllt

$$\Psi_w\left(f_{\varphi(w)} \cdot u_{\varphi(w)}\right) = \Phi_w\left(f_{\varphi(w)}\right) \cdot \Psi_w\left(u_{\varphi(w)}\right)$$

für alle $f_{\varphi(w)} \in \mathcal{O}_{\varphi(w)}$ und $u_{\varphi(w)} \in \mathcal{H}_{\varphi(w)}$.

(d) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Psi_w\left(\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_{\varphi(w)}\right)^k \cdot \mathcal{H}_{\varphi(w)}\right) \subset \mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_w\right)^k \cdot \mathcal{F}_w.$$

Beweis.

(a) Offensichtlich ist Φ_w ein unitaler $\mathbb{C}$-Algebrenhomomorphismus. Ist $f_{\varphi(w)} \in \mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_{\varphi(w)}\right)$, so gilt

$$0 = f(\varphi(w)) = (f \circ \varphi)(w)$$

und damit folgt

$$\Phi_w\left(f_{\varphi(w)}\right) = (f \circ \varphi)_w \in \mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_w\right).$$

(b) und (c) rechnet man leicht nach.

(d) Sind $f_{1,\varphi(w)}, \ldots, f_{k,\varphi(w)} \in \mathfrak{m}(\mathcal{O}_{\varphi(w)})$ und $u_{\varphi(w)} \in \mathcal{H}_{\varphi(w)}$, so gilt nach (c) und (a)

$$\begin{aligned} & \Psi_w\left(f_{1,\varphi(w)} \cdot \ldots \cdot f_{k,\varphi(w)} \cdot u_{\varphi(w)}\right) \\ = \; & \Phi_w\left(f_{1,\varphi(w)}\right) \cdot \ldots \cdot \Phi_w\left(f_{k,\varphi(w)}\right) \cdot \Psi_w\left(u_{\varphi(w)}\right) \in \mathfrak{m}(\mathcal{O}_w)^k \cdot \mathcal{F}_w. \end{aligned}$$

□

Nach 3.36 (d) induziert Ψ_w für $w \in U$ wohldefinierte lineare Abbildungen

$$\Psi_w^k : \left(\mathcal{H}_{\varphi(w)}/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_{\varphi(w)}\right)^k \cdot \mathcal{H}_{\varphi(w)}\right) \to \left(\mathcal{F}_w/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_w\right)^k \cdot \mathcal{F}_w\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wir wollen nun die Surjektivität dieser Abbildungen zeigen. Dazu genügt es, nachzuweisen, dass Φ_w^X surjektiv ist. Wir brauchen dabei das bekannte Resultat, dass sich jede auf einer komplexen Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{C}^n$ holomorphe Funktion lokal zu einer holomorphen Funktion auf einer offenen Menge des $\mathbb{C}^n$ fortsetzen lässt. Genauer gilt der folgende Satz, zu dem wir der Vollständigkeit halber auch einen Beweis angeben wollen.

Satz 3.37.
Sei $M \subset \mathbb{C}^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension $0 < m \leq n$ und sei $\phi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \cap M$ eine holomorphe Karte von M mit offenen Mengen $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^m$ und $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}^n$. Sei weiterhin $h : \mathcal{V} \cap M \to E$ eine Abbildung in einen Banachraum E, so dass $h \circ \phi : \mathcal{U} \to E$ holomorph ist.
Dann existieren zu jedem Punkt $w \in \mathcal{U}$ eine offene Umgebung $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ von $\phi(w)$ und eine holomorphe Funktion $g : \mathcal{V}_0 \to E$ mit

$$g|_{\mathcal{V}_0 \cap M} = h|_{\mathcal{V}_0 \cap M}.$$

Beweis.
Sei $w \in \mathcal{U}$. Wir betrachten $a = \phi(w) \in M$. Da $M \subset \mathbb{C}^n$ eine komplexe Untermannigfaltigkeit der Dimension m ist, existiert eine biholomorphe Abbildung

$$\psi : \mathcal{V}_0 \to P$$

zwischen einer offenen Umgebung $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ von a und einem offenen Polyzylinder

$$P = \prod_{j=1}^{n} D_{r_j}(0) \subset \mathbb{C}^n \quad (r_1, \ldots, r_n > 0)$$

um 0 mit $\psi(a) = 0$ und

$$\psi\left(\mathcal{V}_0 \cap M\right) = \{z \in P;\ z_{m+1} = \ldots = z_n = 0\}.$$

Es sei nun

$$\tilde{P} = \prod_{j=1}^{m} D_{r_j}(0) \subset \mathbb{C}^m$$

und

$$\rho : \tilde{P} \to \mathcal{V}_0 \cap M,\ z \mapsto \psi^{-1}\big((z, 0)\big).$$

Dann ist ρ eine weitere holomorphe Karte von M. Mit $\mathcal{U}_0 = \phi^{-1}\left(\mathcal{V}_0 \cap M\right)$ haben wir folglich den biholomorphen Kartenwechsel

$$\phi^{-1} \circ \rho : \tilde{P} \to \mathcal{U}_0.$$

Wir betrachten nun die Projektion

$$\pi_m : P \to \tilde{P},\ \pi_m\left(z_1, \ldots, z_n\right) = \left(z_1, \ldots z_m\right)$$

und setzen

$$g = h \circ \rho \circ \pi_m \circ \psi : \mathcal{V}_0 \to E.$$

Wegen

$$h \circ \rho = (h \circ \phi) \circ \left(\phi^{-1} \circ \rho\right)$$

ist g holomorph als Verkettung holomorpher Funktionen. Man rechnet nach, dass für alle $z \in \mathcal{V}_0 \cap M$

$$\left(\rho \circ \pi_m \circ \psi\right)(z) = z$$

gilt. Damit folgt

$$g|_{\mathcal{V}_0 \cap M} = h|_{\mathcal{V}_0 \cap M}.$$

$\square$

Wir können nun die Surjektivität von Φ_w^X nachweisen.

Satz 3.38.
Für alle $w \in U$ ist die Abbildung Φ_w^X surjektiv. Folglich sind auch die von ihr induzierten Abbildungen Ψ_w und Ψ_w^k $(k \in \mathbb{N})$ surjektiv. Es gilt damit

$$\dim\left(\mathcal{H}_{\varphi(w)}/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_{\varphi(w)}\right)^k \cdot \mathcal{H}_{\varphi(w)}\right) \geq \dim\left(\mathcal{F}_w/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_w\right)^k \cdot \mathcal{F}_w\right)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $w \in U$.

Beweis.
Sei $D_h \subset U$ eine w-Umgebung und $h : D_h \to X$ eine holomorphe Funktion. Wir betrachten
$$h \circ \varphi^{-1} : \varphi(D_h) \to X.$$
Nach 3.37 gibt es eine $\varphi(w)$-Umgebung $D_g \subset V$ mit $\overset{-1}{\varphi}(D_g) \subset D_h$ und eine holomorphe Funktion $g : D_g \to X$ mit
$$\left(h \circ \varphi^{-1}\right)|_{D_g \cap A} = g|_{D_g \cap A}.$$
Damit ist
$$g \circ \varphi = h|_{\overset{-1}{\varphi}(D_g)}.$$
Es gilt also
$$\Phi_w^X\left(g_{\varphi(w)}\right) = (g \circ \varphi)_w = h_w.$$
Dies zeigt die Surjektivität von Φ_w^X. Die weiteren behaupteten Aussagen sind dann klar. □

Als Folgerung aus diesem Satz 3.38 können wir nun den Leitkoeffizienten c_0 im Hilbert-Samuel-Polynom von T nach unten gegen die in A stabilisierte Bild-Kodimension $c_A(T)$ von T abschätzen, falls 0 ein glatter Punkt der analytischen Menge A ist.

Korollar 3.39.
Ist $d > 0$ und 0 ein glatter Punkt von A, so gilt
$$c_0 \geq c_A(T).$$

Beweis.
Wendet man die Abschätzung in Satz 3.38 auf den Punkt $w = 0$, so erhält man (beachte, dass $\varphi(0) = 0$)
$$\dim\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_0\right)^k \mathcal{H}_0\right) \geq \dim\left(\mathcal{F}_0/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_0\right)^k \cdot \mathcal{F}_0\right) \quad (k \in \mathbb{N}).$$
Es folgt
$$\begin{aligned} c_0 &= d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_0\right)^k \mathcal{H}_0\right)}{k^d} \\ &\geq d! \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\dim\left(\mathcal{F}_0/\mathfrak{m}\left(\mathcal{O}_0\right)^k \cdot \mathcal{F}_0\right)}{k^d} \\ &= c_A(T). \end{aligned}$$
□

Bemerkung 3.40.
Ist $d = 0$, so ist 0 nach 3.30 ein isolierter Punkt der Menge A. In diesem Sonderfall definieren wir die in A stabilisierte Bild-Kodimension von T durch

$$c_A(T) = \dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) \in \mathbb{N}^*.$$

Die in 3.39 gezeigte Abschätzung ist dann auch in diesem Fall gültig, denn für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}^*$ folgt mit 3.24

$$\begin{aligned} c_0 = p(k) &= \dim\Big(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}\,(\mathcal{H}_0)^k \cdot \mathcal{H}_0\Big) \\ &\geq \dim\Big(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}\,(\mathcal{H}_0)^1 \cdot \mathcal{H}_0\Big) \\ &= \dim\left(X/M_1(T)\right) \\ &= c_A(T). \end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch einige Beispiele untersuchen.

Beispiel 3.41.

(a) Wir betrachten den Hilbertraum

$$X = H(\mathbb{B}_n) = \left\{\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} f_\alpha z^\alpha;\ f_\alpha \in \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{\|f_\alpha\|^2}{\gamma_\alpha} < \infty\right\}.$$

mit $\gamma_\alpha = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ $(\alpha \in \mathbb{N}^n)$ wie im ersten Kapitel. Es sei

$$T = (M_{z_1}, \ldots, M_{z_n}) \in \mathcal{L}(X)^n$$

das Tupel der Multiplikationsoperatoren mit den Koordinatenfunktionen. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$M_k = M_k(T) = \left\{\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} f_\alpha z^\alpha;\ f_\alpha = 0 \text{ für } |\alpha| < k\right\}$$

und damit

$$\dim\left(X/M_k\right) = \#\left\{\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| < k\right\} = \binom{n+k-1}{n}.$$

Dies kann man leicht nachrechnen, wenn man benutzt, dass

$$\#\left\{\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| = j\right\} = \binom{j+n-1}{n-1} \quad (j \in \mathbb{N})$$

gilt (siehe dazu etwa [**5**], Appendix A.5).
Da T ein vertauschendes Tupel ist, folgt mit 3.23 weiterhin, dass

$$p(k) = \dim\left(X/M_k\right) \quad (k \geq k_0)$$

für ein geeignetes $k_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Mit der Vandermonde-Identität erhalten wir damit für alle $k \in \mathbb{N}$

$$p(k) = \binom{n+k-1}{n} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-1}{i} \cdot \binom{k}{n-i}.$$

Das Hilbert-Samuel-Polynom p von T ergibt sich also als

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \binom{x}{n-i} \quad (x \in \mathbb{Q})$$

mit Koeffizienten

$$c_i = \binom{n-1}{i} \quad (i = 0, \ldots, n).$$

Insbesondere ist $d = \deg p = n$ und $c_0 = 1$.

(b) Sei nun $X = H(\mathbb{B}_2)$ wie in (a) mit $n = 2$ und sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir betrachten den (abgeschlossenen) Teilraum

$$N_m = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} f_\alpha z^\alpha;\ f_\alpha = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } \alpha_2 \geq m \right\} \subset X$$

und die Orthogonalprojektion $P_m \in \mathcal{L}(X)$ auf N_m.
Wir definieren das Tupel $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{L}(X)^2$ durch

$$T_1 = M_{z_1} \quad \text{und} \quad T_2 = M_{z_2} P_m + (I_X - P_m)\,.$$

Man überlegt sich leicht, dass T ein vertauschendes Tupel ist und dass $M_k = M_k(T) \subset X$ für $k \in \mathbb{N}$ durch

$$M_k = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} f_\alpha z^\alpha;\ f_\alpha = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^2 \text{ mit } |\alpha| < k \text{ und } \alpha_2 < m \right\}$$

gegeben ist. Damit folgt

$$\dim (X/M_k) = \#\,\{\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| < k \text{ und } \alpha_2 < m\} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Für $k \geq m$ zeigt eine einfache Rechnung, dass

$$\#\,\{\alpha \in \mathbb{N}^n;\ |\alpha| < k \text{ und } \alpha_2 < m\} = m \cdot k - \binom{m}{2}$$

gilt. Wir erhalten somit das Hilbert-Samuel-Poylom p von T durch

$$p(x) = m \cdot x - \binom{m}{2} \quad (x \in \mathbb{Q}).$$

Hier gilt also $d = \deg p = 1$ und $c_0 = m$.
Man kann weiterhin zeigen, dass

$$\begin{aligned} A &= \left\{ z \in \mathbb{C}^2;\ 0 < \dim (X/(z_1 - T_1)X + (z_2 - T_2)X) < \infty \right\} \\ &= \mathbb{D} \times \{0\} \end{aligned}$$

gilt, wobei $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe sei. Damit ist 0 ein glatter Punkt der Menge A.
Für die in A stabilisierte Bild-Kodimension von T gilt

$$1 \leq c_A(T) \leq \dim \big(X/(T_1X + T_2X)\big) = 1.$$

Folglich ist

$$c_A(T) = 1 < c_0,$$

wenn man $m > 1$ gewählt hat. Dies zeigt, dass in 3.39 im Fall $d < n$ eine echte Ungleichung vorliegen kann.

KAPITEL 4

Der Spektralraum

Einleitung

In der lokalen Spektraltheorie betrachtet man zu einem Operator $T \in \mathcal{L}(X)$ auf einem Banachraum X und einer Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$ den (lokalen) Spektralraum $X_T(A) \subset X$ von T über A. Dieser besteht aus allen Vektoren $x \in X$, für die es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus A$ eine holomorphe Lösung $f \in \mathcal{O}(U, X)$ auf einer w-Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ von

$$(z - T)f(z) = x \quad (z \in U)$$

gibt. Falls A abgeschlossen ist, betrachtet man desweiteren den globalen Spektralraum $\mathcal{X}_T(A) \subset X$ von T über A. Dabei ist $x \in \mathcal{X}_T(A)$, falls eine globale Lösung $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A, X)$ von obiger Gleichung existiert. Diese Teilräume spielen eine wichtige Rolle bei der Untersuchung der Zerlegbarkeit des Operators T und der sogenannten 'Eindeutigen Fortsetzungseigenschaft' (Single-Valued Extension Property, SVEP). Eine ausführliche Erklärung dieser Zusammenhänge findet man zum Beispiel in [**11**] oder in [**36**].
Auch für Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ von Operatoren definiert man entsprechende Spektralräume im Rahmen der lokalen Spektraltheorie (vergleiche etwa [**18**]).
Ist $T \in \mathcal{L}(X)$ ein einzelner Operator mit

$$\dim (X/TX) < \infty,$$

so betrachtet man die Teilräume $M_k = T^k X$ $(k \in \mathbb{N})$ und

$$M = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k \subset X.$$

Offenbar ist M ein invarianter Teilraum für T, und man kann zeigen (siehe etwa [**12**], Seite 372), dass $TM = M$ ist. Einen möglichen Beweis für diese Identität erhält man, indem man zunächst zeigt, dass

$$M = X_T\left(\mathbb{C} \setminus \{0\}\right)$$

gilt. In [**1**] (Lemma 1) zeigen P. Aiena und M. Mbekhta die Gleichung $TM = M$ für alle Operatoren vom Kato-Typ in $\mathcal{L}(X)$. Diese Klasse umfasst insbesondere alle Semi-Fredholmoperatoren.

Wir wollen nun den Operator T durch ein Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ von Operatoren mit

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty$$

ersetzen. Die entsprechenden Teilräume $M_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ werden dabei rekursiv durch

$$M_0 = X \text{ und } M_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} T_j M_k \quad (k \in \mathbb{N})$$

definiert. Es stellt sich nun die Frage, ob die oben für $n = 1$ genannten Resultate auf diese Situation verallgemeinern werden können, das heißt, ob die Identitäten

$$\sum_{j=1}^{n} T_j M = M$$

beziehungsweise

$$M = X_T\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right)$$

gelten. Die erste Aussage entspricht für den Fall, dass X ein Hilbertraum und T ein vertauschendes Tupel ist, einer Vermutung von X. Fang (siehe [**22**], Conjecture B).

In diesem Kapitel zeigen wir zunächst die Inklusion

$$M \subset X_T\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right),$$

und dass Gleichheit gilt, falls T zusätzlich vertauschend ist.

Als Beispiel für ein nichtvertauschendes Tupel, bei dem hierbei eine echte Inklusion vorliegt, berechnen wir $X_S\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right)$ für den Shift S auf dem Fockraum und erhalten dafür das orthogonale Komplement des symmetrischen Anteils des Fockraums.

Ein weiteres Resultat dieses Kapitels ist ein Abgeschlossenheitssatz für holomorphe Funktionen $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X)$ auf einer offenen Nullumgebung $D \subset \mathbb{C}^n$ in die stetig linearen Operatoren zwischen Banachräumen X, Y mit

$$\dim\left(Y/\alpha(0)X\right) < \infty.$$

Er besagt, dass das Bild der von α induzierten stetig linearen Abbildung

$$\alpha_U : \mathcal{O}(U, Y) \to \mathcal{O}(U, X)$$

zwischen Frécheträumen stets abgeschlossen ist, wenn U Steinsch und in einer genügend kleinen Nullumgebung enthalten ist.

Betrachtet man speziell die holomorphe Funktion

$$\alpha_T : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X),\ \alpha(z) = z - T$$

für einen Banachraum X und einen einzelnen Operator $T \in \mathcal{L}(X)$, so zeigt J. Eschmeier in [**15**] die Abgeschlossenheit des Bildes von $(\alpha_T)_U$ für jede offene Teilmenge U der wesentlichen Resolventenmenge von T. Dies verallgemeinern T. L. Miller, V. G. Miller und M. M. Neumann in [**41**] auf Teilmengen U der 'Kato-Typ-Resolventenmenge' von T. Eine weitere Verbesserung dieses Resultats erzielen T. L. Miller und V. Müller in [**42**]. Dort wird auch gezeigt, dass es eine größte offene Menge $V \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass T die sogenannte 'closed range property' auf V hat, das heißt, dass das Bild von $(\alpha_T)_U$ für alle offenen Teilmengen $U \subset V$ abgeschlossen ist.
Für analytisch parametrisierte Komplexe von Banachräumen (beispielsweise den Koszul-Komplex eines vertauschenden Operatortupels) zeigt E. Réolon in [**49**] vergleichbare Aussagen bezüglich der Abgeschlossenheit der Bilder der induzierten Abbildungen über offenen Mengen, die Teilmenge der wesentlichen Split-Resolventenmenge des Komplexes sind.
Eine Anwendung unseres Abgeschlossenheitssatzes ist es, die Abgeschlossenheit gewisser globaler Spektralräume für ein Tupel $T \in \mathcal{L}(X)^n$ mit

$$\dim\left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty$$

zu zeigen. Die Abgeschlossenheit des entsprechenden lokalen Spektralraums $X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$ erhält man im vertauschenden Fall aus der gezeigten Identität $M = X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$. Mit dem Satz von Baire können wir aus diesen Resultaten schließlich folgern, dass stets

$$X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U)$$

für eine geeignete Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ gilt, falls T vertauschend ist.
Wir beschließen das Kapitel mit einigen offenen Fragen, darunter nochmals die Vermutung von X. Fang (siehe oben). Es bleibt weiter offen, ob sie Gültigkeit besitzt.

Definition und Eigenschaften des Spektralraums

Wir wollen in diesem Abschnitt für ein Tupel $T = (T_1, \dots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ von stetig linearen Operatoren auf einem Banachraum X die Definition des Spektralraums über einer Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$ angeben. Wir untersuchen dann speziell den Fall, dass

$$\dim\left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty$$

gilt und $A = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ist. Wir vergleichen dabei den Spektralraum über A mit dem Durchschnitt der bereits im vorigen Kapitel vorkommenden Teilräume

$M_k(T) \subset X$ ($k \in \mathbb{N}$). Anschließend betrachten wir als Beispiel den Shift auf dem Fockraum.

Wir beginnen mit der Definition des Spektralraums.

Definition 4.1.

Sei X ein Banachraum und $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$\alpha_T : \mathbb{C}^n \to \mathcal{L}(X^n, X), \; z \mapsto (z_1 - T_1, \ldots, z_n - T_n).$$

(a) Für $x \in X$ heißt die Menge

$$\rho_T(x) = \bigcup \big(U; \; U \subset \mathbb{C}^n \text{ offen mit } \alpha_T f \equiv x \text{ für ein } f \in \mathcal{O}(U, X^n)\big)$$

lokale Resolventenmenge von T in x und die Menge

$$\sigma_T(x) = \mathbb{C}^n \setminus \rho_T(x)$$

lokales Spektrum von T in x.

(b) Für $A \subset \mathbb{C}^n$ heißt

$$X_T(A) = \{x \in X; \; \sigma_T(x) \subset A\} \subset X$$

Spektralraum von T über A.

(c) Für eine abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{C}^n$ schreiben wir

$$\mathcal{X}_T(F) = \{x \in X; \text{ es ist } \alpha_T f \equiv x \text{ für ein } f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus F, X^n)\} \subset X.$$

Bemerkung 4.2.

Sei X ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)^n, A \subset \mathbb{C}^n$ und $x \in X$. Aus Definition 4.1 erhält man unmittelbar, dass $x \in X_T(A)$ genau dann gilt, wenn es zu jedem Punkt $w \in \mathbb{C}^n \setminus A$ eine offene w-Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}(U, X)$ gibt mit

$$\sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j) f_j(z) = x \quad (z \in U).$$

Sei nun X ein Banachraum und $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ ein Tupel von stetig linearen Operatoren auf X mit

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty.$$

Wie zuvor definieren wir die Teilräume

$$M_k = M_k(T) \subset X \quad (k \in \mathbb{N})$$

rekursiv durch

$$M_0 = X \text{ und } M_{k+1} = \sum_{j=1}^{n} T_j M_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Weiterhin sei

$$M = M(T) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k.$$

Da alle $M_k \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ abgeschlossen sind (siehe 3.3), ist auch $M \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum.
Wir betrachten weiterhin die zu T assoziierte Garbe

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(T) = \mathcal{O}_D^X / \alpha_T \mathcal{O}_D^{X^n}$$

auf der offenen Menge

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n;\ \dim\left(X/\alpha_T(z)X^n\right) < \infty\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Nach 3.10 ist $\mathcal{H}$ eine kohärente $\mathcal{O}_D$-Garbe. Insbesondere ist damit der Halm von $\mathcal{H}$ in 0

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{O}_0^X \,/ \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, \mathcal{O}_0^X$$

ein endlich erzeugter Modul über dem noetherschen lokalen Ring $\mathcal{O}_0$. Wir haben in 3.21 gezeigt, dass die Abbildung

$$\phi : X \to \mathcal{H}_0,\ \phi x = [x] = x + \sum_{j=1}^{n} (z_j - T_j)\, \mathcal{O}_0^X$$

wohldefinierte $\mathbb{C}$-lineare Abbildungen

$$\phi_k : X/M_k \to \mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0,\ x + M_k \mapsto \phi x + \mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

induziert. Dabei sei $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_0$ das (eindeutig bestimmte) maximale Ideal. In 3.22 (c) wurde gezeigt, dass die Abbildungen ϕ_k $(k \in \mathbb{N})$ injektiv sind, falls T ein vertauschendes Tupel ist.
Wir wollen im Folgenden den Spektralraum von T über $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ mit M vergleichen. Zunächst folgt aus 4.2, dass

$$\ker \phi = X_T\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right)$$

gilt. Wir betrachten außerdem die $\mathbb{C}$-linearen Abbildungen

$$\pi : X \to \prod_{k\in\mathbb{N}} (X/M_k)\,,\ x \mapsto (x + M_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

und

$$\rho : \mathcal{H}_0 \to \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0\right),\ u \mapsto \left(u + \mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0\right)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Mit ϕ und der durch die ϕ_k $(k \in \mathbb{N})$ bestimmten $\mathbb{C}$-linearen Abbildung

$$(\phi_k)_k : \prod_{k\in\mathbb{N}} (X/M_k) \to \prod_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathcal{H}_0/\mathfrak{m}^k\mathcal{H}_0\right),\ (\xi_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto (\phi_k\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$$

erfüllen π und ρ offenbar die Vertauschungsrelation

$$(\phi_k)_k \circ \pi = \rho \circ \phi.$$

Der Kern von π ist gegeben durch

$$\ker \pi = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k = M.$$

Da $\mathcal{H}_0$ ein endlich erzeugter Modul über dem lokalen noetherschen Ring $\mathcal{O}_0$ ist, zeigt der Krullsche Durchschnittssatz (siehe [**35**], ChapterVI, Satz 7.6), dass

$$\ker \rho = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathfrak{m}^k \mathcal{H}_0\right) = \{0\}.$$

Wir können nun folgern, dass M stets im Spektralraum von T über $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ enthalten ist, und im vertauschenden Fall mit diesem übereinstimmt.

Satz 4.3.
Es gilt

$$X_T\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right) \supset M.$$

Falls T vertauschend ist, gilt Gleichheit.

Beweis.
Aus der Injektivität von ρ und den weiteren Vorüberlegungen folgt

$$X_T\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right) = \ker \phi = \ker \left(\rho \circ \phi\right) = \ker \left((\phi_k)_k \circ \pi\right) \supset \ker \pi = M.$$

Ist T vertauschend, so sind zusätzlich alle ϕ_k ($k \in \mathbb{N}$) injektiv. Damit ist dann auch $(\phi_k)_k$ injektiv und wir erhalten Gleichheit in obiger Rechnung. $\square$

Wir rekapitulieren nun einige Bezeichnungen aus dem ersten Kapitel.
Es sei F die freie Halbgruppe über den Erzeugern $1, \ldots, n$ und

$$\mathcal{F}^2 = \left\{ (x_a)_{a\in F};\ \sum_{a\in F} |x_a|^2 < \infty \right\}$$

der Fockraum. Wir betrachten den natürlichen Halbgruppenhomomorphismus $\mu : F \to \mathbb{N}^n$. Weiterhin sei

$$\mathcal{F}^2_+ = \left\{ (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2;\ x_a = x_b \text{ für alle } a, b \in F \text{ mit } \mu(a) = \mu(b) \right\} \subset \mathcal{F}^2$$

der symmetrische Fockraum und $P_+ : \mathcal{F}^2 \to \mathcal{F}^2_+$ die Orthogonalprojektion. Offenbar ist

$$\left(\mathcal{F}^2_+\right)^\perp = \left\{ (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2;\ \sum_{a\in\mu^{-1}(\alpha)} x_a = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Es sei nun $S = (S_1, \ldots, S_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ der Linksvorwärtsshift auf $\mathcal{F}^2$. Wir wollen zeigen, dass der Spektralraum von S über $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gleich $(\mathcal{F}^2_+)^\perp$ ist.

Zunächst machen wir dazu eine allgemeine Beobachtung über den Spektralraum der Kompression eines Operatortupels auf einen $*$-invarianten Teilraum.

LEMMA 4.4.
Sei $\mathcal{E}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})^n$ und $\mathcal{N} \subset \mathcal{E}$ ein abgeschlossener $*$-invarianter Teilraum für $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_n$. Weiter sei $P_{\mathcal{N}} : \mathcal{E} \to \mathcal{N}$ die Orthogonalprojektion und $\mathcal{T}^{\mathcal{N}} \in \mathcal{L}(\mathcal{N})^n$ gegeben durch

$$\mathcal{T}_j^{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}} \mathcal{T}_j|_{\mathcal{N}} \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Dann gilt für eine Teilmenge $A \subset \mathbb{C}^n$

$$P_{\mathcal{N}} X_{\mathcal{T}}(A) \subset X_{\mathcal{T}^{\mathcal{N}}}(A).$$

BEWEIS.
Sei $x \in X_{\mathcal{T}}(A)$ gegeben und $w \in \mathbb{C}^n \setminus A$ beliebig. Dann gibt es nach 4.2 eine offene w-Umgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ und holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_n : U \to \mathcal{E}$ mit

$$x = \sum_{j=1}^{n} (z_j - \mathcal{T}_j) f_j(z) \quad (z \in U).$$

Da $\mathcal{N}$ $*$-invariant für $\mathcal{T}$ ist, gilt

$$P_{\mathcal{N}} \mathcal{T}_j y = P_{\mathcal{N}} \mathcal{T}_j P_{\mathcal{N}} y \quad (y \in \mathcal{E}).$$

Die Darstellung

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{N}} x &= P_{\mathcal{N}} \left(\sum_{j=1}^{n} (z_j - \mathcal{T}_j) f_j(z) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (z_j - P_{\mathcal{N}} \mathcal{T}_j) P_{\mathcal{N}} f_j(z) \quad (z \in U) \end{aligned}$$

zeigt, dass $w \notin \sigma_{\mathcal{T}^{\mathcal{N}}}(P_{\mathcal{N}} x)$ ist. Da $w \in \mathbb{C}^n \setminus A$ beliebig war, folgt

$$P_{\mathcal{N}} x \in X_{\mathcal{T}^{\mathcal{N}}}(A),$$

was zu zeigen war. □

Aus diesem Lemma können wir nun leicht folgern, dass der Spektralraum von S über $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ im orthogonalen Komplement des symmetrischen Fockraums enthalten ist.

KOROLLAR 4.5.
Es gilt

$$X_S(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \subset \left(\mathcal{F}_+^2\right)^{\perp}.$$

Beweis.
Es sei $S_+ = \left(P_+S_1|_{\mathcal{F}^2_+}, \dots, P_+S_n|_{\mathcal{F}^2_+}\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2_+)^n$. Offenbar gilt

$$M_k(S_+) = \{(x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2_+;\ x_a = 0 \text{ für alle } a \in F \text{ mit } |a| < k\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

und folglich ist $M(S_+) = \{0\}$. Da S_+ ein vertauschendes Tupel ist, folgt aus 4.3, dass

$$X_{S_+}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = M(S_+) = \{0\}$$

gilt. Da $\mathcal{F}^2_+$ $*$-invariant für S ist, erhalten wir aus 4.4, dass

$$P_+X_S(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \subset X_{S_+}(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \{0\}$$

gilt. Dies impliziert die Behauptung. □

Wie zuvor sei nun

$$\mathbb{B} = \mathbb{B}_n = \{z \in \mathbb{C}^n;\ |z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$$

die offene Einheitskugel. Wir zeigen im Folgenden, dass

$$\left(\mathcal{F}^2_+\right)^{\perp} = \mathcal{X}_S(\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B})$$

gilt und erhalten daraus insbesondere auch die umgekehrte Inklusion in 4.5. Dazu benutzen wir den folgenden Satz. Er ist ein Spezialfall eines Resultats von R. Janz über die Existenz einer holomorphen Lösung f der Gleichung

$$\alpha f = g$$

für eine reguläre holomorphe Funktion

$$\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X) \ (X, Y \text{ Banachräume})$$

auf einer Steinschen offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Man siehe dazu Korollar 16 in [**29**] (und Proposition 2.3 in [**39**]).

Satz 4.6.
Seien X, Y Banachräume und $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ eine Steinsche offene Menge. Sei weiterhin

$$\alpha : \Omega \to \mathcal{L}(Y, X)$$

holomorph, so dass eine Zahl $d \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\dim(X/\alpha(z)Y) = d \quad (z \in \Omega).$$

Dann existiert zu jeder holomorphen Funktion $g : \Omega \to X$ mit $g(z) \in \alpha(z)Y$ für alle $z \in \Omega$ eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to Y$ mit

$$\alpha(z)f(z) = g(z) \quad (z \in \Omega).$$

Wir wollen dieses Resultat auf die Funktion

$$\alpha_S : \mathbb{B} \to \mathcal{L}\big((\mathcal{F}^2)^n, \mathcal{F}^2\big),\ \alpha_S(z) = (z_1 - S_1, \ldots, z_n - S_n)$$

anwenden. Dazu müssen wir zeigen, dass die Räume

$$\alpha_S(z)\left(\mathcal{F}^2\right)^n = \sum_{j=1}^{n}(z_j - S_j)\mathcal{F}^2 \subset \mathcal{F}^2 \quad (z \in \mathbb{B})$$

von konstanter endlicher Kodimension sind. Genauer gilt folgendes Lemma.

Lemma 4.7.
Für $w \in \mathbb{B}$ sei $\epsilon_w = (\bar{w}_a)_{a\in F}$. Dann ist $\epsilon_w \in \mathcal{F}^2_+$ und es gilt

$$\sum_{j=1}^{n}(w_j - S_j)\mathcal{F}^2 = \{\epsilon_w\}^{\perp} \quad (w \in \mathbb{B}).$$

Beweis.
Sei $w \in \mathbb{B}$. Zunächst gilt

$$\sum_{a\in F}|\bar{w}_a|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|a|=k}|w_a|^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}|w_j|^2\right)^k = \frac{1}{1-|w|^2} < \infty.$$

Folglich ist $\epsilon_w \in \mathcal{F}^2$ mit

$$\|\epsilon_w\|^2 = \frac{1}{1-|w|^2}.$$

Für $a, b \in F$ mit $\mu(a) = \mu(b)$, ist offensichtlich $\bar{w}_a = \bar{w}_b$. Also ist $\epsilon_w \in \mathcal{F}^2_+$.
Weiterhin gilt für alle $j = 1, \ldots, n$, dass

$$(w_j - S_j)^*\epsilon_w = \left(\bar{w}_j\bar{w}_a - \bar{w}_{(j,a)}\right)_{a\in F} = 0$$

und somit ist

$$\epsilon_w \perp (w_j - S_j)\mathcal{F}^2 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n}(w_j - S_j)\mathcal{F}^2 \subset \{\epsilon_w\}^{\perp}.$$

Für die umgekehrte Inklusion betrachten wir zunächst zu $x = (x_a)_{a\in F} \in \mathcal{F}^2$ und $z \in \mathbb{B}$ die Reihe

$$f_x(z) = \sum_{b\in F} z_b \cdot S_b^* x.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{|b|=k}\|S_b^* x\|^2 = \sum_{|a|\geq k}|x_a|^2 \leq \|x\|^2$$

und

$$\sum_{|b|=k} |z_b|^2 = \left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2 \right)^k = |z|^{2k}.$$

Daraus folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
\sum_{b \in F} |z_b| \cdot \|S_b^* x\| &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{|b|=k} |z_b| \cdot \|S_b^* x\| \\
&\leq \sum_{k=0}^\infty \left(\sum_{|b|=k} |z_b|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{|b|=k} \|S_b^* x\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{k=0}^\infty |z|^k \cdot \|x\| \\
&= \frac{1}{1-|z|} \cdot \|x\| < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich konvergiert $f_x(z) \in \mathcal{F}^2$ für $x \in \mathcal{F}^2$ und $z \in \mathbb{B}$.
Sei nun $x = (x_a)_{a \in F}$ beliebig. Nach 1.1 gilt

$$\sum_{j=1}^n S_j S_j^* = I - P_0$$

mit der Orthogonalprojektion $P_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)$ auf $\langle e_0 \rangle$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n (w_j - S_j) S_j^* f_x(w) &= \sum_{j=1}^n \sum_{b \in F} w_{(b,j)} S_{(b,j)}^* x - (I - P_0) \sum_{b \in F} w_b S_b^* x \\
&= \sum_{0 \neq b \in F} w_b S_b^* x - \sum_{b \in F} w_b S_b^* x + \sum_{b \in F} w_b P_0 S_b^* x \\
&= -x + \left(\sum_{b \in F} w_b x_b \right) \cdot e_0 \\
&= -x + \langle x, \epsilon_w \rangle \cdot e_0.
\end{aligned}$$

Ist $x \in \{\epsilon_w\}^\perp$, so folgt daraus

$$x = -\sum_{j=1}^n (w_j - S_j) S_j^* f_x(w) \in \sum_{j=1}^n (w_j - S_j) \mathcal{F}^2,$$

was zu zeigen war. □

Wir können nun den Spektralraum von S über $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ angeben.

Satz 4.8.
Es gilt

$$\mathcal{X}_S(\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B}) = X_S(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = (\mathcal{F}_+^2)^\perp.$$

Beweis.
Nach 4.2 und 4.5 gilt

$$\mathcal{X}_S(\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B}) \subset X_S(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \subset (\mathcal{F}^2_+)^\perp.$$

Für $x \in (\mathcal{F}^2_+)^\perp$ folgt aus 4.7, dass $x \in \alpha_S(z)\mathcal{F}^2$ für alle $z \in \mathbb{B}$ ist. Außerdem zeigt 4.7, dass

$$\dim\left(\mathcal{F}^2/\alpha(z)(\mathcal{F}^2)^n\right) = 1 \quad (z \in \mathbb{B}).$$

Folglich können wir 4.6 auf $\alpha_S|_{\mathbb{B}}$ und die konstante Funktion

$$g : \mathbb{B} \to \mathcal{F}^2,\ z \mapsto x$$

anwenden. Es existiert also ein $f \in \mathcal{O}\left(\mathbb{B}, (\mathcal{F}^2)^n\right)$ mit

$$\alpha_S f \equiv x \quad \text{auf } \mathbb{B}.$$

Also ist gezeigt, dass $x \in \mathcal{X}_S(\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B})$ ist. Dies beendet den Beweis. □

Wir wollen zu diesem Satz und seinem Beweis noch einige Anmerkungen vornehmen.

Bemerkung 4.9.

(a) Ist $x \in \mathcal{F}^2$ und $f_x(z) \in \mathcal{F}^2$ für $z \in \mathbb{B}$ wie im Beweis von 4.7 definiert, so überlegt man sich leicht, dass die dadurch definierte Funktion

$$f_x : \mathbb{B} \to \mathcal{F}^2,\ z \mapsto f_x(z)$$

holomorph auf $\mathbb{B}$ ist. Betrachtet man nun zu einem gegebenen Element $x \in (\mathcal{F}^2_+)^\perp$ die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{B} \to (\mathcal{F}^2)^n,\ z \mapsto \left(S_j^* f_x(z)\right)_{j=1}^n,$$

so folgt wie im Beweis von 4.7, dass $\alpha_S f \equiv -x$ auf $\mathbb{B}$ gilt. Dies liefert somit einen weiteren Beweis für die Inklusion

$$(\mathcal{F}^2_+)^\perp \subset \mathcal{X}_S(\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{B})$$

ohne die Benutzung von 4.6.

(b) Mit 4.8 sieht man, dass in Satz 4.3 eine echte Inklusion vorliegen kann, wenn das gegebene Tupel nichtvertauschend ist. Man beachte dazu, dass für den Shift S auf dem Fockraum

$$M_k(S) = \{(x_a)_{a \in F} \in \mathcal{F}^2;\ x_a = 0 \text{ für alle } a \in F \text{ mit } |a| < k\}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Daher ist

$$M(S) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k(S) = \{0\} \subsetneq (\mathcal{F}^2_+)^\perp = X_S\left(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right).$$

(c) Wir wollen am Ende dieses Kapitels auf die Frage eingehen, ob zu einem beliebigen Operatortupel $T \in \mathcal{L}(X)^n$ auf einem Banachraum X mit

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty$$

eine Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ existiert mit

$$\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U) = X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}).$$

In 4.8 wurde gezeigt, dass dies für $T = S$ richtig ist.

Ein Abgeschlossenheitssatz

Für einen Banachraum X und eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ sei $\mathcal{O}(U, X)$ in diesem Abschnitt stets mit der durch das Halbnormensystem

$$\big(\, \|\cdot\|_{\infty,K}, K \subset U \text{ kompakt } \big)$$

gegebenen Fréchetraum-Topologie versehen.
Sind X, Y Banachräume, $D \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung und

$$\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X)$$

eine holomorphe Funktion, so ist für jede offene Teilmenge $U \subset D$ die Abbildung

$$\alpha_U : \mathcal{O}(U, Y) \to \mathcal{O}(U, X), \; (\alpha_U f)(z) = \alpha(z) f(z)$$

stetig linear zwischen Frécheträumen.
Für den Fall, dass zusätzlich $0 \in D$ und

$$\dim\left(Y/\alpha(0)X\right) < \infty$$

gilt, wollen wir in diesem Abschnitt zeigen, dass eine Nullumgebung $V \subset D$ existiert, so dass α_U für jede Steinsche offene Menge $U \subset V$ abgeschlossenes Bild hat. Der Beweis wird dabei in mehreren Schritten vorgenommen, wobei wir die behauptete Aussage zuerst unter geeigneten Zusatzannahmen und schließlich in voller Allgemeinheit zeigen.
Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen und erläutern in der folgenden Bemerkung zunächst die Identifizierung von holomorphen Banachraum-wertigen Funktionen mit Schnitten in die entsprechende Garbe. Außerdem erklären wir, wie eine holomorphe Funktion $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X)$ wie oben, als Abbildung

$$\Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^Y\right) \to \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right) \quad (U \subset D \text{ offen})$$

zwischen Schnitträumen verstanden werden kann.

Bemerkung 4.10.

(a) Sei X ein Banachraum und $D \subset \mathbb{C}^n$ offen. Für $U \subset D$ bezeichne $\Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right)$ den Raum der Schnitte in die Garbe $\mathcal{O}_D^X$ über U. Die Abbildung

$$\mathcal{O}(U,X) \to \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right), \; f \mapsto \left(U \to \mathcal{O}_D^X, \; z \mapsto f_z\right)$$

ist ein Isomorphismus von komplexen Vektorräumen. Die Topologie auf $\Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right)$, die diesen zu einem Homöomorphismus macht, heißt kanonische Topologie. Sie macht $\Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right)$ zu einem Fréchetraum. Wir haben damit also eine topologische Identifizierung von $\Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right)$ mit $\mathcal{O}(U,X)$.

(b) Seien X, Y Banachräume, $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha \in \mathcal{O}\left(D, \mathcal{L}(Y,X)\right)$. Wie in 3.9 (a) beschrieben induziert α einen $\mathcal{O}_D$-Morphismus $\alpha : \mathcal{O}_D^Y \to \mathcal{O}_D^X$. Für $U \subset D$ offen erhalten wir damit eine Abbildung

$$\alpha_U : \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^Y\right) \to \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^X\right), \; \alpha_U s = \alpha \circ s$$

zwischen den Schnitträumen über U. Man beachte dabei, dass diese mittels der Identifizierung aus (a) mit der zuvor definierten Abbildung $\alpha_U : \mathcal{O}(U,Y) \to \mathcal{O}(U,X)$ übereinstimmt.

(c) In der Situation von (b) betrachten wir die Bildgarbe $\alpha\mathcal{O}_D^Y \subset \mathcal{O}_D^X$. Für $s \in \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^Y\right)$ ist

$$\left(\alpha_U s\right)(z) = \alpha\left(s(z)\right) \in \alpha\mathcal{O}_D^Y \quad (z \in U).$$

Daher ist $\alpha_U s$ ein Schnitt in die Garbe $\alpha\mathcal{O}_D^Y$ und somit folgt

$$\alpha_U \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^Y\right) \subset \Gamma\left(U, \alpha\mathcal{O}_D^Y\right).$$

Im Allgemeinen ist allerdings nicht jeder Schnitt in die Bildgarbe $\alpha\mathcal{O}_D^Y$ über U das Bild eines Schnittes in $\mathcal{O}_D^Y$ unter α_U.

Wir betrachten nun speziell den Fall, dass X endlichdimensional ist. Das folgende Lemma erhält man als Spezialfall eines Resultats von A. Markoe (siehe [**40**], Proposition 5).

Lemma 4.11.
Seien $p \in \mathbb{N}^*$, Y ein Banachraum, $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, \mathbb{C}^p)$ holomorph. Dann ist

$$\alpha\mathcal{O}_D^Y \subset \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}^p}$$

eine kohärente Untergarbe.

Wir können nun aus diesem Lemma mithilfe einiger weiterer wohlbekannter Tatsachen aus der Theorie analytischer Garben folgern, dass in 4.10 (c) Gleichheit gilt, falls X endlichdimensional und U Steinsch ist.

Lemma 4.12.
Seien $p \in \mathbb{N}^*$, Y ein Banachraum, $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, \mathbb{C}^p)$ holomorph. Dann ist

$$\alpha_U \Gamma\left(U, \mathcal{O}_D^Y\right) = \Gamma\left(U, \alpha\mathcal{O}_D^Y\right)$$

für jede Steinsche offene Menge $U \subset D$.

Beweis.
Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass D Steinsch und $U = D$ ist (sonst ersetze D durch U). Wir betrachten die kurze exakte Sequenz analytischer Garben

$$0 \to \ker \alpha \hookrightarrow \mathcal{O}_D^Y \overset{\alpha}{\to} \alpha\mathcal{O}_D^Y \to 0.$$

Darin sind $\mathcal{O}_D^Y$ und $\alpha\mathcal{O}_D^Y$ Banach-kohärente $\mathcal{O}_D$-Garben im Sinne von J. Leiterer [**37**]. Für $\mathcal{O}_D^Y$ ist diese Behauptung klar und für $\alpha\mathcal{O}_D^Y$ folgt sie aus 4.11, da kohärente Garben stets Banach-kohärent sind.
Mit Proposition 4.5.7 in [**18**] folgt hieraus, dass auch $\ker \alpha$ Banach-kohärent ist. Insbesondere ist $\ker \alpha$ damit (nach Satz 4.5.2 und Proposition 4.3.3 in [**18**]) azyklisch über D. Aus Satz 18.4 (und Satz 18.3) in [**33**] folgt schließlich, dass auch die induzierte Schnittsequenz über D

$$0 \to \Gamma\left(D, \ker \alpha\right) \hookrightarrow \Gamma\left(D, \mathcal{O}_D^Y\right) \overset{\alpha_D}{\to} \Gamma\left(D, \alpha\mathcal{O}_D^Y\right) \to 0$$

exakt ist. Dies impliziert die behauptete Gleichheit

$$\alpha_D \Gamma\left(D, \mathcal{O}_D^Y\right) = \Gamma\left(D, \alpha\mathcal{O}_D^Y\right).$$

□

In der folgenden Bemerkung erklären wir die kanonische Topologie auf den Schnitträumen in eine kohärente analytische Garbe über einer offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^n$.

Bemerkung 4.13.
Ist $\mathcal{F}$ eine kohärente Garbe über einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}^n$, so kann man den Schnittraum $\Gamma\left(D, \mathcal{F}\right)$ topologisieren, indem man eine offene Überdeckung

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

aus Steinschen offenen Mengen $U_n \subset D$ wählt, so dass über jedem U_n ein surjektiver Garbenmorphismus

$$\left(\mathcal{O}_{U_n}\right)^{r_n} \xrightarrow{\varphi_n} \mathcal{F}|_{U_n}$$

existiert, die Räume $\Gamma(U_n, \mathcal{F})$ mit der Quotiententopologie der induzierten surjektiven Schnittabbildungen

$$\mathcal{O}(U_n)^{r_n} \xrightarrow{\varphi_n} \Gamma(U_n, \mathcal{F})$$

versieht und den Schnittraum $\Gamma(D, \mathcal{F})$ mit dem Kern der stetig linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \prod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma(U_n, \mathcal{F}) \quad &\to \quad \prod_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \Gamma(U_n \cap U_m, \mathcal{F}), \\ (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad &\mapsto \quad \left(s_n|_{U_n \cap U_m} - s_m|_{U_n \cap U_m}\right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} \end{aligned}$$

identifiziert. Die resultierende Fréchetraumtopologie auf $\Gamma(D, \mathcal{F})$ ist unabhängig von der Wahl von U_n und φ_n ($n \in \mathbb{N}$) und heißt kanonische Topologie des Schnittraums $\Gamma(D, \mathcal{F})$. Sie stimmt mit der in 4.10 (a) erklärten kanonischen Topologie überein, wenn $\mathcal{F} = \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}^p}$ mit $p \in \mathbb{N}^*$ ist.

Wir können nun folgern, dass α_U für Steinsches U und endlichdimensionales X abgeschlossenes Bild hat. Zentraler Bestandteil des Beweises ist dabei der folgende Abgeschlossenheitssatz für kohärente Garben (vergleiche [**24**], Kapitel V, §6.4).

Satz 4.14. *(Abgeschlossenheitssatz für kohärente Garben)*
Ist $D \subset \mathbb{C}^n$ offen, $\mathcal{T}$ eine kohärente $\mathcal{O}_D$-Garbe und $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ eine kohärente $\mathcal{O}_D$-Untergarbe, so ist $\Gamma(D, \mathcal{S}) \subset \Gamma(D, \mathcal{T})$ abgeschlossen.

Damit erhalten wir die erste Version des gesuchten Abgeschlossenheitssatzes.

Korollar 4.15.
Seien $p \in \mathbb{N}^*$, Y ein Banachraum, $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, \mathbb{C}^p)$ holomorph. Dann ist

$$\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \subset \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^p)$$

für jede Steinsche offene Menge $U \subset D$ abgeschlossen.

Beweis.
Wir können wiederum annehmen, dass D Steinsch und $U = D$ ist. Nach 4.11 ist $\alpha \mathcal{O}_D^Y \subset \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}^p}$ eine kohärente Untergarbe einer kohärenten $\mathcal{O}_D$-Garbe. Also folgt aus Lemma 4.12 und Satz 4.14, dass

$$\alpha_D \Gamma\left(D, \mathcal{O}_D^Y\right) = \Gamma\left(D, \alpha \mathcal{O}_D^Y\right) \subset \Gamma\left(D, \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}^p}\right)$$

abgeschlossen ist. Unter der in Bemerkung 4.10 (a) und (b) beschriebenen topologischen Identifizierung entspricht dies der Abgeschlossenheit von

$$\alpha_D \mathcal{O}(D, Y) \subset \mathcal{O}(D, \mathbb{C}^p).$$

□

Wir ersetzen im Folgenden den endlichdimensionalen Raum $\mathbb{C}^p$ wieder durch einen beliebigen Banachraum X. Das folgende Lemma ist eine weitere Vorstufe zum Hauptresultat dieses Abschnitts, wobei wir zusätzlich annehmen, dass der Kern des Operators $\alpha(0)$ stetig projiziert ist. Zum Beweis benutzen wir eine Matrixdarstellung von α und führen die Behauptung auf 4.15 zurück. Die Idee zu dieser Konstruktion stammt aus einer Arbeit von J. Eschmeier (siehe dazu [**17**], Beweis von Satz 1.1).

Lemma 4.16.
Seien X, Y Banachräume, $D \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung und

$$\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X)$$

eine holomorphe Funktion mit

$$\dim(Y/\alpha(0)X) < \infty.$$

Falls $\ker \alpha(0) \subset Y$ *stetig projiziert ist, existiert eine offene Nullumgebung $V \subset D$, so dass*

$$\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \subset \mathcal{O}(U, X)$$

abgeschlossen ist für jede Steinsche offene Menge $U \subset V$.

Beweis.
Wir schreiben

$$T = \alpha(0) \in \mathcal{L}(Y, X)$$

und setzen voraus, dass $\ker T \subset Y$ stetig projiziert ist. Dann gibt es einen abgeschlossenen Teilraum $N \subset Y$ mit

$$Y = N \dot{+} \ker T.$$

Außerdem ist $TY \subset X$ von endlicher Kodimension, also gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum $M \subset X$ mit

$$X = TY \dot{+} M.$$

Folglich sind die Projektionsabbildungen bezüglich dieser Zerlegungen

$$P_N : Y \to N,\ P_{\ker T} : Y \to \ker T,\ P_{TY} : X \to TY \text{ und } P_M : X \to M$$

stetig lineare Operatoren zwischen Banachräumen. Wir betrachten nun für alle $z \in D$ die Matrixdarstellung

$$\alpha(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(N \dot{+} \ker T, TY \dot{+} M)$$

von $\alpha(z)$ bezüglich den gegebenen Zerlegungen von X und Y und erhalten so holomorphe Funktionen

$$\begin{array}{ll} a : D \to \mathcal{L}(N, TY), & a(z) = P_{TY}\alpha(z)|_N \\ b : D \to \mathcal{L}(\ker T, TY), & b(z) = P_{TY}\alpha(z)|_{\ker T} \\ c : D \to \mathcal{L}(N, M), & c(z) = P_M\alpha(z)|_N \\ d : D \to \mathcal{L}(\ker T, M), & d(z) = P_M\alpha(z)|_{\ker T}. \end{array}$$

Wir betrachten weiterhin die 1-direkte Summe $N \oplus M$ von Banachräumen und die holomorphe Funktion

$$\beta : D \to \mathcal{L}\,(N \oplus M, X)$$

mit

$$\beta(z)(n, m) = \alpha(z)n + m \quad (z \in D,\ (n, m) \in N \oplus M).$$

Da die Operatoren $a(0)$ und $\beta(0)$ offensichtlich invertierbar sind, gibt es eine offene Nullumgebung $V \subset D$, so dass $a(z)$ und $\beta(z)$ für alle $z \in V$ invertierbar sind. Wir setzen

$$\delta : V \to \mathcal{L}(\ker T, M),\ \delta(z) = d(z) - c(z)a(z)^{-1}b(z).$$

Damit ist δ eine holomorphe Funktion auf V.
Sei nun $U \subset V$ eine beliebige offene Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass

$$\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) = \mathcal{O}(U, M) \cap \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$$

gilt (vergleiche dazu auch [**17**]).
Sei zunächst $f \in \mathcal{O}(U, \ker T)$. Wir betrachten

$$g : U \to Y,\ g(z) = f(z) - a(z)^{-1}b(z)f(z).$$

Dann ist $g \in \mathcal{O}(U, Y)$ und es gilt

$$\begin{aligned} & \alpha(z)g(z) \\ = \ & \alpha(z)f(z) - \alpha(z)a(z)^{-1}b(z)f(z) \\ = \ & b(z)f(z) + d(z)f(z) - a(z)a(z)^{-1}b(z)f(z) - c(z)a(z)^{-1}b(z)f(z) \\ = \ & \delta(z)f(z) \quad (z \in U). \end{aligned}$$

Also ist $\alpha_U g = \delta_U f$. Dies zeigt $\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \subset \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$. Offensichtlich ist auch $\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \subset \mathcal{O}(U, M)$.
Sei nun umgekehrt $h \in \mathcal{O}(U, M) \cap \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$. Wir wählen ein $g \in \mathcal{O}(U, Y)$ mit $\alpha_U g = h$ und betrachten

$$g_1 = P_{\ker T} g \in \mathcal{O}(U, \ker T),\ g_2 = P_N g \in \mathcal{O}(U, N).$$

Für alle $z \in U$ gilt dann $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$ und damit

$$\begin{aligned} b(z)g_1(z) &= P_{TY}\alpha(z)g_1(z) \\ &= P_{TY}\alpha(z)g(z) - P_{TY}\alpha(z)g_2(z) \\ &= P_{TY}h(z) - a(z)g_2(z) \\ &= -a(z)g_2(z) \quad (\text{wegen } h(z) \in M \text{ und } P_{TY}|_M = 0). \end{aligned}$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned} \delta(z)g_1(z) &= d(z)g_1(z) - c(z)a(z)^{-1}b(z)g_1(z) \\ &= d(z)g_1(z) + c(z)g_2(z) \\ &= P_M\alpha(z)\,(g_1(z) + g_2(z)) \\ &= P_M h(z) \\ &= h(z) \quad (z \in U). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $h = \delta_U g_1 \in \delta_U \mathcal{O}(U, \ker T)$ gilt und damit folgt die umgekehrte Inklusion in der behaupteten Gleichung

$$\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) = \mathcal{O}(U, M) \cap \alpha_U \mathcal{O}(U, Y).$$

Diese wiederum zeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_U : \mathcal{O}(U, M)/\delta_U\mathcal{O}(U, \ker T) &\to \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U\mathcal{O}(U, Y), \\ h + \delta_U\mathcal{O}(U, \ker T) &\mapsto h + \alpha_U\mathcal{O}(U, Y) \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv ist. Außerdem ist φ_U eine stetige Abbildung zwischen lokalkonvexen topologischen Vektorräumen, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U, M) \arrow[r, "h \mapsto h"] \arrow[d] & \mathcal{O}(U, X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(U, M)/\delta_U\mathcal{O}(U, \ker T) \arrow[r, "\varphi_U"] & \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U\mathcal{O}(U, Y) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ. Wir wollen zeigen, dass φ_U sogar ein Homöomorphismus ist. Dazu genügt es nun, eine stetige Rechtsinverse ψ_U zu φ_U zu konstruieren, denn damit ist φ_U auch surjektiv und es folgt $\psi_U = \varphi_U^{-1}$.

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$r : U \to \mathcal{L}(X, N \oplus M), \; r(z) = \beta(z)^{-1}.$$

Mit den Projektionen $\mathcal{P}_N : N \oplus M \to N$ und $\mathcal{P}_M : N \oplus M \to M$ zerlegen wir r in holomorphe Funktionen

$$r^N : U \to \mathcal{L}(X, N), \; r(z) = \mathcal{P}_N r(z)$$

und

$$r^M : U \to \mathcal{L}(X, M),\ r(z) = \mathcal{P}_M r(z).$$

Für alle $h \in \mathcal{O}(U, X)$ folgt mit der Definition von β

$$h(z) = \beta(z)r(z)h(z) = \alpha(z)r^N(z)h(z) + r^M(z)h(z) \quad (z \in U).$$

Folglich ist

$$h - r_U^M h = \alpha_U r_U^N h \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \quad (h \in \mathcal{O}(U, X)).$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_U : \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) &\to \mathcal{O}(U, M)/\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T), \\ h + \alpha_U \mathcal{O}(U, Y) &\mapsto r_U^M h + \delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \end{aligned}$$

ist damit wohldefiniert, denn für $h \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$ ist

$$r_U^M h = h - \left(h - r_U^M h\right) \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \cap \mathcal{O}(U, M) = \delta_U \mathcal{O}(U, \ker T),$$

wie wir bereits oben gesehen haben.
Außerdem ist ψ_U stetig, denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U, X) \arrow[r, "r_U^M"] \arrow[d] & \mathcal{O}(U, M) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \arrow[r, "\psi_U"] & \mathcal{O}(U, M)/\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \end{tikzcd}$$

ist kommutativ und r_U^M ist stetig. Schließlich haben wir für alle $h \in \mathcal{O}(U, X)$

$$\begin{aligned} \varphi_U \psi_U \left(h + \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)\right) &= \varphi_U \left(r_U^M h + \delta_U \mathcal{O}(U, \ker T)\right) \\ &= r_U^M h + \alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \\ &= h + \alpha_U \mathcal{O}(U, Y), \end{aligned}$$

denn es ist $h - r_U^M h \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$. Damit folgt $\varphi_U \psi_U = id$.
Es ist nun gezeigt, dass für jede offene Teilmenge $U \subset V$ die Abbildung

$$\varphi_U : \mathcal{O}(U, M)/\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \to \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$$

ein Homöomorphismus ist. Daher ist $\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \subset \mathcal{O}(U, X)$ genau dann abgeschlossen, wenn $\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \subset \mathcal{O}(U, M)$ abgeschlossen ist.
Da $\dim M < \infty$ ist, können wir Korollar 4.15 auf die holomorphe Funktion $\delta : V \to \mathcal{L}(\ker T, M)$ anwenden. Für jede Steinsche offene Menge $U \subset V$ ist folglich $\delta_U \mathcal{O}(U, \ker T) \subset \mathcal{O}(U, M)$ abgeschlossen. Wie wir gezeigt haben, ist damit auch $\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \subset \mathcal{O}(U, X)$ abgeschlossen für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset V$. Dies entspricht der Behauptung. $\square$

Um den allgemeinen Fall auf 4.16 zurückführen zu können, benötigen wir noch einige Vorbereitungen. Zentraler Bestandteil dafür ist die folgende Konstruktion eines Liftings von α zu einer holomorphen Funktion in die stetig linearen Operatoren zwischen geeigneten ℓ^1-Räumen, die auf W. Kaballo und J. Leiterer zurückgeht. Man vergleiche dazu [**31**] (1.1, 1.2 und 1.3).

Satz 4.17.
Seien X, Y Banachräume, $D \subset \mathbb{C}^n$ offen und $\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X)$ holomorph mit

$$\dim(Y/\alpha(z)X) < \infty \quad (z \in D).$$

(a) Es existieren Indexmengen A und B, surjektive stetig lineare Operatoren $\rho : \ell^1(A) \to Y$ und $\pi : \ell^1(B) \to X$ und eine holomorphe Abbildung $\alpha_0 : D \to \mathcal{L}(\ell^1(A), \ell^1(B))$ mit

$$\pi\alpha_0(z) = \alpha(z)\rho \quad (z \in D).$$

(b) Betrachtet man $Z = \ell^1(A) \oplus \ker \pi$ (1-direkte Summe) und die holomorphe Funktion $\tilde{\alpha} : D \to \mathcal{L}(Z, \ell^1(B))$ mit

$$\tilde{\alpha}(z)(a, b) = \alpha_0(z)a + b \quad (z \in D,\ (a, b) \in Z),$$

so gilt

$$\dim(\ell^1(B)/\tilde{\alpha}(z)Z) = \dim(Y/\alpha(z)X) < \infty \quad (z \in D).$$

Außerdem ist $\ker \tilde{\alpha}(z) \subset Z$ stetig projiziert für alle $z \in D$.

Für eine stetig lineare Abbildung $p : Y \to X$ zwischen Banachräumen und eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}^n$ offen schreiben wir im Folgenden

$$p_U : \mathcal{O}(U, Y) \to \mathcal{O}(U, X),\ f \mapsto p \circ f.$$

Vermöge den topologischen Identifizierungen

$$\mathcal{O}(U, X) \cong \mathcal{O}(U)\hat{\otimes}_\pi X \text{ und } \mathcal{O}(U, Y) \cong \mathcal{O}(U)\hat{\otimes}_\pi Y$$

ist $p_U \cong I_{\mathcal{O}_U}\hat{\otimes}_\pi p$. Indem man benutzt, dass das π-Tensorprodukt stetig linearer Surjektionen zwischen Fréchеträumen surjektiv bleibt (dies folgt etwa aus [**52**], Proposition 43.9), erhält man das folgende Korollar.

Korollar 4.18.
Ist $p \in \mathcal{L}(Y, X)$ surjektiv zwischen Banachräumen und ist $U \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge, so ist auch p_U surjektiv.

Schließlich benötigen wir noch die Tatsache, dass jede stetig lineare Surjektion zwischen Fréchеträumen eine stetige Rechtsinverse hat. Um dies zu begründen, zitieren wir den folgenden allgemeineren Satz aus [**38**] (Satz 7.1).

SATZ 4.19.
Seien E, F Fréchetträume, Ω ein parakompakter topologischer Raum sowie $\beta : \Omega \to \mathcal{L}(E,F)$ regulär (das heißt lokal gleichmäßig offen) und stetig, wenn man $\mathcal{L}(E,F)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versieht. Weiter sei $f : \Omega \to F$ eine stetige Funktion mit $f(z) \in \beta(z)E$ für alle $z \in \Omega$. Dann gibt es eine stetige Funktion $e : \Omega \to E$ mit

$$\beta(z)e(z) = f(z) \quad (z \in \Omega).$$

Wählt man in diesem Satz $\Omega = F$, $\beta \equiv \pi$ für eine Surjektion $\pi \in \mathcal{L}(E,F)$ und $f = id_F$, so erhält man die gewünschte Folgerung. (Man beachte, dass jeder Fréchetraum F nach dem Satz von Stone tatsächlich parakompakt ist.)

KOROLLAR 4.20.
Sind E, F Fréchetträume und $\pi : E \to F$ stetig linear und surjektiv, so gibt es eine stetige Abbildung $r : F \to E$ mit $\pi \circ r = id_F$.

Nun sind wir in der Lage, den angekündigten Abgeschlossenheitssatz in voller Allgemeinheit zu beweisen.

SATZ 4.21. *(Abgeschlossenheitssatz)*
Seien X, Y Banachräume, $D \subset \mathbb{C}^n$ eine offene Nullumgebung und

$$\alpha : D \to \mathcal{L}(Y,X)$$

holomorph mit

$$\dim(X/\alpha(0)Y) < \infty.$$

Dann existiert eine offene Nullumgebung $V \subset D$, so dass

$$\alpha_U \mathcal{O}(U,Y) \subset \mathcal{O}(U,X)$$

abgeschlossen ist für jede Steinsche offene Menge $U \subset V$.

BEWEIS.
Indem wir D gegebenenfalls durch eine geeignete kleinere Nullumgebung ersetzen, können wir annehmen, dass $\dim(Y/\alpha(z)X) < \infty$ für alle $z \in D$ gilt. Wir wählen dann alle Bezeichnungen wie in Satz 4.17 und betrachten außerdem die Projektion

$$\varphi : Z \to \ell^1(A), \; (a,b) \mapsto a$$

von Z auf die erste Komponente. Für alle $z \in D$ ergibt sich also die folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\tilde{\alpha}(z)"] & \\ \ell^1(A) \arrow[rr, "\alpha_0(z)"] \arrow[d, "\rho"'] & & \ell^1(B) \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[rr, "\alpha(z)"] & & X \end{tikzcd}$$

Nach 4.17 (a) haben wir

$$\pi \circ \alpha_0(z) = \alpha(z) \circ \rho \quad (z \in D).$$

Weiterhin gilt für $z \in D$ und $(a, b) \in Z = \ell^1(A) \oplus \ker \pi$, dass

$$\pi\tilde{\alpha}(z)(a, b) = \pi\left(\alpha_0(z)a + b\right) = \pi\alpha_0(z)a = \pi\alpha_0(z)\varphi(a, b).$$

Damit kommutiert auch das äußere Diagramm, denn es folgt

$$\pi \circ \tilde{\alpha}(z) = \pi \circ \alpha_0(z) \circ \varphi = \alpha(z) \circ \rho \circ \varphi \quad (z \in D).$$

Nach 4.17 (b) können wir 4.16 auf die Funktion $\tilde{\alpha}$ anwenden. Es gibt also eine offene Nullumgebung $V \subset D$, so dass

$$\tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z) \subset \mathcal{O}(U, \ell^1(B))$$

abgeschlossen ist für alle Steinschen offenen Mengen $U \subset V$.
Sei nun $U \subset V$ eine solche Steinsche offene Menge. Wie im Beweis von 4.16 genügt es einen Homöomorphismus zwischen den lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

$$\mathcal{O}(U, \ell^1(B))/\tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z) \to \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$$

zu konstruieren. Man beachte zunächst, dass die Relationen

$$\pi_U \circ (\alpha_0)_U = \alpha_U \circ \rho_U$$

und

$$\pi_U \circ \tilde{\alpha}_U = \alpha_U \circ \rho_U \circ \varphi_U$$

unmittelbar aus den entsprechenden (oben angegebenen) punktweisen Relationen folgen. Nach 4.18 sind auch die Abbildungen φ_U, ρ_U und π_U surjektiv. Wir betrachten nun die von π_U induzierte Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{\pi_U} : \mathcal{O}(U, \ell^1(B))/\tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z) &\to \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \\ h + \tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z) &\mapsto \pi_U h + \alpha_U \mathcal{O}(U, Y). \end{aligned}$$

Um zu begründen, dass diese wohldefiniert und injektiv ist, ist zu zeigen, dass für $h \in \mathcal{O}(U, \ell^1(B))$ die Äquivalenz

$$h \in \tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z) \;\Leftrightarrow\; \pi_U h \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$$

gilt. Sei dazu zunächst $h \in \tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z)$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{O}(U, Z)$ mit $h = \tilde{\alpha}_U g$ und es folgt

$$\pi_U h = \pi_U \tilde{\alpha}_U g = \alpha_U \rho_U \varphi_U g \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y).$$

Sei umgekehrt $h \in \mathcal{O}(U, \ell^1(B))$ mit $\pi_U h \in \alpha_U \mathcal{O}(U, Y)$ gegeben. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{O}(U, Y)$ mit $\pi_U h = \alpha_U f$. Wegen der Surjektivität von ρ_U gibt es zu f eine Funktion $g \in \mathcal{O}(U, \ell^1(A))$ mit $f = \rho_U g$. Es folgt

$$\pi_U h = \alpha_U f = \alpha_U \rho_U g = \pi_U (\alpha_0)_U g.$$

Somit ist

$$h - (\alpha_0)_U g \in \ker \pi_U = \mathcal{O}(U, \ker \pi).$$

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$(g, h - (\alpha_0)_U g) : U \to Z, \; z \mapsto (g(z), h(z) - (\alpha_0)_U g(z))\,.$$

Dann gilt

$$\tilde{\alpha}_U (g, h - (\alpha_0)_U g) = (\alpha_0)_U g + h - (\alpha_0)_U g = h.$$

Damit ist $h \in \tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z)$.

Somit ist $\hat{\pi_U}$ wohldefiniert und injektiv. Weiter ist $\hat{\pi_U}$ auch surjektiv, da π_U surjektiv ist. Somit ist $\hat{\pi_U}$ ein Isomorphismus von Vektorräumen. Da das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(U, \ell^1(B)) \arrow[r, "\pi_U"] \arrow[d] & \mathcal{O}(U, X) \arrow[d] \\
\mathcal{O}(U, \ell^1(B))/\tilde{\alpha}_U \mathcal{O}(U, Z) \arrow[r, "\hat{\pi_U}"] & \mathcal{O}(U, X)/\alpha_U \mathcal{O}(U, Y)
\end{tikzcd}$$

kommutativ und π_U stetig ist, ist auch $\hat{\pi_U}$ stetig. Es bleibt zu zeigen, dass auch die Umkehrabbildung $(\hat{\pi_U})^{-1}$ stetig ist.

Wendet man Korollar 4.20 auf π_U an, so folgt die Existenz einer stetigen (nicht notwendig linearen) Abbildung

$$r_U : \mathcal{O}(U, X) \to \mathcal{O}(U, \ell^1(B))$$

mit

$$\pi_U \circ r_U = id_{\mathcal{O}(U,X)}.$$

Wir wollen zeigen, dass r_U eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \hat{r_U} : \mathcal{O}(U,X)/\alpha_U\mathcal{O}(U,Y) &\rightarrow \mathcal{O}(U,\ell^1(B))/\tilde{\alpha}_U\mathcal{O}(U,Z) \\ g+\alpha_U\mathcal{O}(U,Y) &\mapsto r_U g + \tilde{\alpha}_U\mathcal{O}(U,Z) \end{aligned}$$

induziert. Seien dazu $g_1, g_2 \in \mathcal{O}(U,X)$ mit $g_1 - g_2 \in \alpha_U\mathcal{O}(U,Y)$. Wegen der Linearität von π_U folgt

$$\pi_U(r_U g_1 - r_U g_2) = \pi_U r_U g_1 - \pi_U r_U g_2 = g_1 - g_2 \in \alpha_U\mathcal{O}(U,Y).$$

Wie wir oben gezeigt haben, ist damit

$$r_U g_1 - r_U g_2 \in \tilde{\alpha}_U\mathcal{O}(U,Z).$$

Dies zeigt die Wohldefiniertheit von $\hat{r_U}$. Wegen

$$\begin{aligned} \hat{\pi_U}\hat{r_U}\left(g+\alpha_U\mathcal{O}(U,Y)\right) &= \hat{\pi_u}\left(r_U g + \tilde{\alpha}_U\mathcal{O}(U,Z)\right) \\ &= \pi_U r_U g + \alpha_U\mathcal{O}(U,Y) \\ &= g + \alpha_U\mathcal{O}(U,Y) \quad (g \in \mathcal{O}(U,X)) \end{aligned}$$

folgt aus der bereits gezeigten Bijektivität von $\hat{\pi_U}$, dass $\hat{r_U} = (\hat{\pi_U})^{-1}$ ist. Schließlich ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}(U,X) \arrow[r, "r_U"] \arrow[d] & \mathcal{O}(U,\ell^1(B)) \arrow[d] \\ \mathcal{O}(U,X)/\alpha_U\mathcal{O}(U,Y) \arrow[r, "\hat{r_U}"] & \mathcal{O}(U,\ell^1(B))/\tilde{\alpha}_U\mathcal{O}(U,Z) \end{tikzcd}$$

kommutativ und r_U ist stetig, folglich ist auch $\hat{r_U}$ stetig. Also ist $\hat{\pi_U}$ ein Homöomorphismus, was zu zeigen war. □

Eine Folgerung aus Satz 4.21 ist das folgende Korollar.

Korollar 4.22.
Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)^n$ mit

$$\dim\left(X/\sum_{j=1}^{n} T_j X\right) < \infty.$$

(a) Es existiert eine Nullumgebung $V \subset \mathbb{C}^n$, so dass

$$\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U) \subset X$$

für jede Steinsche offene Menge $U \subset V$ abgeschlossen ist.

(b) Ist T vertauschend, so existiert eine offene Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ mit

$$\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U) = X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}).$$

Beweis.

(a) Wie im vorigen Abschnitt betrachten wir die holomorphe Funktion

$$\alpha = \alpha_T : \mathbb{C}^n \to \mathcal{L}(X^n, X),\ z \mapsto (z_1 - T_1, \ldots, z_n - T_n).$$

Nach Voraussetzung ist

$$\dim (X/\alpha(0)X^n) < \infty$$

und damit existiert nach 4.21 eine Nullumgebung $V \subset \mathbb{C}^n$, so dass

$$\alpha_U \mathcal{O}(U, X^n) \subset \mathcal{O}(U, X)$$

abgeschlossen ist für jede Steinsche offene Menge $U \subset V$.
Sei nun $U \subset V$ solch eine Steinsche offene Menge. Wir betrachten die Einbettung

$$i_U : X \hookrightarrow \mathcal{O}(U, X),$$

die jedem $x \in X$ die konstante Funktion mit dem Wert x zuordnet. Definitionsgemäß ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U) &= \{x \in X;\ \text{es ist } \alpha_U f = i_U x \text{ für ein } f \in \mathcal{O}(U, X^n)\} \\ &= i_U^{-1}\big(\alpha_U \mathcal{O}(U, X^n)\big). \end{aligned}$$

Da i_U stetig ist, erhalten wir die Abgeschlossenheit von $\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U) \subset X$.

(b) Wir schreiben

$$U_k = \left\{ z \in \mathbb{C}^n;\ |z| < \frac{1}{k} \right\}$$

für die offene $\frac{1}{k}$-Kugel im $\mathbb{C}^n$ $(k \in \mathbb{N})$.
Nach (a) gibt es eine Stelle $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U_k) \subset X$$

für alle $k \geq k_0$ abgeschlossen ist.
Ist T vertauschend, so gilt nach 4.3

$$X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = M(T) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k(T)$$

und da die Räume $M_k(T) \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ nach 3.3 abgeschlossen sind, ist auch $X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \subset X$ abgeschlossen.
Da die U_k $(k \geq k_0)$ eine Nullumgebungsbasis im $\mathbb{C}^n$ bilden, folgt aus 4.2

$$X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \bigcup_{k \geq k_0} \mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U_k).$$

Nach dem Satz von Baire existiert somit ein $k \geq k_0$ mit

$$X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) = \mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U_k).$$

$\square$

Einige offene Fragen

Wir wollen diese Arbeit nun mit einigen offenen Fragen abschließen, die bei der Bearbeitung des letzten Kapitels aufgetreten sind.

Problem 4.23.
In 4.21 wurde gezeigt, dass für eine holomorphe Funktion

$$\alpha : D \to \mathcal{L}(Y, X) \quad (D \subset \mathbb{C}^n \text{ offen, } X, Y \text{ Banachräume})$$

mit $\dim (Y/\alpha(0)X) < \infty$ das Bild von α_U abgeschlossen ist, falls U eine genügend kleine Steinsche offene Nullumgebung ist.
Es stellt sich die folgende Frage nach einem globalen Resultat.
Ist für eine Steinsche offene Teilmenge $U \subset D$ mit $\dim (Y/\alpha(z)X) < \infty$ für alle $z \in U$ stets $\alpha_U \mathcal{O}(U, Y) \subset \mathcal{O}(U, X)$ abgeschlossen ?

Problem 4.24.
Eine weitere Frage ergibt sich aus Korollar 4.22. Für ein vertauschendes Tupel $T = (T_1, \ldots, T_n) \in \mathcal{L}(X)^n$ von stetig linearen Operatoren auf einem Banachraum X mit

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty$$

wurde dort gezeigt, dass

$$\mathcal{X}_T(\mathbb{C}^n \setminus U) = X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\})$$

für eine geeignete Nullumgebung $U \subset \mathbb{C}^n$ gilt.
Es stellt sich die Frage, ob man dabei auf die Voraussetzung, dass T vertauschend ist, verzichten kann. Aus dem Beweis von 4.22 (b) geht hervor, dass die betrachtete Aussage für ein nicht notwendig vertauschendes Tupel genau dann gilt, wenn $X_T(\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \subset X$ abgeschlossen ist. Wir haben in 4.8 gesehen, dass dies der Fall ist, wenn man für T den Linksvorwärtsshift $S \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^2)^n$ auf dem Fockraum einsetzt.

Die letzte Fragestellung, auf die wir hier aufmerksam machen wollen, entspricht einer Vermutung von X. Fang.

Problem 4.25.
Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)^n$ ein Tupel von stetig linearen Operatoren mit

$$\dim \left(X / \sum_{j=1}^{n} T_j X \right) < \infty.$$

Wie zuvor betrachten wir dazu die (nach Bemerkung 3.3 abgeschlossenen) Teilräume $M_k = M_k(T) \subset X$ $(k \in \mathbb{N})$ mit

$$M_0 = X \text{ und } M_{k+1} = T_1 M_k + \ldots + T_n M_k \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ist dann

$$M = M(T) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} M_k,$$

so ist auch M abgeschlossen und es gilt $T_j M \subset M$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Somit induziert T als Zeilenoperator eine wohldefinierte stetig lineare Abbildung

$$T|_{M^n} : M^n \to M,\ (x_j)_{j=1}^n \mapsto \sum_{j=1}^n T_j x_j$$

zwischen Banachräumen.

Man kann zeigen, dass $T|_{M^n}$ für $n = 1$ unter den getroffenen Voraussetzungen stets surjektiv ist (vergleiche etwa [**12**], Seite 372).

In [**22**] (Conjecture B) stellt X. Fang die Frage, ob die Identität

$$M = \sum_{j=1}^n T_j M$$

für vertauschende Tupel $T \in \mathcal{L}(H)^n$ auf Hilberträumen mit

$$\dim \left(H / \sum_{j=1}^n T_j H \right) < \infty$$

richtig bleibt. Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass die entsprechende Identität im nichtvertauschenden Fall falsch ist.

Sei $X = \ell^1 \oplus \mathbb{C}$ und $T = (T_1, T_2) \in \mathcal{L}(X)^2$ gegeben durch

$$T_1 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P & 0 \end{pmatrix},$$

wobei

$$S : \ell^1 \to \ell^1,\ (x_0, x_1, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, \ldots)$$

der Shift ist und P durch

$$P : \ell^1 \to \mathbb{C},\ (x_0, x_1, \ldots) \mapsto \sum_{k=0}^\infty x_k$$

definiert ist. Man erhält hier

$$M_k = \{(x, \lambda) \in X;\ x_0 = \ldots = x_{k-1} = 0\} \quad (k \in \mathbb{N})$$

und damit $M = \{0\} \oplus \mathbb{C}$. Damit ist

$$T_1 M + T_2 M = \{0\} \subsetneq M.$$

Die Frage nach der Surjektivität von $T|_{M^n}$ bleibt im Fall $n \geq 2$ offen, falls zusätzlich vorausgesetzt wird, dass T vertauschend ist.

Literaturverzeichnis

[1] P. Aiena, M. Mbekhta, *Characterization of Some Classes of Operators by Means of the Kato Decomposition*, Boll. Un. Mat. Ital.(7) **10-A** (1996), 609-621.

[2] C. G. Ambrozie, D. Timotin, *On an intertwining lifting theorem for certain reproducing kernel Hilbert spaces*, Integral equations and operator theory **42** (2002), 373-384.

[3] A. Arias, G. Popescu, *Noncommutative interpolation and poisson transforms II*, Houston J.Math.**25** (1999), 79-98.

[4] W. Arveson, An invitation to C^*-algebras, Graduate Texts in Mathematics, vol 39, Springer Verlag, New York, 1976.

[5] W. Arveson, *Subalgebras of C^*-algebras III: Multivariable operator theory*, Acta Math. **181** (1998), 159-228.

[6] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley Series in Mathematics, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1969.

[7] J. A. Ball, T. T. Trent, V. Vinnikov, Interpolation and commutant lifting for multipliers on reproducing kernel Hilbert spaces, Operator theory and analysis, Oper. Theory Adv. Appl., vol 122, Birkhäuser, Basel, 2001, 89–138.

[8] C. Barbian, *Positivitätsbedingungen funktionaler Hilberträume und Anwendungen in der mehrdimensionalen Operatortheorie*, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2001.

[9] T. Bhattacharyya, J. Eschmeier, J. Sarkar, *Characteristic function of a pure commuting contractive tuple*, Integral Equations Operator Theory **53** (2005), 23–32.

[10] R. W. Berger, Kommutative Algebra I, Annales Universitatis Saraviensis, vol.8, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 1997.

[11] I. Colojoara, C. Foiaş, Theory of generalized spectral operators, Mathematics and its Applications, vol. 9, Gordon and Breach, New York, 1968.

[12] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer Verlag, New York, 1985.

[13] R. Douglas, K. Yan, *Hilbert-Samuel polynomials for Hilbert modules*, Indiana University Mathematics Journal **42** (1993), 811-820.

[14] S. Drury, *A generalization of von Neumann's inequality to the complex ball*, Proc. American Mathematical Society **348** (1978), 300-304.

[15] J. Eschmeier, *On the essential spectrum of Banach-space operators*, Proc. of the Edinburgh Math. Soc. **43** (2000), 511-528.

[16] J. Eschmeier, *Samuel multiplicity and Fredholm theory*, Math. Ann. 339 (2007), 21–35.

[17] J. Eschmeier, *Samuel multiplicity for several commuting operators*, J. Operator Theory, to appear.

[18] J. Eschmeier and M. Putinar, Spectral Decompositions and Analytic Sheaves, London Mathematical Society Monographes, New series, vol 10, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[19] J. Eschmeier und M. Putinar, *Spherical contractions an interpolation problems on the unit ball*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **542** (2002), 219-236.

[20] D. Faas, Dilatationssätze und Wold-Zerlegung für nichtvertauschende Kontraktionen, Diplomarbeit, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2003.

[21] X. Fang, *The Fredholm index of a pair of commuting operators*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 367–402.

[22] X. Fang, *The Fredholm index of a pair of commuting operators, II*, preprint.

[23] H. Grauert, R. Remmert, Coherent Analytic Sheaves, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol 265, Springer Verlag, Berlin, 1984.

[24] H. Grauert, R. Remmert, Theorie der Steinschen Räume, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol 227, Springer Verlag, Berlin, 1977.

[25] H. Grauert, R. Remmert, Analytische Stellenalgebren, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol 176, Springer Verlag, Berlin, 1971.

[26] G. M. Greuel, G. Pfister, A Singular Introduction to Commutative Algebra, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[27] R. C. Gunning, H. Rossi, Analytic functions of several complex variables, Prentice-Hall Series in modern analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1965.

[28] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer Verlag, New York, 1977.

[29] R. Janz, Holomorphic families of subspaces of a Banach space, Special classes of linear operators and other topics, Oper. Theory Adv. Appl., vol 28, Birkhäuser, Basel, 1988, 155–167.

[30] T. de Jong, G. Pfister, Local Analytic Geometrie, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig, 2000.

[31] W. Kaballo, *Holomorphe Semi-Fredholmfunktionen ohne komplementierte Kerne bzw. Bilder*, Math. Nachrichten **91** (1979), 327-335.

[32] D. W. Kribs, *The Curvature invariant of a non-commuting N-tuple*, J. Integral equations and operator theory **41** (2001), 426-454.

[33] R. Kultze, Garbentheorie, Teubner, Stuttgart, 1970.

[34] E. Kunz, Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie, vieweg studium, vol 46, Vieweg, Braunschweig, 1980.

[35] S. Lang, Algebra, Second edition, Advanced Book Program, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1984.

[36] K. B. Laursen, M. M. Neumann, An Introduction to Local Spectral Theory, London Mathematical Society Monographes, New series, vol 20, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[37] J. Leiterer, *Banach coherent analytic Fréchet sheaves*, Math. Nachrichten **85** (1978), 91-109.

[38] F. Mantlik, Parameteräbhängige Lineare Gleichungen in Banach- und in Frécheträumen, Dissertation, Universität Dortmund 1988.

[39] F. Mantlik, *Linear equations depending differentiably on a parameter*, Integral Equations and Operator Theory **13** (1990), 231–250.

[40] A. Markoe, *Analytic families of differential complexes*, J. of Functional Analysis **9** (1972), 181-188.

[41] T. L. Miller, V. G. Miller, M. M. Neumann, *The Kato-type spectrum and local spectral theory*, Czechoslovak Math. J. **57** (2007), 831-842.

[42] T. L. Miller, V. Müller, *The Closed Range Property for Banach Space Operators*, Glasgow Mathematical Journal **50** (2008), 17-26.

[43] V. Müller, F.-H. Vasilescu *Standard Models for some Commuting Multioperators*, Proc. Amer.Math.Soc. **117** (1993), 979-989.

[44] S. Parrott, *Unitary dilations for commuting contractions*, Pacific J. Math. **34** (1970), 481-490.

[45] V. I. Paulsen, Completely bounded maps and dilations, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol 146, Longman Scientific & Technical, New York, 1986.

[46] G. Popescu, *Characteristic functions for infinite sequences of noncommuting operators*, J.operator theory **22** (1989), 51-71.

[47] G. Popescu, *Isometric dilations for infinite sequences of noncommutative operators*, Trans.Amer.Math.Soc. **316** (1989), 523-536.

[48] G. Popescu, *Von Neumann Inequality for* $(B(\mathcal{H})^n)_1$, Math.Scand **68** (1991), 292-304.

[49] E. Réolon, Zur Spektraltheorie vertauschender Operatortupel, Dissertation, Universität des Saarlandes, Saarbrücken 2004.

[50] B. Sz.-Nagy, C. Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert spaces*, C.R.Acad.Sci.Paris Ser.A **266** (1968), 201-212.

[51] B. Sz.-Nagy, Unitary dilations of Hilbert space operators and related topics, Conference board of the mathematical sciences, vol 19, American Mathematical Society, Providence, 1971.

[52] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Pure and Applied Mathematics, vol 25, Academic Press, New York, 1967.