

Diskreter Elektromagnetismus mit Ansatzformen höheren polynomialen Grades

Dissertation

zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von

Marvin Fleck

Saarbrücken
2011

Tag des Kolloquiums: 26. Mai 2011

Dekan der Fakultät 6: Prof. Dr. H. Hermanns

Vorsitzender des Prüfungsausschusses: Prof. Dr. J. Eschmeier

1. Berichterstatter: Prof. Dr. S. Rjasanow

2. Berichterstatter: Prof. Dr. S. Kurz

akademischer Beisitzer: Dr. R. Grzibovskis

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit versichere ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe. Die aus anderen Quellen oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet. Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form in einem Verfahren zur Erlangung eines akademischen Grades vorgelegt.

Saarbrücken, den 17. Februar 2011

Marvin Fleck

Vorwort

Hiermit möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Dr. Sergej Rjasanow bedanken, der mich auf dem Weg zu dieser Dissertation begleitet hat. Ich bedanke mich für seine Unterstützung während meiner Zeit in seiner Arbeitsgruppe und für die fachliche Betreuung meiner Arbeit. Für viele wertvolle Diskussionen und Einführungen zu Differentialformen, speziell zu Beginn meiner Arbeit, möchte ich Herrn Dr. Bernhard Auchmann danken. Mein Dank gilt weiterhin der gesamten Arbeitsgruppe Rjasanow für ein durchgehend angenehmes Arbeitsklima und ständige Hilfsbereitschaft, sowohl in fachlichen als auch in privaten Belangen. Herrn Prof. Dr. Stefan Kurz danke ich für die freundliche Übernahme der Berichterstattung.

Mein besonderer Dank gilt meinen Eltern und meiner Freundin Nadine Tennigkeit für ihre moralische Unterstützung während meiner Zeit als Doktorand.

Für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des Projektes RJ 2/14 möchte ich an dieser Stelle der Deutschen Forschungsgemeinschaft meinen Dank aussprechen.

Saarbrücken im Februar 2011
Marvin Fleck

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Diskrete Elektromagnetismus (DEM) mit Ansatzformen höheren polynomialen Grades untersucht. Bei dieser Methode werden partielle Differentialgleichungen des Elektromagnetismus in die Sprache der Differentialformen umformuliert und anschließend diskretisiert. Kontinuierliche Differentialformen besitzen diskrete Entsprechungen, die als diskrete Differentialformen oder Ko-Ketten bezeichnet werden. Dadurch ist eine natürliche Diskretisierung der Formen und der auf sie wirkenden Operatoren möglich. Eine Lokalisierung der Freiheitsgrade auf hier vorgestellten verallgemeinerten Gitterelementen offenbart die gemeinsame Struktur des DEM niedriger Ordnung und der neuen Methode höherer Ordnung.

Abstract

In the present work the Discrete Electromagnetism (DEM) with shape forms of higher polynomial degree has been analysed. In this method partial differential equations of electromagnetism are reformulated to the calculus of differential forms and subsequently discretized. Continuous differential forms have discrete counterparts, which are called discrete differential forms or co-chains. Thus a natural discretization of forms and operators acting on them is possible. A localization of degrees of freedom on generalized mesh elements, which are presented here, reveals the common structure of low order DEM and the new higher order method.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Problemstellung	7
2.1	Die Maxwellgleichungen	7
2.2	Herleitung der Wirbelstromgleichung	7
2.3	Eigenschaften des Differentialoperators	13
2.3.1	Funktionsräume	14
2.3.2	Variationsmethoden	21
3	Differentialformen	25
3.1	Grundlagen	25
3.1.1	Multivektoren	25
3.1.2	Mannigfaltigkeiten und Tangentialvektoren	31
3.2	Definition von Differentialformen	33
3.2.1	Eine intuitive Definition	34
3.2.2	Formale Definition	35
3.3	Integration von Differentialformen	35
3.4	Wichtige Operatoren auf Differentialformen	38
3.4.1	Ableitungsoperatoren	39
3.4.2	Der Hodge-Operator	41
3.4.3	Rücktransport- und Spuroperatoren	43
3.5	Differentialgleichungen in Differentialformen	45
3.5.1	Zusammenhang zwischen Differentialformen und Vektorfeldern	45
3.5.2	Die Differentialformdarstellung der Maxwellgleichungen	48
3.6	Ungerade Differentialformen	53
3.6.1	Orientierung von ungeraden Differentialformen	53
3.6.2	Operationen auf ungeraden Differentialformen	54
3.6.3	Bedeutung für die Maxwellgleichungen	56

4	Diskreter Elektromagnetismus	59
4.1	Whitneyformen	59
4.2	DEM niedrigster Ordnung	60
4.2.1	Duales Gitter	61
4.2.2	Diskrete Operatoren	63
4.2.3	Diskrete Gleichungen	68
5	DEM höheren polynomialen Grades	73
5.1	Freiheitsgrade höherer Ordnung	73
5.1.1	Kleine Simples	73
5.1.2	Simplices höherer Dimension	77
5.2	Ansatzformen höherer Ordnung	78
5.2.1	Grundlagen	78
5.2.2	Ansatzformen auf dem Tetraeder	80
5.3	Duale Freiheitsgrade und verallg. Simples	85
5.3.1	Duale Freiheitsgrade im klassischen DEM	85
5.3.2	Verallgemeinerte Simples	86
5.3.3	Beschreibung verallgemeinerter Simples mit ungeraden Differentialformen	88
5.3.4	Diskrete Operatoren	90
6	Numerische Implementierung	93
6.1	Approximation nichtlinearer Materialien	93
6.2	Aspekte der Implementierung	95
6.3	Numerische Ergebnisse	97
7	Zusammenfassung	101
	Literaturverzeichnis	105

Kapitel 1

Einleitung

Elektromagnetische Phänomene spielen in modernen technischen Anwendungen eine herausragende Rolle. Ihre Bedeutung erstreckt sich von klassischen Gebieten, wie der Motortechnik oder der Entwicklung von Transformatoren und Generatoren, über Funktechnik bis hin zu medizinischen Anwendungen. Darüber hinaus sind sie für die physikalische Grundlagenforschung von großer Wichtigkeit. In großen Forschungsanlagen, wie Reaktoren zur Erforschung der Kernfusion oder Teilchenbeschleunigern, nutzt man starke Magnetfelder, um geladene Teilchen in bestimmten Gebieten zu halten.

Bei Teilchenbeschleunigern, wie dem Large Hadron Collider (LHC) der Europäischen Organisation für Kernforschung (CERN¹), werden die geladenen Teilchen in sehr dünnen Strahlen gebündelt (im LHC etwa $16\mu\text{m}$ Durchmesser), um möglichst viele Kollisionen hervorzurufen. Daher werden hohe Genauigkeitsanforderungen an die Ausrichtung des Magnetfeldes gestellt.

Wie viele andere physikalische Erscheinungen werden auch elektromagnetische Phänomene mit Hilfe von partiellen Differentialformen modelliert. Hierbei handelt es sich um die sogenannten Maxwellgleichungen (James Clerk Maxwell; 1831-1879). Üblicherweise wird für ein konkretes Problem aus dem vollständigen System dieser Gleichungen unter vereinfachenden Annahmen eine angepasste Formulierung hergeleitet. Für das elektromagnetische Verhalten von Beschleunigermagneten erhält man die magnetostatischen und magnetoquasistationären Probleme in Vektorpotentialformulierung. Das magnetoquasistationäre Problem wird oft vereinfachend als quasistationär bezeichnet. Aus diesen Ansätzen entstehen vektorielle partielle Differentialgleichungen in Abhängigkeit vom Ort $\vec{x} \in \Omega$ und der Zeit $\tau \in \mathbb{R}_+$. Numerische Näherungsverfahren bauen auf dieser Formulierung auf.

¹Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (Europäische Gesellschaft für Kernforschung), Genf, Schweiz

Ein bewährtes Verfahren zur numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen ist die Finite Elemente Methode (FEM). Diese Methode basiert auf einer Variationsformulierung mit endlichdimensionalen Ansatz- und Testräumen. Geeignete Ansatzräume für elektromagnetische Probleme wurden in [30, 31, 37] präsentiert. In diesem Zusammenhang wurden die Whitneyformen [43] als Realisierung niedrigsten polynomialen Grades für die in [30] vorgestellten Räume erkannt. Wichtig für die Konstruktion von Ansatzräumen ist die De Rham Sequenz [4, 6], die die Beziehung zwischen Funktionenräumen und Differentialoperatoren beschreibt.

Alternativ zur klassischen vektoranalytischen Beschreibung lassen sich die Maxwellgleichungen auch durch Differentialformen ausdrücken. Diese Formulierung eröffnet einen neuen Blickwinkel auf das Gleichungssystem. Zum Beispiel werden einerseits die klassischen Differentialoperatoren ∇ , curl und div durch die äußere Ableitung d zusammengefasst, andererseits lassen sich für die physikalischen Größen Funktionenräume und Grad der sie beschreibenden Differentialformen identifizieren. Des Weiteren existiert eine klare Trennung zwischen metrischen und metrikunabhängigen Operatoren. Metrik und Materialbeziehungen werden in den Hodge-Operatoren [9] zusammengefasst.

Der Diskrete Elektromagnetismus (DEM) basiert auf der Diskretisierung einer durch Differentialformen beschriebenen Gleichung. Im klassischen DEM niedrigster Ordnung wird die Lösung durch Whitneyformen angenähert. Passende Ansatzräume für Approximationen höherer Ordnung werden in [1, 25] diskutiert. In [12, 35] werden basierend auf geometrischen Überlegungen konkrete Whitneyformen höherer Ordnung vorgeschlagen.

Im Diskreten Elektromagnetismus werden physikalische Größen auf zwei Gittern diskretisiert. Die explizite Konstruktion des zweiten, sogenannten dualen, Gitters lässt sich mit Hilfe von Pairingmatrizen [3, 24] umgehen. Der Diskrete Elektromagnetismus kann als Verallgemeinerung bekannter Methoden aufgefasst werden. Für rechtwinklige Hexaedergitter und dazu orthogonale duale Gitter sind die diskreten Hodge-Operatoren Diagonalmatrizen [8, 9] und man erhält eine zur Finiten Integrationstechnik (FIT) [42] äquivalente Formulierung. Die Verwendung simplizialer Gitter und baryzentrisch dualer Gitter führt zu einer Massenmatrixgestalt der diskreten Hodge-Operatoren und letztlich zu einem linearen Gleichungssystem, das einer Finite Elemente Variationsformulierung entspricht.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Diskreter Elektromagnetismus höherer Ordnung auf simplizialen Gittern untersucht. Dazu werden zunächst die in [12, 35] vorgeschlagenen Ansatzformen betrachtet. Weiterhin werden Ansatzfunktionen einer Finite Elemente Methode höherer Ordnung [39] in den DEM übertragen. Beiden Varianten ist gemein, dass ihre Freiheitsgrade nicht denen entsprechen, die in der Theorie der DEM-Ansatzräume [1, 25]

vorgeschlagen werden. Es wird gezeigt, dass die Freiheitsgrade der FEM mit Hilfe von De Rham Strömen auf verallgemeinerten Gitterelementen und deren Rändern lokalisiert werden können. Auf diese Weise zeigt sich, dass die diskreten Differentialoperatoren auch im Fall höherer Ordnung durch die topologischen Zusammenhänge dieser Elemente mit ihren Rändern erklärt sind. Dieses Konzept überträgt sich auch auf das duale Gitter.

In Kapitel 2 stellen wir die vollständigen Maxwellgleichungen vor und leiten die magnetostatische und magnetoquasistationäre Approximation in Vektorpotentialformulierung her. Weiterhin beschreiben wir geeignete Approximationsräume für die physikalischen Größen und ordnen diese in die De Rham Sequenz ein. Anschließend präsentieren wir wichtige Konvergenzsätze für Variationsprobleme.

Kapitel 3 führt in die Theorie der Differentialformen ein. Wir beschreiben die für die Beschreibung von partiellen Differentialgleichungen mit Differentialformen wesentlichen Operatoren. Im Anschluss daran stellen wir die magnetostatische bzw. -quasistationäre Formulierung der Maxwellgleichungen mit Differentialformen auf. Dabei werden die physikalischen Größen auf zwei Komplexe verteilt.

Kapitel 4 befasst sich mit dem DEM niedrigster Ordnung mit Whitneyformen. Die Aufteilung der zu diskretisieren physikalischen Größen durch zueinander duale Gitter wird beschrieben. Zusätzlich zu diskreten Differentialformen und Operatoren werden Pairingmatrizen vorgestellt, die die Diskretisierung von Daten auf dem dualen Gitter erleichtern. Schließlich wird über die resultierende Formulierung die Äquivalenz der Methode zu einer Finite Elemente Methode mit Whitneyelementen gezeigt.

In Kapitel 5 untersuchen wir zwei Ansätze zur Konstruktion konkreter Ansatzformen höheren polynomialen Grades und ihrer Freiheitsgrade. Der erste Ansatz ist geometrisch motiviert, während der zweite in der Übertragung von FE-Ansatzfunktionen in den Formalismus der Differentialformen besteht. In diesem Zusammenhang zeigen wir, dass sich Freiheitsgrade auf verallgemeinerten Gitterelementen lokalisieren lassen. Bezüglich dieser verallgemeinerten Elemente besitzen die diskreten Operatoren die gleiche Gestalt wie im Fall niedrigster Ordnung bezüglich der klassischen Elemente.

Kapitel 6 beginnt mit einer kurzen Erörterung der Approximation nicht-konstanter Materialparameter. Nach einer Beschreibung verschiedener Aspekte der Implementierung präsentieren wir einige numerische Beispiele.

Kapitel 2

Problemstellung

2.1 Die Maxwellgleichungen

Die Zusammenhänge zwischen elektrischen und magnetischen Feldern werden durch die Maxwellgleichungen (James Clerk Maxwell, 1831-1879) beschrieben. Für viele Problemstellungen ist es jedoch ausreichend, ein vereinfachtes Gleichungssystem zu betrachten. In diesem Kapitel stellen wir zunächst das vollständige System der Maxwellgleichungen vor. Anschließend wollen wir die magnetostatische und die magnetoquasistationäre Approximation dieser Gleichungen herleiten, die für die Beschreibung der elektromagnetischen Vorgänge in Beschleunigermagneten gut geeignet sind.

2.2 Klassische Herleitung der Wirbelstromgleichung

Die Maxwellgleichungen beschreiben die Zusammenhänge verschiedener physikalischer Feldgrößen, die von Ort \vec{x} und Zeit τ abhängen. Hierbei seien zunächst $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ und $\tau \in \mathbb{R}^+$.

Wir betrachten das System der Maxwellgleichungen

$$\operatorname{curl} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial \tau}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tau}, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad (2.4)$$

Größe	Beschreibung	Einheit
\vec{B}	Magnetische Flussdichte	Vs/m^2
\vec{H}	Magnetische Feldstärke	A/m
\vec{D}	Elektrische Flussdichte	As/m^2
\vec{E}	Elektrische Feldstärke	V/m
\vec{j}	Stromdichte	A/m^2
ρ	Elektrische Ladungsdichte	As/m^3
\vec{A}	Magnetisches Vektorpotential	Vs/m
φ	Elektrisches Skalarpotential	V
\vec{j}_S	Eingeprägte Stromdichte	A/m^2
μ	Magnetische Permeabilität	Vs/Am
σ	Permittivität	As/Vm
κ	Elektrische Leitfähigkeit	A/Vm

Tabelle 2.1: Physikalische Größen und ihre Einheiten.

bestehend aus dem erweiterten Ampèreschen Gesetz (2.1), dem Gaußschen Gesetz für Magnetfelder (2.2), dem Induktionsgesetz von Faraday (2.3) und dem Gaußschen Gesetz (2.4). Das System wird durch die Materialbeziehungen

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (2.5)$$

$$\vec{D} = \sigma \vec{E}, \quad (2.6)$$

$$\vec{j} = \kappa \vec{E} + \vec{j}_S \quad (2.7)$$

vervollständigt. Diese Gleichungen enthalten 16 Unbekannte, die für uns jedoch von äußerst unterschiedlichem Interesse sind. Wir sind vor allem an der magnetischen Flussdichte \vec{B} , der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der Stromdichte \vec{j} interessiert. Die bedeutsamsten Materialparameter sind für uns die magnetische Permeabilität μ und die elektrische Leitfähigkeit κ . Eine kurze Beschreibung der auftretenden physikalischen Größen und ihrer Einheiten findet sich in Tabelle 2.1.

Um die Herleitung eines reduzierten Gleichungssystems übersichtlicher zu gestalten, schreiben wir die Gleichungen in eine skalierte Form [34], die charakteristische Längen- und Zeitwerte für ein gegebenes Problem enthält, um. Zusätzlich wählen wir unter den Bezeichnungen B_0 und E_0 charakteristische Werte für die magnetische Flussdichte und die elektrische Feldstärke. Schließlich werden auch charakteristische skalare Werte für die Materialparameter benötigt: μ_C , κ_C und σ_C . Die physikalischen Größen können nun frei

von Einheiten notiert werden:

$$\vec{B} = \frac{\vec{B}}{B_0}, \quad \vec{H} = \frac{\mu_C \vec{H}}{B_0}, \quad \vec{j} = \frac{\vec{j}}{\kappa_C E_0}, \quad (2.8)$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}}{E_0}, \quad \vec{D} = \frac{\vec{D}}{\sigma_C E_0}, \quad \tilde{\rho} = \frac{L \rho}{\sigma_C E_0}. \quad (2.9)$$

Die skalierten Differentialoperatoren haben folgende Gestalt:

$$\tilde{\text{curl}} = L \text{curl}, \quad \tilde{\text{div}} = L \text{div}, \quad \tilde{\partial} \tau = T \partial \tau. \quad (2.10)$$

Durch Einbeziehen der Relaxationszeit T_R und der Ausbreitungsgeschwindigkeit c ,

$$T_R = \frac{\sigma_C}{\kappa_C}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_C \sigma_C}}, \quad (2.11)$$

erhalten wir die skalierten Maxwellgleichungen:

$$\tilde{\text{curl}} \vec{H} = \left[\frac{L}{c T_R} \frac{E_0}{c B_0} \right] \vec{j} + \left[\frac{L}{c T} \frac{E_0}{c B_0} \right] \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} \tau} \vec{D}, \quad (2.12)$$

$$\tilde{\text{div}} \vec{B} = 0, \quad (2.13)$$

$$\tilde{\text{curl}} \vec{E} = - \left[\frac{L}{T} \frac{B_0}{E_0} \right] \frac{\tilde{\partial}}{\tilde{\partial} \tau} \vec{B}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\text{div}} \vec{D} = \tilde{\rho}. \quad (2.15)$$

Sofern die Bedingung

$$\frac{L}{c T} \frac{E_0}{c B_0} \ll 1 \quad (2.16)$$

erfüllt ist, wird dieses System als dominant magnetisch betrachtet. Falls des Weiteren

$$\frac{T_R}{T} \ll 1 \quad (2.17)$$

erfüllt ist, so wird der zweite Term in (2.12) im Vergleich zum ersten sehr klein und kann vernachlässigt werden.

Bemerkung 2.1. Alternativ dazu kann man die magnetoquasistationäre Approximation aus den ursprünglichen Gleichungen erhalten, indem man $\sigma = 0$ setzt. Dies entspricht dem Verschwinden des elektrischen Teils der Feldenergie. Für $\sigma = 0$ folgt aus (2.6) bei einer hinreichend kleinen oberen Schranke für das elektrische Feld \vec{E} , dass $\vec{D} = 0$ und daraus wegen (2.4) wiederum $\rho = 0$.

Unser reduziertes Gleichungssystem liest sich nun:

$$\tilde{\text{curl}} \vec{H} = \vec{j} = \left[\frac{L}{cT_R} \frac{E_0}{cB_0} \right] \vec{j}, \quad (2.18)$$

$$\tilde{\text{div}} \vec{B} = 0, \quad (2.19)$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial \tilde{\tau}} = \tilde{\text{curl}} \vec{E} = \tilde{\text{curl}} \left(\left[\frac{TE_0}{LB_0} \right] \vec{E} \right) \quad (2.20)$$

mit den Materialbeziehungen

$$\vec{B} = \tilde{\mu} \vec{H}, \quad (2.21)$$

$$\vec{j} = \tilde{\kappa} \vec{E} + \vec{j}_S = \left[\frac{L}{cT_R} \frac{L}{cT} \right] \tilde{\kappa} \left[\frac{TE_0}{LB_0} \right] \vec{E} + \left[\frac{L}{cT_R} \frac{E_0}{cB_0} \right] \vec{j}_S, \quad (2.22)$$

wobei

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_C}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa_C}. \quad (2.23)$$

Diese Formulierung berücksichtigt Wirbelströme, vernachlässigt jedoch Wellenerscheinungen. Im Folgenden verzichten wir auf die Tilde-Notation, behalten die notwendigen Rückskalierungen aber im Gedächtnis.

Wir sind an den elektromagnetischen Eigenschaften von Beschleunigermagneten, wie sie im Large Hadron Collider (LHC) am CERN benutzt werden, interessiert. Charakteristische Werte sind in diesem Zusammenhang [2]:

$$B_0 = 10^{-4} \text{Vs/m}^2, \quad c^2 = 8.9876 \cdot 10^{13} (\text{m/s})^2, \quad (2.24)$$

$$T = 10^{-1} \text{s}, \quad L = 10^{-1} \text{m}. \quad (2.25)$$

Damit (2.16) erfüllt ist, muss also

$$E_0 \ll 10^9 \text{V/m} \quad (2.26)$$

gelten, was in unseren Anwendungen mit typischen elektrischen Feldstärken von 10^{-3}V/m praktisch immer der Fall ist.

Potentialformulierung

Um eine Gleichung für eine einzige vektorielle Unbekannte zu erhalten, führen wir das magnetische Vektorpotential \vec{A} und das elektrische Skalarpotential φ ein.



Abbildung 2.1: Ein Dipolmagnet des LHC.

Lemma 2.1. *Auf einem zu einem Punkt zusammenziehbaren Gebiet, d.h. einem Gebiet "ohne Löcher", gibt es für jedes quellenfreie Vektorfeld \vec{B} ein (nicht eindeutig bestimmtes) Vektorfeld \vec{A} , so dass $\vec{B} = \text{curl } \vec{A}$ gilt. Des Weiteren gibt es auf einem solchen Gebiet für jedes rotationsfreie Vektorfeld \vec{V} ein (nicht eindeutig bestimmtes) skalares Feld φ mit $\vec{V} = \nabla\varphi$.*

Diese Aussage kann mit Hilfe von Differentialformen auf elegante Weise bewiesen werden (siehe Abschnitt 3.5.2). Da sie auf topologisch nichttrivialen Gebieten keine Gültigkeit hat, müssen wir nichtleitende Regionen in unserem Gebiet mit einschließen. Sofern wir dies berücksichtigen, können wir (2.19) umformulieren zu

$$\vec{B} = \text{curl } \vec{A}. \quad (2.27)$$

Das Induktionsgesetz von Faraday (2.20) hat nun die Gestalt:

$$\text{curl} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (2.28)$$

Durch erneutes Anwenden des Lemmas erhalten wir:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} - \nabla\varphi. \quad (2.29)$$

Setzen wir nun (2.27) und (2.29) in (2.18) - (2.22) ein, so erhalten wir die Gleichung:

$$\text{curl} \frac{1}{\mu} \text{curl } \vec{A} + \kappa \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} + \nabla\varphi \right) = \vec{j}_S. \quad (2.30)$$

Leider ist die Gleichung nicht eindeutig nach \vec{A} und φ lösbar. Für jedes stetig differenzierbare skalare Feld ψ können die Potentiale modifiziert werden, ohne die Felder \vec{E} und \vec{B} zu verändern:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi, \quad (2.31)$$

$$\varphi' = \varphi - \frac{\partial\psi}{\partial\tau}. \quad (2.32)$$

Um eindeutige Lösbarkeit zu gewähren, müssen wir noch eine Eichbedingung einführen. Für Finite Element Methoden bietet sich die sogenannte topologische Eichung $\varphi = 0$ an, die zu der reduzierten Gleichung

$$\operatorname{curl} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \vec{A} + \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} = \vec{j}_S \quad (2.33)$$

führt. Diese Gleichung ist zumindest in leitfähigen Regionen ($\kappa > 0$) eindeutig lösbar. Für nicht leitfähige Regionen werden wir auf die diskretisierte Gleichung eine Regularisierung anwenden, die $\operatorname{curl} \vec{A}$ nicht verändert.

Um die Gleichung auf einem beschränkten räumlichen Gebiet Ω lösen zu können benötigen wir zusätzlich Randbedingungen. Die verbreitetsten Arten von Randbedingungen sind Dirichletbedingungen, die Bedingungen an die Einschränkung der Lösung auf den Rand stellen, und Neumannbedingungen, die entsprechende Bedingungen an Ableitungen der Lösung stellen. In unserem Fall ist eine Dirichletbedingung wenig sinnvoll, da das Vektorpotential \vec{A} im Grunde genommen nur eine Hilfsgröße darstellt und wir eigentlich an $\operatorname{curl} \vec{A}$ interessiert sind. Wir betrachten daher ein Neumannproblem, bei dem auf $\Gamma = \partial\Omega$ Bedingungen an $\vec{B} = \operatorname{curl} \vec{A}$ gestellt werden.

Bezüglich der Zeit betrachten wir ein Anfangswertproblem. Die zeitliche Diskretisierung erfolgt später durch ein implizites Eulerverfahren, bei dem in jedem Schritt ein räumliches, von τ abhängiges, Problem gelöst wird. Die vollständige Formulierung des Problems liest sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \vec{A}(\tau, x) + \kappa \frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau}(\tau, x) &= \vec{j}_S(\tau, x), \quad \tau > 0, \quad x \in \Omega, \\ (\gamma_N \vec{A})(\tau, x) &= \vec{\gamma}(\tau, x), \quad \tau > 0, \quad x \in \Gamma, \\ \vec{A}(0, x) &= \vec{A}_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (2.34)$$

mit einem Spuroperator γ_N , der in Abschnitt 2.3.1 definiert wird. Die Neumanndaten $\gamma_N \vec{A}$ können vorgegeben sein oder aus einer Kopplung mit einer Methode zur Lösung der Gleichung im Außenraum Ω^c stammen. Zur Kopplung bietet sich etwa die Randlelementmethode (BEM) an.

Durch den Zusammenhang

$$\operatorname{curl} \vec{H} = \vec{j}$$

ergibt sich für die Neumanndaten $\vec{\gamma} = \gamma_N \vec{A} = \gamma_D \vec{H}$ die Bedingung

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}} (\operatorname{curl} \vec{H}) \cdot d\vec{a} &= \int_{\partial \tilde{\Gamma}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{\partial \tilde{\Gamma}} \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}} \vec{j} \cdot d\vec{a} = \int_{\tilde{\Gamma}} \vec{j}_S \cdot d\vec{a} + \int_{\tilde{\Gamma}} \kappa \vec{E} \cdot d\vec{a}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

für alle Teilflächen $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ des Randes. Dies entspricht dem Ampèreschen Gesetz (ohne Maxwells Verbesserungen) in Integralform. Die rechte Seite beschreibt elektrische Ströme, die durch $\tilde{\Gamma}$ fließen. Für magnetostatische Probleme bzw. Randstücke nichtleitender Materialien gilt $\vec{j} = \vec{j}_S$. Durch (2.35) ist dann eine für die Lösbarkeit des Problems notwendige Verträglichkeitsbedingung an die Neumanndaten und die Spur der eingepprägten Stromdichte \vec{j}_S gegeben:

$$\int_{\partial \tilde{\Gamma}} \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} = \int_{\tilde{\Gamma}} \vec{j}_S \cdot d\vec{a} \quad \forall \tilde{\Gamma} \subset \Gamma.$$

Im magnetoquasistationären Fall fordert man auf den Grenzflächen zwischen Leitern und nicht leitfähigen Materialien üblicherweise, dass die Normalenkomponente der Stromdichte verschwindet, d.h. es soll kein Strom in den Nichtleiter ausfließen. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$\int_{\partial \tilde{\Gamma}} \vec{\gamma} \cdot d\vec{s} = 0$$

für alle Teilflächen $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ des Randes, die Grenzflächen eines Leiters zu einem Dielektrikum sind.

2.3 Eigenschaften des Differentialoperators

Wir untersuchen nun grundlegende Eigenschaften des curl-curl-Operators, wie etwa die mit ihm verbundenen Funktionenräume. Ziel ist die Formulierung von Lösbarkeitsbedingungen.

2.3.1 Funktionenräume

Wir betrachten in diesem Abschnitt spezielle Sobolevräume, die Definitionsgebiete bzw. Zielräume der üblichen Differentialoperatoren ∇ , curl und div sind. Dabei betrachten wir bewusst nicht nur den curl-Operator, da die drei Operatoren in eine Sequenz von Funktionenräumen eingebunden sind, wobei der Zielraum eines Operators das Definitionsgebiet des folgenden darstellt. Wir definieren zunächst die Räume der skalar- bzw. vektorwertigen quadratintegrierbaren Funktionen L^2 und \mathbb{L}^2 für Lipschitzgebiete.

Definition 2.1. Wir bezeichnen ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ als Lipschitzgebiet, oder Gebiet mit Lipschitzrand, falls es für $\Gamma = \partial\Omega$ eine endliche Überdeckung $\{U_i\}$, $i = 1, \dots, N$, gibt. Weiterhin wird verlangt, dass auf U_i lokale Koordinaten existieren, die durch Lipschitz-stetige Abbildungen χ_i von einem Parametergebiet $S \subset \mathbb{R}^{n-1}$ nach Γ beschrieben sind.

Definition 2.2. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitzrand $\Gamma = \partial\Omega$. Des Weiteren seien $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalarwertige und $\vec{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine vektorwertige Funktion. Wir definieren die Räume der quadratisch integrierbaren Funktionen wie folgt:

$$L^2(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |\varphi(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty \right\}, \quad (2.36)$$

$$\mathbb{L}^2(\Omega) = \left\{ \vec{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \int_{\Omega} |\vec{u}(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty \right\}. \quad (2.37)$$

Weiterhin definieren wir Skalarprodukte auf diesen Räumen:

$$\langle \varphi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \varphi(\vec{x}) \eta(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \varphi, \eta \in L^2(\Omega), \quad (2.38)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{L}^2(\Omega). \quad (2.39)$$

Wir wollen weitere Sobolevräume als Vervollständigung von Räumen stetiger Funktionen einführen. Dazu benötigen wir noch einige Definitionen.

Definition 2.3. Gegeben sei für $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ der Raum $C^k(\Omega)$ der auf Ω beschränkten und k -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Der Raum $C_0^k(\Omega)$, gegeben durch

$$C_0^k(\Omega) = \{ \varphi \in C^k(\Omega) : \text{supp}(\varphi) \subset \Omega \}, \quad (2.40)$$

wobei $\text{supp}(\varphi) = \overline{\{\vec{x} \in \Omega : \varphi(\vec{x}) \neq 0\}}$, beinhaltet die Funktionen aus $C^k(\Omega)$ mit kompaktem Träger.

Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ beschreibt

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3^{\alpha_3}}$$

eine partielle Ableitung im distributiven Sinn. Mit Hilfe dieser Ableitung definieren wir für $\varphi, \eta \in C^\infty(\Omega)$ ein Skalarprodukt:

$$\langle \varphi, \eta \rangle_{H^l(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq l} \langle \partial^\alpha \varphi, \partial^\alpha \eta \rangle_{L^2(\Omega)}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \quad (2.41)$$

Dieses Skalarprodukt induziert auf die übliche Weise eine Norm:

$$\|\varphi\|_{H^l(\Omega)} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{H^l(\Omega)}^{\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Definition 2.4. Der Sobolevraum $H^l(\Omega)$, $l \in \mathbb{N}_0$, wird definiert als Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^l(\Omega)}$:

$$H^l(\Omega) = \overline{C^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^l(\Omega)}}. \quad (2.43)$$

Für nicht ganzzahlige Parameter s , $s = l + \nu$ mit $l \in \mathbb{N}_0$, $\nu \in (0, 1)$, definieren wir $H^s(\Omega)$ als Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der durch das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \eta \rangle_{H^s(\Omega)} &= \langle \varphi, \eta \rangle_{H^l(\Omega)} \\ &+ \sum_{|\alpha| \leq l} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(\partial^\alpha \varphi(\vec{x}) - \partial^\alpha \eta(\vec{y}))(\partial^\alpha \eta(\vec{x}) - \partial^\alpha \varphi(\vec{y}))}{|\vec{x} - \vec{y}|^{3+2\nu}} d\vec{x} d\vec{y} \end{aligned} \quad (2.44)$$

induzierten Norm. Für $s < 0$ definiert man $H^s(\Omega)$ als Dualraum von $H^{-s}(\Omega)$, versehen mit der Norm

$$\|\varphi\|_{H^s(\Omega)} = \sup_{0 \neq \eta \in H^{-s}(\Omega)} \frac{\langle \varphi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)}}{\|\eta\|_{H^{-s}(\Omega)}}. \quad (2.45)$$

Wir erklären nun spezielle Sobolevräume, die direkt mit den Operatoren ∇ , curl und div zusammenhängen.

Definition 2.5. Durch

$$H(\nabla, \Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) : \nabla \varphi \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.46)$$

$$H(\text{curl}, \Omega) = \{\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \text{curl } \vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega)\}, \quad (2.47)$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \text{div } \vec{u} \in L^2(\Omega)\} \quad (2.48)$$

sind Unterräume von $L^2(\Omega)$ bzw. $\mathbb{L}^2(\Omega)$ gegeben. Diese Unterräume sind allerdings bezüglich der durch (2.38) bzw. (2.39) induzierten Normen nicht abgeschlossen. Zwar liegen sie dicht in $L^2(\Omega)$ bzw. $\mathbb{L}^2(\Omega)$, jedoch sind sie bezüglich der durch die gerade genannten Skalarprodukte induzierten Normen nicht vollständig. Passende Normen werden durch die Skalarprodukte

$$\langle \varphi, \eta \rangle_{H(\nabla, \Omega)} = \langle \varphi, \eta \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \nabla \varphi, \nabla \eta \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (2.49)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{H(\text{curl}, \Omega)} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle \text{curl } \vec{u}, \text{curl } \vec{v} \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)}, \quad (2.50)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{H(\text{div}, \Omega)} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle_{\mathbb{L}^2(\Omega)} + \langle \text{div } \vec{u}, \text{div } \vec{v} \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (2.51)$$

induziert. Die Differentialoperatoren ∇ , curl und div sind hierbei im schwachen Sinne zu verstehen. Bezüglich dieser Normen sind die Räume $H(\nabla, \Omega)$, $H(\text{curl}, \Omega)$ und $H(\text{div}, \Omega)$ vollständig, also abgeschlossene Unterräume von $L^2(\Omega)$ bzw. $\mathbb{L}^2(\Omega)$ [6].

Bemerkung 2.2. Die Räume $H(\nabla, \Omega)$ und $H^1(\Omega)$ sind identisch [6].

Wir wollen nun Entsprechungen dieser Räume auf zweidimensionalen Oberflächen, die in einen dreidimensionalen Raum eingebettet sind, finden, in unserem Fall auf $\Gamma = \partial\Omega$. Solche Oberflächen können als Mannigfaltigkeiten aufgefasst und lokal mit einem Koordinatensystem versehen werden. Wir werden den Begriff der Mannigfaltigkeit ausführlicher in Abschnitt 3.1.2 betrachten.

Für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} existiert eine Überdeckung aus in \mathcal{M} offenen Mengen U_i , so dass es auf jeder Komponente U_i lokale Koordinaten \vec{x} gibt, die durch Abbildungen von einem Parametergebiet $S \subset \mathbb{R}^2$ auf U_i bestimmt sind: $\vec{x} = \chi_i(\vec{\xi})$, $\vec{\xi} \in S$.

Um Sobolevräume auf Γ zu bestimmen, gehen wir vor wie in [40]. Sei

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^N U_i. \quad (2.52)$$

Weiterhin seien auf einer Umgebung $\Gamma_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$ von Γ für $i = 1, \dots, N$ Funktionen $\varphi_i \in C_0^\infty(\Gamma_\epsilon)$ gegeben, wobei $\varphi_i(\vec{x}) \in [0, 1]$ und $\text{supp}(\varphi_i|_\Gamma) \subset U_i$, so dass

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i(\vec{x}) = 1, \quad \forall \vec{x} \in \Gamma$$

erfüllt ist. Wir sprechen auch von einer Zerlegung der Eins. Eine Funktion $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ kann dann wie folgt zerlegt werden:

$$v(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N v_i(\vec{x}), \quad v_i(\vec{x}) = v(\vec{x})\varphi_i(\vec{x}).$$

Auf das Parametergebiet übertragen ergibt sich:

$$v_i(\vec{x}) = v(\chi_i(\vec{\xi}))\varphi_i(\chi_i(\vec{\xi})) = \tilde{v}_i(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} \in S.$$

Definition 2.6. Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit Lipschitzrand $\Gamma = \partial\Omega$ definieren wir den Sobolevraum $H^s(\Gamma)$, $0 \leq s \leq 1$, mit Hilfe der gerade beschriebenen Zerlegung. Sei Γ gemäß (2.52) überdeckt. Wir betrachten den Raum aller Funktionen $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, für die alle oben beschriebenen \tilde{v}_i in $H^s(S)$ liegen. Wir bezeichnen diesen Raum mit $H^s(\Gamma)$ und versehen ihn mit der Norm:

$$\|v\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^N (\|\tilde{v}_i\|_{H^s(S)}^2) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Für $-1 \leq s < 0$ wird wie zuvor $H^s(\Gamma)$ als Dualraum von $H^{-s}(\Gamma)$ definiert und mit der Norm

$$\|v\|_{H^s(\Gamma)} = \sup_{0 \neq \eta \in H^{-s}(\Gamma)} \frac{\langle v, \eta \rangle_{L^2(\Gamma)}}{\|\eta\|_{H^{-s}(\Gamma)}}$$

versehen.

Bemerkung 2.3. Die Definition von $H^s(\Gamma)$ ist unabhängig von der Wahl der Karten sowie der Zerlegung der Eins. Die resultierenden Normen sind äquivalent [29]. Um C_0^∞ -Zerlegungsfunktionen φ_i erklären zu können, wird Γ in \mathbb{R}^3 eingebettet.

Bemerkung 2.4. Um $H^s(\Gamma)$ für $|s| \geq 1$ definieren zu können, bedarf es strengerer Anforderungen an die Glattheit von Γ .

Wir betrachten ab jetzt spezielle Lipschitzgebiete, nämlich Lipschitz-Polyeder. Die Ränder solcher Gebiete lassen sich in offene, glatte Teilflächen zerlegen.

Um skalare und vektorielle Felder auf den Rand eines Gebietes einschränken und so Randbedingungen formulieren zu können, bedarf es entsprechender Operatoren, sogenannter Spuroperatoren. Der einfachste Spuroperator ist die Dirichletspur γ_0 für skalare Funktionen. Sie ist durch Grenzwertbildung auf Γ realisiert:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : C^\infty(\mathbb{R}^3)|_\Omega &\rightarrow L^2(\Gamma) = H^0(\Gamma), \\ (\gamma_0\varphi)(\vec{x}) &= \lim_{\Omega \ni \tilde{\vec{x}} \rightarrow \vec{x}} \varphi(\tilde{\vec{x}}), \quad \vec{x} \in \Gamma, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)|_\Omega. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Auf Lipschitzgebieten kann die Dirichletspur auf

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

fortgesetzt werden [26]. Für vektorwertige Funktionen $\vec{u} \in (C^\infty(\mathbb{R}^3))^3|_\Omega$ definieren wir die Dirichletspur γ_D :

$$(\gamma_D \vec{u})(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{x}) \times (\gamma_0 \vec{u}(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x})), \quad (2.54)$$

wobei \vec{n} das äußere Normalenfeld an Γ bezeichnet. Allerdings ist \vec{n} auf Lipschitzrändern im Allgemeinen nicht stetig. Man zerlegt daher Γ in offene, glatte Teilflächen Γ_i mit stetigem äußerem Normalenfeld \vec{n} und untersucht die Eigenschaften von γ_D auf diesen Teilflächen [13].

In der Literatur wird auch häufig die Spur

$$(\gamma_\times \vec{u})(\vec{x}) = \gamma_0 \vec{u}(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) \quad (2.55)$$

beschrieben. Das Vektorfeld $\gamma_D \vec{u}$ entspricht der zu Γ tangentialen Komponente von $\vec{u}|_\Gamma$, während $\gamma_\times \vec{u}$ eine Drehung von $\gamma_D \vec{u}$ um 90° in der Tangentialebene darstellt. Für die in [13] definierten Spurräume $H_{\parallel}^{\frac{1}{2}}$ und $H_{\perp}^{\frac{1}{2}}$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \gamma_D &: (H^1(\Omega))^3 \rightarrow H_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \gamma_\times &: (H^1(\Omega))^3 \rightarrow H_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \end{aligned}$$

stetig und surjektiv. Diese Räume enthalten tangentiale Vektorfelder mit unterschiedlichen Stetigkeitseigenschaften an Kanten (Unstetigkeiten) von Γ . Felder in $H_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sind über solche Kanten hinweg im schwachen Sinne tangential (bezüglich der Kante) stetig. Für Felder aus $H_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ gilt über solche Kanten hinweg die Stetigkeit der Normalkomponente. Die entsprechenden Dualräume werden mit $H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ bezeichnet.

Wir betrachten nun Differentialoperatoren auf Γ , die sich mit Hilfe der Spuroperatoren und der räumlichen Differentialoperatoren konstruieren lassen [32].

Definition 2.7. Für $\varphi \in H^2(\Omega)$ definiert man den Oberflächengradienten und die vektorwertige Oberflächenrotation auf Γ durch:

$$\nabla_\Gamma \varphi = \gamma_0(\nabla \varphi), \quad \overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma \varphi = \nabla_\Gamma \varphi \times \vec{n}. \quad (2.56)$$

Für Funktionen auf Γ werden diese Differentialoperatoren mit Hilfe einer Fortsetzung in eine Umgebung

$$\Gamma_\epsilon = \left\{ \vec{x} \in \bar{\Omega} : \inf_{\vec{y} \in \Gamma} |\vec{x} - \vec{y}| < \epsilon \right\}$$

definiert [32]. Es gelten dabei die Abbildungseigenschaften

$$\begin{aligned}\nabla_\Gamma &: H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma &: H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma),\end{aligned}$$

wobei $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ an dieser Stelle als $\gamma_0(H^2(\Omega))$ zu verstehen ist [13], strenggenommen also nicht im Sinne von Definition 2.6. Den Dualraum von $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ bezeichnen wir mit $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Wir können nun die zugehörigen adjungierten Operatoren

$$\begin{aligned}\text{div}_\Gamma &: H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), \\ \text{curl}_\Gamma &: H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)\end{aligned}$$

vermöge des Dualitätsproduktes zwischen $H_{\parallel}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, bzw. zwischen $H_{\perp}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, definieren:

$$\begin{aligned}\langle \text{div}_\Gamma \vec{u}, \varphi \rangle &= - \int_{\Gamma} \vec{u} \cdot \nabla_\Gamma \varphi dS_x, \quad \forall \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma), \\ \langle \text{curl}_\Gamma \vec{u}, \varphi \rangle &= \int_{\Gamma} \vec{u} \cdot \overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma \varphi dS_x, \quad \forall \varphi \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma).\end{aligned}$$

In [13] wird gezeigt, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned}\gamma_D &: H(\text{curl}, \Omega) \rightarrow H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma), \\ \gamma_{\times} &: H(\text{curl}, \Omega) \rightarrow H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma)\end{aligned}$$

mit den Räumen

$$H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma) = \left\{ \vec{u} \in H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \text{curl}_\Gamma \vec{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}, \quad (2.57)$$

$$H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) = \left\{ \vec{u} \in H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \text{div}_\Gamma \vec{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\} \quad (2.58)$$

stetig und surjektiv sind. Diese beiden Räume sind zueinander dual und können durch die Abbildung

$$\vec{n} \times \cdot : H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)$$

ineinander überführt werden. Aus [14] ergeben sich zusammen mit den Beziehungen

$$\text{curl}_\Gamma \nabla_\Gamma \equiv 0, \quad \text{div}_\Gamma \overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma \equiv 0$$

die Abbildungseigenschaften für Verallgemeinerungen von ∇_Γ und $\overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma$:

$$\begin{aligned}\nabla_\Gamma &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma), \\ \overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma).\end{aligned}$$

Bemerkung 2.5. Die Indices \perp und \parallel der Räume $H_\perp^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ und $H_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ beziehen sich auf ihre Dualräume, nicht aber auf ihre Raumeigenschaften.

Wir erklären zuletzt noch die Neumannspur durch:

$$\begin{aligned}\gamma_N \vec{u} &= \gamma_D \left(\frac{1}{\mu} \text{curl } \vec{u} \right), \\ \gamma_N &: H(\text{curl curl}, \Omega) \rightarrow H_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma)\end{aligned}\tag{2.59}$$

mit einer problemabhängigen Skalierung, hier $1/\mu$ für das magnetostatische bzw. quasistationäre Problem. Der Raum $H(\text{curl curl}, \Omega)$ ist erklärt durch

$$H(\text{curl curl}, \Omega) = \{ \vec{u} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \text{curl } \vec{u} \in H(\text{curl}, \Omega) \}.$$

Bemerkung 2.6. In der Literatur wird γ_N häufig mit Hilfe von γ_\times an Stelle von γ_D definiert. Diese beiden Definitionen stimmen bis auf eine Drehung um 90° in der Tangentialebene überein. Wir bevorzugen die nicht gedrehte Variante, da sich diese direkt aus einer Formulierung mit Differentialformen ergibt (siehe nächstes Kapitel).

Die vorgestellten operatorabhängigen Sobolevräume werden durch eben diese Operatoren in Zusammenhang gestellt. Daraus ergibt sich eine Folge von Räumen, die sogenannte De Rham Sequenz:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} H^1(\Omega) \xrightarrow{\nabla} H(\text{curl}, \Omega) \xrightarrow{\text{curl}} H(\text{div}, \Omega) \xrightarrow{\text{div}} L^2(\Omega) \xrightarrow{0} \{0\}.\tag{2.60}$$

Auf dem Rand von Ω existieren zwei solche Sequenzen:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\nabla_\Gamma} H_\perp^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_\Gamma, \Gamma) \xrightarrow{\text{curl}_\Gamma} H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{0} \{0\},\tag{2.61}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma} H_\parallel^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) \xrightarrow{\text{div}_\Gamma} H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{0} \{0\}.\tag{2.62}$$

Für topologisch triviale Gebiete Ω stimmen Bild und Kern aufeinanderfolgender Operatoren überein. Man nennt die Sequenz dann auch exakt.

Bemerkung 2.7. Für nichttriviale Topologien gilt immer noch, dass das Bild eines Operators eine Teilmenge des Kerns des folgenden Operators ist.

2.3.2 Variationsmethoden

Auch wenn beim Diskreten Elektromagnetismus kein direkter Variationsansatz verfolgt wird, d.h. die Diskretisierung des Problems erfolgt nicht über eine schwache Formulierung, ergibt sich letztendlich eine dazu äquivalente Formulierung. Aus diesem Grund betrachten wir an dieser Stelle eine allgemeine Variationsformulierung der curl-curl-Gleichung.

Definition 2.8 (Bilinearform). Sei V ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ wird Bilinearform genannt, falls sie für alle $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{aligned}a(x_1 + x_2, y_1 + y_2) &= a(x_1, y_1) + a(x_1, y_2) + a(x_2, y_1) + a(x_2, y_2), \\a(\lambda x, y) &= \lambda a(x, y), \\a(x, \lambda y) &= \lambda a(x, y).\end{aligned}$$

Bemerkung 2.8. Die Definition der Bilinearform lässt sich auf komplexe Vektorräume erweitern. Dabei verallgemeinert sich die letzte Bedingung zu

$$a(x, \lambda y) = \bar{\lambda} a(x, y)$$

und man spricht von einer Sesquilinearform.

Beispiel 2.1. Für $\vec{u}, \vec{v} \in H(\text{curl}, \Omega)$ ist durch

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \text{curl } \vec{u} \cdot \text{curl } \vec{v} d\vec{x}$$

eine Bilinearform definiert.

Definition 2.9. Sei H ein Hilbertraum und $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf H . Die Bilinearform a heißt H -elliptisch, falls

$$|a(x, x)| \geq c_1 \|x\|_H^2$$

für alle $x \in H$ mit einer Konstanten $c_1 > 0$. Weiterhin heißt a auf H beschränkt, falls

$$|a(x, y)| \leq c_2 \|x\|_H \|y\|_H$$

für alle $x, y \in H, c_2 > 0$.

Beispiel 2.2. Die Bilinearform

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} (\operatorname{curl} \vec{u} \cdot \operatorname{curl} \vec{v} + \kappa \vec{u} \cdot \vec{v}) \, d\vec{x}, \quad \kappa \geq 0$$

ist für $\kappa > 0$ $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ -elliptisch mit $c_1 = \min\{1, \kappa\}$. Für $\kappa = 0$ gilt dies nicht, da sie für $\vec{w} \in \nabla H^1(\Omega)$ verschwindet. In beiden Fällen ist a beschränkt auf $H(\operatorname{curl}, \Omega)$ mit $c_2 = 1 + \kappa$.

Satz 2.1 (Lax-Milgram). *Sei H ein Hilbertraum, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf H und a eine auf H beschränkte und H -elliptische Bilinearform. Dann besitzt die Gleichung*

$$\text{Finde } x \in H : a(x, y) = f(y), \quad \forall y \in H \quad (2.63)$$

eine eindeutige Lösung $x \in H$, für die

$$\|x\|_H \leq \frac{1}{c_1} \|f\|_{H'}$$

gilt, wobei H' für den Dualraum von H steht.

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [40]. □

Satz 2.2 (Céa). *Sei wie gehabt H ein Hilbertraum, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional auf H und a eine auf H beschränkte und H -elliptische Bilinearform. Des Weiteren sei $V \subset H$ ein endlichdimensionaler Unterraum von H und $x \in H$ die nach dem Satz von Lax-Milgram eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung*

$$\text{Finde } x \in H : a(x, y) = f(y), \quad \forall y \in H.$$

Dann ist die diskrete Gleichung

$$\text{Finde } x_N \in V : a(x_N, y_N) = f(y_N), \quad \forall y_N \in V \quad (2.64)$$

ebenfalls eindeutig lösbar und für die Lösung x_N gilt die Stabilitätsabschätzung

$$\|x_N\|_H \leq \frac{1}{c_1} \|f\|_{H'}.$$

Weiterhin gilt die sogenannte quasi-optimale Fehlerabschätzung:

$$\|x - x_N\|_H \leq \frac{c_2}{c_1} \inf_{y_N \in V} \|x - y_N\|_H. \quad (2.65)$$

Beweis. Für den Beweis verweisen wir abermals auf [40]. □

Die Konvergenz eines Variationsansatzes hängt somit von der Approximationseigenschaft der Ansatzräume ab, mit denen der Lösungsraum angenähert wird. Ist die Güte dieser Approximation bekannt, so erhält man Aussagen über die Konvergenzrate. Da die bei diesem Ansatz vorkommenden Bilinearformen jedoch im Allgemeinen nicht exakt ausgewertet und nur numerisch angenähert werden können, kommt es an dieser Stelle zusätzlich zum Diskretisierungsfehler noch zu einem Konsistenzfehler. An Stelle von (2.64) wird also eine gestörte Gleichung behandelt:

$$\text{Finde } \tilde{x}_N \in V : \tilde{a}(\tilde{x}_N, y_N) = f(y_N), \quad \forall y_N \in V \quad (2.66)$$

Das Lemma von Strang trifft Aussagen über Lösbarkeit und Fehler für das gestörte Problem.

Satz 2.3 (Strang-Lemma). *Für die gestörte Bilinearform \tilde{a} gelte die Fehlerabschätzung*

$$|a(x, y) - \tilde{a}(x, y)| \leq \delta \|x\|_H \|y\|_H, \quad \forall x, y \in V \subset H$$

mit einer von V unabhängigen Konstanten $0 < \delta < c_1$. Dann besitzt die gestörte Gleichung (2.66) eine eindeutige Lösung $\tilde{x}_N \in V$ und es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|x - \tilde{x}_N\|_H \leq C \inf_{y_N \in V} \{ \|x - y_N\|_H + \delta \|y_N\|_H \},$$

wobei $x \in H$ die Lösung des kontinuierlichen Problems (2.63) ist.

Beweis. Siehe [40] und setze die Fehlerabschätzung für \tilde{a} ein. □

Neben der Bilinearform kann auch das Funktional f auf der rechten Seite von (2.64) im Allgemeinen nur numerisch angenähert werden. Entsprechend wird für das gestörte Funktional \tilde{f} die Gleichung

$$\text{Finde } \tilde{x}_N \in V : a(\tilde{x}_N, y_N) = \tilde{f}(y_N), \quad \forall y_N \in V \quad (2.67)$$

betrachtet. Für diese gilt eine weitere Version des Strang-Lemmas.

Satz 2.4 (Strang-Lemma). *Das gestörte Problem (2.67) besitzt eine eindeutige Lösung, für die die Fehlerabschätzung*

$$\|x - \tilde{x}_N\|_H \leq C \left(\inf_{y_N \in V} \|x - y_N\|_H + \sup_{0 \neq z_N \in V} \frac{|f(z_N) - \tilde{f}(z_N)|}{\|z_N\|_H} \right)$$

gilt, wobei $x \in H$ wieder die Lösung der kontinuierlichen Gleichung ist.

Beweis. Siehe [40]. □

Kapitel 3

Differentialformen

3.1 Grundlagen

Zur Beschreibung von Differentialformen werden Konzepte aus der äußeren Algebra und der Vektoranalysis benötigt. Besonders hervorzuheben sind hierbei das Dachprodukt \wedge nebst der damit verknüpften Multivektoren, sowie der Begriff der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

3.1.1 Multivektoren

Wir wollen zunächst antisymmetrische Produkte von Vektoren definieren, die wiederum neue Räume aufspannen. Wir orientieren uns in diesem Abschnitt an [21].

Definition 3.1 (Äußeres Produkt und Multivektoren). Sei L ein n -dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} (für Vektorräume über \mathbb{C} gilt eine analoge Definition). Für $p = 0, \dots, n$ definieren wir die Räume der p -Vektoren $\bigwedge^p L$. Für $p = 0, 1$ gilt zunächst:

$$\begin{aligned}\bigwedge^0 L &= \mathbb{R}, \\ \bigwedge^1 L &= L.\end{aligned}$$

Die Räume $\bigwedge^p L$, $p \geq 2$ bestehen aus allen formalen Summen

$$\sum_{\substack{i=(i_1, \dots, i_p) \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}} a_i (\alpha_{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha_{i_p}), \quad \alpha_j \in L, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

wobei der äußere Produktoperator \wedge , der auch als Dachprodukt bezeichnet wird, durch die folgenden Eigenschaften definiert wird:

- (i) $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)$,
- (ii) $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$, falls $\alpha_i = \alpha_j$ für ein Indexpaar $i \neq j$,
- (iii) $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = \text{sgn}(\sigma)(\alpha_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \alpha_{\sigma(p)})$ für eine Permutation $\sigma : \{1, \dots, p\} \rightarrow \{1, \dots, p\}$.

Für $p > n$ setzt man $\bigwedge^p L = \{0\}$.

Folgerung 3.1. *Aus den ersten beiden Eigenschaften folgt $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p = 0$, falls $\{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ linear abhängig sind. Dies begründet die Festlegung*

$$\bigwedge^p L = \{0\} \quad (3.2)$$

für $p > n$.

Folgerung 3.2. *Ist v_1, \dots, v_n eine Basis von L , so lässt sich eine Basis von $\bigwedge^p L$ wie folgt konstruieren: für jede Indexmenge $\mathfrak{J} = \{i_1, \dots, i_p\}$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ setzen wir $v^{\mathfrak{J}} = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$. Dann bilden die $v^{\mathfrak{J}}$ eine Basis von $\bigwedge^p L$. Daraus folgt weiterhin*

$$\dim \bigwedge^p L = \binom{n}{p}. \quad (3.3)$$

Bisher haben wir das äußere Produkt dazu benutzt, einzelne Vektoren zu multiplizieren, um Multivektoren zu erhalten. Wir wollen nun eine Erweiterung für Multivektoren $\wedge : (\bigwedge^p L) \times (\bigwedge^q L) \rightarrow \bigwedge^{p+q} L$ definieren.

Definition 3.2 (Verallgemeinerung des äußeren Produktes). Gegeben seien ein p -Vektor $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p$ und ein q -Vektor $\beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q$. Das äußere Produkt $\alpha \wedge \beta$ ist bestimmt durch

$$\alpha \wedge \beta = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_q$$

und besitzt für $\alpha \in \bigwedge^p L$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in \bigwedge^q L$, $\gamma \in \bigwedge^r L$ folgende Eigenschaften:

- (i) $\alpha \wedge (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \wedge \beta_1 + \alpha \wedge \beta_2$,
- (ii) $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$,
- (iii) $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

Im Folgenden betrachten wir Vektorräume L , die mit einem inneren Produkt ausgestattet sind.

Definition 3.3 (Inneres Produkt). Ein inneres Produkt auf einem \mathbb{R} -Vektorraum ist eine Abbildung

$$(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.4)$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Linearität: $(r\alpha_1 + s\alpha_2, \beta) = r(\alpha_1, \beta) + s(\alpha_2, \beta)$,
2. Symmetrie: $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,
3. Nichtdegeneriertheit: $(\alpha, \beta) = 0, \forall \beta \Rightarrow \alpha = 0$.

Eine Basis (v_1, \dots, v_n) von L heißt Orthonormalbasis, falls $(v_i, v_j) = \pm\delta_{ij}$.

Satz 3.1. Jeder mit einem inneren Produkt versehene Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. 1. Ist $\dim(L) > 0$, so existiert ein Vektor $v \in L$, für den $(v, v) \neq 0$ gilt. Würde $(\alpha, \alpha) = 0$ für alle $\alpha \in L$ gelten, so wäre für alle $\alpha, \beta \in L$

$$0 = (\alpha + \beta, \alpha + \beta) = (\alpha, \alpha) + 2(\alpha, \beta) + (\beta, \beta) = 2(\alpha, \beta).$$

Daraus würde folgen, dass $(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha, \beta \in L$, was ein Widerspruch zur Nichtdegeneriertheit ist.

2. Sei $v_1, \dots, v_r, r \leq n$, eine maximale Sequenz von Vektoren in L , für die

$$(v_i, v_j) = \pm\delta_{ij}$$

gilt. Wir bezeichnen den von diesen Vektoren aufgespannten Unterraum mit M . Es gilt $\forall j \in \{1, \dots, r\}$

$$\sum_{i=1}^r a_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^r a_i (v_i, v_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_j = 0,$$

woraus die lineare Unabhängigkeit des Systems $\{v_1, \dots, v_r\}$ folgt und somit auch, dass $\dim(M) = r$. Wir nehmen nun $r < n$ an.

3. Sei N das orthogonale Komplement zu M , das heißt der Raum der Vektoren β , für die gilt $(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in M$. Da N durch die r Bedingungen $(v_i, \beta) = 0$ bestimmt ist, gilt $\dim(N) \geq n - r$. Da aber $M \cap N = \{0\}$, muss $\dim(N) = n - r$ gelten. Es gilt $M \oplus N = L$.

4. N ist selbst wieder mit einem inneren Produkt versehen, das sich von dem inneren Produkt von L ableitet. Es genügt, die Nichtdegeneriertheit zu überprüfen. Sei $\beta \in N$ und $(\gamma, \beta) = 0, \forall \gamma \in N$. Da auch $(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in M$ gilt, ist $(\alpha, \beta) = 0, \forall \alpha \in L$ und somit $\beta = 0$.
5. Gemäß Schritt 1 existiert ein Vektor $\alpha \in N$ mit $(\alpha, \alpha) \neq 0$. Wir setzen

$$v_{r+1} = \frac{\alpha}{\sqrt{|(\alpha, \alpha)|}}$$

und erhalten mit v_1, \dots, v_{r+1} eine Sequenz, die länger als eine maximale ist. Unsere Annahme muss also falsch gewesen sein und es gilt $r = n$. \square

Definition 3.4 (Innere Produkte von Multivektoren). Sei L ein mit einem inneren Produkt (\cdot, \cdot) versehener Vektorraum, $\alpha, \beta \in \bigwedge^p L$. Wir definieren das innere Produkt auf $\bigwedge^p L$ durch

$$(\alpha, \beta) = \det[(\alpha_i, \beta_j)] \quad (3.5)$$

für $\alpha = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p, \beta = \beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_p$. Die Determinante ist eine alternierende, multilineare Funktion bezüglich der α_i 's bzw. der β_i 's. Vertauschen von α und β entspricht der Transposition der Matrix, verändert also nicht die Determinante, und damit auch nicht das Produkt.

Wir betrachten nun eine Orthonormalbasis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von L . Sei

$$v_H = v_{h_1} \wedge \dots \wedge v_{h_p}, \quad 1 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_p \leq n.$$

Dann bilden die p -Vektoren v_H eine Basis von $\bigwedge^p L$. Seien nun v_H und v_K zwei solche Basiselemente. Das innere Produkt hat die Gestalt

$$(v_H, v_K) = \det[(v_{h_i}, v_{k_j})].$$

Falls $H \neq K$, so ist mindestens eine Zeile gleich Null und die Determinante verschwindet. Im Falle $H = K$ verschwinden alle Einträge, außer der Diagonaleinträge. Diese sind entweder 1 oder -1 . Zusammengefasst gilt also:

$$(v_H, v_K) = \pm \prod_{i=1}^p \delta_{h_i k_i} = \pm \delta_{HK}. \quad (3.6)$$

Die v_H bilden also eine Orthonormalbasis von $\bigwedge^p L$, woraus die Nichtdegeneriertheit des inneren Produktes folgt.

Lemma 3.1. *Sei f ein lineares Funktional auf L . Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $\beta \in L$, so dass:*

$$f(\alpha) = (\alpha, \beta), \quad \forall \alpha \in L. \quad (3.7)$$

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine orthonormale Basis von L . Wir setzen $b_i = f(v_i)$ und

$$\beta = \sum_{i=1}^n (v_i, v_i) b_i v_i.$$

Dann gilt

$$(\beta, v_j) = \sum_{i=1}^n (v_i, v_i) b_i (v_i, v_j) = b_j = f(v_j).$$

□

Die Aussage des Lemmas kann analog auch für Multivektoren bewiesen werden.

Definition 3.5 (Orientierung von Vektorräumen). Durch Ordnen der Basis eines Vektorraumes kann dieser mit einer Orientierung versehen werden. Dabei werden gerade Permutationen der Basis mit der gleichen Orientierung identifiziert. Eine Orientierung ist also die Wahl einer von genau zwei möglichen Ordnungen einer Basis. Bei einem eindimensionalen Raum wird die Orientierung durch die Richtung des Basisvektors bestimmt. Selbst der triviale Vektorraum kann durch Zuweisung eines Vorzeichens mit einer Orientierung versehen werden.

Bemerkung 3.1. Neben der gerade definierten, sogenannten inneren Orientierung lässt sich für p -dimensionale Unterräume U eines n -dimensionalen Vektorraumes V auch eine äußere Orientierung erklären. O.B.d.A. sei $\{v_1, \dots, v_p\}$ eine Basis von U , $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V . Eine äußere Orientierung von U ist durch Ordnen von $\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$ gegeben, wobei gerade Permutationen wieder der gleichen Orientierung entsprechen. Eine innere und äußere Orientierung von U sind kompatibel, falls $\{v_{\sigma_{in}(1)}, \dots, v_{\sigma_{in}(p)}, v_{\sigma_{out}(p+1)}, \dots, v_{\sigma_{out}(n)}\}$ mit der Orientierung von V übereinstimmt.

Betrachtet man die Dimensionen der Räume $\bigwedge^p L$ und $\bigwedge^{n-p} L$, so fällt auf, dass diese übereinstimmen. Man kann also Isomorphismen definieren, die p -Vektoren auf $(n-p)$ -Vektoren abbilden. Wir definieren nun den $*$ -Operator wie in [21].

Definition 3.6 (*-Operator). Sei (v_1, \dots, v_n) eine geordnete Basis von L . Man sagt, die dazugehörige Orientierung von L ist durch einen n -Vektor $v = c(v_1 \wedge \dots \wedge v_n)$, $c > 0$, festgelegt. Insbesondere ist $v \neq 0$ und spannt somit den eindimensionalen Raum $\bigwedge^n L$ auf. Für einen festen p -Vektor u erklären wir die Abbildung

$$w \mapsto u \wedge w, \quad (3.8)$$

die von $\bigwedge^{n-p} L$ nach $\bigwedge^n L$ abbildet. Da $\bigwedge^n L$ eindimensional ist, kann man auch

$$u \wedge w = f_u(w)v \quad (3.9)$$

schreiben, wobei f_u ein lineares Funktional auf $\bigwedge^{n-p} L$ ist. Es gibt also nach Lemma 3.1 einen eindeutig bestimmten $(n-p)$ -Vektor $*u$, so dass:

$$u \wedge w = (*u, w)v.$$

Zur expliziten Berechnung von $*u$ genügt es wegen der Linearität, $*u$ für $u = v_H = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$ zu bestimmen, wobei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von L ist. Sei

$$v_K = v_{k_1} \wedge \dots \wedge v_{k_{n-p}}, \quad 1 \leq k_1 < \dots < k_{n-p} \leq n.$$

Dann ist

$$u \wedge v_K = (*u, v_K)v.$$

Hierbei verschwindet die rechte Seite, falls $v_K \neq v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_n$, woraus folgt, dass

$$*u = c(v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_n).$$

Wählen wir nun $v_K = v_{p+1} \wedge \dots \wedge v_n$, so folgt

$$v = u \wedge v_K = c(v_K, v_K)v$$

und somit $c = (v_K, v_K) = \pm 1$, zusammengefasst also:

$$*u = (v_K, v_K)v_K. \quad (3.10)$$

Da $u \wedge v_K = (-1)^{p(n-p)}v_K \wedge u$, erhalten wir unter Berücksichtigung der Orientierung:

$$*v_K = (-1)^{p(n-p)}(u, u)u.$$

Somit gilt auch

$$\begin{aligned} *(* u) &= (-1)^{p(n-p)}(u, u)(v_K, v_K)u \\ &= (-1)^{p(n-p)}(v, v)u \\ &= (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}u, \end{aligned}$$

wobei t die sogenannte Signatur des inneren Produktes bezeichnet:

$$t = \#\{i : (v_i, v_i) = 1\} - \#\{i : (v_i, v_i) = -1\}.$$

Es folgt für einen beliebigen p -Vektor α :

$$* * \alpha = (-1)^{p(n-p)+(n-t)/2}\alpha.$$

Weiterhin gilt für p -Vektoren α, β

$$\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha = (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)v.$$

Wählt man nämlich $\beta = v_H$ wie oben, so ist die einzige mögliche Wahl eines Basiselements $\alpha = v_J$, für die nicht beide Seiten verschwinden, gerade $\alpha = v_H$ und damit

$$\begin{aligned} \alpha \wedge * \beta &= \alpha \wedge (v_K, v_K)v_K = (v_K, v_K)v \\ &= (-1)^{(n-t)/2}(v_H, v_H)v = (-1)^{(n-t)/2}(\alpha, \beta)v. \end{aligned}$$

Wegen seiner Abhängigkeit vom inneren Produkt stellt der $*$ -Operator ein metrisches Konzept dar. Im Zusammenhang mit Differentialformen wird dieser Operator üblicherweise als Hodge-Operator bezeichnet. Wir werden später eine Variante des Hodge-Operators auf Differentialformen verwenden.

3.1.2 Mannigfaltigkeiten und Tangentialvektoren

Wir wollen in diesem Abschnitt das Konzept der Multivektoren auf Tangentialvektoren anwenden, um Mannigfaltigkeiten lokal zu beschreiben. Eine Mannigfaltigkeit kann als ein Raum gesehen werden, der lokal einem Euklidischen Raum ähnelt.

Mannigfaltigkeiten

Eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum \mathcal{M} , der zusätzlich lokal die Struktur eines Euklidischen Raumes besitzt. Zur Beschreibung dieser Struktur führen wir die Begriffe der Karten und Atlanten ein.

Definition 3.7. Sei \mathcal{M} ein n -dimensionaler topologischer Raum und $\{U_i\}$ eine Überdeckung dieses Raumes mit (in \mathcal{M}) offenen Mengen. Wir nennen das Paar (U_i, φ_i) aus einer offenen Menge U_i der Überdeckung und einem Homöomorphismus $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von \mathcal{M} . Eine Menge von Karten, die ganz \mathcal{M} beschreiben, d.h. die zugehörigen offenen Mengen U_i überdecken \mathcal{M} , wird auch Atlas genannt. Üblicherweise besteht ein Atlas aus mehr als einer Karte. Wir bezeichnen $(\mathcal{M}, (U_i, \varphi_i)_i)$ als differenzierbare Mannigfaltigkeit. Als abkürzende Schreibweise werden wir im Folgenden \mathcal{M} für die Mannigfaltigkeit schreiben.

Durch die Karten sind lokal Koordinatensysteme auf \mathcal{M} gegeben. Auf den Überlappungen $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ kann die Mannigfaltigkeit durch verschiedene Koordinaten beschrieben werden.

Ein C^k -Atlas ist ein Atlas, dessen Koordinatentransformationen

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

für alle i, j C^k -Diffeomorphismen sind. Existiert ein Atlas, dessen Koordinatentransformationen alle positive Jacobideterminanten besitzen, so nennt man die Mannigfaltigkeit orientierbar, bzw. zweiseitig. Die Orientierung einer solchen Mannigfaltigkeit ist durch die Wahl einer Reihenfolge der Koordinaten bestimmt. Gerade Permutationen dieser Reihenfolge gehören der selben Orientierungsklasse an. Die typischen Beispiele für nicht orientierbare Mannigfaltigkeiten sind das Möbiusband und die Klein'sche Flasche. Wir betrachten in dieser Arbeit nur orientierbare Mannigfaltigkeiten.

Tangentialvektoren

Tangentialvektoren können dazu genutzt werden, Mannigfaltigkeiten lokal zu beschreiben. Der von ihnen aufgespannte Tangentialraum kann als beste lineare Approximation der Mannigfaltigkeit in einem Punkt angesehen werden [28]. Es sind zwei verschiedene, jedoch isomorphe, Definitionen von Tangentialvektoren verbreitet: als Vektoren im geometrischen Sinn und als Richtungsableitungen. Letztere kommt dabei ohne eine Einbettung der Mannigfaltigkeit in einen affinen Raum aus. Wir werden in dieser Arbeit die Definition als Richtungsableitungen verwenden.

Definition 3.8 (Tangentialvektoren). Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, $P \in \mathcal{M}$ ein Punkt auf dieser Mannigfaltigkeit und $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{M}$ eine differenzierbare Kurve mit $\gamma(0) = P$. Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$v_P f = \left. \frac{\partial}{\partial t} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \tag{3.11}$$

die Ableitung von f in P in die von der Kurve γ festgelegte Richtung gegeben. Drückt man nun die Kurve durch lokale Koordinaten (x_1, \dots, x_n) aus, so erhält man für $v_P f$ die folgende Darstellung:

$$v_P f = \frac{\partial}{\partial t} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t} \Big|_{t=0}. \quad (3.12)$$

Da f beliebig gewählt war, gilt für v_P die Darstellung:

$$v_P = \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial x_n}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_{t=0}, \quad (3.13)$$

wobei die Koeffizienten $\partial x_i / \partial t$ die durch die Wahl der Kurve bestimmte Richtung der Ableitung angeben. Allgemeine Richtungsableitungen haben die Form:

$$v_P = v_i \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (3.14)$$

Die Menge aller Richtungsableitungen in einem Punkt P wird, versehen mit den allgemeinen Operationen der Addition und der Multiplikation mit Skalaren, zu einem Vektorraum, dem sogenannten Tangentialraum $T_P \mathcal{M}$. Seine Elemente werden als Tangentialvektoren bezeichnet.

Auf Grund der Vektorraumstruktur von $T_P \mathcal{M}$ lassen sich aus seinen Elementen, gemäß dem vorigen Abschnitt, Multitangentialvektoren konstruieren. Ist die Mannigfaltigkeit orientierbar, so lässt sich die (innere) Orientierung durch einen nicht verschwindenden n -Multitangentialvektor wiedergeben. Ist sie in eine andere Mannigfaltigkeit eingebettet, so lässt sich eine äußere Orientierung analog dazu darstellen.

Bemerkung 3.2. Die Darstellung metrischer Eigenschaften, wie etwa der Länge eines Liniensegmentes, durch Tangentialvektoren bedarf der Einführung eines inneren Produktes. Zwar ist es möglich einen Tangentialvektor durch die Skalarmultiplikation zu skalieren, eine Aussage über die Auswirkung auf die "Länge" des entsprechenden Liniensegmentes ist ohne Kenntnis der verwendeten Metrik jedoch unmöglich. So hat etwa auf \mathbb{R} , versehen mit der Metrik $g(x, y) = |x - y|^2$, das Intervall $[0, 2]$ die vierfache Länge des Intervalls $[0, 1]$.

3.2 Definition von Differentialformen

Die Theorie der Differentialformen kann dazu benutzt werden, Differentialgleichungen auf eine verallgemeinerte Weise darzustellen, durch die Invarianten bezüglich der verwendeten Koordinaten sowie gemeinsame Strukturen

von Operatoren offengelegt werden. So werden zum Beispiel die klassischen Differentialoperatoren ∇ , curl und div in einem einzigen Operator, der sogenannten äußeren Ableitung d , die unter Änderungen des Koordinatensystems invariant ist, vereint. In gleicher Weise werden die Sätze von Green, Gauß und Stokes durch den allgemeineren Satz von Stokes für Differentialformen ausgedrückt:

$$\int_S d\bar{\omega} = \int_{\partial S} \bar{\omega}. \quad (3.15)$$

Zusätzlich zu einer formalen Definition werden wir eine intuitivere Alternative [18] zeigen, um eine einfachere Gewöhnung an dieses Konzept zu erlauben. Zur besseren Unterscheidbarkeit von Formen und Funktionen markieren wir erstere, wenn keine Monomschreibweise verwendet wird, mit einem Balken, z.B. $\bar{\varphi} = \alpha dx + \beta dy$.

3.2.1 Eine intuitive Definition

Informell kann eine Differentialform als ein Integrand, d.h. eine Größe, die integriert werden kann, betrachtet werden. Wir betrachten als Beispiel eine glatte Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ihre Ableitung

$$f = \frac{dF}{dx}. \quad (3.16)$$

Durch Umschreiben dieser Gleichung, unter Verwendung einer etwas unsaubereren Schreibweise, erhalten wir:

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,b]} dF = \int_{\partial[a,b]} F = F(b) - F(a). \quad (3.17)$$

Der Integrand $f dx$ wird als 1-Form bezeichnet, da er nur über eindimensionale Intervalle integriert werden kann. Im gleichen Sinne entspricht F einer 0-Form \bar{F} , die punktweise ausgewertet werden kann. Auf ähnliche Weise kann der Gradient eines dreidimensionalen Skalarfeldes $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch die 1-Form

$$d\bar{\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \quad (3.18)$$

dargestellt werden, die über eindimensionale Kurven in \mathbb{R}^3 integriert werden kann. Generell ist eine p -Form eine Größe, die dazu gedacht ist, über eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit integriert zu werden.

Macht man sich bewusst, dass physikalische Messungen im Grunde genommen Auswertungen von Integralen sind, so zeigt sich, dass Differentialformen eine sinnvolle Repräsentation von physikalischen Größen ermöglichen.

3.2.2 Formale Definition

Wir betrachten ein Gebiet $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$, d.h. eine offene, zusammenhängende Menge. \mathcal{M} lässt sich als n -dimensionale Mannigfaltigkeit auffassen. Der Vektorraum $T_P\mathcal{M}$ enthält alle Tangentialvektoren an \mathcal{M} in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ und kann daher mit \mathbb{R}^n identifiziert werden. Eine p -Form $\bar{\omega}$ ist ein antisymmetrisches Tensorfeld von Rang p über \mathcal{M} . Die Auswertung in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ ergibt eine multilineare Abbildung, die p Tangentialvektoren (genauer gesagt: einen p -Tangentialmultivektor) auf eine reelle Zahl abbildet:

$$\bar{\omega}(P) : T_P\mathcal{M} \times \dots \times T_P\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (3.19)$$

Ungerade Permutationen der Argumente führen hierbei zu einem Vorzeichenwechsel. Wir bezeichnen den Raum der (differenzierbaren) p -Formen auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit $\mathcal{F}^p(\mathcal{M})$. Ableitungen von Differentialformen erklären wir in Abschnitt 3.4.1. Betrachten wir eine Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} von \mathcal{M} , so ist eine p -Form auf \mathcal{N} auf natürliche Weise durch Einschränkung der linearen Abbildungen auf das Produkt der Tangentialräume der Untermannigfaltigkeit gegeben.

Bemerkung 3.3. Da 0-Vektoren skalare Werte sind, bilden 0-Formen in jedem Punkt $P \in \mathcal{M}$ einen skalaren Wert auf einen skalaren Wert ab. 0-Formen sind also differenzierbare Funktionen.

Wir sind beim Beschreiben von Differentialformen nicht an kartesische Koordinaten gebunden. Ein Koordinatenwechsel induziert lokal eine lineare Abbildung im Raum der Tangentialvektoren. Die Koordinaten einer Differentialform transformieren sich kovariant zur Basis dieses Raumes. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden wir verstärkt von baryzentrischen Koordinaten Gebrauch machen.

3.3 Integration von Differentialformen

Wie bereits erwähnt, sind p -Formen zu p -Vektorfeldern, genauer gesagt zu p -Tangentialvektorfeldern, duale Objekte. Eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit kann lokal durch ihre Tangentialvektoren, bzw. durch einen p -Tangentialvektor beschrieben werden. Darum wird oft gesagt, eine p -Form sei ein Objekt, das in natürlicher Weise über eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit integriert werden kann.

Man kann die Integration einer p -Form $\bar{\omega}$ über eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} analog zum Riemann-Integral definieren. Die Diskretisierung einer Mannigfaltigkeit kann z.B. mit Hilfe von Simplices durchgeführt werden.

Definition 3.9 (Simplices und baryzentrische Koordinaten). Wir betrachten den n -dimensionalen Euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Ein p -dimensionaler Simplex S , $0 \leq p \leq n$, ist definiert als die nicht degenerierte konvexe Hülle von $p + 1$ Punkten $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, p+1$. Im Falle $p > 0$ ist der Rand von S wiederum aus $(p - 1)$ -dimensionalen Simplices zusammengesetzt. Das Volumen von S beträgt

$$\text{Vol}(S) = \frac{1}{p!} (x, x)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

$$x = (x_2 - x_1) \wedge \dots \wedge (x_{p+1} - x_1). \quad (3.21)$$

Für $n = 3$ lässt es sich auch durch $\text{Vol}(S) = \frac{|\zeta_p(x)|}{p!}$ beschreiben, wobei ζ_p eine Stellvertreterabbildung wie in Abschnitt 3.5.1 ist. Eine spezielle Eigenschaft von Simplices ist, dass sie auf natürliche Weise ein lokales Koordinatensystem induzieren, die sogenannten baryzentrischen Koordinaten. Jeder Punkt im Inneren des Simplex ist durch

$$x = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i(x) x_i \quad (3.22)$$

eindeutig bestimmt. Hierbei sind die linearen Koordinatenfunktionen durch $\lambda_i(x_j) = \delta_{ij}$ definiert. Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \equiv 1. \quad (3.23)$$

Der Einfachheit halber kann man sich auf die ersten p Koordinaten beschränken, wenn man die Beziehungen

$$\lambda_{p+1} = 1 - \sum_{i=1}^p \lambda_i, \quad (3.24)$$

$$d\lambda_{p+1} = - \sum_{i=1}^p d\lambda_i \quad (3.25)$$

berücksichtigt. Die äußere Ableitung d wird im nächsten Abschnitt erklärt.

Bemerkung 3.4. Den eindeutig bestimmten Punkt mit den baryzentrischen Koordinaten $(1/(p+1), \dots, 1/(p+1))$ innerhalb eines p -dimensionalen Simplexes S nennt man das Baryzentrum, oder auch Schwerezentrum, von S .

Da im Allgemeinen keine Metrik vorliegt, ermöglicht es uns diese Definition noch nicht direkt, Simplices auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu erklären. Man kann jedoch Mengen finden, die sich mit Hilfe von baryzentrischen Koordinaten im Parameterbereich beschreiben lassen, d.h. Mengen $S \subset \mathcal{M}$, für die eine Karte (U, φ) existiert, so dass $\varphi(S)$ ein Simplex in \mathbb{R}^n ist. Wenn wir von Simplices auf Mannigfaltigkeiten oder Diskretisierungen von Mannigfaltigkeiten durch Simplices reden, sind streng genommen solche Mengen gemeint.

Wir erklären nun das Integral einer p -Form $\bar{\omega}$ über eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Wir verfahren dabei schrittweise:

- Eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit wird durch eine Partitionierung, bestehend aus p -dimensionalen Simplices M_i , segmentiert, z.B. Flächen durch ein Gitter aus gekrümmten Dreiecken. Definiert wird das Integral über lineare Approximationen dieser Simplices, genauer gesagt stückweise konstante Multitangentialvektorfelder.
- p der Seitenkanten werden ausgewählt und zu einem p -Vektor

$$v_{M_i} = v_1 \wedge \dots \wedge v_p$$

verbunden. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die Reihenfolge der Vektoren die Orientierung des Simplex wiedergibt. Der Simplex wird durch den p -Vektor $v_{M_i}/p!$ repräsentiert.

- Durch Auswertung von $\bar{\omega}$ im Baryzentrum des Simplex erhält man einen p -Kovektor $\bar{\omega}_i$, dessen Anwendung auf $v_{M_i}/p!$ eine reelle Zahl

$$\bar{\omega}_i \left| \frac{v_{M_i}}{p!} \right.$$

ergibt.

- Das Integral wird nun durch die Summe der zu den einzelnen Simplices gehörenden Dualitätsprodukte approximiert:

$$\int_{\mathcal{M}} \bar{\omega} \approx \frac{1}{p!} \sum_i \bar{\omega}_i | v_{M_i}.$$

- Für immer feinere Diskretisierungen konvergiert die Summe gegen den Wert des Integrals.

Bemerkung 3.5. Die Wahl kleiner Simplices stellt strenggenommen keine Approximation der Mannigfaltigkeit dar, sondern eine Partitionierung. Die eigentliche Annäherung geschieht durch die lineare Approximation der Simplices durch Multitangentialvektoren im Baryzentrum.

Bemerkung 3.6. Oftmals wird die Integration von Differentialformen über Mannigfaltigkeiten durch den Rücktransport auf ein Parametergebiet mit Hilfe von Karten erklärt. Dies ist zwar formal richtig, jedoch wird bei dieser Herangehensweise leicht verschleiert, dass die Integration einer Differentialform keine Metrik benötigt.

Definition 3.10 (Ketten und Ko-Ketten). Wir definieren Linearkombinationen von Multitangentialvektorfeldern und dadurch implizit auch Linearkombinationen von Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension. Letztere bezeichnen wir als Ketten. Eine Kette lässt sich als Vereinigung gewichteter Mannigfaltigkeiten auffassen. Negative Gewichte bewirken eine Umkehrung der Orientierung. Seien s_i p -dimensionale Mannigfaltigkeiten, v_i die sie beschreibenden p -Tangentialvektorfelder und $\bar{\omega}$ eine p -Form. Das Integral von $\bar{\omega}$ über eine Kette

$$c = \sum_i c_i s_i$$

ist erklärt durch:

$$\int_c \bar{\omega} = \bar{\omega} \left| \left(\sum_i c_i v_i \right) \right. = \sum_i c_i (\bar{\omega} | v_i) = \sum_i c_i \int_{s_i} \bar{\omega}. \quad (3.26)$$

Analog dazu definieren wir Ko-Ketten als zu Ketten duale Objekte. Das Anwenden einer Ko-Kette auf eine Kette liefert eine Linearkombination der Werte der Ko-Kette auf den einzelnen Mannigfaltigkeiten der Kette. Eine Ko-Kette ist also ein Analogon zu einer diskreten Differentialform [18].

Bemerkung 3.7. In Anwendungen benutzt man häufig Ketten aus flachen, d.h. durch konstante Multitangentialvektorfelder beschriebenen, Simplices.

3.4 Wichtige Operatoren auf Differentialformen

Wir haben bereits Differentialformen und ihren Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten durch Integration erklärt. Wir wollen nun Operationen auf Differentialformen erklären, um zu einem Formalismus zu gelangen, mit dem sich letztendlich partielle Differentialgleichungen behandeln lassen.

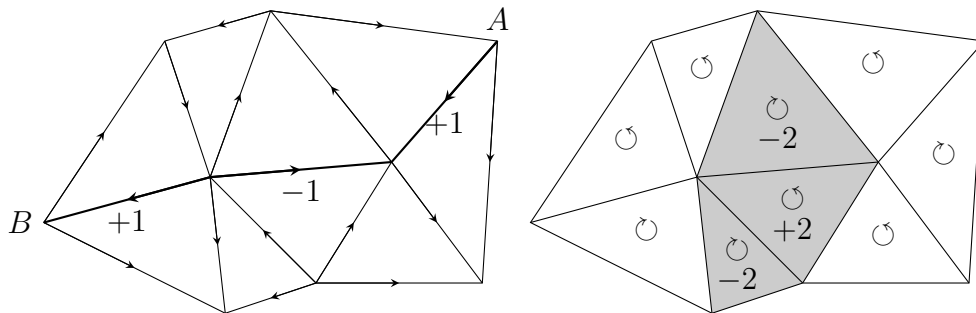


Abbildung 3.1: Links: Polygonzug von A nach B , dargestellt durch eine Kette von orientierten Kanten. Rechts: Gewichtetes, einheitlich orientiertes, Flächensegment (grau), dargestellt durch eine Kette von orientierten Dreiecken.

3.4.1 Ableitungsoperatoren

Wie wir gesehen haben, sind Differentialformen im Grunde genommen zu Multitangentialvektorfeldern duale Objekte. Beim Gebrauch des Formalismus gerät dieser Fakt oftmals in den Hintergrund, jedoch sollte man den Bezug zu Tangentialvektoren im Gedächtnis behalten. So lassen sich z.B., analog zu Multi(tangential)vektoren, eine p -Form und eine q -Form durch ein äußeres Produkt zu einer $(p + q)$ -Form verbinden.

Die Dualität von p -Formen und p -Vektorfeldern findet sich bei der Integration von Differentialformen wieder. Dort können die Integrationsgebiete lokal durch Multi-Tangentialvektoren beschrieben werden. In Anwendungen werden verschiedene physikalische Größen auf Mannigfaltigkeiten verschiedener Dimension gemessen, etwa elektrische Felder entlang Linien und magnetische Flussdichten durch Flächen. Die Übergänge zwischen diesen verschiedenen "Klassen" von Größen findet üblicherweise durch Ableitungsoperatoren statt. Analog dazu werden Ableitungsoperatoren den Grad von Differentialformen ändern. Wir wollen uns zunächst die Definition von 0-Formen in Erinnerung rufen.

Definition 3.11. Sei \mathcal{M} eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Auswertung $\bar{\omega}(P)$ einer 0-Form $\bar{\omega}$ in einem Punkt $P \in \mathcal{M}$ entspricht einem skalaren Wert in \mathbb{R} ($\mathbb{R} = \bigwedge^0 T_P \mathcal{M}$ nach Definition und ist somit selbstdual). Eine 0-Form $\bar{\omega}$ auf \mathcal{M} entspricht einer glatten, reellwertigen Funktion ω auf \mathcal{M} . Wir bezeichnen den Raum der 0-Formen auf \mathcal{M} mit $\mathcal{F}^0(\mathcal{M})$.

Definition 3.12 (Äußere Ableitung). Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis des Raumes der Tangentialvektorfelder von \mathcal{M} , d.h. x_i sind glatte Kurven auf \mathcal{M} und für $P \in \mathcal{M}$ spannen $\{x_1(P), \dots, x_n(P)\}$ den Tangentialraum $T_P \mathcal{M}$ auf. Die

äußere Ableitung $d\bar{\omega}$ einer 0-Form (Funktion) $\bar{\omega} \in \mathcal{F}^0(\mathcal{M})$ ist eine 1-Form, die durch

$$d\bar{\omega} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x_i} dx_i \quad (3.27)$$

definiert ist. Wir bezeichnen den Raum der 1-Formen auf \mathcal{M} mit $\mathcal{F}^1(\mathcal{M})$.

Bemerkung 3.8. Der Faktor $\partial\omega/\partial x_i$ ist in der Tat als Richtungsableitung einer skalarwertigen Funktion zu verstehen.

Bemerkung 3.9. Die Monome dx_i bilden eine Basis von $\mathcal{F}^1(\mathcal{M})$. Hierbei ist dx_i dual zu $\partial/\partial x_i$.

Unter Verwendung des äußeren Produktes lassen sich aus 1-Formen Formen höherer Ordnung konstruieren, deren Räume wir mit $\mathcal{F}^p(\mathcal{M})$ bezeichnen. Aus Dualitätsgründen gilt

$$\dim \mathcal{F}^p(\mathcal{M}) = \binom{n}{p}.$$

Üblicherweise wird in der Notation von Differentialformen auf das Zeichen \wedge verzichtet.

Wir können die Definition der äußeren Ableitung nun auf p -Formen ausweiten.

Definition 3.13 (Äußere Ableitung). Für eine p -Form $\bar{\omega} \in \mathcal{F}^p(\mathcal{M})$ mit $\bar{\omega} = \sum_{\mathfrak{J}} a_{\mathfrak{J}} dx_{\mathfrak{J}}$ gilt

$$d\bar{\omega} = \sum_{j=1}^n \sum_{\mathfrak{J}} \frac{\partial a_{\mathfrak{J}}}{\partial x_j} dx_j dx_{\mathfrak{J}}. \quad (3.28)$$

Die äußere Ableitung ist somit eine Abbildung $d : \mathcal{F}^p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}^{p+1}(\mathcal{M})$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $d(\bar{\omega} + \bar{\eta}) = d\bar{\omega} + d\bar{\eta}, \quad \forall \bar{\omega}, \bar{\eta} \in \mathcal{F}^p(\mathcal{M})$
- (ii) $d(\bar{\lambda} \wedge \bar{\mu}) = d\bar{\lambda} \wedge \bar{\mu} + (-1)^p \bar{\lambda} \wedge d\bar{\mu}, \quad \forall \bar{\lambda} \in \mathcal{F}^p(\mathcal{M}), \bar{\mu} \in \mathcal{F}^q(\mathcal{M})$
- (iii) $d(d\bar{\omega}) = 0, \quad \forall \bar{\omega} \in \mathcal{F}^p(\mathcal{M})$

Bemerkung 3.10. p -Formen auf zwei- oder dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten werden oft als skalarwertige Funktionen (0- und n -Formen) bzw. Vektorfelder interpretiert.

Beispiel 3.1. $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$.

Sei $\bar{\omega} = a dx + b dy + c dz$. ω entspricht dem Vektor $(a, b, c)^\top$. Gemäß der Definition der äußeren Ableitung ist

$$\begin{aligned} d\bar{\omega} &= \frac{\partial a}{\partial y} dydx + \frac{\partial a}{\partial z} dzdx + \frac{\partial b}{\partial x} dxdy + \frac{\partial b}{\partial z} dzdy + \frac{\partial c}{\partial x} dxdz + \frac{\partial c}{\partial y} dydz \\ &= \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned}$$

Die äußere Ableitung, angewendet auf 1-Formen, hat also die Struktur des curl-Operators.

Bemerkung 3.11. Auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten lässt sich die Anwendung der äußeren Ableitung auf 0-, 1- bzw. 2-Formen als Gradient, Rotation bzw. Divergenz interpretieren. Dabei treten die bekannten Gleichungen

$$\text{curl } \nabla \equiv 0, \quad \text{div curl} \equiv 0 \quad (3.29)$$

hervor. Eine formale Begründung des Zusammenhangs zwischen diesen Differentialoperatoren und d folgt in Abschnitt 3.5.1.

Auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten treten zunächst nur die Differentialoperatoren ∇_Γ für 0-Formen und curl_Γ für 1-Formen mit der zugehörigen Gleichung $\text{curl}_\Gamma \nabla_\Gamma \equiv 0$ in Erscheinung. Für die Operatoren $\overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma$ und div_Γ (siehe Abschnitt 2.3.1) benötigen wir das Konzept des Hodge-Operators.

3.4.2 Der Hodge-Operator

Da die zweimalige Anwendung der äußeren Ableitung auf eine Differentialform immer 0 ergibt, ist es uns noch nicht möglich Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Hilfe von Differentialformen darzustellen. Weiterhin wird bei jeder Anwendung die Ordnung der Form erhöht. Da jedoch z.B. die Darstellung des curl-Operators nur durch Anwenden von d auf eine 1-Form möglich ist, benötigen wir, um etwa den curl-curl-Operator darstellen zu können, eine Operation, die u.a. 2-Formen in 1-Formen überführt. Diese wird uns durch den sogenannten Hodge-Operator zur Verfügung gestellt. Wir haben den Hodge-Operator bereits für Multivektoren definiert und wollen ihn nun auf Differentialformen übertragen. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit einer Beschreibung auf den Basen der $\mathcal{F}^p(\mathcal{M})$. Die ausführliche Herleitung verläuft analog zur Version für Multivektoren.

Definition 3.14 (Hodge-Operator). Der Hodge-Operator $*$ ist eine Abbildung $\mathcal{F}^p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}^{n-p}(\mathcal{M})$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $*$ ist linear.
- (ii) Sei (dx_1, \dots, dx_n) eine passend zur Orientierung von \mathcal{M} geordnete Orthonormalbasis von $\mathcal{F}^1(\mathcal{M})$. Dann gilt für $0 \neq \bar{\omega} = dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$, $i_j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\bar{\omega} \wedge * \bar{\omega} = dx_1 \dots dx_n.$$

Folgerung 3.3. Sei $\bar{\omega} \in \mathcal{F}^p(\mathcal{M})$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \bar{\omega} \wedge * \bar{\omega} &= c \, dx_1 \dots dx_n, \\ * \bar{\omega} \wedge * * \bar{\omega} &= c \, dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Mit den Eigenschaften des äußeren Produktes gilt weiterhin

$$* \bar{\omega} \wedge \bar{\omega} = (-1)^{p(n-p)} c \, dx_1 \dots dx_n. \tag{3.31}$$

Aus (3.30) und (3.31) folgt

$$** = (-1)^{p(n-p)} \text{id}.$$

Für ungerades n und gleichzeitig positiv definite Metrik ist der Hodge-Operator also immer selbstinvers.

Bemerkung 3.12. Oftmals verbindet man den Hodge-Operator mit einer Skalierung. In praktischen Anwendungen werden auf diese Weise Materialparameter eingebunden. Hierbei hat sich für das Anwenden eines skalierenden Hodge-Operators auf eine p -Form $\bar{\omega}$ die Schreibweise

$$*_{\kappa} \bar{\omega} = *({}^0 \bar{\kappa} \wedge \bar{\omega}) \tag{3.32}$$

etabliert, wobei der skalare Faktor κ als 0-Form interpretiert wird.

Mit Hilfe des Hodge-Operators und der äußeren Ableitung kann man nun Differentialgleichungen zweiter Ordnung darstellen. Wir führen den sogenannten Kodifferentialoperator δ ein, der gewissermaßen ein Gegenstück zu d darstellt und p -Formen in $(p-1)$ -Formen überführt.

Definition 3.15 (Kodifferentialoperator). Wir definieren den Kodifferentialoperator $\delta : \mathcal{F}^{p+1}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}^p(\mathcal{M})$ gemäß

$$\delta := (-1)^{n(p+1)+1} * d *.$$

Mit dem Kodifferentialoperator haben wir einen Ableitungsoperator, der sich nicht mit d gegenseitig auslöscht.

Folgerung 3.4. *Auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten entspricht das Anwenden des Kodifferentialoperators auf 3-, 2- bzw. 1-Formen (bis auf Vorzeichen) den Ableitungsoperatoren ∇ , curl bzw. div. Der Differentialoperator curl curl lässt sich darstellen als δd (angewendet auf 1-Formen).*

Auf zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten entspricht die Anwendung von δ auf 2- bzw. 1-Formen den Operatoren $\overrightarrow{\text{curl}}_\Gamma$ bzw. div_Γ .

Beispiel 3.2 (Laplace-Beltrami-Operator). Wir definieren den Laplace-Beltrami-Operator

$$\Delta := d\delta + \delta d.$$

$-\Delta$ entspricht dem üblichen skalaren bzw. vektoriellen Laplace-Operator.

3.4.3 Rücktransport- und Spuoperatoren

Differentialformen sind auf Mannigfaltigkeiten lokalisiert. Wir wollen Abbildungen untersuchen, die Differentialformen von einer Mannigfaltigkeit auf eine andere überführen. Als Spezialfälle sind hierin Koordinatentransformationen und Spuoperatoren enthalten.

Definition 3.16 (Rücktransport). Wir definieren den Rücktransport (engl.: pullback) wie folgt: Seien \mathcal{M} bzw. \mathcal{N} m - bzw. n -dimensionale Mannigfaltigkeiten, φ eine glatte Abbildung von \mathcal{M} nach \mathcal{N} , $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$. Dann lassen sich Differentialformen aus $\mathcal{F}^0(\mathcal{N})$ in solche aus $\mathcal{F}^0(\mathcal{M})$ überführen gemäß

$$\varphi^* : \mathcal{F}^0(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{F}^0(\mathcal{M}), \quad \varphi^* \bar{\omega} := \bar{\omega} \circ \varphi. \quad (3.33)$$

Um die Definition auf p -Formen zu erweitern, betrachten wir zunächst den Fall $p = 1$. Seien $\{x_1, \dots, x_m\}$ Koordinaten von \mathcal{M} , $\{y_1, \dots, y_n\}$ die unter φ transformierten Koordinaten von \mathcal{N} . Auf \mathcal{M} gilt dann nach (3.27)

$$dy_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Für

$$\bar{\omega} = \sum_{i=1}^n a_i(y) dy_i$$

gilt also

$$\varphi^* \bar{\omega} = \sum_{i=1}^n a_i(y(x)) \sum_{j=1}^m \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dx_j.$$

Die Erweiterung auf p -Formen erfolgt gemäß

$$\varphi^*(dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) = \varphi^* dx_{i_1} \dots \varphi^* dx_{i_p}.$$

Bemerkung 3.13. Wir fassen die grundlegenden Eigenschaften des Rücktransports zusammen:

- (i) $\varphi^*(\bar{\omega} + \bar{\eta}) = \varphi^*\bar{\omega} + \varphi^*\bar{\eta}$
- (ii) $\varphi^*(\bar{\lambda} \wedge \bar{\mu}) = (\varphi^*\bar{\lambda}) \wedge (\varphi^*\bar{\mu})$
- (iii) $d(\varphi^*\bar{\omega}) = \varphi^*(d\bar{\omega})$
- (iv) Für $\varphi : U \rightarrow V$ und $\psi : V \rightarrow W$ gilt: $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

Die Definition des Rücktransports beinhaltet als Spezialfall für bijektive Abbildungen $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ Koordinatentransformationen. Ist $\varphi : \partial\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{M}$ eine Einbettung, so handelt es sich bei φ^* um einen Spuroperator, der im allgemeinen mit t bezeichnet wird.

Eine weitere Möglichkeit, die Spur einer Differentialform zu erhalten, besteht darin, ihre Argumente, d.h. die Felder von Multitangentialvektoren, auf den Tangentialraum von $\partial\mathcal{M}$ einzuschränken. Anschaulich betrachtet werden in lokalen Koordinaten $\{x_1, \dots, x_{n-1}, y\}$ von \mathcal{M} , wobei $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ den Tangentialraum von $\partial\mathcal{M}$ aufspannen, sämtliche Summanden eliminiert, in denen die Monome dy vorkommen.

Beispiel 3.3. Sei $\bar{\omega} = a \, dydz + b \, dzdx + c \, dxdy$ eine 2-Form auf $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, wobei es eine Fläche $\Gamma_S \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ mit $\Gamma_S \subset \partial\Omega$ gibt. Der Tangentialraum von Γ_S wird dann in jedem Punkt von den Tangentialvektoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$$

aufgespannt. Die Spur $t\bar{\omega}|_{\Gamma_S}$ lässt sich beschreiben durch:

$$t\bar{\omega}|_{\Gamma_S} = a \, dy(0dz) + b \, (0dz)dx + c \, dxdy = c \, dxdy. \quad (3.34)$$

Das Eliminieren von dz ist dadurch gerechtfertigt, dass

$$dz \left| \left(\text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\} \right) \right. = \{0\}. \quad (3.35)$$

3.5 Reformulierung von Differentialgleichungen mit Hilfe von Differentialformen

Wir haben in den letzten Abschnitten Differentialformen sowie Operationen auf Differentialformen beschrieben. Um nun bereits vektoranalytisch formulierte Differentialgleichungen in diesen Formalismus übertragen zu können, müssen wir einen Zusammenhang zur klassischen Vektoranalysis herstellen. Wir müssen also zeigen, dass äquivalente Formulierungen für DGLen in der Sprache der Differentialformen existieren. Alternativ dazu existieren auch direkte Herleitungen physikalischer Gleichungen, insbesondere der Maxwellgleichungen, im Formalismus der Differentialformen.

3.5.1 Zusammenhang zwischen Differentialformen und Vektorfeldern

In physikalischen Anwendungen stößt man immer wieder auf vektorielle Größen, die “sinnvollerweise” nur entlang von Kurven oder über Flächen integriert werden können. Rein von ihrer Vektorstruktur ist diese Unterscheidung schwer ersichtlich. Eine Identifizierung mit 1- bzw. 2-Formen, die ebenfalls die entsprechenden Einschränkungen vorweisen, macht diesen Zusammenhang deutlicher. Da für eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit \mathcal{M} die Räume der 1- und 2-Formen $\mathcal{F}^1(\mathcal{M})$ und $\mathcal{F}^2(\mathcal{M})$ ebenfalls dreidimensional sind, ist eine solche Identifizierung auch sinnvoll. Ein entsprechender Zusammenhang existiert für skalare Felder und 0- bzw. 3-Formen.

Im Zusammenhang mit Formulierungen in Differentialformen ist immer wieder von sogenannten vektoriellen oder skalaren Stellvertretern (engl. proxies) die Rede. Diese können als die Bilder von Differentialformen unter gewissen Isomorphismen zwischen Räumen von Differentialformen und Euklidischen Vektorräumen gesehen werden. Da Differentialformen für sich genommen, im Gegensatz zu Skalaren/Vektoren in Euklidischen Räumen, keine metrischen Eigenschaften besitzen, haben diese Stellvertreter zunächst den Charakter einer reinen Interpretation. Erst wenn man auf Seiten der Differentialformen mittels eines Hodge-Operators eine Metrik einführt, kann man von eindeutig bestimmten Stellvertretern sprechen.

Wir wollen das Konzept der Stellvertreter beispielhaft anhand dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten, die in einen Euklidischen Raum eingebettet sind, beschreiben. Bei dieser Wahl von Stellvertretern übertragen wir die Metrik des Euklidischen Raumes auf die Mannigfaltigkeit.

Definition 3.17 (Stellvertreter). Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Seien x_1, x_2, x_3 Koordinaten auf \mathcal{M} und e_1, e_2, e_3 die zugehörigen

rigen, gemäß der Euklidischen Metrik normierten, Tangentialvektoren (im geometrischen Sinn) in \mathbb{R}^3 . Die linearen Abbildungen, die Differentialformen aus $\mathcal{F}^p(\mathcal{M})$ auf Skalare/Vektoren abbilden, sind dann gegeben durch:

$$\zeta_0 : 1 \mapsto 1, \quad (3.36)$$

$$\zeta_1 : dx_i \mapsto e_i, \quad (3.37)$$

$$\zeta_2 : dx_i dx_j \mapsto \zeta_1(*dx_i dx_j), \quad (3.38)$$

$$\zeta_3 : dx_i dx_j dx_k \mapsto \zeta_0(*dx_i dx_j dx_k), \quad (3.39)$$

wobei die Reihenfolge (i, j, k) zur Orientierung der Mannigfaltigkeit passend ist. Analog dazu lassen sich auch Stellvertreter für Multitangentialvektoren erklären.

Durch die Stellvertreter lässt sich auch der etwa in Beispiel 3.1 angedeutete Zusammenhang zwischen der äußeren Ableitung d und den klassischen vektoranalytischen Differentialoperatoren ∇ , curl und div veranschaulichen. Die klassischen Operatoren lassen sich durch $\zeta_{p+1} \circ d \circ \zeta_p^{-1}$ beschreiben.

Beispiel 3.4. Sei B die dreidimensionale Einheitskugel, versehen mit Kugelkoordinaten (r, θ, φ) und eingebettet in \mathbb{R}^3 . Die Differentialoperatoren ∇ , div und curl haben auf B die Gestalt:

$$\begin{aligned} \nabla f(r, \theta, \varphi) &= \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} e_\varphi, \\ \text{curl } \omega(r, \theta, \varphi) &= \left(\frac{\cos \theta \omega_\varphi}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \varphi} \right) e_r \\ &\quad + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} - \frac{\omega_\varphi}{r} - \frac{\partial \omega_\varphi}{\partial r} \right) e_\theta \\ &\quad + \left(\frac{\omega_\theta}{r} + \frac{\partial \omega_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right) e_\varphi, \\ \text{div } \psi(r, \theta, \varphi) &= \frac{2\psi_r}{r} + \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\cos \theta \psi_\theta}{r \sin \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Dies kann man sich durch die Stellvertreterabbildungen

$$\begin{aligned} \zeta_0(1) &= 1, \\ \zeta_1(a dr + b d\theta + c d\varphi) &= a e_r + \frac{b}{r} e_\theta + \frac{c}{r \sin \theta} e_\varphi, \\ \zeta_2(a d\theta d\varphi + b d\varphi dr + c dr d\theta) &= \frac{a}{r^2 \sin \theta} e_r + \frac{b}{r \sin \theta} e_\theta + \frac{c}{r} e_\varphi, \\ \zeta_3(dr d\theta d\varphi) &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \end{aligned}$$

verdeutlichen.

p	Differentialformen	Vektoranalysis
0	$d^0 \bar{\omega}$	$\nabla \omega$
1	$d^1 \bar{\alpha}$	$\text{curl } \vec{\alpha}$
2	$d^2 \bar{\eta}$	$\text{div } \vec{\eta}$

Tabelle 3.1: Vektorielle Stellvertreter der äußeren Ableitung in \mathbb{R}^3 .

p	Differentialformen	Vektoranalysis
0	$t^0 \bar{\omega}$	$(\gamma_0 \omega)(x) = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x \in \partial \mathcal{M}} \omega(\tilde{x})$
1	$t^1 \bar{\alpha}$	$\vec{n}(x) \times ((\gamma_0 \vec{\alpha})(x) \times \vec{n}(x))$
2	$t^2 \bar{\eta}$	$(\gamma_0 \vec{\eta})(x) \cdot \vec{n}(x)$
3	$t^3 \bar{f}$	0

Tabelle 3.2: Stellvertreter von Spuren auf dem Rand einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit. Hierbei steht \vec{n} für die äußere Normale auf dem Rand von \mathcal{M} . Der Rand wird als stückweise glatt vorausgesetzt.

Auf ähnliche Weise kommt man zu einer Veranschaulichung des Spurope-
rators t . Tabelle 3.2 zeigt die Wirkung von t auf Differentialformen verschie-
dener Ordnung im Falle einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit.

Wegen seines Zusammenhangs mit dem inneren Produkt kann man die
Kombination aus einem \wedge -Produkt und einem Hodge-Operator zur Darstel-
lung eben dieser inneren Produkte verwenden:

$$\zeta_n(\bar{\alpha} \wedge * \bar{\beta}) = (\zeta_p(\bar{\alpha}), \zeta_p(\bar{\beta})), \quad \forall \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathcal{F}^p(\mathcal{M}). \quad (3.40)$$

Weiterhin erfüllt der Hodge-Operator eine Funktion als Träger geometrischer
Information. Zwar ist auf Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension der Stell-
vertreter einer p -Form $\bar{\omega}$ nicht vom Stellvertreter von $*\bar{\omega}$ unterscheidbar

$$\zeta_p(\bar{\omega}) = \zeta_{n-p}(*\bar{\omega}), \quad (3.41)$$

jedoch muss man bedenken, dass die Stellvertreterabbildungen ζ_i selbst auch
geometrische Informationen enthalten.

Bemerkung 3.14. Auf Mannigfaltigkeiten gerader Dimension ist der nichtska-
lierte Hodge-Operator nicht selbstinvers. So entspricht etwa der Stellvertreter

des zweidimensionalen Hodge-Operators bezüglich der Euklidischen Metrik einer Drehung um 90° in der Tangentialebene. Wir vergleichen für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ mit $\Gamma = \partial\Omega$, sowie $\vec{u}, \vec{v} \in H(\text{curl}, \Omega)$, bzw. $\bar{u}, \bar{v} \in H(d^1, \Omega)$ die erste Greensche Formel in vektoranalytischer und in Differentialformdarstellung:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \text{curl curl } \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} \\
&= \int_{\Omega} \text{curl } \vec{u}(\vec{x}) \cdot \text{curl } \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Gamma} (\gamma_{\times} \text{curl } \vec{u})(\vec{x}) \cdot (\gamma_D \vec{v})(\vec{x}) dS_{\vec{x}} \\
&= \int_{\Omega} \text{curl } \vec{u}(\vec{x}) \cdot \text{curl } \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} + \int_{\Gamma} (\gamma_N \vec{u})(\vec{x}) \times \vec{n}(\vec{x}) \cdot (\gamma_D \vec{v})(\vec{x}) dS_{\vec{x}} \\
& \int_{\Omega} d * d\bar{u} \wedge \bar{v} = \int_{\Omega} *d\bar{u} \wedge d\bar{v} + \int_{\Gamma} t * d\bar{u} \wedge t\bar{v} \\
&= \int_{\Omega} d\bar{u} \wedge *d\bar{v} + \int_{\Gamma} \gamma_N \bar{u} \wedge \gamma_D \bar{v}.
\end{aligned}$$

Der Umstand, dass es sich beim Integranden des Randterms nicht um ein Skalarprodukt der beiden Spuren handelt, wird durch das Fehlen eines Hodge-Operators auf der rechten Seite des \wedge -Produktes ersichtlich. Aus dem Blickwinkel der Vektoranalysis tritt eine zusätzliche Drehung um 90° in der Tangentialebene auf. Die in der vektoranalytisch geprägten Literatur häufig als $\gamma_{\times}(\text{curl } \cdot)$ definierte Variante der Neumannspur enthält diese Drehung bereits.

3.5.2 Die Differentialformdarstellung der Maxwellgleichungen

Wir haben nun die notwendigen Werkzeuge, um die Maxwellgleichungen mit Hilfe von Differentialformen zu beschreiben. Die Ableitungsoperatoren werden dabei durch die äußere Ableitung, die Materialbeziehungen durch skalierende Hodge-Operatoren beschrieben. Wir heben an dieser Stelle die Ord-

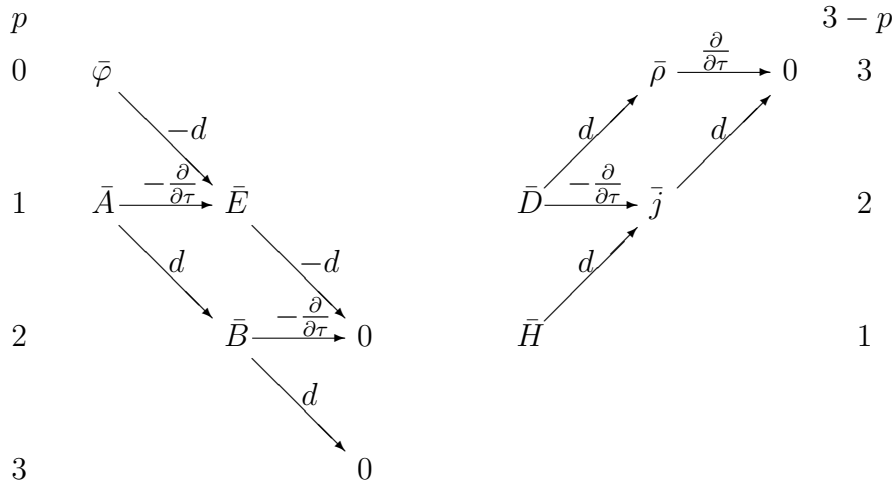


Abbildung 3.2: Tonti-Diagramm mit dem Faraday-Komplex auf der linken Seite und dem Ampère-Maxwell-Komplex auf der rechten Seite. Physikalische Größen werden durch p - und $(3-p)$ -Formen repräsentiert.

nung der jeweiligen Differentialformen besonders hervor:

$$d^1 \bar{H} = {}^2 \bar{j} + \frac{\partial}{\partial \tau} {}^2 \bar{D}, \quad (3.42)$$

$$d^2 \bar{B} = 0, \quad (3.43)$$

$$d^1 \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial \tau} {}^2 \bar{B}, \quad (3.44)$$

$$d^2 \bar{D} = {}^3 \bar{\rho}, \quad (3.45)$$

$${}^2 \bar{B} = *_{\mu} {}^1 \bar{H}, \quad (3.46)$$

$${}^2 \bar{D} = *_{\sigma} {}^1 \bar{E}, \quad (3.47)$$

$${}^2 \bar{j} = *_{\kappa} {}^1 \bar{E} + {}^2 \bar{j}_S. \quad (3.48)$$

Die vorkommenden physikalischen Größen lassen sich gemäß des Diagramms von Tonti (Abbildung 3.2) in zwei Gruppen einteilen. Der Übergang zwischen diesen beiden Komplexen geschieht durch die Materialbeziehungen. Da genau diese durch Hodge-Operatoren beschrieben werden, ergibt sich, dass die Zusammenhänge innerhalb eines Komplexes rein topologischer Natur sind. Erst in der Interaktion beider Komplexe treten geometrische Strukturen hervor.

Die Herleitung der einheitenfreien Formulierung verläuft dabei analog wie in Abschnitt 2.2. Auf diese Weise gelangen wir zur magnetoquasistationären Formulierung der Maxwellgleichungen mit Skalierungen entsprechend denen in Abschnitt 2.2. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir auf die

Tilde-Notation:

$$d \ ^1\bar{H} = \ ^2\bar{j}, \quad (3.49)$$

$$d \ ^2\bar{B} = 0, \quad (3.50)$$

$$d \ ^1\bar{E} = -\frac{\partial \ ^2\bar{B}}{\partial \tau}, \quad (3.51)$$

$$\ ^2\bar{B} = *_{\mu} \ ^1\bar{H}, \quad (3.52)$$

$$\ ^2\bar{j} = *_{\kappa} \ ^1\bar{E} + \ ^2\bar{j}_S. \quad (3.53)$$

Der Zeitparameter τ ist von der Formulierung in Differentialformen ausgenommen. Es ist zwar prinzipiell möglich, die Gleichungen auf einer vierdimensionalen Raumzeit zu formulieren, jedoch würde daraus ein vierdimensionales Rand-/Anfangswertproblem resultieren. Die dreidimensionale Formulierung mit gesondertem Zeitparameter führt zu einem Problem mit räumlichen Randbedingungen und zeitlichen Anfangsbedingungen.

Zur Rechtfertigung der Potentialformulierung benötigen wir die Umkehrung des Lemmas von Poincaré (Lemma 2.1). Dieses lässt sich mit Hilfe von Differentialformen in allgemeinerer Gestalt formulieren.

Definition 3.18. Eine p -Form $\bar{\omega}$ heißt geschlossen, wenn $d\bar{\omega} = 0$. Weiterhin heißt eine p -Form exakt, wenn eine $(p-1)$ -Form $\bar{\alpha}$ mit $d\bar{\alpha} = \bar{\omega}$ existiert.

Lemma 3.2 (Umkehrung des Lemmas von Poincaré). *Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ ein zu einem Punkt zusammenziehbares Gebiet. Sei $\bar{\omega}$ eine $p+1$ -Form, $p \geq 0$, auf \mathcal{M} mit $d\bar{\omega} = 0$. Dann gibt es eine p -Form $\bar{\alpha}$, so dass $\bar{\omega} = d\bar{\alpha}$, d.h. jede geschlossene $(p+1)$ -Form ist auch exakt.*

Beweis. Der Beweis wurde aus [21] übernommen. Wir definieren zwei Abbildungen:

$$j_i : \mathcal{M} \rightarrow [0, 1] \times \mathcal{M}, \quad j_i(x) = (i, x), \quad i \in \{0, 1\}.$$

Sei $\bar{\varphi}$ eine $p+1$ -Form $\bar{\varphi} \in \mathcal{F}^{p+1}([0, 1] \times \mathcal{M})$. Wir definieren eine Operation K ,

$$K : \mathcal{F}^{p+1}([0, 1] \times \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{F}^p(\mathcal{M}).$$

Seien x_i , $i = 1, 2, 3$, die Koordinaten auf \mathcal{M} , r die Koordinate auf $[0, 1]$. Wir definieren K durch seine Wirkung auf Monome:

$$K(a(r, x)dx^I) = 0,$$

$$K(a(r, x)drdx^J) = \left(\int_0^1 a(r, x)dr \right) dx^J,$$

wobei dx^I und dx^J äußere Produkte von $p+1$ bzw. p Monomen sind. K hat die grundlegende Eigenschaft:

$$K(d\bar{\varphi}) + dK(\bar{\varphi}) = j_1^*\bar{\varphi} - j_0^*\bar{\varphi}. \quad (3.54)$$

Wir zeigen diese Eigenschaft für Monome:

Fall 1: $\bar{\varphi} = a(r, x)dx^I$. Dann gilt $K\bar{\varphi} = 0$ und $dK\bar{\varphi} = 0$ und außerdem

$$\begin{aligned} d\bar{\varphi} &= \frac{\partial a}{\partial r} dr dx^I + \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} dx_i dx^I, \\ K(d\bar{\varphi}) &= \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial r} dr \right) dx^I = [a(1, x) - a(0, x)] dx^I = j_1^*\bar{\varphi} - j_0^*\bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Fall 2: $\bar{\varphi} = a(r, x)dr dx^J$. Dann gilt $j_1^*\bar{\varphi} = 0$ und $j_0^*\bar{\varphi} = 0$ sowie

$$\begin{aligned} K(d\bar{\varphi}) &= K \left[- \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} dr dx_i dx^J \right] = - \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x_i} dr \right) dx_i dx^J, \\ dK(\bar{\varphi}) &= d \left[\left(\int_0^1 a(r, x) dr \right) dx^J \right] = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 a(r, x) dr \right) dx_i dx^J \\ &= \sum_i \left(\int_0^1 \frac{\partial a}{\partial x_i} dr \right) dx_i dx^J = -K(d\bar{\varphi}). \end{aligned}$$

Da \mathcal{M} zu einem Punkt zusammenziehbar ist, existiert eine Abbildung

$$\Phi : [0, 1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \Phi(1, x) = x, \quad \Phi(0, x) = x_0$$

für einen Punkt $x_0 \in \mathcal{M}$. Zusammen mit j_i ergibt sich

$$\Phi \circ j_1 = \text{id}, \quad \Phi \circ j_0 \equiv x_0.$$

Für eine $p+1$ -Form $\bar{\omega} \in \mathcal{F}^{p+1}(\mathcal{M})$ gilt folglich

$$j_1^*[\Phi^*\bar{\omega}] = \bar{\omega}, \quad j_0^*[\Phi^*\bar{\omega}] = 0.$$

Fügen wir nun $\bar{\varphi} = \Phi^*\bar{\omega}$ in (3.54) ein, so erhalten wir

$$K[d(\Phi^*\bar{\omega})] + d[K(\Phi^*\bar{\omega})] = \bar{\omega}.$$

Wegen $d(\Phi^*\bar{\omega}) = \Phi^*(d\bar{\omega}) = 0$ folgt, dass $\bar{\omega} = d\bar{\alpha}$ mit $\bar{\alpha} = K(\Phi^*\bar{\omega})$.

□

Analog zur klassischen Herleitung erhalten wir nun

$${}^2\bar{B} = d {}^1\bar{A}, \quad (3.55)$$

$${}^1\bar{E} + \frac{\partial {}^1\bar{A}}{\partial \tau} = -d {}^0\bar{\varphi} \quad (3.56)$$

und nach topologischer Eichung ($\bar{\varphi} = 0$)

$${}^1\bar{E} = -\frac{\partial {}^1\bar{A}}{\partial \tau}. \quad (3.57)$$

Mit (3.55) und (3.57) folgt aus dem reduzierten System (3.49)-(3.53) die Gleichung:

$$d *_{\frac{1}{\mu}} d {}^1\bar{A} + *_{\kappa} \frac{\partial}{\partial \tau} {}^1\bar{A} = {}^2\bar{j}_S. \quad (3.58)$$

Diese ist äquivalent zur bereits bekannten curl-curl Gleichung (2.33).

Die Formulierung für das vollständige Problem (2.34) lautet:

$$d *_{\frac{1}{\mu}} d {}^1\bar{A} + *_{\kappa} \frac{\partial}{\partial \tau} {}^1\bar{A} = {}^2\bar{j}_S, \quad (3.59)$$

$$t *_{\frac{1}{\mu}} d {}^1\bar{A} = {}^1\bar{\gamma}, \quad (3.60)$$

$${}^1\bar{A}|_{\tau=0} = {}^1\bar{A}_0. \quad (3.61)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen übertragen sich im magnetostatischen Fall bzw. für nichtleitende Materialien zu

$$\int_{\partial \tilde{\Gamma}} \bar{\gamma} = \int_{\tilde{\Gamma}} t \bar{j}_S$$

für alle Teilflächen $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ des Randes. Im magnetoquasistationären Fall ergibt sich für die Neumann bedingungen auf dem Rand eines Leiters

$$\int_{\partial \tilde{\Gamma}} \bar{\gamma} = 0.$$

Bedeutung der Funktionenräume für die Differentialformen

Wir wollen das magnetostatische bzw. magnetoquasistationäre Problem auf einem Gebiet mit Euklidischer Metrik lösen. Wie wir gesehen haben, sind durch die Wahl der Metrik eindeutige Stellvertreter für die Differentialformen gegeben. Auf diese Weise lassen sich Räume von Differentialformen mit

Funktionenräumen identifizieren. Am einfachsten ist dies natürlich für die 0-Formen, die ja tatsächlich auch skalarwertige Funktionen sind. Wir verwenden für die Beschreibung der Maxwellgleichungen nur 0-Formen aus $H^1(\Omega)$. Da die Stellvertreter der äußeren Ableitung den üblichen Differentialoperatoren ∇ , curl und div entsprechen, ist es naheliegend die Räume der p -Formen so zu wählen, dass ihre Stellvertreter in den Räumen des de Rham Komplexes liegen. Wir bezeichnen diese Räume mit $H(d^p, \Omega)$, der Raum $H(d^3, \Omega)$ entspricht dabei in natürlicher Weise $*L^2(\Omega)$. Dadurch entsteht mit der äußeren Ableitung d ein de Rham Komplex für Differentialformen:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} H(d^0, \Omega) \xrightarrow{d^0} H(d^1, \Omega) \xrightarrow{d^1} H(d^2, \Omega) \xrightarrow{d^2} *L^2(\Omega) \xrightarrow{d^3 \equiv 0} \{0\}. \quad (3.62)$$

Der Raum \mathbb{R} dient der Beschreibung des Kerns von d^0 . Strenggenommen gehört er nicht zum Komplex, da sich mit jeder Stufe die Ordnung der Differentialformen um 1 erhöht. Der Nullraum passt dagegen in den Komplex, da 4-Formen auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten verschwinden. Um die beiden unterschiedlichen Komplexe auf dem Rand von Ω zu erklären, benötigen wir das Konzept der ungeraden Differentialformen.

3.6 Ungerade Differentialformen

Wir haben im Zusammenhang mit Vektorräumen und Mannigfaltigkeiten zwischen innerer und äußerer Orientierung unterschieden. Auch Differentialformen können eine äußere Orientierung an Stelle einer inneren besitzen. Man spricht dann von ungeraden (engl. odd, twisted) Differentialformen, im Unterschied zu den bisher behandelten geraden (engl. even, proper) Differentialformen. Wir bezeichnen den Raum der ungeraden p -Formen auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} mit $\tilde{\mathcal{F}}^p(\mathcal{M})$. Um mit Differentialformen zu arbeiten, ist es nicht zwingend notwendig, gerade und ungerade Differentialformen gesondert zu betrachten. Dennoch trägt die Betrachtung von ungeraden Differentialformen zum Verständnis der dualen Gitterstruktur im Diskreten Elektromagnetismus (siehe die folgenden Kapitel) bei.

3.6.1 Orientierung von ungeraden Differentialformen

Definition 3.19 (Ungerade Differentialform). Eine ungerade Differentialform $\tilde{\omega}$ ist eine Differentialform, die an Stelle einer inneren Orientierung eine äußere aufweist. Die Punktauswertung einer solchen Form ist ein ungerader Multi-Kovektor, d.h. eine Abbildung, die Multivektoren mit äußerer Orientierung auf reelle Zahlen abbildet. Folglich sind ungerade p -Formen über p -dimensionale Mannigfaltigkeiten mit äußerer Orientierung zu integrieren.

Bemerkung 3.15. Die übliche Schreibweise einer ungeraden p -Form

$$0 \neq \tilde{\omega} = (\bar{\omega}, \text{Or})$$

auf einer n -Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist zusammengesetzt aus einer geraden Differentialform $\bar{\omega}$, die bis auf Orientierung mit $\tilde{\omega}$ übereinstimmt, und einer Orientierung von \mathcal{M} . Diese Orientierung lässt sich auf verschiedene Weise beschreiben, z.B. durch eine entsprechend orientierte n -Form. Die (äußere) Orientierung von $\tilde{\omega}$ ist wie folgt bestimmt:

Sei $0 \neq \bar{\eta}$ eine gerade $(n - p)$ -Form, deren innere Orientierung mit der äußeren Orientierung von $\tilde{\omega}$ übereinstimmt. Dann entspricht die Orientierung von $\bar{\eta} \wedge \bar{\omega}$ der Orientierung Or . Wir sagen auch $\bar{\eta}$ beschreibt die Orientierung von $(\bar{\omega}, \text{Or})$ und schreiben in Anlehnung an [15]

$$\bar{\eta} = \{(\bar{\omega}, \text{Or})\}.$$

Bemerkung 3.16. Wir werden in den folgenden Kapiteln grundsätzlich positiv orientierte (Korkenzieherregel bzw. Rechte-Hand-Regel) 3-dimensionale Mannigfaltigkeiten behandeln. Auf ihren Rändern nehmen wir eine zur Orientierung der jeweiligen Mannigfaltigkeit passende (passend zu nach außen gerichteten Normalenfeldern) Orientierung an. In solchen Fällen, in denen die Orientierung ersichtlich ist, verwenden wir für ungerade Differentialformen eine abgekürzte Schreibweise, z.B. $\tilde{\omega} = (\bar{\omega}, \circlearrowleft)$. Zur besseren Unterscheidbarkeit von geraden und ungeraden Differentialformen versehen wir letztere grundsätzlich mit einer Tilde.

3.6.2 Operationen auf ungeraden Differentialformen

Wir wollen nun die Wirkung der Operationen Addition und \wedge -Produkt mit einer anderen Form, sowie Hodge-Operator, Spuroperator und äußere Ableitung, auf ungerade Differentialformen beschreiben. Eine Übersicht über ungerade Differentialformen und die hier gezeigten Operationen lässt sich in [15] finden.

Bei der Addition zweier ungerader p -Formen ist eine passende Orientierung (siehe die übliche Schreibweise) zu beachten. Es gilt

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}, \text{Or}) + (\bar{\beta}, \text{Or}) &= (\bar{\alpha} + \bar{\beta}, \text{Or}), \\ (\bar{\alpha}, \text{Or}) + (\bar{\beta}, -\text{Or}) &= (\bar{\alpha} - \bar{\beta}, \text{Or}). \end{aligned}$$

Satz 3.2 (Äußeres Produkt). *Gegeben seien eine gerade Differentialform $\bar{\alpha}$ und eine ungerade Differentialform $\tilde{\beta} = (\bar{\beta}, \text{Or})$. Für ihr äußeres Produkt gilt:*

$$\bar{\alpha} \wedge (\bar{\beta}, \text{Or}) = (\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}, \text{Or}) = (\bar{\alpha}, \text{Or}) \wedge \bar{\beta}.$$

Das äußere Produkt einer geraden und einer ungeraden Differentialform ist also eine ungerade Differentialform. Im Gegensatz dazu ist das äußere Produkt zweier ungerader Differentialformen eine gerade Differentialform:

$$(\bar{\alpha}, \text{Or}) \wedge (\bar{\beta}, \text{Or}) = \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}.$$

Bekannterweise ist das äußere Produkt zweier gerader Differentialformen ebenfalls eine gerade Differentialform. Mit Hinblick auf diese Eigenschaft ist die Bezeichnung als (un)gerade Differentialformen äußerst passend gewählt.

Bemerkung 3.17. $(\bar{\alpha}, \text{Or})$ lässt sich als das Bild von $\bar{\alpha}$ unter einer Abbildung (\cdot, Or) , die eine innere durch äußere Orientierungen ersetzt und umgekehrt, auffassen. Diese Auffassung veranschaulicht das Verhalten von ungeraden Differentialformen unter dem äußeren Produkt. Entsprechend lässt sich das äußere Produkt zweier ungerader Differentialformen schreiben als:

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}, \text{Or}) \wedge (\bar{\beta}, \text{Or}) &= ((\bar{\alpha}, \text{Or}) \wedge \bar{\beta}, \text{Or}) = (\bar{\alpha} \wedge (\bar{\beta}, \text{Or}), \text{Or}) \\ &= ((\bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}, \text{Or}), \text{Or}) = \bar{\alpha} \wedge \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Definition 3.20 (Hodge-Operator für ungerade Differentialformen). Man kann einen erweiterten Hodge-Operator $(*, \text{Or})$ definieren, der gerade/ungerade p -Formen auf ungerade/gerade $(n - p)$ -Formen abbildet. Wir definieren diesen Operator durch:

$$\begin{aligned} (*, \text{Or})(\bar{\alpha}, \text{Or}) &= *\bar{\alpha}, \\ (*, \text{Or})\bar{\alpha} &= (*\bar{\alpha}, \text{Or}), \end{aligned}$$

wobei $*$ für den bisherigen Hodge-Operator steht.

Bemerkung 3.18. Im Zusammenhang mit ungeraden Differentialformen ist $(*, \text{Or})$ die sinnvollere Wahl für den Hodge-Operator. Der Operator $*$ dient an dieser Stelle der Veranschaulichung der Definition. Wenn die Orientierungsklasse Or ersichtlich ist, schreiben wir auch $\tilde{*}$ an Stelle von $(*, \text{Or})$.

Satz 3.3. Die äußere Ableitung d wirkt auf ungerade Differentialformen wie auf gerade. Es gilt $d(\bar{\omega}, \text{Or}) = (d\bar{\omega}, \text{Or})$.

Satz 3.4 (Rücktransport). Für den Rücktransport einer ungeraden Differentialform $\tilde{\bar{\omega}} = (\bar{\omega}, \text{Or})$ von einer Mannigfaltigkeit \mathcal{N} auf eine Untermannigfaltigkeit \mathcal{M} muss letztere eine äußere Orientierung aufweisen. Es ist naheliegend, dass der Rücktransport einer ungeraden Form die Gestalt

$$\varphi^*(\bar{\omega}, \text{Or}) = (\varphi^*\bar{\omega}, \text{Or}_{\mathcal{M}})$$

besitzt, wobei $\text{Or}_{\mathcal{M}}$ eine zunächst noch unbekannte Orientierung auf \mathcal{M} ist. Wir verwenden, analog zu [15], die Schreibweise $\{(\bar{\omega}, \text{Or})\}$ für eine Differentialform, welche die äußere Orientierung von $(\bar{\omega}, \text{Or})$ beschreibt. Für die äußere Orientierung von $\varphi^*\tilde{\omega}$ gilt:

$$\bar{\eta} \wedge \{\varphi^*(\bar{\omega}, \text{Or})\} = \{(\bar{\omega}, \text{Or})\},$$

wobei $\bar{\eta}$ die äußere Orientierung von \mathcal{M} beschreibt. Haben \mathcal{M} und \mathcal{N} die gleiche Dimension, so ist η eine 0-Form.

Bemerkung 3.19. Die im Satz erwähnte Orientierung $\text{Or}_{\mathcal{M}}$ lässt sich auch explizit beschreiben. Sei die äußere Orientierung von \mathcal{M} durch das Tangentialvektorfeld $\partial/\partial\eta$ beschrieben, die Orientierung Or auf \mathcal{N} durch die Differentialform $\bar{\nu}$. Die Orientierung $\text{Or}_{\mathcal{M}}$ wird dann durch die Differentialform

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\lrcorner\bar{\nu}\right) : \left(\frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right) \mapsto \bar{\nu} \left| \left(\frac{\partial}{\partial\eta}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_p}\right)\right.$$

beschrieben.

Die Integration einer ungeraden Differentialform über eine Mannigfaltigkeit mit äußerer Orientierung kann auf den bekannten Fall der Integration einer geraden Form über eine Mannigfaltigkeit mit innerer Orientierung überführt werden. Sei $(\bar{\omega}, \text{Or})$ eine ungerade p -Form, $\tilde{\mathcal{M}}$ sei eine p -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer äußeren Orientierung, die durch eine Differentialform $\bar{\eta}$ beschrieben wird. Es gilt:

$$\int_{\tilde{\mathcal{M}}} (\bar{\omega}, \text{Or}) = \pm \int_{\mathcal{M}} \bar{\omega}. \quad (3.63)$$

Hierbei entspricht \mathcal{M} der ursprünglichen Mannigfaltigkeit $\tilde{\mathcal{M}}$, jedoch mit einer inneren an Stelle einer äußeren Orientierung. Sei diese innere Orientierung beschrieben durch eine Differentialform $\{\mathcal{M}\}$. Liegt nun $\bar{\eta} \wedge \{\mathcal{M}\}$ in der Orientierungsklasse Or , so ist das Vorzeichen in (3.63) positiv, andernfalls ist es negativ.

3.6.3 Bedeutung für die Maxwellgleichungen

Die Verwendung von ungeraden Differentialformen hat einen klaren Bezug zur Struktur der Maxwellgleichungen. Betrachtet man das Tontidiagramm (Abbildung 3.2), so fällt die Unterteilung der physikalischen Größen in zwei Gruppen auf. Übergänge zwischen diesen Komplexen sind durch die Materialbeziehungen, also durch den Hodge-Operator, beschrieben. Man kann

also unter Verwendung des Hodge-Operators $(*, \text{Or})$ die Größen des Faraday-Komplexes mit geraden und die Größen des Ampère-Maxwell-Komplexes mit ungeraden Differentialformen beschreiben. Es fällt auf, dass die Daten sowohl für magnetostatische und magnetoquasistationäre als auch für elektrostatische Probleme durch ungerade Differentialformen dargestellt werden, die Lösung dagegen jeweils durch gerade Differentialformen.

Da wir zur Beschreibung der Maxwellgleichungen Räume von Differentialformen entsprechend (3.62) verwenden, ergibt sich durch Spurbildung mit t (für die Stellvertreter entsprechend mit γ_D) eine Sequenz von Räumen auf dem Rand, die der ersten Randsequenz (2.61) entspricht:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{d^0} H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(d^1, \Gamma) \xrightarrow{d^1} *H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{d^2 \equiv 0} \{0\}.$$

Der Stellvertreter des Hodgeoperators, der auf Γ gerade 1-Formen in ungerade 1-Formen überführt, ist eine Drehung um 90° , nämlich $\vec{n}((\vec{x}) \times \cdot)$, was dem Operator entspricht, der die dualen Räume $H_{\perp}^{-\frac{1}{2}}(\text{curl}_{\Gamma}, \Gamma)$ und $H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\text{div}_{\Gamma}, \Gamma)$ ineinander überführt. Berücksichtigt man dies, so kann man mit dem Kodifferentialoperator δ , der aus Hodgeoperatoren und einer äußeren Ableitung zusammengesetzt ist (siehe Definition 3.15), die zweite Randsequenz (2.62) formulieren:

$$\tilde{*}\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} \tilde{*}H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\delta^2} H_{\parallel}^{-\frac{1}{2}}(\delta^1, \Gamma) \xrightarrow{\delta^1} \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \xrightarrow{\delta^0 \equiv 0} \{0\}.$$

Speziell bei dieser Sequenz ist zu beachten, dass die Ordnung der Differentialformen von links nach rechts abnimmt.

Kapitel 4

Diskreter Elektromagnetismus

Der diskrete Elektromagnetismus (DEM) bietet eine Möglichkeit, elektromagnetische Differentialgleichungen unter Verwendung von diskreten Differentialformen und Operatoren direkt, d.h. ohne Verwendung einer schwachen Formulierung, zu diskretisieren. Diskrete Formen werden dabei durch Koeffizientenvektoren, diskrete Operatoren entsprechend durch Matrizen dargestellt. Für den Diskreten Elektromagnetismus niedrigster Ordnung verwendet man die klassischen Whitneyformen [5, 6, 43]. In der klassischen, vektoranalytisch geprägten, Literatur werden diese meist als Whitneyelemente bezeichnet. Die Whitneyformen spannen eine Sequenz von Räumen $\mathcal{W}^p(T) \subset \mathcal{F}^p(T)$ auf Tetraedern T auf, wobei $d\mathcal{W}^p(T) \subset \mathcal{W}^{p+1}(T)$ gilt. Dabei gibt es für jeden Subsimplex von T genau eine Whitneyform.

4.1 Whitneyformen

Whitneyformen sind eine Realisierung unter anderem der Raviart-Thomas-Elemente [37, 30] und der Nédélec-Elemente erster Art [30] mit Polynomen niedrigsten möglichen Grades. Sie spannen den minimalen Polynomraum auf, für den gilt:

$$(P_0(T))^k \subset \mathcal{W}^p(T), \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad k = \binom{n}{p}, \quad (4.1)$$

$$(P_0(T))^l \subset d\mathcal{W}^p(T), \quad p = 0, 1, 2, \quad l = \binom{n}{p+1}, \quad (4.2)$$

wobei $P_0(T)$ den Raum der konstanten Polynome auf T bezeichnet.

Definition 4.1 (Whitneyformen). Sei T ein dreidimensionaler Simplex, also ein Tetraeder, mit baryzentrischen Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, s_i seine p -dimensionalen Subsimplices. Die Whitney- p -Formen $w_{s_i}^p$, $p = 0, \dots, 3$, sind

dann definiert durch:

$$w_{v_i}^0 = \lambda_i, \quad (4.3)$$

$$w_{e_i}^1 = \lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} - \lambda_{i_2} d\lambda_{i_1}, \quad e_i = [i_1, i_2], \quad (4.4)$$

$$w_{f_i}^2 = 2(\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2} d\lambda_{i_3} + \lambda_{i_2} d\lambda_{i_3} d\lambda_{i_1} + \lambda_{i_3} d\lambda_{i_1} d\lambda_{i_2}), \quad f_i = [i_1, i_2, i_3], \quad (4.5)$$

$$w_{t_i}^3 = 6(d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3). \quad (4.6)$$

Durch die Abbildung mit Karten können Whitneyformen metrikfrei auf Mannigfaltigkeiten erklärt werden.

Folgerung 4.1. *Da die Subsimplices eines Tetraeders dadurch beschrieben werden können, dass man einzelne Koordinaten $\lambda_i = 0$ setzt, gelten diese Definitionen auch für Mannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension, sofern $p \leq n$ gilt. In anderen Worten: durch tw^p ist für $p \leq n$ eine Whitneyform niedrigerer Dimension gegeben.*

Eine interessante Eigenschaft der Whitneyformen ist die Identifizierbarkeit ihrer Freiheitsgrade mit Ko-Ketten. Seien \bar{w}_i Whitney- p -Formen und s_i die mit ihnen assoziierten Simplices. Für ihre Integrale über diese Simplices gilt dann:

$$\int_{s_j} \bar{w}_i = \delta_{ij}. \quad (4.7)$$

Für eine Linearkombination von Whitneyformen entspricht das Skalarprodukt ihres Koeffizientenvektors mit dem Koeffizientenvektor einer simplizialen Kette gerade ihrem Integral über diese Kette. Koeffizientenvektoren sind also geeignete Darstellungsformen für Ketten und Ko-Ketten.

Die von den Whitneyformen aufgespannten Räume besitzen die sogenannte Exakte-Sequenz-Eigenschaft

$$d\mathcal{W}^p(T) = \ker(d^{p+1}) \cap \mathcal{W}^{p+1}(T). \quad (4.8)$$

Dadurch sind die Kerne der äußeren Ableitungen auf den Räumen der Whitneyformen bekannt, was uns später eine leichte Regularisierung nicht eindeutig lösbarer Gleichungen ermöglicht.

4.2 DEM niedrigster Ordnung

Wie bereits angedeutet werden wir Differentialformen als Ko-Ketten, dargestellt durch Koeffizientenvektoren, diskretisieren. Die Aufgabe diskreter

Operatoren ist also die korrekte Abbildung dieser Vektoren. Analog zum Tontidiagramm lassen sich die in den Maxwellgleichungen auftretenden Größen in zwei Komplexe einteilen. Die Beziehungen innerhalb eines Komplexes sind dabei rein topologischer Natur. Man behandelt die entsprechenden Größen üblicherweise auf zwei verschiedenen Gittern, die in einer bestimmten Beziehung zueinander stehen.

4.2.1 Duales Gitter

Ohne die Verwendung dualer Gitter ist im Allgemeinen die Wohldefiniertheit der Dirichletspuren nicht gewährleistet. So ist für das Feld der magnetischen Induktion B die Stetigkeit seiner Normalenkomponente (vgl. Spuroperator t für 2-Formen) über Gebietsgrenzen hinweg vorausgesetzt. Für das Magnetfeld H wird andererseits die Stetigkeit der Tangentialkomponente (vgl. Spuroperator t für 1-Formen) verlangt. Durch die Materialbeziehung $B = \mu H$ ist H mit einer ähnlichen Struktur wie B versehen, allerdings besitzt üblicherweise kein Feld die Stetigkeitseigenschaften des jeweils anderen. Um dennoch zu einer physikalisch zulässigen Approximation an die Felder zu gelangen, wird ein zweites Gitter konstruiert, auf dessen inneren Grenzflächen das betroffene Feld (in unserem Fall H) die notwendige Stetigkeitsbedingung erfüllt [7]. Für die Wohldefiniertheit der Spuren wird zwischen diesen beiden Gittern kein Zusammenhang verlangt. Wir verlangen dennoch einen topologischen Zusammenhang, um eine Diskretisierung der Hodge-Operatoren durch quadratische Matrizen zu erreichen [24].

Wir werden in dieser Arbeit mit baryzentrisch dualen Gittern [8] arbeiten, deren Konstruktion immer möglich ist. Alternativ ließen sich unter gewissen Voraussetzungen, etwa bei Verwendung von hexahedralen Gittern, orthogonale duale Gitter konstruieren. Allerdings würden diese nicht in den Kontext des DEM passen, da bereits an dieser Stelle eine Metrik eingeführt werden müsste.

Definition 4.2 (Baryzentrisch duales Gitter). Gegeben sei ein simpliziales Gitter C . Sei $S \in C$ ein p -dimensionaler Simplex und $T \in C$ ein Tetraeder mit $S \subset T$. O.B.d.A. sei S gegeben durch die baryzentrischen Koordinaten

$$\{\lambda : \lambda_i = 0, \forall i > p + 1\} = \{\lambda : \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1\}. \quad (4.9)$$

Der Schnitt des zu S baryzentrisch dualen Elementes \tilde{S} mit \bar{T} ist gegeben durch die baryzentrischen Koordinaten

$$\{\lambda : \lambda_i = a; i = 1, \dots, p + 1; \lambda_j < a, j = p + 2, \dots, 4\}. \quad (4.10)$$

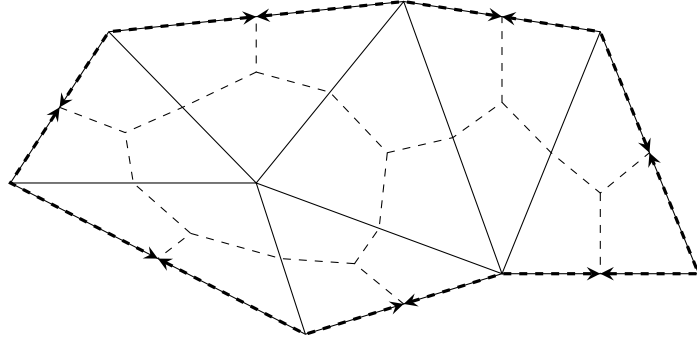


Abbildung 4.1: Schwarz: primales Gitter; Gestrichelt: baryzentrisch duales Gitter und duales Randgitter.

Es verbleiben $(3 - p)$ Freiheitsgrade für die Koordinaten. \tilde{S} ist also von Dimension $(3 - p)$. Die (innere) Orientierung von S induziert eine äußere Orientierung für \tilde{S} . Wir bezeichnen das aus allen dualen Elementen \tilde{S} gebildete Gitter als duales Gitter \tilde{C} .

Bemerkung 4.1. Ein Simplex S und sein Gegenstück \tilde{S} im baryzentrisch dualen Gitter schneiden sich genau im Baryzentrum von S . Da \tilde{S} im Allgemeinen kein Simplex ist, ist es wenig sinnvoll von einem Baryzentrum von \tilde{S} zu sprechen. In diesem Schnittpunkt ergänzen sich die Tangentialvektoren von S und \tilde{S} zu einer Basis des Tangentialraumes von \mathbb{R}^n . Dieser Zusammenhang begründet die Übertragbarkeit der Orientierung.

Lemma 4.1. Seien $S_1, S_2 \in C$ zwei Simplices mit $S_1 \subsetneq \bar{S}_2$. Dann ist $\tilde{S}_2 \subsetneq \tilde{\tilde{S}}_1$.

Beweis. O.B.d.A. $\dim(S_2) = p$, $\dim(S_1) = p - 1$. Sei T ein Tetraeder mit $S_2 \subset \bar{T}$, also auch $S_1 \subset \bar{T}$. Dann ist o.B.d.A. $\tilde{\tilde{S}}_1 \cap \bar{T}$ bzw. $\tilde{S}_2 \cap \bar{T}$ bestimmt durch die baryzentrischen Koordinaten

$$\{\lambda : \lambda_i = 0, i > p + 1\}, \quad (4.11)$$

$$\text{bzw. } \{\lambda : \lambda_i = 0, i > p\} \quad (4.12)$$

$\tilde{\tilde{S}}_2 \cap \bar{T}$ bzw. $\tilde{\tilde{S}}_1 \cap \bar{T}$ sind gegeben durch

$$\{\lambda : \lambda_i = a, i = 1, \dots, p + 1; \lambda_j \leq a, j = p + 2, \dots, 4\}, \quad (4.13)$$

$$\text{bzw. } \{\lambda : \lambda_i = b, i = 0, \dots, p; \lambda_j \leq b, j = p + 1, \dots, 4\}, \quad (4.14)$$

also gilt $\tilde{\tilde{S}}_2 \cap \bar{T} \subsetneq \tilde{\tilde{S}}_1 \cap \bar{T}$. Mit

$$\tilde{\tilde{S}}_i = \bigcup_{T: S_i \subset \bar{T}} \tilde{\tilde{S}}_i \cap \bar{T}, \quad i = 1, 2 \quad (4.15)$$

folgt die Behauptung. □

Folgerung 4.2. *Das duale Gitter hat keine Lücken. Die topologischen Zusammenhänge zwischen Simplices und ihren Untersimplices auf dem primalen Gitter übertragen sich in umgekehrter Weise auf ihre dualen Gegenstücke.*

Bemerkung 4.2. In der Literatur [8] stimmen die von den beiden Gittern überdeckten Gebiete im Allgemeinen nicht überein. Je nachdem, ob den Randsimplices duale Elemente zugeordnet werden oder nicht, überdeckt das duale oder das primale Gitter ein größeres Gebiet. Des Weiteren liefert unsere Konstruktion ein duales Gitter “mit Rand”, d.h. die überdeckte Region ist abgeschlossen (siehe Abbildung 4.1).

4.2.2 Diskrete Operatoren

Wir wollen nun die diskreten Operatoren erklären. Wir betrachten zunächst die äußere Ableitung. Da p -Formen eng mit p -Mannigfaltigkeiten, in unserem Fall p -Simplices, verknüpft sind und die äußere Ableitung p -Formen auf $(p+1)$ -Formen abbildet, werfen wir zunächst einen Blick auf den topologischen Zusammenhang zwischen p - und $(p+1)$ -Simplices.

Definition 4.3 (Inzidenzmatrizen). Seien S_i , $i = 1, \dots, N_{p+1}$, orientierte $(p+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, deren Ränder sich aus orientierten p -dimensionalen Mannigfaltigkeiten s_j , $j = 1, \dots, N_p$, zusammensetzen. Die $N_{p+1} \times N_p$ -Matrix $D^p = (d_{ij})$ mit

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & : s_j \not\subset \partial S_i, \\ 1 & : s_j \subset \partial S_i, \text{ Orientierungen von } s_j \text{ und } S_i \text{ passend,} \\ -1 & : s_j \subset \partial S_i, \text{ Orientierungen von } s_j \text{ und } S_i \text{ gegenläufig} \end{cases} \quad (4.16)$$

beschreibt die topologischen Zusammenhänge zwischen den S_i und s_j und wird Inzidenzmatrix genannt.

Folgerung 4.3. *Gegeben sei eine triviale Kette $(p+1)$ -dimensionaler Simplices, d.h. bestehend aus einem einzigen $(p+1)$ -dimensionalen Simplex S_i . Ihr Koeffizientenvektor \vec{s} hat die Komponenten $s_j = \delta_{ij}$, $j = 1, \dots, N_{p+1}$, wobei N_{p+1} die Anzahl $(p+1)$ -dimensionaler Simplices des (primalen) Gitters ist. Der Vektor $(D^p)^\top \vec{s}$ enthält dann gerade die Koeffizienten der Kette von p -dimensionalen Simplices, die den Rand von S_i beschreibt. Mit Linearität sind durch die Inzidenzmatrizen Ränder für allgemeine Ketten erklärt.*

Folgerung 4.4. *Sei D^p eine Inzidenzmatrix für das primale Gitter. Dann gilt für die Inzidenzmatrix \tilde{D}^{n-p-1} des dualen Gitters $\tilde{D}^{n-p-1} = (-1)^{p+1} (D^p)^\top$.*

Wir rufen uns den Satz von Stokes (3.15) in Erinnerung:

$$\int_S d\bar{\omega} = \int_{\partial S} \bar{\omega}.$$

Sei S ein $(p+1)$ -dimensionaler Simplex. Die rechte Seite lässt sich mit Hilfe von Koeffizientenvektoren schreiben als

$$\int_{\partial S} \bar{\omega} = \bar{\omega}^\top (D^p)^\top \vec{s}. \quad (4.17)$$

Es gilt der folgende Satz:

Satz 4.1 (Diskrete äußere Ableitung). *Die Inzidenzmatrizen operieren als diskrete äußere Ableitung auf den Koeffizientenvektoren der Ko-Ketten.*

Beweis. Sei S ein beliebiger $(p+1)$ -dimensionaler Simplex, aufgefasst als Kette mit dem zugehörigen Koeffizientenvektor \vec{s} . Weiterhin sei $\bar{\omega}$ eine beliebige diskrete p -Form, aufgefasst als Ko-Kette mit dem zugehörigen Koeffizientenvektor $\vec{\omega}$. Mit dem Satz von Stokes folgt:

$$\vec{s}^\top (D^p \vec{\omega}) = \vec{\omega}^\top (D^p)^\top \vec{s} = \int_{\partial S} \bar{\omega} = \int_S d\bar{\omega}. \quad (4.18)$$

□

Folgerung 4.5. *Sei $\bar{\omega} \in \mathcal{W}^p(C)$. Dann gilt für die äußere Ableitung $d\bar{\omega}$:*

$$d\bar{\omega} = \sum_j \alpha_j w_j^{p+1}, \quad \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad d\bar{\omega} \in \mathcal{W}^{p+1}(C).$$

Sei nun S_i der i -te $(p+1)$ -Simplex, als Kette dargestellt durch den Einheitsvektor \vec{e}_i , und $\vec{\omega}$ der Koeffizientenvektor zur Ko-Ketten-Darstellung von $\bar{\omega}$. Es gilt:

$$\vec{e}_i^\top (D^p \vec{\omega}) = \int_{S_i} \sum_j \alpha_j \bar{w}_j^{p+1} = \alpha_i.$$

Die diskrete äußere Ableitung besitzt also die gleichen Freiheitsgrade wie die kontinuierliche. Somit ist sie keine reine Approximation, sondern kann als Einschränkung von d auf $\mathcal{W}^p(C)$ angesehen werden. Folglich gewährleistet sie eine diskrete Exakte-Sequenz-Eigenschaft.

Folgerung 4.6. *Da der Rand einer Mannigfaltigkeit selbst keinen Rand besitzt, gilt für eine beliebige $(p + 1)$ -Kette \vec{s} :*

$$(D^{p-1})^\top (D^p)^\top \vec{s} = \vec{0}.$$

Die Kette $\vec{0}$ stellt die leere Menge dar. Entsprechend gilt für eine beliebige $(p - 1)$ -Ko-Kette mit Koeffizientenvektor $\vec{\omega}$:

$$D^p D^{p-1} \vec{\omega} = \vec{0},$$

entsprechend der doppelten Anwendung der äußeren Ableitung im kontinuierlichen Fall.

Bemerkung 4.3. In der Literatur werden die Inzidenzmatrizen D^0 , D^1 , und D^2 auf dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten auch häufig mit G , R und D bezeichnet. Dies rührt daher, dass ihre Wirkung auf Koeffizientenvektoren von Whitneyelementen den Differentialoperatoren ∇ , curl bzw. div entspricht.

Da sich Whitneyformen, wie in Folgerung 4.1 erwähnt, leicht auf Simplexes niedrigerer Dimension einschränken lassen, lassen sich leicht diskrete Spurooperatoren herleiten.

Satz 4.2 (Diskreter Spuroperator). *Gegeben sei ein simplizialer Komplex C sowie sein Randkomplex C_b . Die auf diesen Komplexen definierten p -Whitneyformen seien mit w_j , bzw. w_i^b , $i = 1, \dots, N_p^b$, $j = 1, \dots, N_p$, bezeichnet. Der diskrete Spuroperator $T^p \in \mathbb{R}^{N_p^b \times N_p}$ für p -Whitneyformen hat die Gestalt $T^p = (t_{ij}^p)$ mit*

$$t_{ij}^p = \begin{cases} 1 & : w_i^b = t w_j, \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.19)$$

Folgerung 4.7. *Die Transponierte $(T^p)^\top$ des diskreten Spurooperators stellt eine Erweiterung von diskreten p -Formen auf dem Randkomplex C_b in den Komplex C dar.*

Da wir mit Ko-Ketten auf einem dualen Gitter arbeiten, muss festgelegt werden, aus welchen Differentialformen diese bestehen. Leider ist es auf Grund der nichtsimplizialen Gestalt der Elemente des dualen Gitters nicht einfach, ein Analogon zu Whitneyformen explizit zu definieren. Wir wollen dies stattdessen implizit über die Freiheitsgrade dieser dualen Ansatzformen tun, d.h. die Werte der Integrale dieser Formen über die Elemente des dualen Gitters. Diese Vorgehensweise liegt näher am Geist des Konzeptes der

Ko-Ketten als die explizite Definition von Ansatzformen: die Ko-Ketten beschreiben nun Klassen von (kontinuierlichen) Differentialformen ohne dabei einen Stellvertreter besonders hervorzuheben.

Wir wollen nun einen Operator definieren, der diskrete p -Formen auf dem primalen Gitter in diskrete p -Formen auf dem dualen Gitter übersetzt. Mit anderen Worten soll dieser Operator einer p -Form, dargestellt durch ihre Freiheitsgrade auf dem primalen Gitter, die korrekten Freiheitsgrade auf dem dualen Gitter zuordnen.

Wie in [3] und [10] beschrieben, kann man innerhalb einer simplizialen n -Zelle, in unserem Falle eines Tetraeders, beliebige p -Simplices durch Ketten von p -Simplices aus dem Rand der n -Zelle (des Tetraeders) darstellen. Da die Schnitte der Elemente des dualen Gitters mit einem Tetraeder des primalen Gitters durch eine Vereinigung von höchstens zwei Simplices gegeben sind, können wir diese Elemente durch primale Ketten beschreiben. Wir wiederholen die Konstruktion aus [3] in einem Lemma:

Lemma 4.2 (Darstellung von Simplices durch Ketten). *Sei T ein Tetraeder mit zugehörigen baryzentrischen Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_4$, $s \subset T$ ein p -Simplex mit den Eckpunkten x_1, \dots, x_{p+1} . Weiterhin sei \mathcal{I}_p eine Menge von Multiindices mit $I = \{i_1, \dots, i_{p+1}, i_1 < \dots < i_{p+1}\}$ für $I \in \mathcal{I}_p$ und $\pi_I \in \text{Perm}(i_1, \dots, i_{p+1})$ seien Permutationen auf diesen Multiindices. Dabei beschreibt jeder Multiindex einen p -Simplex S_I des Randes von T durch die entsprechenden Eckpunkte. s lässt sich dann durch die Kette*

$$s = \sum_I \sum_{\pi_I} \text{sgn}(\pi_I) \lambda_{i_1}(x_1) \cdot \dots \cdot \lambda_{i_{p+1}}(x_{p+1}) S_I \quad (4.20)$$

beschreiben.

Lemma 4.3. *Die in Definition 4.2 definierte Menge lässt sich in zwei Simplices aufspalten:*

$$\{\lambda : \lambda_i = a; i = 1, \dots, p+1; \lambda_j < a, j = p+2, \dots, 4\} \quad (4.21)$$

$$= \{\lambda : \lambda_i = a; i = 1, \dots, p+1; a > \frac{1}{p+2}\} \quad (4.22)$$

$$\cup \{\lambda : \lambda_i = a, i = 1, \dots, p+1; \lambda_j < a \leq \frac{1}{p+2}, j = p+2, \dots, 4\}. \quad (4.23)$$

Für $p > 1$ ist die zweite Menge leer, d.h. $\tilde{S} \cap \bar{T}$ ist bereits ein Simplex.

Wir können nun die Schnitte der Elemente des dualen Gitters mit den primalen Tetraedern als Vereinigung von Simplices schreiben. Diese sind als konvexe Hülle ihrer Eckpunkte gegeben (siehe Tabelle 4.1). Die Reihenfolge

p	Simplices
0	$\{(1, 0, 0, 0); (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0); (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0); (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})\}$ $\cup \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0); (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0); (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}); (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$
1	$\{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0); (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0); (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})\}$ $\cup \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0); (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}); (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})\}$
2	$\{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0); (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$
3	$\{(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})\}$

Tabelle 4.1: Darstellung der Schnitte von Elementen des dualen Gitters mit einem primalen Tetraeder als Vereinigung von Simplices. Die Simplices sind durch die konvexe Hülle ihrer Eckpunkte, in baryzentrischen Koordinaten des Tetraeders, gegeben. O.B.d.A. seien die zugehörigen primalen p -Simplices durch $\{\lambda : \lambda_i = 0, i > p + 1\}$ bestimmt.

dieser Punkte bestimmt die Orientierung des jeweiligen Simplexes. Es muss also darauf geachtet werden, dass die einzelnen Teilsimplices die gleiche Orientierung besitzen.

Durch Darstellung der Teilsimplices als Ketten und deren Aufsummierung erhalten wir Ketten, die die dualen Elemente beschreiben. Da hierbei keine Metrik verwendet wurde, sind die Koeffizienten nur von der Dimension p der Elemente und der Raumdimension n abhängig. Es lässt sich also eine allgemeingültige Matrix $(P^p)^\top$ aufstellen, die duale p -Ketten in primale p -Ketten überträgt. Wir sind an ihrer transponierten Matrix P^p interessiert.

Definition 4.4 (Pairingmatrizen). Die Matrix P^p wird Pairingmatrix genannt und überträgt primale Ko-Ketten auf duale Ko-Ketten. Eine alternative Formel für diese Matrix und die entsprechende Matrix für den Randkomplex C_b wird in [3] präsentiert:

$$\begin{aligned}
[P^p]_{ij} &= \int_C \bar{w}_j^p \wedge \bar{w}_i^{n-p}, \\
[P_b^p]_{ij} &= \int_{\partial C} t\bar{w}_j^p \wedge t\bar{w}_i^{n-1-p}.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Diese Darstellung veranschaulicht die Metrikfreiheit der Pairingmatrizen.

Der letzte noch fehlende diskrete Operator ist der Hodge-Operator. Wie im kontinuierlichen Fall sind seine zentralen Aufgaben die Einführung einer

Metrik und das Umwandeln von p -Formen in $(n - p)$ -Formen. Des Weiteren ist die Skalierung mit Materialparametern in den Operator eingearbeitet. In der diskreten Form soll er zudem Ko-Ketten auf das duale Gitter übertragen. Da der Hodge-Operator mit Hilfe eines Skalarproduktes definiert wurde, sollte dieses Produkt, b.z.w. seine Entsprechung in der Sprache der Differentialformen $\wedge*$, auch in der Definition der diskreten Version vorkommen. Üblicherweise wird der diskrete Hodge-Operator gemäß der Galerkin-Methode definiert [11]. Seine Gestalt entspricht folglich derjenigen einer FEM-Massenmatrix:

$$[M_\nu^p]_{ij} = \int_C \bar{w}_j^p \wedge *_\nu \bar{w}_i^p, \quad (4.25)$$

wobei \bar{w}_i^p die Whitney- p -Formen und ν ein Materialparameter sind. Für lokal verschwindende Materialparameter sind auch die entsprechenden Matrixeinträge 0. Da die Whitneyformen kompakte Träger besitzen, ist der diskrete Hodge-Operator durch eine dünnbesetzte Matrix gegeben. In der Tat wird sich zeigen, dass der Diskrete Elektromagnetismus niedrigster Ordnung äquivalent zu einer Finite-Elemente Methode mit Whitneyelementen als Ansatz- und Testfunktionen ist.

4.2.3 Diskrete Gleichungen

Wir können nun eine diskrete Version der Gleichung (3.58) formulieren. Für die zeitliche Diskretisierung verwenden wir ein implizites Euler-Schema mit der Zeitschrittweite $\Delta\tau$. Die verallgemeinerte Formulierung der Gleichung für den Zeitschritt $k + 1$ lautet dann [3]:

$$\begin{aligned} & (-1)^{n-p} [D^p]^\top [M_{\frac{1}{\mu}}^{p+1}] [D^p] \{A_{k+1}\} + [M_\beta^p] \{A_{k+1}\} \\ & = [P^{n-p}] \{j\} + [M_\beta^p] \{A_k\} - [T^p]^\top [P_b^{n-1-p}] \{\gamma\}, \quad \beta = \frac{\kappa}{\Delta\tau}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

wobei β die elektrische Leitfähigkeit κ und die Zeitschrittweite $\Delta\tau$ enthält. Falls die magnetische Permeabilität μ feldabhängig ist, was bei Vorhandensein ferromagnetischer Materialien der Fall ist, ist in jedem Zeitschritt eine zusätzliche Iteration notwendig, um diese Nichtlinearität zu behandeln.

Die Formulierung ist insofern verallgemeinert, als dass für verschiedene n und p sehr unterschiedliche Gleichungen dargestellt werden. Für die magnetoquasistationäre Gleichung gilt $(n, p) = (3, 1)$. Für $(n, p) = (3, 0)$ und passende Materialparameter erhält man dagegen die Helmholtzgleichung. Wie bereits erwähnt ist diese diskrete Formulierung äquivalent zu einer FEM-Formulierung. Das heißt insbesondere, dass Finite Elemente Methoden implizit duale Gitter einführen.

Satz 4.3 (Äquivalenz zu Variationsproblemen). *Gegeben sei das Problem*

$$d *_{\nu} d {}^p \bar{A} + *_{\beta} {}^p \bar{A} = {}^{n-p} \bar{j} \text{ auf } \Omega, \quad (4.27)$$

$$t *_{\nu} d {}^p \bar{A} = {}^{n-1-p} \bar{\gamma} \text{ auf } \Gamma, \quad (4.28)$$

mit Daten $\bar{j} \in \mathcal{W}^{n-p}(\Omega)$ und $\bar{\gamma} \in \mathcal{W}^{n-1-p}(\Gamma)$. Die DEM-Formulierung dieses Problems lautet:

$$(-1)^{n-p} [D^p]^\top [M_\nu^{p+1}] [D^p] \{A\} + [M_\beta^p] \{A\} = [P^{n-p}] \{j\} - [T^p]^\top [P_b^{n-1-p}] \{\gamma\}.$$

Sie ist, unter Vernachlässigung des Fehlers bei der Beschreibung von Ω durch den Komplex C , äquivalent zur Variationsformulierung

$$\text{finde } \bar{A} \in \mathcal{W}^p(\Omega): a(\bar{A}, \bar{\omega}) = f(\bar{\omega}), \quad \forall \bar{\omega} \in \mathcal{W}^p(\Omega)$$

mit einer Bilinearform

$$\begin{aligned} a(\bar{\omega}, \bar{\eta}) &= \int_{\Omega} (-1)^{n-p} (-1)^{(p+1)(n-p-1)} d\bar{\omega} \wedge *_{\nu} d\bar{\eta} + (-1)^{p(n-p)} \bar{\omega} \wedge *_{\beta} \bar{\eta} \\ &= \int_{\Omega} (-1)^{n-p} *_{\nu} d\bar{\omega} \wedge d\bar{\eta} + *_{\beta} \bar{\omega} \wedge \bar{\eta} \end{aligned}$$

und dem Funktional

$$f(\bar{\eta}) = \int_{\Omega} \bar{j} \wedge \bar{\eta} - \int_{\Gamma} \bar{\gamma} \wedge t\bar{\eta}.$$

Beweis. Sei nach Voraussetzung $\Omega = C$. Wir leiten zunächst die Variationsformulierung von (4.27) her. Nach Multiplikation der Gleichung mit einer beliebigen Testform $\bar{\omega} \in \mathcal{W}^p(\Omega)$ und Integration über Ω erhalten wir:

$$\int_{\Omega} d *_{\nu} d {}^p \bar{A} \wedge {}^p \bar{\omega} + *_{\beta} {}^p \bar{A} \wedge {}^p \bar{\omega} = \int_{\Omega} {}^{n-p} \bar{j} \wedge {}^p \bar{\omega}.$$

Wir verzichten im Folgenden auf die Kennzeichnung der Ordnung der Formen. Anwenden der ersten Green'schen Formel führt zu

$$\int_{\Omega} (-1)^{n-p} *_{\nu} d\bar{A} \wedge d\bar{\omega} + *_{\beta} \bar{A} \wedge \bar{\omega} = \int_{\Omega} \bar{j} \wedge \bar{\omega} - \int_{\Gamma} t *_{\nu} d\bar{A} \wedge t\bar{\omega}.$$

Dies entspricht der Variationsformulierung aus dem Satz und ist äquivalent zum linearen Gleichungssystem:

$$\sum_j a(\bar{w}_i^p, \bar{w}_j^p) A_j = f(\bar{w}_i^p), \quad i, j = 1, \dots, N_p.$$

Die DEM-Formulierung ist bereits ein lineares Gleichungssystem mit der Systemmatrix

$$\begin{aligned}
& (-1)^{n-p} [D^p]^\top [M_\nu^{p+1}] [D^p] + [M_\beta^p] \\
&= \left(\int_{\Omega} (-1)^{n-p} \left(\sum_k D_{kl} \bar{w}_k^{p+1} \right) \wedge *_{\nu} \left(\sum_j D_{ji} \bar{w}_j^{p+1} \right) + \bar{w}_i^p \wedge *_{\beta} \bar{w}_i^p \right)_{il} \\
&= \left(\int_{\Omega} (-1)^{n-p} d\bar{w}_i^p \wedge *_{\nu} d\bar{w}_i^p + \bar{w}_i^p \wedge *_{\beta} \bar{w}_i^p \right)_{il}
\end{aligned}$$

und der rechten Seite

$$\left(\int_{\Omega} \sum_k j_k \bar{w}_k^{n-p} \wedge \bar{w}_i^p - \int_{\Gamma} \sum_k \gamma_k t \bar{w}_k^p \wedge t \bar{w}_i^p \right)_i = \left(\int_{\Omega} \bar{j} \wedge \bar{w}_i^p - \int_{\Gamma} \bar{\gamma} \wedge t \bar{w}_i^p \right)_i.$$

An dieser Stelle kommt die Voraussetzung an die Daten $\bar{j} \in \mathcal{W}^{n-p}(\Omega)$ und $\bar{\gamma} \in \mathcal{W}^{n-1-p}(\Gamma)$ zum Tragen. Die Variationsformulierung enthält kontinuierliche Daten, während die Daten der DEM-Formulierung in die Räume der Whitney-Formen projiziert werden. \square

Im magnetostatischen Fall bzw. im Fall nichtleitender Bereiche ($\beta = 0$ global bzw. lokal) ist die Systemmatrix singulär. Wegen der diskreten Exakte-Sequenz-Eigenschaft

$$\text{Im}(D^{p-1}) = \text{Ker}(D^p) \tag{4.29}$$

können wir eine Regularisierungsmatrix $R = c[D^{p-1}][D^{p-1}]^\top$ mit einem Skalierungsfaktor c konstruieren, deren Kern orthogonal zu $\text{Ker}(D^p)$ ist. Des Weiteren ist

$$\text{rank}(R) = \dim(\text{Ker}(D^p)). \tag{4.30}$$

Deshalb können wir R zur Systemmatrix addieren, ohne die äußere Ableitung der Lösung

$$\{B\} = [D^p]\{A\} \tag{4.31}$$

zu verändern und erhalten eine reguläre Matrix.

Die Anwendung von R auf einen Koeffizientenvektor entspricht bis auf Skalierung einer diskreten Projektion auf den Kern von D^p . Der Skalierungsfaktor $c_s > 0$ hängt von c und D^{p-1} ab. Es gilt $RR = c_s R$.

Um im Fall der magnetostatischen Gleichung die Elliptizität der zugehörigen regularisierten Bilinearform zu zeigen, benötigen wir eine Variante der Friedrichsungleichung.

Lemma 4.4 (Friedrichsungleichung für $H(\text{curl}, \Omega)$). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitzrand. Für $\vec{u} \in H(\text{curl}, \Omega)$ mit $\vec{u} \perp \nabla H^1(\Omega)$ und $\text{curl } \vec{u} \neq \vec{0}$ gilt:

$$\|\vec{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\text{curl } \vec{u}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.32)$$

Beweis. Für den Beweis verweisen wir auf [22] (Lemma 3.4 und 3.6 in Verbindung mit Korollar 3.4). \square

Bemerkung 4.4. Die zusätzliche Bedingung $\text{curl } \vec{u} \neq \vec{0}$ wird nur für topologisch nichttriviale Gebiete benötigt.

Satz 4.4. Die mittels einer Projektion $\Pi_{\nabla} : H(\text{curl}, \Omega) \rightarrow \nabla H^1(\Omega)$ regularisierte Bilinearform

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \text{curl } \vec{u} \cdot \text{curl } \vec{v} + c_s \Pi_{\nabla} \vec{u} \cdot \Pi_{\nabla} \vec{v} d\vec{x}, \quad c_s > 0,$$

ist $H(\text{curl}, \Omega)$ -elliptisch.

Beweis. Sei $\vec{u} \in H(\text{curl}, \Omega)$, $\vec{u} = \vec{u}_{\nabla} + \vec{u}_{\perp}$, gemäß der Zerlegung

$$H(\text{curl}, \Omega) = \ker(\text{curl}) \bigoplus (\ker(\text{curl}))^{\perp}.$$

Dann ist mit der Ungleichung von Friedrichs für $H(\text{curl}, \Omega)$:

$$\begin{aligned} a(\vec{u}, \vec{u}) &= a(\vec{u}_{\perp}, \vec{u}_{\perp}) + a(\vec{u}_{\nabla}, \vec{u}_{\nabla}) + a(\vec{u}_{\perp}, \vec{u}_{\nabla}) + a(\vec{u}_{\nabla}, \vec{u}_{\perp}) \\ &= a(\vec{u}_{\perp}, \vec{u}_{\perp}) + a(\vec{u}_{\nabla}, \vec{u}_{\nabla}) \\ &= \|\text{curl } \vec{u}_{\perp}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_s \|\vec{u}_{\nabla}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \|\text{curl } \vec{u}_{\perp}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2c} \|\vec{u}_{\perp}\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_s \|\vec{u}_{\nabla}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2 \\ &\geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2c}, c_s\right\} \|\vec{u}\|_{H(\text{curl}, \Omega)}^2. \end{aligned}$$

\square

Bemerkung 4.5. Das Verwenden dieser Regularisierungsstrategie kann bei Methoden höherer Ordnung auf Grund der besonderen Gestalt der diskreten äußeren Ableitung zu variablen Regularisierungsparametern führen, die zu einer Diagonalmatrix $C_s = \text{diag}(c_{s,1}, \dots, c_{s,N_p})$ zusammengefasst sind. Unterschiedliche Ansatzformen in $\ker(d^p)$ werden dann unterschiedlich gewichtet. Um die Elliptizität der zugehörigen Bilinearform zu zeigen, kann eine Abschätzung gegen eine Bilinearform mit Regularisierungsfaktor

$$\min_{i=1, \dots, N_p} \{c_{s,i}\} > 0$$

verwendet werden.

Kapitel 5

Diskreter Elektromagnetismus höheren polynomialen Grades

5.1 Lokalisierung von Freiheitsgraden höherer Ordnung

Im Fall niedrigster Ordnung waren die Freiheitsgrade einer Differentialform gerade ihre Integrale über die entsprechenden Simplices. Eine ähnliche Lokalisierung der Freiheitsgrade von p -Formen auf p -Simplices wäre auch für den Fall höherer Ordnung wünschenswert, zumal die physikalischen Größen, die durch p -Formen dargestellt werden, gerade auf p -dimensionalen Mannigfaltigkeiten gemessen werden. In Finite-Element-Methoden höherer Ordnung werden stattdessen üblicherweise Freiheitsgrade auf Elementen unterschiedlicher Dimension ($\geq p$) verwendet. Diese Vorgehensweise ist zwar auch für DEM denkbar, erscheint jedoch aus den genannten Gründen eher unnatürlich. Wir untersuchen in diesem Abschnitt eine Strategie, die darauf abzielt, Freiheitsgrade von p -Formen auf eigens dafür konstruierten p -Simplices zu lokalisieren [12, 35]. Des Weiteren betrachten wir die genannte Herangehensweise aus den FEM.

Die Wahl der Freiheitsgrade beeinflusst direkt die Gestalt geeigneter Ansatzformen. Diese werden wir im Anschluss an die Festlegung der Freiheitsgrade betrachten.

5.1.1 Kleine Simplices

Ein Vorschlag von Alain Bossavit [12, 35] lautet, den polynomialen Grad der Whitneyformen zu erhöhen, indem man sie mit baryzentrischen Koordinatenfunktionen λ_i multipliziert. Ergänzend dazu werden die mit ihnen assozii-

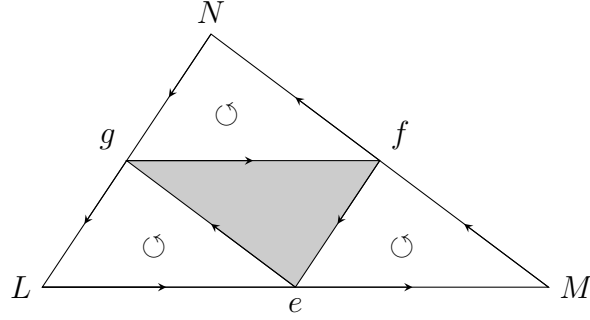


Abbildung 5.1: Kleine Simplexes, abgeleitet von einem einzelnen Dreieck und seinen Untersimplices für $|\vec{k}| = 1$. Man beachte, dass das zentrale Dreieck ein Loch ist, das nicht zum Komplex der kleinen Simplexes gehört.

ierten Simplexes in Mengen von sogenannten kleinen Simplexes überführt. Zu diesem Zweck wurde in [35] die \tilde{k} -Transformation vorgestellt.

Definition 5.1 (\tilde{k} -Transformation). Sei S ein p -dimensionaler Simplex und $\vec{k} = (k_0, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ ein Multiindex. Dann können wir die Abbildung $\tilde{k} = (\tilde{k}_0, \dots, \tilde{k}_p)$ komponentenweise auf $[0, 1]$ definieren:

$$\tilde{k}_i(x) = \frac{x + k_i}{1 + |\vec{k}|}, \quad i = 0, \dots, p. \quad (5.1)$$

Der kleine Simplex $S_{\vec{k}}$, abgeleitet von S , ist durch seine baryzentrischen Koordinaten $\tilde{k}_i(\lambda_i)$, $i = 0, \dots, p$ gegeben, wobei λ_i die baryzentrischen Koordinaten von S sind. Die mit $S_{\vec{k}}$ assoziierte p -Form höherer Ordnung ist gegeben durch:

$$\bar{w}_{S, \vec{k}} = \bar{w}_S \prod_{i=0}^p \lambda_i^{k_i}, \quad (5.2)$$

wobei \bar{w}_S die mit S assoziierte Whitney- p -Form ist. Die Orientierungen bleiben sowohl für die Simplexes als auch für die Formen erhalten.

Satz 5.1. *Die wie oben modifizierten Whitneyformen spannen die richtigen Räume für Whitneyformen höherer Ordnung auf, d.h. diese Räume erfüllen die drei in [25] postulierten Bedingungen:*

$$\{\bar{\omega} \in \mathcal{W}_{\partial}^p(T), d\bar{\omega} = 0\} = d\mathcal{W}_{\partial}^{p-1}(T), \quad 1 \leq p \leq 3, \quad (5.3)$$

$$t_S \mathcal{W}_{\partial}^p(T) = \mathcal{W}_{\partial}^p(S), \quad S \subset \partial T, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{P}_{\partial}^p(T) \subset \mathcal{W}_{\partial}^p(T) \subset \mathcal{P}_{\partial+1}^p(T). \quad (5.5)$$

Die Räume $\mathcal{P}_\vartheta^p(T)$ enthalten hierbei alle p -Formen auf T , deren Koeffizienten Polynome mit maximalem Grad ϑ sind. Die erste Bedingung beschreibt eine lokale exakte Sequenz. Diese Formen können daher als Realisierung von Nédélec-Elementen erster Art [30] bzw. von Raviart-Thomas-Nédélec-Elementen [37, 30] angesehen werden.

Beweis. Sei $\mathcal{W}_\vartheta^p(T)$ der von den p -Formen

$$\bar{w}_{\tilde{S}, \vec{k}} = \bar{w}_{\tilde{S}} \prod_{i=0}^p \lambda_i^{k_i}, \quad \vartheta = |\vec{k}| \quad (5.6)$$

aufgespannte Raum. Da (5.4) für die Whitneyformen niedrigster Ordnung gilt und die Knoten von S eine Teilmenge der Knoten von T sind, folgt nach Konstruktion, dass $\mathcal{W}_\vartheta^p(S)$ von den p -Formen

$$t_S \{ \bar{w}_{\tilde{S}, \vec{k}} : \tilde{S} \subset S \text{ ein Simplex, } k_i = 0 \text{ für } x_i \notin \tilde{S} \} \quad (5.7)$$

aufgespannt wird. Falls $\tilde{S} \not\subset S$ oder $k_i > 0$ für mindestens einen, nicht in S enthaltenen Knoten gilt, so folgt

$$t_S \bar{w}_{\tilde{S}, \vec{k}} = 0 \in \mathcal{W}_\vartheta^p(S).$$

Da (5.5) für die Whitneyformen niedrigster Ordnung erfüllt ist und die baryzentrischen Koordinatenfunktionen lokal den Raum der linearen Polynome aufspannen, folgt die Gültigkeit von (5.5) für beliebige $\vartheta \geq 0$ durch Induktion.

Wir verschieben den Beweis für die Exakte-Sequenz-Eigenschaft bis zum Ende des Abschnitts. \square

Bemerkung 5.1. Die im Satz beschriebenen Räume bilden die exakte De Rham Sequenz [1]:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\text{id}} \mathcal{W}_\vartheta^0(T) \xrightarrow{d^0} \mathcal{W}_\vartheta^1(T) \xrightarrow{d^1} \mathcal{W}_\vartheta^2(T) \xrightarrow{d^2} \mathcal{W}_\vartheta^3(T) \xrightarrow{d^3 \equiv 0} \{0\}$$

Man beachte, dass der polynomiale Grad der Räume $\mathcal{W}_\vartheta^p(T)$ auf den verschiedenen Stufen der Sequenz gleichbleibend ist.

Die Freiheitsgrade der Whitneyformen höherer Ordnung können durch Integration auf den kleinen Simplexes lokalisiert werden.

Jedoch hat diese Herangehensweise einige Nachteile. Die auf diese Weise konstruierten Ansatzformen sind im Allgemeinen linear abhängig. Man erhält lineare Unabhängigkeit durch Streichen von Formen und den mit ihnen assoziierten kleinen Simplexes, jedoch auf Kosten der Symmetrie.

Tabelle 5.1: Anzahl der modifizierten Whitney-1-Formen auf einem Tetraeder und die Dimension der von ihnen aufgespannten Räume nach [24].

$ \vec{k} $	$\dim(\mathcal{W}_{ \vec{k} }^1)$	# Formen
0	6	6
1	20	24
2	45	60
3	84	120

Des Weiteren können, obwohl es zu jeder Ansatzform genau einen kleinen Simplex gibt, die Freiheitsgrade nicht direkt auf diesen Simplices lokalisiert werden, sondern auf, aus ihnen konstruierten, nichttrivialen Ketten. Um die Integralwerte der Ansatzformen über kleine Simplices in Koeffizientenvektoren zu übersetzen, bzw. umgekehrt, benötigt man zusätzliche Transformationsmatrizen.

Beispiel 5.1. Die Transformationsmatrix, die auf einem Dreieck Koeffizienten bzgl. der 1-Ansatzformen auf Integralwerte über die kleine Kanten ($|\vec{k}| = 1$) abbildet, hat die folgende Gestalt:

$$\Xi = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Zeilen entsprechen den Ansatzformen, Spalten den kleinen Kanten. Die vollbesetzten Spalten entsprechen den kleinen Kanten im Inneren des Dreiecks (vergleiche Abbildung 5.1). Das Streichen einer 1-Ansatzform und der zugehörigen kleinen Kante wurde durch Aufhellen angedeutet.

Für den Beweis der Exakte-Sequenz-Eigenschaft benötigen wir noch ein Lemma:

Lemma 5.1. *Unter Annahme eines einheitlichen polynomialen Grades ϑ bildet die äußere Ableitung den Raum der modifizierten Whitney- p -Formen in den Raum der modifizierten Whitney- $(p+1)$ -Formen ab: $d\mathcal{W}_{\vartheta}^p(T) \subset \mathcal{W}_{\vartheta}^{p+1}(T)$.*

Beweis. Diese Eigenschaft ist für $\vartheta = 0$, d.h. für Whitneyformen niedrigster Ordnung, erfüllt. Wir werden sie für höhere polynomiale Grade durch Induktion nachweisen. Es ist ausreichend, dies für die Ansatzformen zu tun. Sei $\bar{w} \in \mathcal{W}_\vartheta^p(T)$, $\vartheta > 0$, eine Ansatzform. Dann gibt es ein $\bar{v} \in \mathcal{W}_{\vartheta-1}^p(T)$ und eine baryzentrische Koordinatenfunktion λ_i mit $\bar{w} = \lambda_i \bar{v}$. Insbesondere ist wegen $\mathcal{W}_{\vartheta-1}^p(T) \subset \mathcal{P}_\vartheta^p(T)$ der polynomiale Grad von \bar{v} höchstens ϑ . Es gilt $d\bar{w} = (d\lambda_i)\bar{v} + \lambda_i d\bar{v}$. Da die Aussage für $\vartheta - 1$ gültig ist, gehört der zweite Summand zu $\mathcal{W}_\vartheta^{p+1}(T)$. Da weiterhin die Abbildung

$$\bar{v} \mapsto (d\lambda_i)\bar{v}$$

den polynomialen Grad erhält, gehört der erste Summand ebenfalls zum Raum $\mathcal{W}_\vartheta^{p+1}(T)$, welcher insbesondere alle $(p+1)$ -Formen des polynomialen Grades ϑ enthält. \square

Beweis der Exakte-Sequenz-Eigenschaft. Sei $\bar{\omega} \in \mathcal{W}_\vartheta^p(T)$, $1 \leq p \leq 3$, mit $d\bar{\omega} = 0$. Da T zu einem Punkt kontrahierbar ist, existiert eine $(p-1)$ -Form $\bar{\alpha} \in \mathcal{F}^{p-1}(T)$ mit $\bar{\omega} = d\bar{\alpha}$. Sei $\bar{\alpha}_W \in \mathcal{W}_\vartheta^{p-1}(T)$ die Diskretisierung von $\bar{\alpha}$. Insbesondere besitzen $\bar{\alpha}$ und $\bar{\alpha}_W$ die gleichen Freiheitsgrade (auf nichttrivialen Ketten kleiner Simplices). Dann ist nach dem Lemma $\bar{\omega}_W = d\bar{\alpha}_W \in \mathcal{W}_\vartheta^p(T)$ und gemäß Konstruktion stimmen die Freiheitsgrade von $\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}_W$ überein. Da $\bar{\omega} \in \mathcal{W}_\vartheta^p(T)$, gilt also $\bar{\omega} = \bar{\omega}_W$. \square

Ein weiterer Beweis der Exakte-Sequenz-Eigenschaft findet sich in [36].

5.1.2 Simplices höherer Dimension

Die bisher behandelten Freiheitsgrade von p -Formen auf p -Simplices sind durch einfache Integration bestimmt. Auf höherdimensionalen Simplices ist dieser direkte Ansatz nicht möglich, da z.B. 1-Formen nicht über Flächen integrierbar sind.

In [17, 44] werden Freiheitsgrade höherer Ordnung für $H(\text{curl})$ - und $H(\text{div})$ -konforme Ansatzfunktionen separat auf Kanten, Flächen und Volumenzellen definiert. Mit Hilfe von Differentialformen lassen sich diese Freiheitsgrade zu zwei Typen für p -Formen \bar{u} auf m -dimensionalen Simplices S zusammenfassen:

$$N_i^S(\bar{u}) = \begin{cases} \int_S t d\bar{u} \wedge *t d\bar{v}_i & \text{für } p\text{-Ansatzformen } \bar{v}_i \notin \ker(d), m > p, \\ \int_S t \bar{u} \wedge *t \bar{v}_i & \text{für } p\text{-Ansatzformen } \bar{v}_i \in \ker(d), m \geq p, \end{cases} \quad (5.8)$$

wobei die Ansatzformen \bar{v}_i dem Simplex S zugeordnet sind. Die zu verwendenden Hodge- und Spurooperatoren hängen von der Dimension m von S ab. Die verwendete Metrik ist die Euklidische. Die Spur für $m = 3$ entspricht der Identität. Die Freiheitsgrade niedriger Ordnung sind für $m = p$, $*t\bar{v}_i \equiv 1$ in (5.8) enthalten.

Bei diesen Definitionen wurde für passende Ansatzformen Orthogonalität bezüglich der Euklidischen Metrik angenommen. Es werden keine weiteren geometrischen Hilfskonstrukte, ähnlich der kleinen Simplicies, benötigt. Andererseits ist es schwierig diesen Freiheitsgraden eine physikalische Bedeutung zuzuordnen.

5.2 Eine hierarchische Basis von Ansatzformen höherer Ordnung

Aufgrund der Nachteile des Ansatzes von Bossavit betrachten wir Formen, die an FEM-Ansatzfunktionen höherer Ordnung angelehnt sind. Ein entsprechender Satz von Ansatzfunktionen, die mit den in Abschnitt 5.1.2 beschriebenen Freiheitsgraden kompatibel sind, wurde in [39, 44] präsentiert. Die klassischen Whitneyelemente sind als Funktionen niedrigster Ordnung enthalten. Ansatzfunktionen höherer Ordnung werden mit Hilfen von baryzentrischen Koordinatenfunktionen und Legendrepolyomen konstruiert.

5.2.1 Grundlagen

Um die Ansatzformen höherer Ordnung zu beschreiben, benötigen wir verschiedene Versionen von Legendrepolyomen.

Definition 5.2 (Legendrepolyome). Wir definieren für $i \in \mathbb{N}_0$, $x \in [-1, 1]$ die Legendrepolyome $l_i(x)$ durch:

$$l_0(x) = 1, \quad (5.9)$$

$$l_1(x) = x, \quad (5.10)$$

$$l_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1}l_i(x)x - \frac{i}{i+1}l_{i-1}(x), \quad i \geq 1. \quad (5.11)$$

Bei den Legendrepolyomen handelt es sich um $L_2([-1, 1])$ -orthogonale Polynome, die für $0 \leq i \leq \vartheta$ den Polynomraum $P^\vartheta([-1, 1])$ aufspannen und der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 l_i(x)l_j(x)dx = \frac{2}{2i+1}\delta_{ij} \quad (5.12)$$

genügen.

Definition 5.3 (Integrierte und skalierte Legendrepolynome). Seien $l_i(x)$, $i \geq 0$, $x \in [-1, 1]$ die eben definierten Legendrepolynome. Wir definieren die integrierten Legendrepolynome durch:

$$L_i(x) = \int_{-1}^x l_{i-1}(\xi) d\xi, \quad x \in [-1, 1], \quad i \geq 2. \quad (5.13)$$

Außerdem definieren wir für einen Skalierungsparameter $r \in (0, 1]$ die skalierten, sowie die skalierten integrierten Legendrepolynome durch:

$$l_i^S(x, r) = r^i l_i\left(\frac{x}{r}\right), \quad x \in [-r, r], \quad i \geq 0, \quad (5.14)$$

$$L_i^S(x, r) = r^i L_i\left(\frac{x}{r}\right), \quad x \in [-r, r], \quad i \geq 2. \quad (5.15)$$

Bemerkung 5.2. Die integrierten Legendrepolynome sind “fast orthogonal” bezüglich des $L^2([-1, 1])$ -Skalarproduktes, d.h. sie genügen der Orthogonalitätsbeziehung

$$\int_{-1}^1 L_i(x) L_j(x) dx = 0, \quad \text{nur für } |i - j| > 2.$$

Die integrierten Legendrepolynome $L_i(x)$, $i \geq 2$, lassen sich mit Hilfe der folgenden Rekursionsformel einfach auswerten:

$$L_1(x) = x, \quad (5.16)$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1), \quad (5.17)$$

$$L_i(x) = \frac{2i - 3}{i} x L_{i-1}(x) - \frac{i - 3}{i} L_{i-2}(x), \quad i \geq 3. \quad (5.18)$$

Hierbei spielt L_1 lediglich die Rolle einer Hilfsfunktion.

Bemerkung 5.3. An Stelle von Legendrepolynomen können prinzipiell auch andere orthogonale Basen von Polynomen, die den Raum $P^d([-1, 1])$ aufspannen, verwendet werden. Die Art der Orthogonalität (vergleiche integrierte Legendrepolynome) beeinflusst die Anzahl der nicht verschwindenden Einträge der resultierenden Systemmatrix, sowie ihre Konditionszahl [44]. Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die Möglichkeit effizienter Punktauswertungen.

5.2.2 Ansatzformen auf dem Tetraeder

Im Folgenden definieren wir auf einem Tetraeder Ansatzformen, wobei wir verschiedene Arten von Legendrepolyomen sowie baryzentrische Koordinatenfunktionen, jeweils als 0-Formen interpretiert, verwenden.

1-Ansatzformen auf dem Tetraeder

Kantenbasierte Formen:

Für $m = 1, \dots, 6$ sind die Kanten E_m durch ihre Knoten $E_m = [e_{m_1}, e_{m_2}]$ gegeben. Als Formen niedrigster Ordnung haben wir die Whitneyformen:

$$\bar{w}_m^1 = \lambda_{e_{m_1}} d\lambda_{e_{m_2}} - \lambda_{e_{m_2}} d\lambda_{e_{m_1}}. \quad (5.19)$$

Kantenbasierte Formen höherer Ordnung, die Gradientenfelder darstellen, sind bestimmt durch:

$$\bar{\varphi}_i^{E_m} = d(\bar{L}_{i+2}^S(\lambda_{e_{m_2}} - \lambda_{e_{m_1}}, \lambda_{e_{m_1}} + \lambda_{e_{m_2}})), \quad 0 \leq i \leq \vartheta_{E_m} - 1. \quad (5.20)$$

Flächenbasierte Formen:

Für $m = 1, \dots, 4$ sind die Flächen F_m durch ihre Knoten $F_m = [f_{m_1}, f_{m_2}, f_{m_3}]$ gegeben. Für $0 \leq i + j \leq \vartheta_{F_m} - 2$ definieren wir die Hilfsformen:

$$\bar{u}_i = \bar{L}_{i+2}^S(\lambda_{f_{m_1}} - \lambda_{f_{m_2}}, \lambda_{f_{m_1}} + \lambda_{f_{m_2}}), \quad (5.21)$$

$$\bar{v}_j = \lambda_{f_{m_3}} \bar{l}_j^S(2\lambda_{f_{m_3}} - \lambda_{F_m}, \lambda_{F_m}), \quad (5.22)$$

mit $\lambda_{F_m} = \lambda_{f_{m_1}} + \lambda_{f_{m_2}} + \lambda_{f_{m_3}}$.

Flächenbasierte Formen höherer Ordnung sind bestimmt durch:

$$\bar{\varphi}_{(i,j)}^{F_m,1} = d(\bar{u}_i \bar{v}_j), \quad (5.23)$$

$$\bar{\varphi}_{(i,j)}^{F_m,2} = (d\bar{u}_i) \bar{v}_j - \bar{u}_i (d\bar{v}_j), \quad (5.24)$$

$$\bar{\varphi}_{(0,j)}^{F_m,3} = (\lambda_{f_{m_2}} d\lambda_{f_{m_1}} - \lambda_{f_{m_1}} d\lambda_{f_{m_2}}) \bar{v}_j, \quad (5.25)$$

wobei $\bar{\varphi}_{(i,j)}^{F_m,1}$ Gradientenfelder darstellen.

Zellenbasierte Formen:

Für $0 \leq i + j + k \leq \vartheta_C - 3$ definieren wir die Hilfsformen:

$$\bar{u}_i = \bar{L}_{i+2}^S(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2), \quad (5.26)$$

$$\bar{v}_j = \lambda_3 \bar{l}_j^S(2\lambda_3 - (1 - \lambda_4), 1 - \lambda_4), \quad (5.27)$$

$$\bar{w}_k = \lambda_4 \bar{l}_k^S(2\lambda_4 - 1). \quad (5.28)$$

Zellenbasierte Formen höherer Ordnung sind bestimmt durch:

$$\bar{\varphi}_{(i,j,k)}^{C,1} = d(\bar{u}_i \bar{v}_j \bar{w}_k), \quad (5.29)$$

$$\bar{\varphi}_{(i,j,k)}^{C,2} = (d\bar{u}_i) \bar{v}_j \bar{w}_k - \bar{u}_i (d\bar{v}_j) \bar{w}_k + \bar{u}_i \bar{v}_j (d\bar{w}_k), \quad (5.30)$$

$$\bar{\varphi}_{\vartheta_{C+(i,j,k)}^{C,2}} = (d\bar{u}_i) \bar{v}_j \bar{w}_k + \bar{u}_i (d\bar{v}_j) \bar{w}_k - \bar{u}_i \bar{v}_j (d\bar{w}_k), \quad (5.31)$$

$$\bar{\varphi}_{(0,j,k)}^{C,3} = (\lambda_2 d\lambda_1 - \lambda_1 d\lambda_2) \bar{v}_j \bar{w}_k, \quad (5.32)$$

wobei $\bar{\varphi}_{(i,j,k)}^{C,1}$ Gradientenfelder darstellen.

2-Ansatzformen auf dem Tetraeder

Flächenbasierte Formen:

Für $m = 1, \dots, 4$ sind die Flächen F_m durch ihre Knoten $F_m = [f_{m_1}, f_{m_2}, f_{m_3}]$ gegeben. Als Formen niedrigster Ordnung haben wir die Whitneyformen:

$$\bar{w}_m^2 = 2(\lambda_{f_{m_1}} d\lambda_{f_{m_2}} d\lambda_{f_{m_3}} + \lambda_{f_{m_2}} d\lambda_{f_{m_3}} d\lambda_{f_{m_1}} + \lambda_{f_{m_3}} d\lambda_{f_{m_1}} d\lambda_{f_{m_2}}). \quad (5.33)$$

Für $0 \leq i + j \leq \vartheta_{F_m} - 2$ definieren wir die Hilfsformen:

$$\bar{u}_i = \bar{L}_{i+2}^S(\lambda_{f_{m_1}} - \lambda_{f_{m_2}}, \lambda_{f_{m_1}} + \lambda_{f_{m_2}}), \quad (5.34)$$

$$\bar{v}_j = \lambda_{f_{m_3}} \bar{l}_j^S(2\lambda_{f_{m_3}} - \lambda_{F_m}, \lambda_{F_m}). \quad (5.35)$$

Flächenbasierte Formen höherer Ordnung, die divergenzfreie Vektorfelder darstellen, sind bestimmt durch:

$$\bar{\psi}_{(i,j)}^{F_m} = -2d\bar{u}_i d\bar{v}_j, \quad (5.36)$$

$$\bar{\psi}_{(0,j)}^{F_m} = -(\lambda_{f_{m_2}} d\lambda_{f_{m_1}} - \lambda_{f_{m_1}} d\lambda_{f_{m_2}}) d\bar{v}_j - 2\bar{v}_j d\lambda_{f_{m_1}} d\lambda_{f_{m_2}}. \quad (5.37)$$

Zellenbasierte Formen:

Für $0 \leq i + j + k \leq \vartheta_C - 3$ definieren wir die Hilfsformen:

$$\bar{u}_i = \bar{L}_{i+2}^S(\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2), \quad (5.38)$$

$$\bar{v}_j = \lambda_3 \bar{l}_j^S(2\lambda_3 - (1 - \lambda_4), 1 - \lambda_4), \quad (5.39)$$

$$\bar{w}_k = \lambda_4 \bar{l}_k(2\lambda_4 - 1). \quad (5.40)$$

Zellenbasierte Formen höherer Ordnung sind bestimmt durch:

$$\bar{\psi}_{(i,j,k)}^{C,1} = 2\bar{u}_i d\bar{v}_j d\bar{w}_k - 2\bar{w}_k d\bar{u}_i d\bar{v}_j, \quad (5.41)$$

$$\bar{\psi}_{\vartheta_{C+(i,j,k)}^{C,1}} = 2\bar{v}_j d\bar{w}_k d\bar{u}_i - 2\bar{u}_i d\bar{v}_j d\bar{w}_k, \quad (5.42)$$

$$\bar{\psi}_{2\vartheta_{C+(i,j,k)}^{C,1}} = -(\lambda_2 d\lambda_1 - \lambda_1 d\lambda_2) d(\bar{v}_j \bar{w}_k) - 2\bar{v}_j \bar{w}_k d\lambda_1 d\lambda_2, \quad (5.43)$$

$$\bar{\psi}_{(i,j,k)}^{C,2} = \bar{u}_i d\bar{v}_j d\bar{w}_k, \quad (5.44)$$

$$\bar{\psi}_{(0,j,k)}^{C,2} = \bar{v}_j (\lambda_2 d\lambda_1 - \lambda_1 d\lambda_2) d\bar{w}_k, \quad (5.45)$$

$$\bar{\psi}_{(0,0,k)}^{C,3} = \bar{w}_k (\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 + \lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_1 + \lambda_3 d\lambda_1 d\lambda_2), \quad (5.46)$$

wobei $\bar{\psi}_{(i,j,k)}^{C,1}$, $\bar{\psi}_{\vartheta_C+(i,j,k)}^{C,1}$ und $\bar{\psi}_{2\vartheta_C+(i,j,k)}^{C,1}$ divergenzfreie Vektorfelder darstellen.

Eigenschaften der Ansatzformen

Der polynomiale Grad ϑ der Ansatzformen kann für jeden Simplex separat gewählt werden. Unter Vorgabe eines gleichmäßigen polynomialen Grades $\vartheta_{E_l} = \vartheta_{F_m} = \vartheta_C$, $\forall l, m$, spannen diese Formen vollständige polynomiale Räume auf, d.h. sie stellen Nédélec-Elemente zweiter Art [31] dar. Diese stimmen jedoch nicht mit den Räumen für Whitneyformen höherer Ordnung, wie sie in [25] beschrieben wurden, überein. Um eine Basis von $\mathcal{W}_\vartheta^p(T)$ zu erhalten, genügt es, diejenigen Ansatzformen mit polynomialen Grad $\vartheta + 1$, die in $\ker(D^p)$ liegen, wegzulassen.

Beide Arten von polynomialen Approximationsräumen wurden in [1] in der Sprache der Differentialformen beschrieben. Die dort und in [25] vorgestellten primalen Freiheitsgrade sind als Basis des zum jeweiligen Approximationsraum dualen Raumes erklärt. Das bedeutet insbesondere, dass sie auf Formen aus dem Approximationsraum wirken und somit keine metrischen Informationen enthalten. Des Weiteren sind diese Freiheitsgrade jeweils durch eine Basis eines anderen Approximationsraumes (der jeweils anderen Art im Sinn der Nédélec-Elemente) erklärt.

Die hier verwendeten Freiheitsgrade (5.8) sind dagegen durch die Basis des eigentlichen Approximationsraumes bestimmt und enthalten zum Zweck der Diskretisierung gegebener Daten auch metrische Informationen. Da die zu diskretisierenden Daten aus dem Ampère-Maxwell-Komplex stammen, aber auf dem Faraday-Komplex diskretisiert werden, kann der in den Freiheitsgraden auftretende Hodge-Operator als Übergang zwischen den Komplexen aufgefasst werden.

Damit die Freiheitsgrade den Koeffizienten der entsprechenden Ansatzformen entsprechen, ist eine Normalisierung der Freiheitsgrade (5.8) notwendig:

$$N_{i,scal}^S(\bar{u}) = \begin{cases} \frac{N_i^S(\bar{u})}{\|\bar{v}_i\|_{L_2(S)}^2}, & v_i \in \ker(d), \\ \frac{N_i^S(\bar{u})}{\|d\bar{v}_i\|_{L_2(S)}^2}, & v_i \notin \ker(d). \end{cases} \quad (5.47)$$

In unserem Fall reicht es aus, eine auf $\Omega \setminus \partial\Omega$ reduzierte Basis zu verwenden, indem man auf die Gradientenfelder verzichtet, da diese keinen Beitrag zu $\bar{B} = d\bar{A}$ liefern. Man muss jedoch bedenken, dass bei der Approximation der Neumanndaten, die ebenfalls mit Hilfe von 1-Formen diskretisiert werden, im Allgemeinen auch Gradientenfelder verwendet werden. Falls kein Strom durch den Rand des Gebietes fließt, so folgt für beliebige Teilflächen $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$

des Randes:

$$\int_{\partial\bar{\Gamma}} t\bar{H} = \int_{\bar{\Gamma}} t\bar{j} = 0.$$

Für einen topologisch trivialen Rand gilt in diesem Fall sogar, dass $t\bar{H} = \gamma_N\bar{A}$ selbst ein Gradientenfeld ist. Bei der Reduzierung der Basis sollte daher der Rand von Ω ausgespart werden.

Beispiel 5.2 (1-Ansatzformen auf dem Tetraeder). Gegeben sei ein Tetraeder $T = [x_1, x_2, x_3, x_4]$. Die 1-Ansatzformen von linearem bis kubischem Grad bezüglich der Kante $E_1 = [x_1, x_2]$ lauten:

$$\begin{aligned}\bar{w}_1^1 &= \lambda_1 d\lambda_2 - \lambda_2 d\lambda_1, \\ \bar{\varphi}_0^{E_1} &= -2\lambda_2 d\lambda_1 - 2\lambda_1 d\lambda_2, \\ \bar{\varphi}_1^{E_1} &= \lambda_2(4\lambda_1 - 2\lambda_2)d\lambda_1 + \lambda_1(2\lambda_1 - 4\lambda_2)d\lambda_2, \\ \bar{\varphi}_2^{E_1} &= \lambda_2(-6\lambda_1^2 + 12\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2^2)d\lambda_1 + \lambda_1(-2\lambda_1^2 + 12\lambda_1\lambda_2 - 6\lambda_2^2)d\lambda_2,\end{aligned}$$

wobei die $\bar{\varphi}_i^{E_1}$, $i \in \{0, 1, 2\}$, im Kern von d liegen. Bezüglich des Dreiecks $F_1 = [x_1, x_3, x_2]$ lauten die 1-Ansatzformen von linearem bis kubischem Grad:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{(0,0)}^{F_1,1} &= -2\lambda_2\lambda_3 d\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_3 d\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(1,0)}^{F_1,1} &= \lambda_2\lambda_3(2\lambda_3 - 4\lambda_1)d\lambda_1 + \lambda_1\lambda_3(2\lambda_3 - 2\lambda_1)d\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2(4\lambda_3 - 2\lambda_1)d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(0,1)}^{F_1,1} &= -2\lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - 2\lambda_1 - \lambda_3)d\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_3(2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)d\lambda_2 \\ &\quad - 2\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1 - 2\lambda_3)d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(0,0)}^{F_1,2} &= -2\lambda_2\lambda_3 d\lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_3 d\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(1,0)}^{F_1,2} &= \lambda_2\lambda_3(2\lambda_3 - 4\lambda_1)d\lambda_1 - \lambda_1\lambda_3(2\lambda_3 - 2\lambda_1)d\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2(4\lambda_3 - 2\lambda_1)d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(0,1)}^{F_1,2} &= -2\lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_3)d\lambda_1 + 2\lambda_1\lambda_3(2\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)d\lambda_2 \\ &\quad - 2\lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(0,0)}^{F_1,3} &= \lambda_2\lambda_3 d\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 d\lambda_3, \\ \bar{\varphi}_{(0,1)}^{F_1,3} &= \lambda_2\lambda_3(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)d\lambda_1 - \lambda_1\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3)d\lambda_3,\end{aligned}$$

wobei die $\bar{\varphi}_{(i,j)}^{F_1,1}$, $i, j \in \{0, 1\}$, im Kern von d liegen. Die 1-Ansatzformen von linearem bis kubischem Grad bezüglich des Tetraeders sind:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{(0,0,0)}^{C,1} &= -2\lambda_2\lambda_3\lambda_4 d\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_3\lambda_4 d\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_4 d\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 d\lambda_4, \\ \bar{\varphi}_{(0,0,0)}^{C,2} &= -2\lambda_2\lambda_3\lambda_4 d\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_3\lambda_4 d\lambda_2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_4 d\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 d\lambda_4, \\ \bar{\varphi}_{3+(0,0,0)}^{C,2} &= -2\lambda_2\lambda_3\lambda_4 d\lambda_1 - 2\lambda_1\lambda_3\lambda_4 d\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2\lambda_4 d\lambda_3 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3 d\lambda_4, \\ \bar{\varphi}_{(0,0,0)}^{C,3} &= \lambda_2\lambda_3\lambda_4 d\lambda_1 - \lambda_1\lambda_3\lambda_4 d\lambda_2,\end{aligned}$$

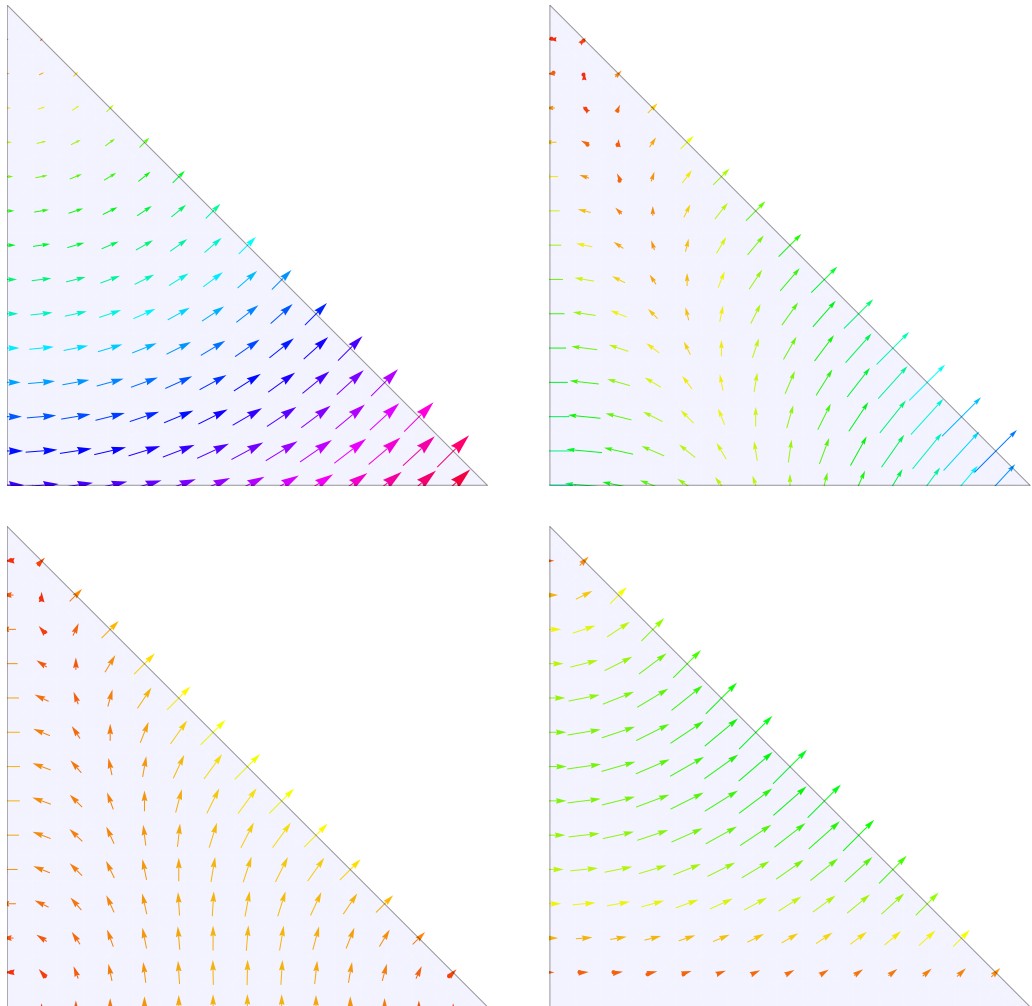


Abbildung 5.2: Vektorielle Stellvertreter von 1-Ansatzformen auf einem Dreieck. Oben: Lineare Formen $\bar{w}_m^1, \bar{\varphi}_0^{E,m}$ basierend auf der unteren Kante. Unten: Quadratische flächenbasierte Formen $\bar{\varphi}_{(0,0)}^{F,2}, \bar{\varphi}_{(0,0)}^{F,3}$.

wobei $\bar{\varphi}_{(0,0,0)}^{C,1}$ im Kern von d liegt.

5.3 Duale Freiheitsgrade und Verallgemeinerung von Simplices

Durch das Einführen von Ansatzformen höheren polynomialen Grades werden auch neue Freiheitsgrade eingeführt. Wir haben gesehen, dass eine eindeutige Zuordnung zu den Simplices des primalen Komplexes nicht mehr möglich ist. Das gleiche Problem stellt sich für den dualen Komplex, dessen explizite Konstruktion wir weiterhin vermeiden wollen. Um eine geeignete Definition der dualen Freiheitsgrade zu finden, betrachten wir zunächst noch einmal den Fall niedrigsten polynomialen Grades.

5.3.1 Duale Freiheitsgrade im klassischen DEM

In unserer Beschreibung des klassischen Diskreten Elektromagnetismus wurden duale Freiheitsgrade zwar in Gestalt von Koeffizientenvektoren verwendet, jedoch nicht explizit definiert. Diskretisierungen auf dem dualen Komplex wurden indirekt, mit Hilfe der Pairingmatrizen, durchgeführt. Der andere Operator, der Freiheitsgrade vom primalen auf das duale Gitter überträgt, ist der Hodge-Operator. Wir rufen uns noch einmal die Formeln für die Berechnung der jeweiligen Matrixeinträge in Erinnerung:

$$[M_\nu^p]_{ij} = \int_C \bar{w}_j^p \wedge *_\nu \bar{w}_i^p = \int_C \bar{w}_i^p \wedge *_\nu \bar{w}_j^p, \quad (5.48)$$

$$[P^p]_{ij} = \int_C \bar{w}_j^p \wedge \bar{w}_i^{n-p} = (-1)^{(n-p)p} \int_C \bar{w}_i^{n-p} \wedge \bar{w}_j^p. \quad (5.49)$$

Es fällt auf, dass beide Operatoren eine ähnliche Struktur aufweisen. Wir führen für eine p -Form $\bar{\omega}$ ein Funktional $\tilde{N}_{\bar{\omega}} : \mathcal{F}^{n-p}(C) \rightarrow \mathbb{R}$ ein:

$$\tilde{N}_{\bar{\omega}}(\bar{u}) = \int_C \bar{\omega} \wedge \bar{u}. \quad (5.50)$$

Die Einträge der Hodge- bzw. Pairingmatrizen lassen sich schreiben als:

$$[M_\nu^p]_{ij} = \tilde{N}_{\bar{w}_i^p}(*_\nu \bar{w}_j^p), \quad (5.51)$$

$$[P^p]_{ij} = (-1)^{(n-p)p} \tilde{N}_{\bar{w}_i^{n-p}}(\bar{w}_j^p). \quad (5.52)$$

In [11] wird im Fall niedrigster Ordnung $\tilde{N}_{\bar{w}_i^p}$ mit dem zum i -ten primalen p -Simplex dualen Element identifiziert. In anderen Worten: es wird gezeigt, dass $\tilde{N}_{\bar{w}_i^p}(\bar{u})$ mit dem Wert des Integrals von \bar{u} über das geometrisch konstruierte i -te duale Element von Dimension $(n - p)$ übereinstimmt, d.h. ein dualer Freiheitsgrad im klassischen Sinn ist.

Die Identifizierung der $\tilde{N}_{\bar{w}_i^p}$ mit Elementen des geometrisch konstruierten dualen Komplexes schlägt eine Brücke zwischen der Beschreibung der Pairingmatrix niedrigster Ordnung mit Integralen und als Koeffizientenmatrix der Kettendarstellung der dualen Elemente.

Da auch die Einträge der Pairingmatrizen höherer Ordnung die gleiche Struktur aufweisen, wollen wir die Elemente des dualen Gitters und die zugehörigen Freiheitsgrade im DEM höherer Ordnung auf abstrakte Weise durch die Funktionale $\tilde{N}_{\bar{w}_i^p}$ beschreiben. Im Sinne der De Rham Ströme [16] entspricht dies einer Identifizierung der dualen Gitterelemente mit den Ansatzformen \bar{w}_i^p .

5.3.2 Verallgemeinerte Simplices

Wir haben gesehen, dass die Whitneyformen ihre primalen Freiheitsgrade durch Integration über den mit ihnen assoziierten Simplex und ihre dualen Freiheitsgrade durch die $\tilde{N}_{\bar{w}_i^p}$ bestimmen. Wichtig ist hierbei die spezielle Beziehung zwischen Whitneyformen und Simplices:

$$\int_{S_i^p} w_j^p = \delta_{ij}. \quad (5.53)$$

Die Beziehung zum dualen Komplex ist indirekt über den baryzentrischen Zusammenhang mit dem primalen Komplex hergestellt.

Es stellt sich die Frage, ob es einen zu (5.53) ähnlichen Zusammenhang zwischen Ansatzformen höheren Grades und mit Simplices verwandten Objekten gibt. Wie wir bereits gesehen haben, lassen sich beliebige Simplices durch Ketten, d.h. durch Linearkombinationen von Simplices aus dem primalen Komplex darstellen. Ketten sind also gewissermaßen eine Verallgemeinerung von Simplices. Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen lassen sich auch als Integrationsgewichte auf den jeweiligen Simplices interpretieren. Die nächste naheliegende Verallgemeinerung ist dann, an Stelle von konstanten Gewichten, Funktionen zu verwenden. Die auf diese Weise erhaltenen gewichteten Simplices unterscheiden sich nicht grundlegend von gewöhnlichen Simplices. Wir gehen noch einen Schritt weiter.

Definition 5.4 (Verallgemeinerte Simplices). Sei S^m ein m -dimensionaler

Simplex, \bar{v} eine p -Form mit $p \leq m$. Das Funktional

$$S_{\bar{v}}^m(\cdot) = \int_{S^m} \bar{v} \wedge \cdot \quad (5.54)$$

bildet $(m - p)$ -Formen auf reelle Zahlen ab. Man kann es als Integral über einen, mit einer p -Form \bar{v} gewichteten, verallgemeinerten Simplex auffassen und im Sinne von Ketten mit diesem identifizieren. Insbesondere gilt mit der 0-Form $\bar{1}$: $S_{\bar{1}}^m = S^m$.

Bemerkung 5.4. Die Funktionale $S_{\bar{v}}^m$ lassen sich als De Rham Ströme auffassen. In der entsprechenden Theorie [16] werden klassische Ketten als Ströme interpretiert.

Bemerkung 5.5. Im Sinne der vorangehenden Definition sind die dualen Freiheitsgrade (5.50) verallgemeinerte duale Gitterelemente. Man beachte, dass die dortige Integration über den Träger der \bar{w}_i^p durchgeführt wird. Die Elemente des dualen Gitters werden nicht geometrisch konstruiert.

Im Rahmen der Freiheitsgrade (5.8) treten weitere Funktionale in Erscheinung:

$$S_{d\bar{v}}^m(\cdot) = \int_{S^m} d\bar{v} \wedge \cdot.$$

Für p -Formen \bar{v} bilden diese Funktionale $(m - p - 1)$ -Formen in die reellen Zahlen ab. Sie können als weitere Verallgemeinerung von Simplices gesehen werden. Wir können sie mit Hilfe eines Randbegriffs für Ströme [16] zu den bisherigen verallgemeinerten Simplices in Beziehung setzen.

Definition 5.5 (Randoperator auf De Rham Strömen). Sei $\Phi : \mathcal{F}^p(S) \rightarrow \mathbb{R}$ ein De Rham Strom. Der Rand von Φ ist definiert als

$$\begin{aligned} b\Phi(\cdot) &= \Phi(d \cdot), \\ b\Phi : \mathcal{F}^{p-1}(S) &\rightarrow \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Diese Definition stellt eine Verallgemeinerung des Satzes von Stokes dar.

Bemerkung 5.6. Wegen $b(b\Phi(\cdot)) = \Phi(d(d \cdot)) = 0$ ist der Rand eines De Rham Stroms randlos.

Beispiel 5.3. Sei S ein klassischer p -dimensionaler Simplex. Für den Rand des De Rham Stroms

$$\Phi(\cdot) = \int_S \cdot$$

gilt dann mit einer beliebigen $(p-1)$ -Form $\bar{\omega}$

$$b\Phi(\bar{\omega}) = \Phi(d\bar{\omega}) = \int_S d\bar{\omega} = \int_{\partial S} \bar{\omega}.$$

Wir wollen nun die Ränder der durch Ansatzformen bestimmten verallgemeinerten Simplices untersuchen.

Satz 5.2. *Sei S^m ein m -dimensionaler Simplex und $\bar{\omega}_i$ eine mit S^m assoziierte p -Ansatzform höherer Ordnung, die nicht im Kern von d^p liegt, d.h. $d\bar{\omega}_i$ ist eine $(p+1)$ -Ansatzform. Freiheitsgrade bezüglich $\bar{\omega}_i$ sind dann auf $S^m_{\bar{\omega}_i}$ lokalisiert. Es gilt:*

$$b[S^m_{\bar{\omega}_i}(\cdot)] = (-1)^{p+1} S^m_{d\bar{\omega}_i}(\cdot).$$

$S^m_{d\bar{\omega}_i}$ ist also der Rand von $S^m_{\bar{\omega}_i}$. Der Faktor $(-1)^{p+1}$ beschreibt ihre relative Orientierung zueinander. Freiheitsgrade bezüglich der $(p+1)$ -Ansatzform $d\bar{\omega}_i$ sind folglich auf dem Rand von $S^m_{\bar{\omega}_i}$ lokalisiert.

Beweis.

$$\begin{aligned} b[S^m_{\bar{\omega}_i}(\cdot)] &= b \left[\int_{S^m} \bar{\omega}_i \wedge \cdot \right] = \int_{S^m} \bar{\omega}_i \wedge d\cdot \\ &= (-1)^{p+1} \int_{S^m} d\bar{\omega}_i \wedge \cdot + (-1)^p \int_{S^m} d(\bar{\omega}_i \wedge \cdot) \\ &= (-1)^{p+1} S^m_{d\bar{\omega}_i}(\cdot) + (-1)^p \int_{\partial S^m} t\bar{\omega}_i \wedge t\cdot. \end{aligned}$$

Das Randintegral verschwindet, da die Spur von $\bar{\omega}_i$ auf dem Rand von S^m gleich 0 ist. \square

Folgerung 5.1. *Verallgemeinerte Simplices $S^m_{\bar{\omega}_i}$ besitzen für Ansatzformen $\bar{\omega}_i \in \ker(d^p)$ keinen Rand.*

5.3.3 Beschreibung verallgemeinerter Simplices mit ungeraden Differentialformen

Wir haben uns vor allem mit den Freiheitsgraden von Whitneyformen beschäftigt. Zwischen diesen und den zu diskretisierenden Daten gibt es zwei wesentliche Unterschiede. Zum einen sind Whitneyformen grundsätzlich metrikfrei, z.B. sind 1-Formen mit Hilfe von Kanten unbestimmter Länge beschrieben. Des Weiteren sind sie gerade Differentialformen.

Wie wir bereits gesehen haben, sind die zu diskretisierenden Daten grundsätzlich Größen aus dem Ampère-Maxwell-Komplex und somit ungerade Differentialformen. Zudem spielt die Metrik für die Diskretisierung eine bedeutende Rolle. Der natürliche Operator, der einen Übergang zwischen geraden und ungeraden Differentialformen darstellt und zudem metrische Informationen beinhaltet, ist der Hodge-Operator $\tilde{*}$.

Die korrekte Beschreibung des Freiheitsgrades niedrigster Ordnung für als ungerade p -Form aufgefasste Daten $\tilde{\omega}$ auf einem p -Simplex S^p lautet also

$$\int_{S^p} \tilde{*}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) \wedge \tilde{\omega} = \int_{S^p} (dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p) \wedge \tilde{*}\tilde{\omega}, \quad (5.55)$$

wobei $(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_p)$ das Volumenelement auf S^p bezüglich der umgebenden Metrik ist. Der Integrand ist als äußeres Produkt zweier ungerader Differentialformen eine gerade Differentialform und somit über S^p integrierbar.

In dieses Schema passen auch die Freiheitsgrade höherer Ordnung (5.8) für Ansatzformen, die im Kern der äußeren Ableitung liegen:

$$N_{\tilde{w}_i^p}^S(\tilde{*}\tilde{u}) = \int_S \tilde{w}_i^p \wedge \tilde{*}\tilde{u} = \int_S \tilde{u} \wedge \tilde{*}\tilde{w}_i^p.$$

Der Hodge-Operator $\tilde{*}$ macht aus dem Integranden eine gerade Differentialform. In der “klassischen” Betrachtungsweise ohne ungerade Differentialformen dient $*$, abgesehen von der Festlegung der Metrik, in erster Linie der Anpassung der Ordnung des Integranden. Für die Freiheitsgrade der Ansatzformen \tilde{w}_i^p , die nicht im Kern von d liegen, bedient man sich eines Tricks: man identifiziert sie mit den Freiheitsgraden ihrer Ableitungen $d\tilde{w}_i^p$ und gewinnt so eine besonders einfache Form für die diskrete äußere Ableitung. Die den Ansatzformen höherer Ordnung zugehörigen Blöcke haben die Gestalt einer Einheitsmatrix.

In [24] werden diskrete Hodge-Operatoren und Pairingmatrizen aus einer schwachen Formulierung abgeleitet. Daraus ergibt sich auch für Ansatzformen höheren polynomialen Grades, entsprechend als Testformen verwendet, die bekannte Gestalt (4.24), (4.25) der Einträge dieser Matrizen:

$$\begin{aligned} [M_\nu^p]_{ij} &= \int_{\tilde{C}} \tilde{w}_j^p \wedge \tilde{*}_\nu \tilde{w}_i^p = \int_{\tilde{C}} \tilde{w}_i^p \wedge \tilde{*}\tilde{w}_j^p, \\ [P^p]_{ij} &= \int_{\tilde{C}} \tilde{w}_j^p \wedge \tilde{w}_i^{n-p} = (-1)^{(n-p)p} \int_{\tilde{C}} \tilde{w}_i^{n-p} \wedge \tilde{w}_j^p. \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass der Integrand jeweils eine ungerade Differentialform ist, also über Mannigfaltigkeiten mit äußerer Orientierung (duales Gitter) zu integrieren ist. Die für die Einträge der Pairingmatrix verwendeten ungeraden Ansatzformen lassen sich durch äußere Multiplikation gerader Ansatzformen mit der konstanten ungeraden 0-Form $\tilde{1}$ erzeugen. Da beide Gitter das gleiche Integrationsgebiet beschreiben und Integrale ungerader Formen in Integrale gerader Formen übersetzt werden können, muss bei der Integration im Wesentlichen nur auf die Art der Orientierung geachtet werden. Wir erkennen wieder die gemeinsame Struktur, die sich durch das Funktional $\tilde{N}_{\tilde{w}_i^p}$ darstellen lässt:

$$\tilde{N}_{\tilde{w}_i^p}(\cdot) = \int_{\tilde{C}} \tilde{w}_i^p \wedge \cdot.$$

Diese Funktionale lassen sich nun wieder als duale Freiheitsgrade höherer Ordnung bzw. verallgemeinerte duale Gitterelemente höherer Ordnung auffassen. Die entsprechende Darstellung der Einträge des diskreten Hodge-Operators und der Pairingmatrix lautet:

$$\begin{aligned} [M_\nu^p]_{ij} &= \tilde{N}_{\tilde{w}_i^p}(\tilde{*}_\nu \tilde{w}_j^p), \\ [P^p]_{ij} &= (-1)^{(n-p)p} \tilde{N}_{\tilde{w}_i^{n-p}}(\tilde{w}_j^p). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.7. Wir wollen auf den primalen verallgemeinerten Simplices Daten aus dem Ampère-Maxwell-Komplex diskretisieren. Diese werden jedoch durch ungerade Differentialformen dargestellt, während die verallgemeinerten primalen Simplices zu geraden Differentialformen dual sind. Aus diesem Grund wandeln wir sie zuvor durch einen Hodge-Operator in primale Differentialformen um. Die Freiheitsgrade (5.8) lassen sich dann darstellen durch:

$$N_i^S(\bar{u}) = \begin{cases} (-1)^{p+1} b S_{\bar{v}_i}(\tilde{*}t\bar{u}), & \text{für } p\text{-Ansatzformen } \bar{v}_i \notin \ker(d), \quad m > p, \\ S_{\bar{v}_i}(\tilde{*}t\bar{u}), & \text{für } p\text{-Ansatzformen } \bar{v}_i \in \ker(d), \quad m \geq p. \end{cases}$$

Bemerkung 5.8. Die Daten aus dem Ampère-Maxwell-Komplex werden bei ihrer Diskretisierung mit einer Metrik versehen. Die Lösung erhält durch den diskreten Hodge-Operator des Gleichungssystems eine Metrik.

5.3.4 Diskrete Operatoren höheren polynomialen Grades

Fassen wir die Eigenschaften der diskreten Operatoren des DEM höheren polynomialen Grades noch einmal kurz zusammen. Wir nehmen eine Num-

merierung der Ansatzformen an, beginnend mit den Formen niedrigster Ordnung und danach gemäß der Lokalisierung der Freiheitsgrade auf Simplexes unterschiedlicher Dimension sortiert. Unter einer solchen Sortierung haben die diskreten Operatoren eine Blockstruktur, die am deutlichsten bei den metrikunabhängigen zum Vorschein kommt.

Äußere Ableitungen und Spurooperatoren

Eine Besonderheit der verwendeten Ansatzformen ist, dass es zu jeder p -Ansatzform höherer Ordnung $\bar{w}_i \notin \ker(d)$ eine $(p+1)$ -Ansatzform $d\bar{w}_i$ gibt. Weiterhin gilt für die durch sie bestimmten verallgemeinerten Simplexes, dass $S_{d\bar{w}_i}^m$ der Rand von $S_{\bar{w}_i}^m$ ist. Für eine $(m-p-1)$ -Form $\bar{\omega}$ gilt:

$$(-1)^{p+1} S_{\bar{w}_i}^m(d\bar{\omega}) = S_{d\bar{w}_i}^m(\bar{\omega}).$$

Dieser Zusammenhang der Freiheitsgrade von $d\bar{\omega}$ und $\bar{\omega}$ auf $S_{\bar{w}_i}^m$ und $S_{d\bar{w}_i}^m$ wird durch eine Inzidenzmatrix bezüglich der verallgemeinerten Simplexes wiedergegeben. Da jeder dieser verallgemeinerten Simplexes genau einen oder keinen Randsimplex besitzt, bestehen die Matrizen der diskreten äußeren Ableitungen, abgesehen von einem Block, der identisch mit der entsprechenden diskreten Ableitung niedrigsten Grades ist, nur aus Blöcken von Null- bzw. Einheitsmatrizen:

$$[D_{HO}^p] = \begin{pmatrix} D_{LO}^p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cI \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = (-1)^{p+1}$$

Dieser Blockstruktur liegt die Sortierung der Ansatzformen in der Reihenfolge {Formen niedrigsten polynomialen Grades, Formen in $\ker(d)$, restliche Formen} zu Grunde.

Mit Hinblick auf die Exakte-Sequenz-Eigenschaft der Ansatzräume ist die Wahl der Ansatzformen äußerst geschickt, da sich aus ihnen direkt Basen für die Unterräume der Zerlegung

$$\mathcal{W}_{\vartheta}^p(T) = (\mathcal{W}_{\vartheta}^p(T) \cap \ker(d^p)) \bigoplus (d^p)^{-1} (\ker(d^{p+1}) \cap \mathcal{W}_{\vartheta}^{p+1}(T))$$

auswählen lassen, wobei $(d^p)^{-1}$ als Urbild von d^p zu verstehen ist. Die Kenntnis einer Basis des Kerns von d^p , und damit nach Konstruktion auch von D^p , erleichtert uns, analog zum DEM niedrigsten polynomialen Grades, die Regularisierung nicht eindeutig lösbarer Gleichungen.

Die Einschränkung einer Ansatzform von einem Tetraeder auf ein Dreieck in dessen Rand ist nach Konstruktion wieder eine Ansatzform auf dem Dreieck. Die einzige Ausnahme bilden hierbei die zellenbasierten Ansatzformen,

da sie auf dem Rand des Tetraeders verschwinden. Dieser Umstand führt zu einer einfachen Gestalt des diskreten Spurooperators, ähnlich dem Fall niedrigsten polynomialen Grades, mit 0 und 1 als einzige Einträge und genau einer 1 pro Zeile. Aus dieser Eigenschaft der Ansatzformen lässt sich auch ablesen, dass die Voraussetzung (5.4) erfüllt ist.

Pairingmatrizen

Andererseits wird die Struktur der Pairingmatrizen für höhere polynomiale Grade deutlich komplizierter. Obwohl die Einträge weiterhin metrikunabhängig sind und somit im Voraus berechnet werden können, führt die vielfältige Gestalt der zusätzlichen Ansatzformen zu einer relativ großen Anzahl möglicher Einträge. Dies ist zum Einen in der Lokalisierung der Freiheitsgrade auf Simplices unterschiedlicher Dimension, zum Anderen aber auch in der für hierarchische Basen von Ansatzfunktionen/-formen typischerweise fehlenden Symmetrie begründet. So haben zum Beispiel dreiecksbasierte Ansatzformen einen ausgezeichneten Knoten und sind nicht notwendigerweise von der Sortierung der übrigen Knoten abhängig. Für Matrixeinträge bezüglich zweier Formen, die Simplices unterschiedlicher Dimension zugeordnet sind, muss neben der relativen Position dieser Simplices auch ihre relative Orientierung betrachtet werden, jeweils unter Berücksichtigung ausgezeichneter Knoten. Eine einfache Methode zur Berechnung der Einträge besteht in der Verwendung numerischer Integration.

Beispiel 5.4. Gegeben sei ein Tetraeder $T = [x_1, x_2, x_3, x_4]$ und einige seiner Untersimplices: $f = [x_1, x_2, x_3]$, $e_1 = [x_1, x_4]$ und $e_2 = [x_3, x_4]$. Auf f seien die klassische Whitneyform \bar{w}_f , sowie $\bar{\psi}_{(0,0)}^f$ gegeben, auf e_1 und e_2 die klassischen Whitneyformen \bar{w}_{e_1} und \bar{w}_{e_2} . Der gemeinsame Träger einer 1- und einer 2-Form ist hierbei jeweils T . Für die entsprechenden Einträge der Pairingmatrix P^1 gilt:

$$\begin{aligned} \int_T \bar{w}_{e_1} \wedge \bar{w}_f &= -\frac{1}{12} = \int_T \bar{w}_{e_2} \wedge \bar{w}_f, \\ \int_T \bar{w}_{e_1} \wedge \bar{\psi}_{(0,0)}^f &= \frac{1}{6} \neq 0 = \int_T \bar{w}_{e_2} \wedge \bar{\psi}_{(0,0)}^f. \end{aligned}$$

Der Unterschied liegt darin begründet, dass e_2 am ausgezeichneten Knoten von $\bar{\psi}_{(0,0)}^f$ anliegt.

Der diskrete Hodge-Operator entspricht, wie auch im Fall niedrigsten Grades, einer Massenmatrix.

Kapitel 6

Numerische Implementierung

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der numerischen Implementierung des Diskreten Elektromagnetismus mit den Ansatzformen aus [39, 44] befassen. Neben der Assemblierung der Matrizen und der Lösung eines linearen Gleichungssystems in jedem Zeitschritt ist dabei auch die Approximation veränderlicher Materialparameter ein wichtiger Aspekt. Anschließend untersuchen wir anhand eines numerischen magnetostatischen Beispiels die Konvergenzeigenschaften der Methode. Des Weiteren präsentieren wir ein magnetoquasistationäres Beispiel zur zeitlichen Entwicklung eines Feldes magnetischer Induktion.

6.1 Approximation nichtlinearer Materialien

Magnetostatische bzw. -quasistationäre Probleme beinhalten oft ferromagnetische Materialien, d.h. Materialien, deren magnetische Eigenschaften, genauer gesagt die magnetische Permeabilität μ , sich unter Einwirkung äußerer Magnetfelder verändern. Dadurch erhalten wir ein nichtlineares Problem, das wir mittels einer zusätzlichen Newtoniteration in jedem Zeitschritt lösen.

Die magnetische Permeabilität eines ferromagnetischen Materials lässt sich durch die sogenannte B - H -Kurve, die den Zusammenhang dieser beiden magnetischen Felder in diesem Material beschreibt, darstellen. Diese Darstellungsweise ist im Grunde genommen schon eine Vereinfachung, da die magnetische Permeabilität in verallgemeinerter Form ein dreidimensionaler Tensor zweiter Stufe ist. In den meisten Fällen ist die Anisotropie jedoch vernachlässigbar.

Setzt man ein ferromagnetisches Material einem Magnetfeld aus, treten auch Hystereseeffekte auf, d.h. die magnetischen Eigenschaften des Materials hängen nicht nur vom aktuell angelegten äußeren Magnetfeld ab, sondern

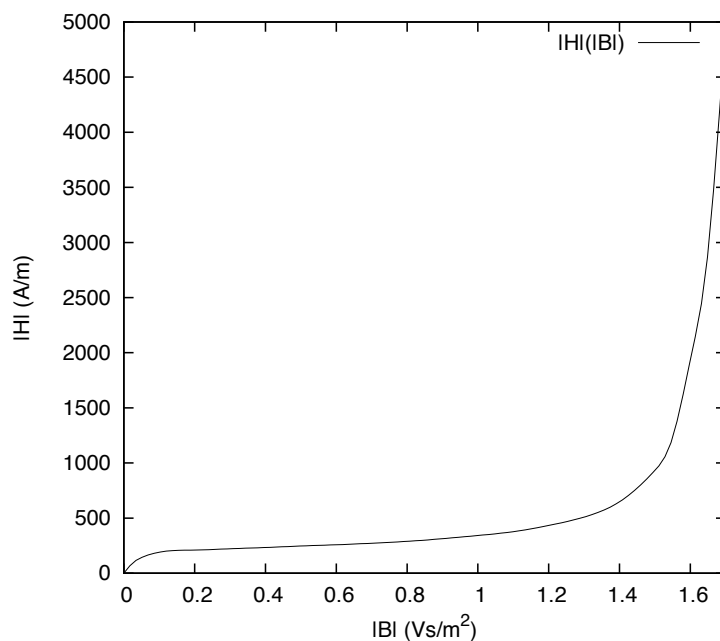


Abbildung 6.1: B - H -Kurve für Stahl interpoliert mit kubischen Splines.

auch von seiner “Magnetisierungsgeschichte”. So steigt die magnetische Flussdichte \vec{B} unter Erhöhung der Feldstärke \vec{H} an, verschwindet jedoch nicht wieder vollständig, wenn man \vec{H} auf Null absenkt. Wir betrachten in dieser Arbeit ein vereinfachtes Modell, das von einem isotropen und hysteresefreien Material ausgeht.

B - H -Kurven sind üblicherweise nur in Gestalt einer recht geringen Anzahl von Messwertepaaren verfügbar, die zudem im Allgemeinen mit Messfehlern behaftet sind. Aus diesem Grund werden die Daten häufig vor ihrer Verwendung geglättet oder es werden Approximationsverfahren verwendet, die bestimmte physikalische Eigenschaften der Kurven erzwingen. Da die magnetische Permeabilität in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden muss, sind effiziente Approximationsmethoden erforderlich.

Die gemessenen Daten geben den Zusammenhang zwischen $|\vec{H}|$ und $|\vec{B}|$ wieder. Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir im weiteren Verlauf dieses Abschnittes auf die Betragsstriche und Vektorpfeile. Für die Berechnung eines neuen Zeitschrittes benötigen wir den Parameter

$$\nu(B) = \frac{1}{\mu(B)} = \frac{H(B)}{B}.$$

Zudem benötigen wir, um bei der Newtoniteration die Jakobimatrix der Systemmatrix zu berechnen, den Parameter $H'(B)$.

Die einfachste Methode zur Approximation von B - H -Kurven ist die lineare Interpolation. Sie wird häufig benutzt, da sie sehr effizient ist und zudem in den unkritischen, näherungsweise linearen Abschnitten der Kurve gute Ergebnisse liefert. Des Weiteren bleibt die Monotonie der Messdaten erhalten. Im mittleren Teil der Kurve ist eine dichtere Verteilung der Messpunkte zu empfehlen. Wir verwenden keine lineare Interpolation, da die interpolierte Kurve nur stückweise differenzierbar und der für die Newtoniteration benötigte Parameter $H'(B)$ somit unstetig ist.

Weiterentwickelte Approximationsmethoden basieren meist auf Splines höheren Grades. Ein hoher polynomialer Grad bringt allerdings auch die Gefahr von Oszillationen und damit einer Verfälschung der eigentlichen Gestalt der Kurve mit sich. Ein allgemeines Rahmenwerk für Interpolations- und Approximationsmethoden, die die Gestalt der anzunähernden Kurven erhalten, wird in [19] vorgestellt. Methoden, die auf die Interpolation [23] bzw. Approximation [38] von B - H -Kurven spezialisiert sind, sind im Allgemeinen monotonieerhaltend. Ein Ansatz, der auf die Erhaltung weiterer physikalischer Eigenschaften abzielt, wurde in [33] vorgestellt.

Wir werden die B - H -Kurve mit kubischen Splines interpolieren (siehe Abbildung 6.1).

6.2 Aspekte der Implementierung

Bei der Implementierung einer DEM-Methode zur Lösung magnetostatischer und -quasistationärer Probleme bieten sich einige Möglichkeiten, um die Ausführungsgeschwindigkeit zu erhöhen oder den Speicherbedarf zu senken. Wir beschreiben mit der komprimierten Speicherung von Matrizen und der Parallelisierung auf shared-memory Systemen zwei einfach zu realisierende Strategien. Des Weiteren gehen wir kurz auf die zeitliche Diskretisierung und Lösungsmethoden für auftretende lineare und nichtlineare Gleichungen ein.

Da die im Diskreten Elektromagnetismus auftretenden diskreten Operatoren dünnbesetzte Matrizen sind, ist es naheliegend, sie in einem entsprechenden Format abzuspeichern. Erwähnenswert sind hierbei besonders das “compressed sparse row format” (CSR) und das mit diesem eng verwandte “compressed sparse column format” (CSC) [20], die in Bibliotheken wie der “Intel Math Kernel Library” (MKL) bereits implementiert sind. Zur effizienten Nutzung dieser Formate ist es notwendig, im Voraus die Anzahl der Matrixeinträge pro Zeile bzw. Spalte zu kennen. Dies erfordert eine Analyse der Gittertopologie, insbesondere der Anzahl der Nachbarsimplices. So ist zum Beispiel für eine Kante die Anzahl der benachbarten Dreiecke nicht eindeutig bestimmt, während ein Dreieck immer von drei Kanten begrenzt

wird.

Die Operatoren mit der rechenintensivsten Assemblierung sind die Hodge- und Pairingmatrizen. Zudem müssen im Fall nicht konstanter Materialparameter für jeden Iterationsschritt neue diskrete Hodgeoperatoren berechnet werden. Ist die Position der Matrixeinträge innerhalb der komprimierten Matrizen bekannt, so lässt sich ihre Berechnung stückweise durch unabhängiges Auswerten der jeweiligen Integrale auf einzelnen Tetraedern durchführen. Diese Auswertungen lassen sich auf verschiedene Prozessoren verteilen. Die Einträge der Pairingmatrizen lassen sich entweder einzeln durch numerische Integration auf einem Referenztetraeder berechnen, oder durch Zuordnen im Voraus berechneter Werte (Metrikunabhängigkeit). Letzteres erfordert jedoch eine Analyse der lokalen Topologie. In beiden Fällen ist eine Parallelisierung möglich.

Die magnetoquasistationäre Gleichung beschreibt die zeitliche Entwicklung einer magnetischen Flussdichte \vec{B} unter dem Einfluss einer Stromdichte \vec{j}_S und stellt bezüglich des Zeitparameters τ ein Anfangswertproblem dar. Wir behandeln dieses Problem mit einem impliziten Eulerverfahren. Diese Vorgehensweise führt auf ein räumliches Randwertproblem zur Berechnung des Vektorpotentials \vec{A} in einem neuen Zeitschritt. Ein ähnliches räumliches Problem tritt im Fall der zeitunabhängigen Magnetostatik auf.

Für beide Arten von Problemen ist im Fall nicht konstanter Materialparameter die zu lösende Gleichung nicht linear. Wir behandeln diese Nichtlinearität mit einem Newtonverfahren. Dabei ist in jedem Iterationsschritt das lineare Problem

$$\left([D^p]^\top [M_{\hat{\nu}}^{p+1}] [D^p] + [M_{\beta}^p] \right) \{ \Delta A \} = \{ r \} - \left([D^p]^\top [M_{\frac{1}{\mu}}^{p+1}] [D^p] + [M_{\beta}^p] \right) \{ A \}, \quad (6.1)$$

$$\hat{\nu} = \frac{1}{\mu} I_3 + \left(H' - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\vec{B} \vec{B}^\top}{|\vec{B}|^2}$$

mit den jeweils aktuellen Werten der magnetischen Flussdichte \vec{B} , sowie von H' und μ , die durch die Approximation der B - H -Kurve gewonnen werden, zu lösen. Hierbei bezeichnet $\{ r \}$ die rechte Seite des ursprünglichen nichtlinearen Problems. Wir beenden die Iteration, wenn das Residuum, d.h. die rechte Seite von (6.1), eine vorgegebene Schranke unterschreitet. Eine ausführliche Herleitung der benötigten Jacobimatrix findet sich in [27].

Zur Lösung der linearen Gleichungssysteme verwenden wir das Konjugierte Gradienten Verfahren (CG-Verfahren). Die zentrale Operation dieses Verfahrens ist eine Matrix-Vektor-Multiplikation, die für komprimierte Matrizen effizient durchführbar ist. Da unsere Systemmatrix nicht explizit

vorliegt, sondern als Produkt dreier Matrizen, ist es effizienter, drei Matrix-Vektor-Multiplikationen durchzuführen, als zunächst die Systemmatrix zu berechnen. Durch das Verwenden einer reduzierten Basis, d.h. durch Weglassen von Ansatzformen aus dem Kern von d , lässt sich nicht nur das zu lösende Gleichungssystem verkleinern, sondern auch die Konditionszahl der Systemmatrix verbessern [44].

6.3 Numerische Ergebnisse

Wir wollen nun das Konvergenzverhalten des Diskreten Elektromagnetismus anhand numerischer Beispiele illustrieren.

Wir beginnen mit einem magnetostatischen Beispiel, wobei die Verwendung von \mathcal{W}_0^p - und \mathcal{W}_1^p -Basen verglichen wird. Betrachtet wird ein Würfel $[-0.5, 0.5]^3$ bestehend aus einem linearen Material, d.h. aus einem Material mit konstanten Parametern. Ist die analytische Lösung des Problems bekannt, so können wir die experimentelle Konvergenzrate [40] durch

$$\text{eoc} = \frac{\log \|\bar{B} - \bar{B}_{h_l}\| - \log \|\bar{B} - \bar{B}_{h_{l+1}}\|}{\log h_l - \log h_{l+1}}$$

definieren, wobei h_l für die Maschenweite des Gitters auf der l -ten Verfeinerungsstufe steht und \bar{B}_{h_l} die auf diesem Gitter errechnete numerische Lösung beschreibt. Wir verfeinern das Gitter uniform gemäß der Relation $h_{l+1} = h_l/2$. Da das Vektorpotential \bar{A} im Fall des magnetostatischen Problems nicht eindeutig bestimmt ist, benötigen wir die in Abschnitt 4.2.3 vorgestellte Regularisierung.

Tabelle 6.1 beinhaltet die absoluten Fehler der angenäherten magnetischen Flussdichte \bar{B}_h in der L^2 -Norm sowie die experimentellen Konvergenzraten. Diese Raten entsprechen näherungsweise den theoretischen Werten für eine Finite Elemente Methode, die den hier verwendeten Formen entsprechende Ansatzfunktionen benutzt. Der scheinbare Konvergenzverlust in Höhe einer Ordnung rührt daher, dass wir $d\bar{A}$ ($\text{curl } \bar{A}$) an Stelle von \bar{A} betrachten.

Ein weiteres Experiment befasst sich mit dem magnetoquasistationären Problem. Zur Zeitdiskretisierung wurde das implizite Eulerverfahren mit einer festen Schrittweite $\tau = 0.2$ verwendet und das Problem auf dem Intervall $[0, 35]$ behandelt. Zum Zeitpunkt $\tau = 0$ soll noch kein Feld existieren ($\bar{A}_0 = 0$). Abbildung 6.2 zeigt die zeitliche Entwicklung eines mittels \mathcal{W}_1^p -Formen angenäherten magnetischen Induktionsfeldes in einem hohlen Stahlzylinder ($D^2(\vec{0}, 1) \times [-5, 5]$ mit Hohlraum $D^2(\vec{0}, 0.5) \times [-5, 5]$) unter Einfluss eines im Zentrum angelegten Gleichstroms, ohne eingeprägte Randströme ($\gamma_N \bar{A} = 0$). Hierbei bezeichnet $D^2(\vec{x}, r)$ die zweidimensionale Kreisscheibe

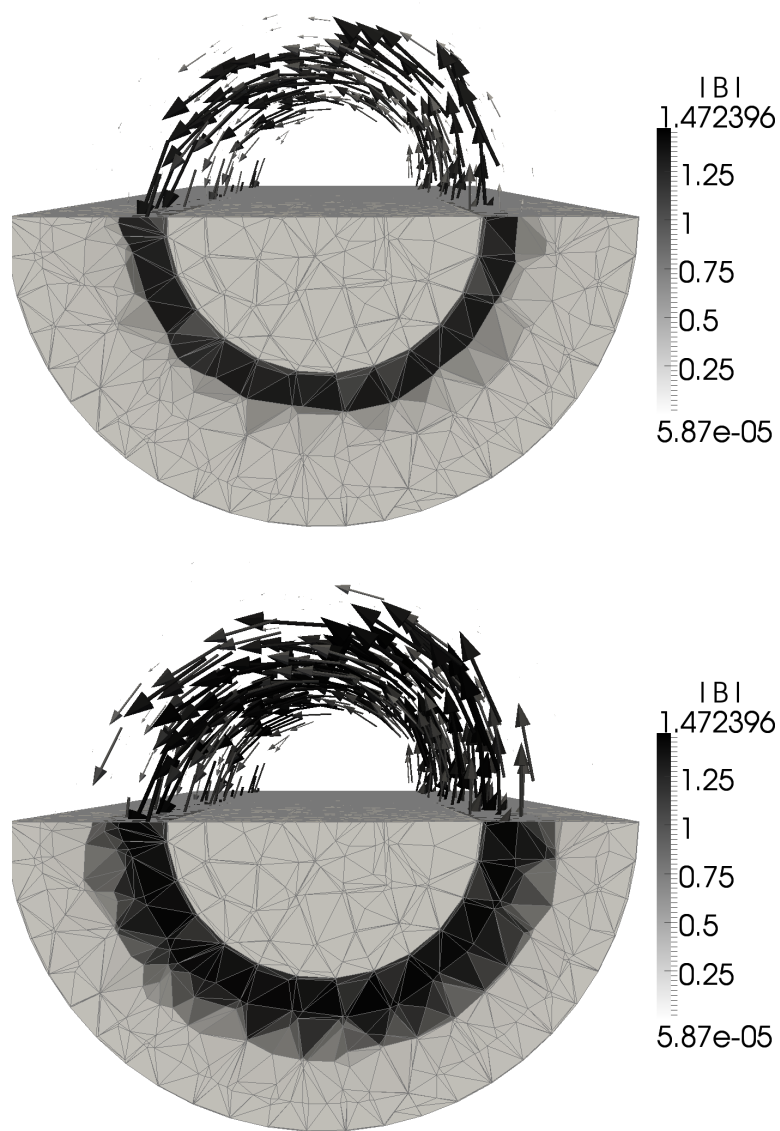


Abbildung 6.2: Magnetoquasistationäres Beispiel auf einem hohlen Zylinder aus ferromagnetischem Material. Der obere Teil der Bilder zeigt jeweils das Feld der magnetischen Induktion \vec{B} , der untere Teil seine Norm. Oben: nach 50 Zeitschritten (10s); Unten: nach 150 Zeitschritten (30s).

# Tetraeder	\mathcal{W}_0^p -Ansatzformen		\mathcal{W}_1^p -Ansatzformen	
	abs. L_2 -Fehler	eoc	abs. L_2 -Fehler	eoc
12	0.059508	-	0.046127	-
96	0.026550	1.16	0.012083	1.93
768	0.011509	1.21	0.002815	2.10
6144	0.005558	1.05	0.000665	2.08
49152	0.002779	1.00	0.000160	2.06
393216	0.001397	0.99	0.000039	2.04

Tabelle 6.1: Absolute L_2 -Fehler und experimentelle Konvergenzordnungen für das \vec{B} -Feld (magnetostatisches Beispiel).

mit Radius r um den Punkt \vec{x} . Da wir eine triviale Topologie voraussetzen, wird der Hohlraum in das Gebiet der Berechnungen Ω mit einbezogen. Die Verwendung einer nichttrivialen Topologie würde eine zusätzliche Untersuchung der sogenannten Kohomologiegruppen erfordern [6], die geschlossene, aber nicht exakte Formen enthalten. Das Gitter, mit dem der Zylinder angenähert wird, besteht aus 126123 Tetraedern. Für den nichtleitenden Hohlraum müssen wir eine lokalisierte Version der zuvor benutzten Regularisierung implementieren.

Die Leitfähigkeit des Materials beträgt $1.4 \cdot 10^6 A/Vm$. Die Messwerte der magnetischen Permeabilität von Stahl wurden dem T.E.A.M.-Problem Nummer 13 [41] entnommen und mit kubischen Splines interpoliert. Innerhalb des Hohlraums entspricht die Permeabilität der von Luft: $1.2566376 \cdot 10^{-6} Vs/Am$. Um das Problem zu skalieren, verwenden wir die folgenden charakteristischen Werte:

$$B_0 = 1 \frac{Vs}{m^2}, \quad L = 10^{-1}m, \quad \mu_c = 10^{-5} \frac{Vs}{Am}.$$

Wir führen die Newton-Iteration durch bis eine Genauigkeit von 10^{-3} bezüglich der Norm des Residuums erreicht ist. Die Anzahl der benötigten Newton-Schritte variiert während der Berechnungen.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, den Diskreten Elektromagnetismus (DEM) unter Verwendung von Ansatzformen höheren polynomialen Grades anhand des Beispiels magnetostatischer und magnetoquasistationärer Probleme zu untersuchen. Dazu wurden zunächst aus den vollständigen Maxwellgleichungen die entsprechenden Approximationen hergeleitet, sowie passende Funktionenräume und Spuren formuliert. Weiterhin wurden wichtige Konvergenzsätze für Variationsprobleme hervorgehoben.

Danach erfolgte eine Beschreibung von Differentialformen und des mit ihnen verbundenen Formalismus. Wie wir gesehen haben, bieten Differentialformen einen anderen Blickwinkel auf bekannte Probleme. Wegen ihrer besonderen Struktur sind sie eine natürliche Wahl zur Darstellung elektromagnetischer Probleme. So lassen sich beispielsweise die in den Maxwellgleichungen auftretenden physikalischen Größen gemäß des Diagramms von Tonti in zwei Komplexe aufteilen, die sich für sich genommen metrikfrei beschreiben lassen. Die Materialbeziehungen, durch die die beiden Komplexe miteinander verknüpft werden, lassen sich in natürlicher Weise durch den Hodge-Operator beschreiben. Auch die Konzepte gerader und ungerader Differentialformen harmonisieren mit dieser Aufteilung.

Der klassische Diskrete Elektromagnetismus führt zu einer Variationsformulierung, die äquivalent zu der einer Finite Elemente Methode ist, die Whitneyelemente als Ansatz- und Testfunktionen verwendet. Da ein grundsätzlich anderer Ansatz zu einer äquivalenten Formulierung führt, werden verborgene Strukturen der Finite Elemente Methode offenbart. So lässt sich zum Beispiel die Steifigkeitsmatrix in diskrete Ableitungs- und Hodge-Operatoren zerlegen. Eine Regularisierung nicht eindeutig lösbarer Probleme lässt sich effizient aus diskreten Ableitungsoperatoren gewinnen. Weiterhin wird offenbart, dass Finite Elemente Methoden implizit ein duales Gitter enthalten, auf dem für magnetostatische bzw. -quasistationäre Probleme die Größen des

Ampère-Maxwell-Komplexes diskretisiert werden. Im Diskreten Elektromagnetismus wird dieses Gitter beschrieben, seine geometrische Konstruktion lässt sich jedoch mit Hilfe von Pairingmatrizen umgehen.

Im Anschluss untersuchten wir zwei unterschiedliche Konzepte zur Konstruktion von Whitneyformen höherer Ordnung und die mit ihnen verbundenen Freiheitsgrade.

Im Ansatz von Bossavit wurde der polynomiale Grad klassischer Whitneyformen durch Multiplikation mit baryzentrischen Koordinatenfunktionen erhöht. Es wurden zudem geometrische Hilfsgrößen konstruiert, um p -Formen auf p -dimensionalen Simplexes lokalisieren zu können. Wir konnten zeigen, dass die auf diese Weise gewonnenen Räume wesentliche Eigenschaften wie die Exakte-Sequenz-Eigenschaft erfüllen. Allerdings ist die Menge der Ansatzformen linear abhängig, so dass unter Verlust der Symmetrie einige Formen und die zugehörigen kleinen Simplexes gestrichen werden müssen, um eine Basis des Ansatzraumes zu erhalten. Zudem sind die Freiheitsgrade auf nichttrivialen Ketten kleiner Simplexes lokalisiert, was sich in zusätzlichen Transformationsmatrizen ausdrückt.

Im zweiten Ansatz haben wir hierarchische Basen von FEM-Ansatzfunktionen höherer Ordnung in den Kontext der Differentialformen eingebettet. Wir konnten die zugehörigen Freiheitsgrade vereinheitlicht formulieren und mit Hilfe von De Rham Strömen auf verallgemeinerten Simplexes lokalisieren. Es treten zwei Arten von Freiheitsgraden auf, wobei wir die zweite auf den Rändern der zur ersten Art gehörenden verallgemeinerten Simplexes lokalisieren konnten. Aus dieser Beziehung ergab sich eine einfache Gestalt der diskreten äußeren Ableitung. Ebenfalls mit De Rham Strömen gelang eine nichtgeometrische Darstellung des dualen Gitters höherer Ordnung. Auf Grund reduzierter Symmetrie der Ansatzformen im Vergleich zu klassischen Whitneyformen erhöht sich die Komplexität der Pairingmatrizen. Im Gegensatz zum Ansatz mit kleinen Simplexes sind jedoch keine zusätzlichen Anpassungen der resultierenden diskreten Gleichung notwendig.

Im Zusammenhang mit der Implementierung eines DEM höherer Ordnung, der die zuvor untersuchten hierarchischen Ansatzformen verwendet, wurde die Approximation nichtkonstanter Materialparameter erörtert. Zudem wurden weitere Aspekte der Implementierung betrachtet. Anhand numerischer Beispiele konnte gezeigt werden, dass die Konvergenzgeschwindigkeit der Methode mit der der entsprechenden Finite Elemente Methode übereinstimmt. Zudem wurde in einem nichtlinearen magnetoquasistationären Beispiel die zeitliche Entwicklung eines Feldes magnetischer Induktion betrachtet.

Die in dieser Arbeit verwendeten Freiheitsgrade höherer Ordnung, die sich von den häufig [1, 25, 30] postulierten unterscheiden, eignen sich für

den Diskreten Elektromagnetismus und können in allgemeinerer Weise als in FEM formuliert werden. Durch verallgemeinerte Gitterelemente ergibt sich zudem eine abstrakte Beschreibung des dualen Gitters höherer Ordnung. Freiheitsgrade auf kleinen Simplices können prinzipiell verwendet werden, führen aber zu einer umständlichen Formulierung.

Vom Standpunkt der Anwendung sieht man, dass der DEM für magnetoquasistationäre Probleme äußere Ableitungen und Hodge-Operatoren verschiedenen Grades verwendet. Eine entsprechende Implementierung lässt sich durch Ergänzen der übrigen Grade zu einem Paket erweitern, mit dem sich allgemeinere Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wie z.B. elektrostatische Probleme, behandeln lassen.

Literaturverzeichnis

- [1] D. N. Arnold, R. S. Falk, and R. Winther. Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta Numer.*, 15:1–155, 2006.
- [2] B. Auchmann. Private Kommunikation, 2008.
- [3] B. Auchmann and S. Kurz. The Pairing Matrix in Discrete Electromagnetism - On the Geometry of Discrete de Rham Currents. Technical Report CERN-AT-2007-017, CERN, Geneva, May 2007.
- [4] A. Bossavit. Mixed finite elements and the complex of Whitney forms. In *The mathematics of finite elements and applications, VI (Uxbridge, 1987)*, pages 137–144. Academic Press, London, 1988.
- [5] A. Bossavit. Whitney forms: a class of finite elements for three-dimensional computations in electromagnetism. *IEE Proceedings*, 135:493–500, 1988.
- [6] A. Bossavit. *Computational electromagnetism*. Electromagnetism. Academic Press Inc., San Diego, CA, 1998. Variational formulations, complementarity, edge elements.
- [7] A. Bossavit. How weak is the “weak solution“ in finite element methods? *IEEE Transactions on Magnetics*, 34:2429–2432, 1998.
- [8] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry (1): Network equations. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.*, 7:150–159, 1999.
- [9] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry (2): Network constitutive laws. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.*, 7:294–301, 1999.

- [10] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry (4): From degrees of freedom to fields. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.*, 8:102–109, 2000.
- [11] A. Bossavit. Computational electromagnetism and geometry (5): The Galerkin hodge. *J. Japan Soc. Appl. Electromagn. & Mech.*, 8:203–209, 2000.
- [12] A. Bossavit. Generating Whitney Forms of Polynomial Degree One and Higher. *IEEE Transactions on Magnetics*, 38(2):341–344, 2002.
- [13] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. I. An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1):9–30, 2001.
- [14] A. Buffa and P. Ciarlet, Jr. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. II. Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1):31–48, 2001.
- [15] W. L. Burke. *Applied differential geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1986.
- [16] G. de Rham. *Differentiable manifolds*, volume 266 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Forms, currents, harmonic forms, Translated from the French by F. R. Smith, With an introduction by S. S. Chern.
- [17] L. Demkowicz, P. Monk, L. Vardapetyan, and W. Rachowicz. De Rham diagram for *hp* finite element spaces. *Computers & Mathematics with Applications*, 39(7-8):29 – 38, 2000.
- [18] M. Desbrun, E. Kanso, and Y. Tong. Discrete differential forms for computational modeling. In *SIGGRAPH ’05: ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, page 7, New York, NY, USA, 2005. ACM.
- [19] P. Dierckx. *Curve and surface fitting with splines*. Monographs on Numerical Analysis. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.
- [20] I. S. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid. *Direct methods for sparse matrices*. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1986.

- [21] H. Flanders. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*. Dover Publications, INC., 1989. corrected republication.
- [22] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [23] B. Heise. Analysis of a fully discrete finite element method for a non-linear magnetic field problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 31(3):745–759, 1994.
- [24] R. Hiptmair. Discrete Hodge operators. *Numer. Math.*, 90(2):265–289, 2001.
- [25] R. Hiptmair. Higher Order Whitney Forms. *Progress in Electromagnetics Research*, 32:271–291, 2001.
- [26] L. Knabner, P. und Angermann. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer, 2000.
- [27] S. Koch. *Quasistatische Feldsimulationen auf der Basis von Finiten Elementen und Spektralmethoden in der Anwendung auf supraleitende Magnete*. PhD thesis, Technische Universität Darmstadt, 2009.
- [28] S. Kurz. Kontinuierliche und diskrete Darstellung der Elektrodynamik mit Differentialformen und ihre Anwendung zur numerischen Lösung elektromagnetischer Feldprobleme. Entwurf Teil I: Kontinuierliche Differentialformen, 2002.
- [29] William McLean. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [30] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35(3):315–341, 1980.
- [31] J.-C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 50(1):57–81, 1986.
- [32] J.-C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*, volume 144 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2001. Integral representations for harmonic problems.
- [33] C. Pechstein and B. Jüttler. Monotonicity-preserving interproximation of B - H -curves. *J. Comput. Appl. Math.*, 196(1):45–57, 2006.

- [34] A. Prechtl. *Vorlesung über die Grundlagen der Elektrotechnik, Band 2*. Springer Verlag Wien, 1995.
- [35] F. Rapetti and A. Bossavit. Geometrical localisation of the degrees of freedom for Whitney elements of higher order. *Science, Measurement & Technology, IET*, 1(1):63–66, January 2007.
- [36] F. Rapetti and A. Bossavit. Whitney Forms of Higher Degree. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47:2369–2386, 2009.
- [37] P.-A. Raviart and J. M. Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. In *Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975)*, pages 292–315. Lecture Notes in Math., Vol. 606. Springer, Berlin, 1977.
- [38] S. Reitzinger, B. Kaltenbacher, and M. Kaltenbacher. A Note on the Approximation of B - H Curves for Nonlinear Computations. Technical Report 02-30, SFB013, Johannes Kepler University Linz, December 2002.
- [39] J. Schöberl and S. Zaglmayr. High order Nédélec elements with local complete sequence properties. *COMPEL*, 24(2):374–384, 2005.
- [40] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme*. Teubner, 2003.
- [41] T.E.A.M. Testing electromagnetic analysis methods. <http://www.compumag.org/jsite/team.html>.
- [42] T. Weiland et al. Status and future of the 3D MAFIA group of codes. *IEEE Transactions on Magnetics*, 26:751–754, 1990.
- [43] H. Whitney. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [44] S. Zaglmayr. *High Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, Johannes Kepler Universität Linz, 2006.