Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint

Mathematikunterricht und Neue Medien — oder: Bildung ist das Paradies!

Horst Hischer

Preprint No. 67

Saarbrücken 2002

Universität des Saarlandes

Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Mathematikunterricht und Neue Medien — oder: Bildung ist das Paradies!

Horst Hischer

Saarland University
Department of Mathematics
Postfach 15 11 50
D–66041 Saarbrücken
Germany
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

submitted: October 10, 2002

Preprint No. 67

Saarbrücken 2002

Edited by
FR 6.1 — Mathematik
Im Stadtwald
D–66041 Saarbrücken
Germany

Fax:	+ 49 (0) 681 302 4443
E-Mail:	preprint@math.uni-sb.de
WWW :	http://www.math.uni-sb.de/

Mathematikunterricht und Neue Medien — oder: Bildung ist das Paradies! [1]

Horst Hischer, Saarbrücken

Zusammenfassung

Technik*einsatz* im Unterricht ist kein didaktischer Selbstzweck, der bereits allein durch die Technik*verfügbarkeit* legitimiert ist, sondern vielmehr gilt mit Walther Ch. Zimmerli: *„Bildung ist das Paradies!“* So kann und darf es nicht allein darum gehen, leistungsfähige neue Geräte und Software als methodischen Kristallisationskeim für neuartige Aufgaben zu entwickeln, sondern die Neuen Medien sind auch *inhaltlich* unter dem Aspekt der *Allgemeinbildung* zu sehen: Zwar werden die Neuen Medien sicherlich im künftigen Mathematikunterricht unter dem *Werkzeugaspekt* eine wichtige (und wohl auch selbstverständliche!) Rolle spielen (insbesondere Computeralgebrasysteme und Dynamische Geometriesysteme), ferner werden sie sich zu einem selbstverständlichen Werkzeug bei der Informationsbeschaffung und -darstellung mittels Internet entwickeln — und die künftige Bedeutung „intelligenter Lernprogramme“ bleibt abzuwarten. Allerdings wäre eine ausschließlich bezüglich solcher *Einsatzmöglichkeiten* der Neuen Medien geführte didaktische Diskussion einseitig, weil diese nur die Medien*didaktik* beträfe und zugleich andere wichtige medien*pädagogische* Aspekte unberücksichtigt blieben!

Stattdessen ist in einem umfassenderen Ansatz eine *Integrative Medienpädagogik* angebracht: Bei diesem normativen Begriff hat das Attribut „integrativ“ eine zweifache Qualität: Zum einen sind alle drei Aspekte der Medienpädagogik — nämlich Medien*didaktik*, Medien*erziehung* und Medien*kunde* – bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht nicht losgelöst voneinander zu berücksichtigen. Und zum anderen kann eine so verstandene Medienpädagogik (bei Bezug auf die Neuen Medien) wegen der Komplexität des Gegenstandes nicht von einem Unterrichtsfach allein übernommen werden, auch nicht vom Fach Informatik – vielmehr sind im Prinzip alle Unterrichtsfächer mit je spezifischen Ansätzen gefordert. Und in einem so verstandenen Konzept integrativer Medienpädagogik kann und muss *auch* der Mathematikunterricht Bildungsaufgaben zu jedem dieser drei Teilbereiche der Medienpädagogik wahrnehmen. Dieses soll am Beispiel des Funktionsbegriffs demonstriert werden.

1 Vorbemerkung

„Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht“ ist das Tagungsthema. Doch was ist damit gemeint? Zwar ist dies bisher kein wissenschaftlich verbindlicher Terminus, jedoch gibt der Tagungsaufruf eine Interpretationshilfe, denn dort finden wir, dass es um das *„Lernen mit den neuen, computerbasierten Medien“* geht.

So verbindet sich mit der Bezeichnung „Lehr- und Lernprogramme“ *ein weiter und offener Begriff* – keinesfalls sind darunter also nur „Programme“ im Sinne der Kybernetischen Pädagogik der 1960er Jahre zu verstehen, wie sie uns nunmehr über die *Intelligenten Tutoriellen Systeme* wieder begegnen, die sich ja u. a. dadurch auszeichnen, dass *sie* die Kontrolle über den Lernprozess ihrer Benutzer übernehmen (sollen!).

Vielmehr zählt im vorliegenden Kontext zu den „Lehr- und Lernprogrammen“ jegliche Software, die bei den Prozessen des Lehrens und Lernens verwendet wird bzw. prinzipiell verwendet werden könnte – also auch fachübergreifende Anwendersoftware wie z. B. Tabellenkalkulation oder fachspezifische Anwendersoftware wie z. B. Computeralgebrasysteme, bei denen die Kontrolle über den Lernprozess (noch?) bei den Benutzern selber liegt!

[1] Hauptvortrag am 27.09.2002 in Soest auf der Herbsttagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V., erscheint 2003 im Tagungsband.

Fachdidaktische Beiträge, Vorschläge und Untersuchungen bezüglich derartiger Lehr- und Lernprogramme betreffen nun in aller Regel *methodische* Fragen des computergestützten oder computerbegleiteten Lehrens und Lernens – sie beziehen sich also auf die „Neuen Medien" als Unterrichts*mittel*. Demgegenüber bzw. weiterführend vertrete ich nun die These, dass dies eine zu enge Sichtweise ist und dass Neue Medien auch zum Unterrichts*inhalt* werden müssen. Dies ist dann eine fächerübergreifende Aufgabe, und es entstehen spezifische Aufgaben für den Mathematikunterricht.

2 Mathematikunterricht und Medienpädagogik

2.1 Zur Situation

Blicken wir in die mathematikdidaktische Literatur, so können wir feststellen, dass es bei dem Thema „Computer" bzw. „Neue Medien" im wesentlichen um die Möglichkeiten des *Einsatzes* von Computern und Taschenrechnern im Mathematikunterricht geht, in letzter Zeit auch unter Hinzunahme des Internets zur Informationsbeschaffung. Taschenrechner, Computer und Internet werden also bezüglich ihrer Möglichkeiten als *neuartige Werkzeuge oder Hilfsmittel zur methodisch besseren Gestaltung von Unterricht* gesehen. Es gibt aber in letzter Zeit *erneut* Stimmen, die eindringlich fordern, dass die Begegnung von Schule mit den Neuen Medien sich nicht in deren Einsatz erschöpfen darf – „erneut" deshalb, weil dieses bereits im Herbst 1983 auf einer Expertentagung in Loccum gefordert wurde [2] – zum Thema „Neue Technologien und Schule" –, die Zeit damals aber wohl noch nicht reif war für eine nachhaltige Umsetzung im Unterricht.

Besondere Bekanntheit erreichte in diesem Zusammenhang im Jahre 2001 der Amerikaner Clifford Stoll mit seinem Buch *„LogOut — Warum Computer nichts im Klassenzimmer zu suchen haben und andere High-Tech-Ketzereien"*. [3] Dieses auf den ersten Blick unterhaltsam und amüsant geschriebene Buch verfolgt (leider?) – wie sich schon im Untertitel *„... Ketzereien ..."* andeutet – nicht das Ziel objektiver (Auf-)Klärung, sondern es bezieht einseitig und ablehnend Stellungnahme. Bill Gates bezeichnete Clifford Stoll auch bereits als den *„Advocatus Diaboli des Internet"*. [4] Beachtenswert ist auch das kürzlich erschienene Buch von Hartmut von Hentig: *„Der technischen Zivilisation gewachsen bleiben — Nachdenken über die Neuen Medien und das gar nicht mehr allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit"*. [5] Mit diesem neuen Werk, das abwägend und vor allem mahnend geschrieben ist, greift von Hentig sein bekanntes Buch ähnlichen Titels von 1984 vertiefend auf: *„Das allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit — Ein Pädagoge ermutigt zum Nachdenken über die Neuen Medien"*. [6]

Nimmt man sowohl Stolls als auch von Hentigs Kritik ernst, so wird plausibel, dass es in der didaktischen Forschung und auch bei der Gestaltung von Unterricht nicht nur um den Einsatz solch neuartiger Medien gehen sollte, sondern dass man auch untersuchen müsste, berücksichtigen müsste, welche Wirkungen hierdurch bei den Schülerinnen und Schülern hervorgerufen werden! Und wir müssen noch einen Schritt weiter gehen und fragen, welche Rolle denn die Neuen Medien im Rahmen von Bildung und Allgemeinbildung spielen sollen. Ist etwa nur „Benutzungskompetenz" das Ziel?

Der Philosoph Walter Ch. Zimmerli schreibt hierzu mit Bezug auf das Internet u. a.: [7]

> Aber Bildung bedeutet nicht nur Internet-Benutzungskompetenz, sondern auch *Persönlichkeitsbildung*. Deren Ziele bestehen nicht in Karrieremustern oder Kognitionsfertigkeiten, sondern in einer *Schärfung der Urteilskraft*, der *Erringung transkultureller Kompetenz* sowie der *Stärkung geistiger Orientierung*. [...]

---

2 Auf einer Experten-Grundsatztagung in der Evangelischen Akademie in Loccum; vgl. [Ermert 1983].

3 [Stoll 2001]

4 Gefunden mit http://google.de am 23.10.2001 unter „Clifford Stoll".

5 [von Hentig 2002]

6 [von Hentig 1984]

7 [Zimmerli 2002, 22]; Hervorhebung nicht im Original.

> Wenn wir uns klarmachen, dass auch eine große Bibliothek ein externer Wissensspeicher ist, dessen Inhalt selbst gebildete Menschen nicht ständig vor sich haben, dann leuchtet ein, dass auch das Internet strukturell nichts anderes bereitstellt, als eine große Bibliothek, für die wir allerdings keinen Gesamtkatalog haben. Über Bildung zu verfügen hieße daher, so viel zu wissen, dass man sich in den externen Wissensspeichern zurechtfindet – oder in den Worten von Georg Simmel: *„Gebildet ist, wer weiß, wo er findet, was er nicht weiß.“*
>
> Es geht also darum, *im Nichtwissen intelligent navigieren* zu können. Voraussetzung dafür ist ein *Wissen um die Grenzen der eigenen Kompetenz* und zugleich zu wissen, wie und mit welcher technischen Hilfe man sucht, was man noch nicht weiß, was aber als *latentes Wissen* im Netz stehen könnte, [...] Nach wie vor trifft zu, dass Bildung im Sinne dessen, was man einmal gelernt hat, eine ähnliche Bedeutung hat, wie Jean Paul sie der Erinnerung zuschrieb: *das Paradies zu sein, aus dem wir nicht vertrieben werden können*.

Wenn also gemäß Zimmerli künftig als gebildet nur noch jemand gelten kann, der sich das Wissen der Welt im Internet erschließen kann und dessen Urteilskraft geschärft ist, so sollten wir über das Internet hinaus weisend bedenken: Offenbar genügt es nicht, Neue Medien im Unterricht nur einzusetzen, sondern sie müssen auch bezüglich ihrer Möglichkeiten kritisch reflektiert werden — und zwar sowohl bezüglich ihrer Chancen als auch ihrer Risiken! Und das macht dann erst Bildung aus! Zugleich haben wir damit andeutungsweise erfahren, worum es in der Medienpädagogik gehen könnte.

2.2 Medien und Funktionen

Was sind „Medien“, bzw. was wollen oder können wir darunter verstehen? Das kann hier nur angerissen werden. [8] Im Lateinischen finden wir zwei Wurzeln:

- „medius“
  in der Mitte befindlich, dazwischen liegend, Mittelding, vermittelnd, auch: störend
- „medium“
  Mitte, Mittelpunkt, aber auch: Öffentlichkeit, Gemeinwohl, Gemeingut

Demgemäß treten uns Medien *im pädagogischen Kontext* in *zwei* etymologisch bedingten *Grundbedeutungen* gegenüber:

- **Medien *vermitteln Kultur***, und **Medien *sind* dargestellte *Kultur***.

Hierin zeigt sich uns eine *Doppelgesichtigkeit von Medien*. Und mit Blick auf den letzten Teil meiner Ausführungen sei bereits jetzt darauf hingewiesen, dass sich *Funktionen* in diesem Sinne als Medien erweisen, und das führt uns dann zu der Aussage:

- **Funktionen *vermitteln Kultur***, und **Funktionen *sind* dargestellte *Kultur***.

2.3 Medienpädagogik

Ich komme nun zu einer Charakterisierung der Medienpädagogik nach Issing: [9]

> Für die Behandlung pädagogischer Fragen theoretischer und praktischer Art im Zusammenhang mit Medien wird in der Literatur am häufigsten der Begriff **Medienpädagogik** verwendet [...]. Er umfaßt alle Bereiche, in denen Medien für die Entwicklung des Menschen, für die Erziehung, für die Aus- und Weiterbildung sowie für die Erwachsenenbildung pädagogische Relevanz haben. Es erscheint deshalb sinnvoll, den Begriff „Medienpädagogik“ als übergeordnete Bezeichnung für alle pädagogisch orientierten Beschäftigungen mit Medien in Theorie und Praxis zu verstehen und einzelne Aspekte der Medienpädagogik näher zu spezifizieren.

Insbesondere sind hierbei die Teilbereiche *Mediendidaktik*, *Medienkunde* und *Medienerziehung* hervorzuheben.

In Abb. 1 werden sowohl diese Teilbereiche als auch deren Zusammenhang dargestellt.

[8] Vgl. [Hischer 2002, 48 ff].

[9] [Issing 1987, 24]; vgl. auch [Kron 2000, 331].

☞ **Mediendidaktik** befasst sich [10]

> mit den Funktionen und Wirkungen von Medien in Lehr- und Lernprozessen, d. h. also mit medienvermitteltem Lernen [...]. Ihr Ziel ist die Förderung des Lernens durch eine didaktisch geeignete Gestaltung und methodisch wirksame Verwendung von Medien. Die Auswahl und der Einsatz von Medien soll dabei in Abstimmung mit den Unterrichtszielen, den Unterrichtsinhalten und den Unterrichtsmethoden erfolgen.

Abb. 1: Integrative Medienpädagogik als eine Bildungsaufgabe der Schule

Die „Neuen Medien" bilden somit offensichtlich einen wichtigen Untersuchungsgegenstand der Mediendidaktik.

☞ Bei der **Medienkunde** geht es um die [11]

> Vermittlung von Kenntnissen über Medien, z. B. über die historische Entwicklung der Medien, über Medieninstitutionen und ihre Organisation, über Mediengesetzgebung, Produktionsprozesse, Technik und Gestaltung von Medien; auch die Vermittlung von Erfahrungen in der Bedienung und praktischen Handhabung von Medien zählt zu den Aufgaben der Medienkunde.

Hier liegt ein *weiterer* pädagogischer Aspekt vor, der auch die „Neuen Medien" betrifft.

☞ Die **„Medienerziehung"** befasst sich [12]

> vorwiegend mit den Massenmedien, aber auch mit Unterrichtsmedien. Sie hat das Ziel, zu einem bewußten, reflektierten, kritischen, d. h. sozial erwünschten Umgang mit Medien zu erziehen.

Damit sind pädagogische Untersuchungen der „Neuen Medien" insbesondere auch der *Medienerziehung* verpflichtet!

2.4 Integrative Medienpädagogik

Auf dem Bisherigen aufbauend postuliere ich nun eine *Integrative Medienpädagogik* als normativen Begriff, bei dem „integrativ" eine *zweifache Qualität* hat:

1. Alle drei Aspekte der Medien*pädagogik* – Medien*didaktik*, Medien*erziehung* und Medien*kunde* – sind bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht *in ihrer Ganzheit* (*integrativ!*) und nicht losgelöst voneinander zu berücksichtigen.

2. Eine so verstandene Medienpädagogik kann bei Bezug auf die „Neuen Medien" wegen der Komplexität des Gegenstandes nicht von einem Unterrichtsfach allein übernommen werden, auch nicht vom Fach Informatik – vielmehr sind *im Prinzip alle Unterrichtsfächer* gemeinsam (*integrativ!*) mit je spezifischen Ansätzen (!) gefordert.

Eine *integrative Medienpädagogik* kommt somit also stets in ihrem *doppelten Sinn* zum Tragen: alle drei Aspekte der Medienpädagogik *und* (im Prinzip) alle Unterrichtsfächer! Und hinsichtlich der drei Aspekte der Medienpädagogik – Medien*didaktik,* Medien*erziehung,* Medien*kunde* – gilt dann:

10 [Issing 1987, 25]; zitiert auch bei [Kron 2000, 331].

11 [Issing 1987, 26]

12 [Issing 1987, 25]

- **Mediendidaktik**: Computer und Internet werden eine immer wichtigere Rolle im Rahmen von Lehr- und Lernprozessen spielen, und zwar als ein *neuartiges technisches Medium* (*Hilfsmittel* oder *Werkzeug*) bei der Aneignung von und Teilhabe an Kultur, also beim *Enkulturationsprozess*. Lehrkräfte, Didaktiker, Bildungsplaner und Schulbuchverlage stehen hier vor großen Herausforderungen.
- **Medienkunde**: Voraussetzung für eine sinnvolle Nutzung solcher Medien ist eine *solide Kompetenz im Umgang* mit ihnen. Dazu gehören auch *Kenntnisse über Aufbau und Funktionsweise* solcher Medien, die als *grundlegend und allgemeinbildend* zu bestimmen sind.
- **Medienerziehung**: Unverzichtbar zur Persönlichkeitsbildung ist eine *Anleitung zum bewussten, reflektierten und kritischen Umgang* mit solchen Medien, und zwar im Rahmen eines Allgemeinbildungskonzepts.

Die Umsetzung dieser Aspekte ist eine Bildungsaufgabe für Schule insgesamt und damit prinzipiell für alle Unterrichtsfächer mit je spezifischer Ausrichtung. Dies wurde bereits in Abb. 1 veranschaulicht. Zugleich vertritt diese Graphik den pädagogischen Anspruch, dass auch das sog. „multimediale Lernen“ nicht nur einseitig in instrumenteller Anwendung der Neuen Medien bezüglich Effektivierung der Lernvorgänge zu sehen ist, sondern dass auch hier die skizzierten medienpädagogischen Aspekte beachtet werden sollten. Für die didaktische Forschung ergibt sich nun die Aufgabe, praktikable Unterrichtsbeispiele zu entwickeln, die den drei in Abb. 1 dargestellten Aspekten der Medienpädagogik (mit ggf. je unterschiedlicher Akzentuierung) gerecht werden.

These:

Der Mathematikunterricht kann und muss zu allen drei Aspekten der Medienpädagogik Gewichtiges beitragen!

Diese These soll in den folgenden Ausführungen exemplarisch untermauert werden.

3 „Neue Medien“ — Was ist das eigentlich?

Bisher hatten wir die Bezeichnung „Neue Medien“ einfach für die *neuen, computerbasierten Medien* genommen, also als Zusammenfassung für „Computer und Internet“, wobei die sog. „Multimediacomputer“ und graphikfähige Taschenrechner und Taschencomputer ebenfalls dazu gehören. Warum nun aber die Bezeichnung „Neue Medien“, noch dazu in der Großschreibung? Dies kann hier nur skizziert werden. [13]

Es hängt mit der *Entwicklung von Technik* zusammen: Die Geschichte der Entwicklung der Technik ist aus anthropologischer Sicht zugleich eine Geschichte der „Auslagerung“ mechanischer Fähigkeiten des Menschen auf Geräte und Maschinen, angefangen beim Faustkeil über Waffen und Werkzeuge bis hin zu heutigen geradezu monumentalen Baumaschinen. Die Maschine „Computer“ ist nun insofern *revolutionär*, als hier erstmals nicht wie bei früheren Maschinen mechanische Fähigkeiten des Menschen „ausgelagert“ werden, [14] sondern ein neuer Maschinentypus *Fähigkeiten* übernimmt, die *bisher den menschlichen Geistesleistungen zuzurechnen* waren.

Wir brauchen nur an das *Schachspiel* zu denken, dessen souveräne Beherrschung stets als Kennzeichen besonderer Intelligenz galt. Und nunmehr treten Großmeister gegen Schachautomaten an, und als „normaler“ Schachspieler hat man ohnehin Schwierigkeiten, gegen gute Schachcomputer, die es ja bereits für den PC gibt, zu gewinnen. Und insbesondere gibt es heute „Schachprogramme“, die man im Internet spielen kann, und zwar entweder gegen einen „menschlichen Gegner“ oder gegen einen „virtuellen Gegner“, d. h. gegen einen Algorithmus in Verbindung mit einer Datenbank. Aber wenn man nicht weiß, welche „Gegner-Wahl“ getroffen wurde, weiß man letztlich nicht, *gegen wen* man spielt: Spielt man gerade gegen einen wirklichen Menschen oder (nur!?) gegen ein von Menschen erdachtes Programm?

---

13 Details dazu in [Hischer 2002, 60 ff].

14 Vgl. [Fischer & Malle 1985, 257 – 258].

Bedeutet das nun, dass die Fähigkeit zum Schachspielen gar nichts oder nur wenig mit Denkvermögen und Intelligenz zu tun hat, oder bedeutet das, dass Schachcomputer *denken* können und damit in gewissem Sinn *intelligent* sind? [15]

Allein diese Frage zu stellen, heißt jedoch, dass hier von Menschen geschaffene Maschinen *das bisherige Menschenbild in Frage stellen* – ich will noch nicht sagen: bedrohen! Immerhin wird nun in diesem Sinn – mit aller gebotenen Vorsicht formuliert – *„Denkfähigkeit" auf den Computer ausgelagert* – mag uns dies nun passen oder nicht! Und *das* begründet die herausragende Stellung der auf der Mikroelektronik beruhenden Informations- (und der Kommunikations-)techniken und somit ihre „Neuheit", was zu folgender Charakterisierung führt:

- **Neue Techniken** sind die datenprozessierenden Informationstechniken, sie sind sog. „Querschnittstechniken" – denn: Der Computer erweist sich in nahezu allen Wissenschaften und Anwendungen als ein nützliches Werkzeug, ja gar als ein unverzichtbares Werkzeug!
- **Neue Medien** sind dann solche *technischen Medien*, die auf diesen Neuen Techniken beruhen.

Und der Besonderheit dieser grundsätzlichen „Neuheit" dieser Techniken und Medien trägt man oft dadurch Rechnung, dass man das Attribut „neu" groß schreibt.

4 Unterrichtsmittel vs. Unterrichtsinhalt, Werkzeug vs. Hilfsmittel [16]

Gemäß Abb. 1 können wir Neue Medien unter drei pädagogischen Aspekten betrachten: Mediendidaktik, Medienkunde und Medienerziehung. Diese drei Aspekte zählen methodologisch zur sog. *Bereichsdidaktik*.

Während es bei den medien*didaktischen* Aspekten Neuer Medien vorrangig um ihren *fachdidaktisch begründeten Einsatz* im Unterricht und damit um den *Umgang* mit ihnen geht, werden die Neuen Medien sowohl unter medien*kundlichen* als auch unter medien*erzieherischen* Aspekten *im Unterricht untersucht*, sie werden damit zum *Unterrichtsinhalt*, und sie dienen dabei der *Aufklärung* und der Vermittlung von *Haltungen* und *Einstellungen*. Da sowohl dieser Umgang mit den Neuen Medien als auch deren Erörterung jeweils in Unterrichts*fächern* erfolgt, müssen wir Neue Medien im pädagogischen Kontext in der doppelten Rolle als *Unterrichtsmittel* und als *Unterrichtsinhalt* betrachten. Und damit haben wir folgende Perspektiven gefunden, unter denen wir die Neuen Medien betrachten können:

- ***fachdidaktische Funktion*** Neuer Medien:
  - als *Unterrichtsmittel* (d. h. als *Werkzeug* oder *Hilfsmittel*)
  - als *Unterrichtsinhalt* (d. h. als *Gegenstand des Unterrichts*)
- ***bereichsdidaktische Sicht*** Neuer Medien:
  - *mediendidaktisch*
  - *medienkundlich*
  - *medienerzieherisch*

Diese *zweifache Sichtweise Neuer Medien* können wir in einer *Perspektivenmatrix* darstellen (Abb. 2). Die unscharfe Darstellung soll deutlich machen, dass die beiden Kategorien „Unterrichtsmittel" und „Unterrichtsinhalt" in der Perspektivenmatrix nicht trennscharf sind: dass also einerseits zum Unterrichtsmittel, dem „Instrument", stets

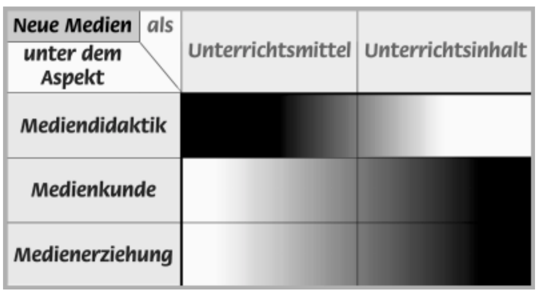


Abb. 2: Perspektivenmatrix Neuer Medien — bereichsdidaktische Sicht (links) und fachdidaktische Funktion (oben)

[15] Vgl. hierzu u. a. [Penrose 1991, 12].

[16] Bezüglich einer Vertiefung vgl. [Hischer 2002, 232 ff].

auch der Unterrichtsinhalt, das „Thema" bzw. der „Gegenstand", gehört und umgekehrt; dass jedoch andererseits „Mediendidaktik", „Medienkunde" und „Medienerziehung" zwar jeweils *Schwerpunkte unterrichtlichen Handelns* beschreiben, aber dennoch *nicht voneinander zu trennen* sind.

Oben getroffene, noch nicht spezifizierte Unterscheidung der Unterrichtsmittel in *Werkzeug* und *Hilfsmittel* mag irritieren, weil sie nicht selbstredend (und ebenfalls nicht trennscharf!) ist. Sie zielt jedoch akzentuierend auf *idealtypisch grundsätzliche Unterschiede im Anwendungsbereich* solcher Medien ab:

- Ein ***Werkzeug*** ist in diesem Sinne dadurch gekennzeichnet, dass es – zumindest in einem bestimmten Bereich – recht vielseitig verwendbar ist.
- Ein ***Hilfsmittel*** dagegen ist (nach diesem Verständnis) weniger vielseitig, sondern es kann im Prinzip für nur einen Zweck konstruiert worden sein.

So wird ein Korkenzieher in der Regel nur ein *Hilfsmittel* sein und nur in extremen Notsituationen als *Werkzeug* verwendet werden (wenn anderes nicht verfügbar ist). Ein Werkzeug hingegen verleiht seinem Benutzer – im Gegensatz zum Hilfsmittel – ***Macht*** im Sinne von Carl Friedrich von Weizsäcker: [17]

> Macht nenne ich die Bereitstellung von Mitteln für offengehaltene Zwecke.

So ist beispielsweise ein Computeralgebrasystem als (vielseitiges!) *„Macht verleihendes" Werkzeug* anzusehen, hingegen wäre ein „kastrierter" Funktionenplotter, der nur die Veranschaulichung und Konstantenvariation fest implementierter Funktionsterme erlaubt, ein geradezu *„ohnmächtiges" Hilfsmittel*, das nur für vom „Autor" vorgegebene Zwecke verwendet werden kann.

Diese Betrachtungen können generell auf jegliche sog. *„Lehr- und Lernprogramme"* ausgedehnt werden: Wenn sie „offen" konzipiert sind, also für nicht eng umgrenzte Gebiete anwendbar sind (wie z. B. Computeralgebrasysteme, Programmiersprachen, Tabellenkalkulationsprogramme, aber auch viele Funktionenplotter), sind sie „mächtig", sonst sind sie nur Hilfsmittel.

❑ *„Bildung als Paradies"* braucht aber *„Offenheit"!*

Ich betrachte im Folgenden nur *Werkzeuge* in diesem Sinn.

5 Neue Medien als Unterrichtsmittel — grundlegende Werkzeuge

5.1 Übersicht

Folgende *Werkzeuge*, die auf Neuen Medien basieren, sind derzeit und in naher Zukunft für den Mathematikunterricht bedeutsam.

> *Funktionenplotter*, *Computeralgebrasysteme*, *Dynamische Geometriesysteme* und *Tabellenkalkulationssysteme*, ferner *Werkzeuge zur Visualisierung* und das *Internet*.

Die Gruppierung der ersten vier Werkzeugtypen ist keinesfalls trennscharf, denn das Anwendungsspektrum der einzelnen Systeme nimmt zu, und die ursprünglich unterschiedlichen, für spezielle Anwendungen konzipierten Systeme wachsen zusammen — eine Tendenz, die wir bei den sog. „Anwendungsprogrammen" wie etwa zur Textverarbeitung oder zur Graphikbearbeitung ebenfalls seit langem beobachten können.

Wenn wir also die oben genannten Bezeichnungen für vornehmlich *mathematikorientierte Anwendersoftware* benutzen, dann soll dies eine *idealtypische Verwendung* sein, mit der wir die *ursprünglich intendierten Anwendungsrichtungen* ansprechen.

Diese Werkzeugtypen seien kurz exemplarisch vorgestellt.

---

[17] [von Weizsäcker 1992, 19]; Hervorhebung nicht im Original. In [von Weizsäcker 1989, 1054] schreibt er: *„Ich definiere Macht als […] Bereitstellung von Mitteln für freigehaltene Zwecke."*

5.2 Funktionenplotter

„Plotter“ bedeutet „Planzeichner“, und man kennt sie in der Datenverarbeitung als analoge Tuscheplotter bereits seit rund 40 Jahren, und lange zuvor kannte man sie in der Physik als *x-y*-Schreiber bzw. als *t-y*-Schreiber für „Endlospapier“.

Mit dem Aufkommen der ersten Arbeitsplatzcomputer Ende der 1970er Jahre, verbunden mit der (völlig neuen!) Verfügbarkeit individueller (Nadel-)Drucker, wuchs der Wunsch der Anwender zur Erzeugung von Funktionsgraphen mit dem eigenen System, und so entstanden die ersten sog. *Funktionenplotter* – auch schon für den Mathematikunterricht. Die Ergebnisse waren zwar einerseits für die normalen Anwender sehr eindrucksvoll, weil sie bis auf die eigenhändig skizzierten Funktionsgraphen nichts anderes kannten, und andererseits waren die Ergebnisse schlicht *miserabel*, gemessen an dem Qualitätsstandard, der schon rund 20 Jahre vorher mit den Tuscheplottern üblich war. Dennoch waren diese Ende der 1980er Jahre entwickelten ersten Funktionenplotter *mediendidaktisch* durchaus interessant, weil durch sie „offen sichtlich“ wurde, dass die Funktionsgraphen nur aus diskreten Punkten bestehen. Immerhin waren sie in der Auflösung den um die Jahrtausendwende herum üblichen graphikfähigen Taschencomputern deutlich überlegen. Ein *grundsätzlicher methodischer Vorteil* gegenüber dem herkömmlichen Verfahren des Zeichnens von Funktionsgraphen per Hand über Wertetabellen *war jedoch kaum erkennbar*, zumal ohnehin nicht alle Schülerinnen und Schüler einen eigenen Rechner zur Verfügung hatten.

Allerdings waren zwei neue Aspekte methodisch sehr interessant:

- Der **Trace-Modus**, der schon 1991 beim Taschencomputer TI-81 verfügbar war und heute für alle TC wie CASIO oder TI und z. B. auch für das Computeralgebrasystem Derive selbstverständlich ist. (Mit diesem Modus kann man ein frei bewegliches Cursor-Fadenkreuz an einen Funktionsgraphen binden, also auf einen Freiheitsgrad einschränken, und damit z. B. interaktiv Schnittpunktkoordinaten approximieren.)
- Die quasi-kontinuierliche **Konstantenvariation** (oft auch „Parametervariation“ genannt), wie sie leider auch heute noch nicht bei allen Funktionenplottern selbstverständlich ist. (Bei Verfügbarkeit dieser Option lässt sich der Einfluss von „Formvariablen“ auf Lage und Gestalt der Funktionsgraphen interaktiv untersuchen.)

Besonders interessant bezüglich der Konstantenvariation sind hier die folgenden beiden aktuellen Neuentwicklungen: DynaPlot und ParaPlot:

DynaPlot ist eine Excel-Anwendung mit Schiebereglern. [18] Dieses Programm ist besonders unter medienkundlichen Aspekten interessant, wenn man nämlich versucht, seine Funktionsweise zu verstehen und es „nachzubauen“. Diese Aufgabe ist aber sehr anspruchsvoll und scheidet wohl in aller Regel für den normalen Mathematikunterricht aus.

Anders dagegen ist das in VisualBasic entwickelte Programm **ParaPlot** [19] nur eine „Black Box“, dafür aber eine sehr leistungsfähige, die kurz vorgestellt sei (Abb. 3): Es eignet sich zur gleichzeitigen Darstellung von bis zu drei Funktionsgraphen oder bis zu zwei Kurven in Parameterdarstellung, wobei beliebig viele Konstanten als Formvariable mit frei wählbaren Namen verwendbar sind.

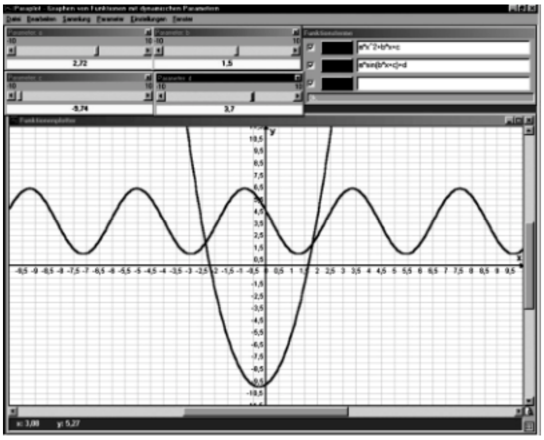


Abb. 3:
„Dynamischer“ Funktionenplotter ParaPlot

[18] Herunterladbar unter http://www.staatliche-bos-nuernberg.de. Entwickelt von Ulrich Würfl (mit Robert Triftshäuser).

[19] Herunterladbar unter http://www.staatliche-bos-nuernberg.de und http://hischer.de/mathematik/didaktik/neuemedien/. Entwickelt von Robert Triftshäuser. Es ist nicht zu verwechseln mit einem über zehn Jahre alten gleichnamigen, auf heutigen Rechnern nicht mehr lauffähigen DOS-Programm.

Die Funktionsterme, die Kurventerme und die Belegungen der Formvariablen lassen sich eingeben, und alle Fenster (Graph, Schieberegler, Termeingabe) sind in Größe und Position frei veränderbar.

Es gibt eine Fülle von *eigenständigen* Funktionenplottern wie ParaPlot auf dem Markt, wenngleich leider nur wenige über die wichtigen Schieberegler zur Konstantenvariation verfügen. Mittlerweile sind auch Dynamische Geometriesysteme wie Euklid DynaGeo in eigentlich systemwidriger Weise als Funktionenplotter verwendbar, weil sich hier vorzüglich Schieberegler realisieren lassen – und zwar von den Schülerinnen und Schüler selber! Abb. 4 zeigt ein „eingefrorenes“ Beispiel.

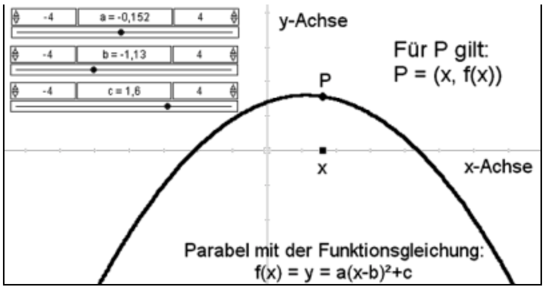


Abb. 4: Euklid DynaGeo als Funktionenplotter (Shareware herunterladbar unter http://mechling.de)

Hervorhebenswert ist ferner der Funktionenplotter **DPGraph** von David Parker, mit dem sich u. a. zeitabhängige Animationen erstellen lassen und der insbesondere für 3D-Darstellungen impliziter Funktionen gedacht und geeignet ist. [20] Bemerkenswert ist auch die implementierte einfache Programmiersprache, die man verwenden *muss*, um diesen Plotter benutzen zu können. Dies ist gerade unter medienkundlichen Aspekten interessant, zumal diese elementare Programmiersprache für Schülerinnen und Schüler leicht erlernbar ist – hier kommen die in den 1980er Jahren von Heinz Griesel propagierten 10-Zeilen-Programme wieder zurück in den Mathematikunterricht! Abb. 5 zeigt als Beispiel die Darstellung eines „Huts“ mit Hilfe von DPGraph. Hieran wird offen sichtlich, dass man mit diesem Programm rein **spielerisch und** völlig **„nutzlos“** schöne Flächen und Kurven erzeugen kann – ein sehr wichtiger Aspekt der Mathematik und des Mathematikunterrichts!

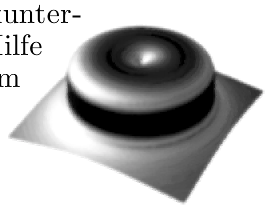


Abb. 5: „Hut“, erzeugt mit DPGraph

Der Programmkern ist hier (Modellierung eines Torus!):

```
graph3d(x^2+y^2+z^2^+a^2-b^2 = 2*a*sqrt(x^2+y^2))
```

5.3 Tabellenkalkulation

Das erste Tabellenkalkulationsprogramm war das legendäre **VisiCalc** („sichtbare Berechnungen“), das 1979 von Dan Bricklin erfunden und von Bob Frankston programmiert wurde, und zwar als *„eine elektronische Tafel und eine elektronische Kreide im Klassenraum“*. [21] Tabellenkalkulation gehört zwar zur sog. Bürosoftware, aber sie ist auch für den Mathematikunterricht ein sehr mächtiges *Werkzeug, das noch längst nicht die dort mögliche Rolle spielt!*

In Erweiterung der ursprünglichen Möglichkeiten verfügen solche Programme heute alle über einen Graphikteil zur Datenpräsentation, und damit sind sie auch als Funktionenplotter geeignet, indem einfach eine Wertetabelle durch Punkte dargestellt wird, ggf. in linearer Interpolation, wobei man vorteilhaft rekursive Programmierung in relativer Adressierung verwendet (Abb. 6).

Der Mathematikunterricht bietet ein großes Potenzial zur Entschlüsselung von Tabellenkalkulation im medienkundlichen Sinn und zur Reflexion ihrer Verwendungsmöglichkei-

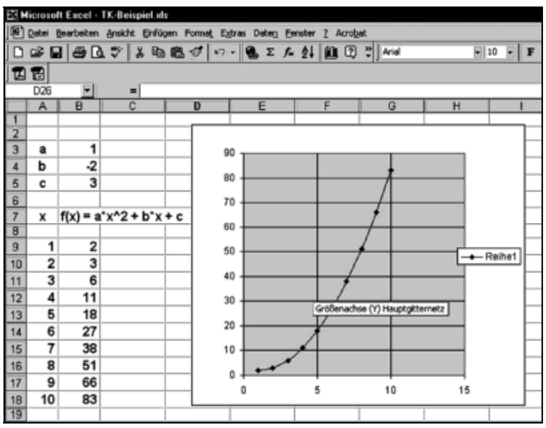


Abb. 6: Tabellenkalkulationsproramm als Funktionenplotter

[20] http://dpgraph.com

[21] http://dssresources.com/history/sshistory.html, gültig am 17.07.2002.

ten und -probleme außerhalb der Mathematik im medienerzieherischen Sinn. So ist Tabellenkalkulation heute neben Textverarbeitung die wichtigste Anwendersoftware in Wirtschaft und Verwaltung. Die hierbei wichtigen Prinzipien relativer und absoluter Adressierung einerseits und die der Datenpräsentation andererseits können im Mathematikunterricht durchsichtig gemacht werden. Zugleich können die Schülerinnen und Schüler hierbei Tabellen und deren Präsentationsformen als *Funktionen* erfahren.

5.4 Computeralgebrasysteme

Um Computeralgebrasysteme (CAS) ist es in der didaktischen Diskussion ruhig geworden. Sind sie etwa innerhalb der letzten zehn Jahre schon zu einem selbstverständlichen Werkzeug im Mathematikunterricht geworden? Dabei sollten auch sie im Mathematikunterricht nicht nur eingesetzt, sondern *kritisch* eingesetzt werden, also auch bezüglich ihrer Möglichkeiten und Fallstricke im medienkundlichen und medienerzieherischen Sinn kritisch erkundet und reflektiert werden. Und auch der Aspekt der „Trivialisierung" mathematischer Gebiete durch Computeralgebrasysteme sollte im Unterricht bewusst gemacht werden. [22]

5.5 „Dynamische" Geometriesysyteme

Die sog. *Dynamischen Geometriesysteme* (DGS) sind mittlerweile als neues mächtiges Werkzeug im Sinne der Mediendidaktik hinlänglich bekannt. Aber ist diese Bezeichnung sinnvoll? Ist denn das *System* dynamisch? Allenfalls doch wohl die damit betriebene Geometrie! Und die neue alternative Lesart „Dynamische Geometriesoftware" ist kaum besser, weil ja auch die Software nicht „dynamisch" ist. Aber auch die sich auf diese Systeme gründenden Geometrien sind im Sinne der ursprünglichen Wortbedeutung von „innere Kraft besitzend" oder „lebendig" oder „wirksam" keinesfalls „dynamisch"! Und in der Physik unterscheidet man sorgfältig zwischen „Dynamik" als der Lehre von den Kräften und „Kinematik" als der Lehre von den Bewegungen. Und wir gehen ja auch ins „Kino" und nicht ins „Dyno"! Also warum sagt man nicht „Kinematische Geometrie" oder einfach „Bewegliche Geometrie"? Oder sollte sich „dynamisch" im Sinne von „wirksam" z. B. auf die Erzeugung von Ortslinien beziehen? Dann wäre allerdings das *System* dynamisch! Hat man das bei der Namensgebung gemeint?

Aber sei 's drum: Wenn wir „Dynamische Geometriesysteme" lesen oder sagen, sind wir zugleich auch in der Lage, unseren hoffentlich kritischen Schülerinnen und Schülern diese Bezeichnung jederzeit zu erläutern ...

Dynamische Geometriesysteme sind bekanntlich wichtige Werkzeuge beim Entdecken mathematischer Sachverhalte und Zusammenhänge, insbesondere von *Invarianten* im Sinne des Geometriekonzepts von Felix Klein. Aber hierbei ist Vorsicht geboten, und dazu sei ein Beispiel skizziert, das sich medien*erzieherisch* eignet:

Beispiel: Inversion am Kreis

Neue Medien als Verführer — Nachdenken ist weiterhin nötig!

Manche DGS (z. B. Euklid DynaGeo [23]) bieten auch fest implementierte geometrische Abbildungen wie Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen. Im medienkundlichen Sinn wird man es nicht versäumen, im Unterricht diese Abbildungen auch „von Hand" mit Hilfe von Makros nachbauen zu lassen! Ohnehin sind nicht alle interessierenden Abbildungen bereits „eingebaut", so etwa weder *Scherungen* noch *schiefe Achsenspiegelungen*.

Bei Euklid DynaGeo reizt eine weitere Abbildung zum *spielerischen Erproben*, nämlich: *„Punkt an einem Kreis spiegeln"*. Auch ohne vorherige Kenntnis gelingt es bald, ihre Eigenschaften „zu entdecken": Punkt und Bildpunkt liegen stets auf einer Geraden durch den Kreismittelpunkt, und das Produkt ihrer Abstände vom Kreismittelpunkt ist konstant (nämlich = ?). Das führt dann zur Namensgebung *„Inversion am Kreis"*.

---

[22] Vgl. [Hischer 2002, 102 f, 189], ausführliche Betrachtungen in [Hischer 2002, 262 ff].

[23] Herunterladbar unter http://www.mechling.de.

Und wie erhalten wir das Bild eines Dreiecks? Bei den anderen Abbildungen ging das einfach: Man erzeugte ein Dreieck als *Objekt* und wendete die Abbildung auf dieses Objekt an. Fertig! Leider geht das bei dieser Kreisinversion *nicht*. Ärgerlich! Aber wir helfen uns, indem wir die Inversion „von Hand“ nachbauen: Bilder der drei Eckpunkte konstruieren und diese verbinden (Abb. 7). Na also! Oder?

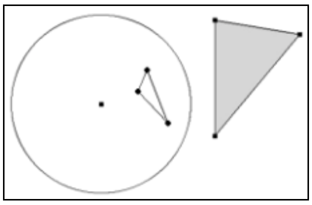


Abb. 7: Bild eines Dreiecks bei Inversion am Kreis?

Wenn z. B. eine Originaldreiecksseite den Kreis tangiert, müssten Berührpunkt und Bildpunkt übereinstimmen. Das ist aber *nicht* der Fall! Wir haben uns also von dem System voreilig *verführen* lassen. Erst eine Konstruktion über Ortslinien bringt die richtige Lösung (Abb. 8). [24]

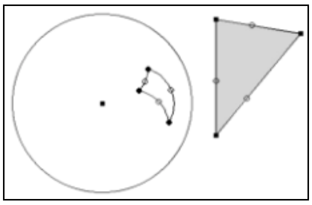


Abb. 8: Bild eines Dreiecks bei Inversion am Kreis!

Nachdenken ist also (gerade!) bei Neuen Medien weiterhin angesagt! Oder anders: Wir können somit diesen mächtigen Werkzeugen keinesfalls unkritisch *vertrauen*! Das werden wir in Abschnitt 6 noch vertiefen.

5.6 Werkzeuge zur Visualisierung

In der Mathematik wissen wir seit langem, wie problematisch die subjektive Anschauung als Mittel der Erkenntnissicherung ist. Andererseits geht auf Felix Klein folgende Aussage zurück: [25]

> Was der Geometer an seiner Wissenschaft schätzt, ist, daß er sieht, was er denkt.

Dazu ein **Beispiel**:

Abb. 9: Sehnenabschnittsprodukt

Auf Archytas von Tarent geht eine *Lösung des Delischen Problems* zurück, bei der der Satz von der *Konstanz der Sehnenabschnittsprodukte* sich schneidender Sehnen in einem Kreis benötigt wird. Diesen kann man zwar mit Hilfe eines DGS empirisch leicht bestätigen, aber dies ist weder ein mathematisch akzeptabler Beweis noch eine *Begründung* dafür, warum das denn gilt!

Die in Abb. 9 wiedergegebene Folie zeigt einen *wortlosen Beweis* im Sinne von Felix Klein (s. o.), der mit Hilfe Neuer Medien erstellt wurde: DPGraph zur Erzeugung des 3D-Grundkörpers und ein *Vektorgraphikprogramm* mit *Bézierkurven-Tool* (hier CorelDRAW ™) zur Nachbearbeitung — sehr *mächtige Werkzeuge* zur Visualisierung!

Und wir können bekanntlich sogar *unmögliche dreidimensionale Sachverhalte* visualieren, etwa das Firmenlogo von Renault, oder man denke an etliche Bilder von Escher.

5.7 Internet

Das Internet ist nicht nur zum Herunterladen von Programmen und Gerätetreibern hilfreich und nützlich, sondern es stellt eine außerordentlich breit gefächerte Informationsquelle dar, wie jede und jeder schnell erfährt, wenn sie oder er mit einer sog. „Suchmaschine“ ernsthaft etwas sucht.

Ist das Internet gar ein *Werkzeug*?

Dazu seien zunächst mit Bezug auf Walther Ch. Zimmerli folgende *Bildungsaspekte* hervorgehoben:

---

[24] Dies konnte tatsächlich in einem Computerpraktikum zu DGS festgestellt werden!

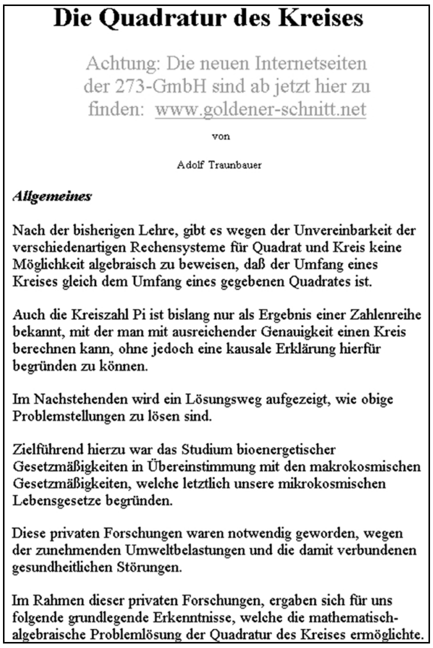
[25] Brieskorn im Vorwort von [Brieskorn & Knörrer 1981, vi].

- Bildung bedeutet *nicht nur Benutzungskompetenz* für Neue Medien, sondern auch *Persönlichkeitsbildung*. Deren Ziele bestehen in einer *Schärfung der Urteilskraft*, der *Erringung transkultureller Kompetenz* sowie der *Stärkung geistiger Orientierung*.
- In einer Situation ständiger *Überforderung und Überflutung durch noch nicht zum Wissen gewordene Informationen* kann *Bildung* auch eine kognitive Funktion haben, denn sie hat doppelten Wert: nicht nur als Charaktererziehung, sondern auch *als Wissen*. Aber als Wissen in einem anderen Sinne: Über Bildung zu verfügen heißt dann, so viel zu wissen, dass man sich in den (externen oder internen) Wissensspeichern zurechtfindet – oder in modifizierten Worten in Anlehnung an Georg Simmel: *„Gebildet ist, wer weiß, wie er findet, wo er findet, was er nicht weiß."*
- Es geht also darum, *im Nichtwissen intelligent navigieren* zu können. Voraussetzung dafür ist ein *Wissen um die Grenzen der eigenen Kompetenz* und zugleich zu wissen, wie und mit welcher technischen Hilfe man das sucht, was man noch nicht weiß, das aber z. B. als *latentes Wissen* in lokalen oder globalen Datenbanken, wie dem Internet, stehen könnte.
- Anleitung zum *bewussten, reflektierten und kritischen Umgang mit Neuen Medien*, und zwar zur Persönlichkeitsbildung im Rahmen eines Allgemeinbildungskonzepts.

Hat das etwa auch etwas mit dem Mathematikunterricht zu tun? Dazu ein

Beispiel:

Stellen wir uns vor, wir hätten im Unterricht das Delische Problem vielseitig behandelt und dann mitgeteilt (oder von einer Schülerin oder einem Schüler gehört), dass es zu den *drei berühmten klassischen Problemen der Antike* gehört. Sofort entsteht die Frage, welches denn die anderen beiden Probleme seien, und schon liefern die Suchmaschinen *„Dreiteilung eines Winkels"* und *„Quadratur des Kreises"*.



Die Quadratur des Kreises

Achtung: Die neuen Internetseiten der 273-GmbH sind ab jetzt hier zu finden: www.goldener-schnitt.net

von

Adolf Traunbauer

Allgemeines

Nach der bisherigen Lehre, gibt es wegen der Unvereinbarkeit der verschiedenartigen Rechensysteme für Quadrat und Kreis keine Möglichkeit algebraisch zu beweisen, daß der Umfang eines Kreises gleich dem Umfang eines gegebenen Quadrates ist.

Auch die Kreiszahl Pi ist bislang nur als Ergebnis einer Zahlenreihe bekannt, mit der man mit ausreichender Genauigkeit einen Kreis berechnen kann, ohne jedoch eine kausale Erklärung hierfür begründen zu können.

Im Nachstehenden wird ein Lösungsweg aufgezeigt, wie obige Problemstellungen zu lösen sind.

Zielführend hierzu war das Studium bioenergetischer Gesetzmäßigkeiten in Übereinstimmung mit den makrokosmischen Gesetzmäßigkeiten, welche letztlich unsere mikrokosmischen Lebensgesetze begründen.

Diese privaten Forschungen waren notwendig geworden, wegen der zunehmenden Umweltbelastungen und die damit verbundenen gesundheitlichen Störungen.

Im Rahmen dieser privaten Forschungen, ergaben sich für uns folgende grundlegende Erkenntnisse, welche die mathematisch-algebraische Problemlösung der Quadratur des Kreises ermöglichte.

Abb. 10: Suchergebnis zu „Quadratur des Kreises"

Einige Schülerinnen und Schüler suchen nach „Quadratur des Kreises" und finden Diverses, u. a. Abb. 10. Was davon ist seriös? Worum geht es inhaltlich überhaupt? So wird deutlich, dass dem Mathematikunterricht hieraus eine (neue?) Bildungsaufgabe erwächst. *Welchem Fach denn **hierbei** sonst?* Und was schreibt die MNU hierzu in ihren *„Empfehlungen zum Computer-Einsatz ..."* vom Juli 2002? [26]

> Weiterhin bestand Einigkeit darüber, dass das Recherchieren im Internet [...] noch von untergeordneter Bedeutung ist [...].

Hier hat man also weiterhin nur mediendidaktische Aspekte im Blick, sieht andere heraufziehende Bildungsaufgaben möglicherweise (noch) gar nicht.

6 Neue Medien als Unterrichtsinhalt — zum Beispiel: Funktionenplotter

6.1 Stroboskopeffekt — Aliasing

Der bereits in 5.5 und 5.7 erwähnte „Vertrauensaspekt" bezüglich der Neuen Medien soll nun eingehender beleuchtet werden, und zwar anhand eines elementaren, eindrucksvollen und dennoch zugleich im Mathematikunterricht behandelbaren Beispiels:

---

[26] Beilage: „Empfehlungen zum Computer-Einsatz im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in allgemein bildenden Schulen." in: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, **55**(2002)5.

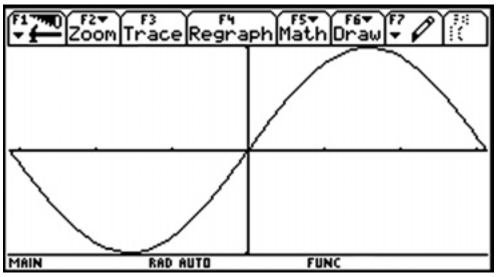


Abb. 11: $\sin(x) \equiv \sin(239\,x)$ beim TI 92+

Wir nehmen z. B. den Taschencomputer TI 92+ von Texas Instruments und lassen den Graphen von $\sin(x)$ in einem Fenster zeichnen, das für x von 0 bis π und für $\sin(x)$ von -1 bis $+1$ definiert ist. Wenn wir in demselben Fenster beispielsweise den Graphen von $\sin(239\,x)$ zeichnen lassen, erhalten wir *keinen* neuen Graphen (Abb. 11): Beide Graphen sind identisch!!!

Verwundert reibt man sich die Augen, wenn man so etwas zum ersten Mal sieht. Wie kann uns die Firma Texas Instruments so etwas anbieten? Wir greifen hoffnungsvoll zum FX 2.0 von CASIO und stellen bei denselben Fenstereinstellungen fest: Nunmehr sind die Graphen von $\sin(x)$ und $\sin(127x)$ identisch! Also können wir den Taschencomputern doch nicht so recht trauen, wenn sie uns so massiv *täuschen*!? Die Hoffnung, dass es die für den PC konzipierten Funktionenplotter besser machen, erweist sich leider als trügerisch!

Dieses katastrophale Ergebnis wurde bereits 1991 von Winkelmann als sog. *„Stroboskopeffekt“* erwähnt. [27] In der Numerik ist dieser Effekt wohl bekannt, und er gehört dort zu dem Phänomen *„Aliasing“*. Die Bezeichnung „Stroboskopeffekt“ soll auch an die sich scheinbar rückwärts drehenden Kutschenräder bei Western-Filmen erinnern. Das kann in diesem Rahmen leider nicht vertieft werden, und es sei auf die Literatur verwiesen. [28] Allerdings sei hier so viel erwähnt: Dieser *Stroboskopeffekt* ist typisch für *alle mathematischen Funktionenplotter*, und er tritt bei der Darstellung von periodischen und fast-periodischen Funktionen auf. In der Numerik wird dieser Effekt innerhalb der Theorie der sog. *Moiré-Phänomene* behandelt. [29] Wir halten das wie folgt plakativ fest:

☞ **Neue Medien können uns als „Täuscher“ begegnen!**

Für den Mathematikunterricht ergibt sich nun hieraus die Aufgabe, diesen Effekt im *medienkundlichen* Sinn zu entschlüsseln und im *medienerzieherischen* Sinn eine kritische und wachsame Haltung gegenüber den Ergebnissen zu entwickeln, die uns die Neuen Medien liefern. Und also sehen wir erneut: *Bildung ist das Paradies!*

6.2 Funktionsplot als Simulation

Zunächst ist anzumerken, dass die graphische Darstellung einer termdefinierten reellen Funktion auf einem Bildschirm oder einem Drucker als **Simulation** des Funktionsgraphen anzusehen ist! Auch hierauf wies Winkelman bereits 1991 hin. Insofern können wir die Darstellungen mit dem TI 92 + oder dem CASIO FX 2.0 als *Fehlsimulationen* deuten! In Konsequenz davon müssen wir im Nachhinein auch die klassisch von Hand gezeichneten Funktionsgraphen bei Kurvendiskussionen als Simulationen bzw. Fehlsimulationen des Funktionsgraphen ansehen und zugleich fragen, was denn eigentlich der Graph bzw. die Funktion selbst ist! Dies führt zu einer Unterscheidung zwischen dem *Begriff* und dessen konkreter Darstellung durch ein Objekt oder ein Symbol.

Das, was uns ein *Funktionenplotter* auf dem Bildschirm oder als Ausdruck liefert, nennen wir einen *Funktionsplot*, und somit ist der Funktionsplot stets eine Simulation des (abstrakten) Funktionsgraphen oder – wenn man so will – der (abstrakten) Funktion. [30] Keinesfalls aber haben diese Fehlsimulationen etwas mit „optischen Täuschungen“ zu tun, denn die hier beobachteten „Täuschungen“ sind ja objektiv vorhanden, während optische Täuschungen subjektive, physiologische Wahrnehmungsstörungen sind!

27 [Winkelmann 1992, 42]

28 Vgl. [Hischer 2002, 295 ff] und [Sandmann 2002].

29 Z. B. in [Amidror 2002].

30 Man beachte die differenzierenden Namensgebungen: *Funktionen*plotter, aber *Funktions*plot!

6.3 Experimente zum Aliasing mit Derive ™ und ParaPlot

Abb. 12 zeigt die Simulation von $\sin(x)$ und $\sin(ax)$ für ein passendes a mit Derive, wobei nur die Fensterbreite variiert wurde.

Das linke Bild zeigt die Übereinstimmung beider Simulationen, rechts sind die Simulationen verschieden, und dennoch liegen in beiden Fällen Fehlsimulationen von $\sin(ax)$ vor. Wir nehmen zur Kenntnis, dass die Fehlsimulation abhängig von der Fenstergröße ist. Führen wir das Experiment analog mit ParaPlot durch, so stellen wir verwundert fest, dass die *Fehlsimulationen unabhängig von der Fenstergröße* sind!

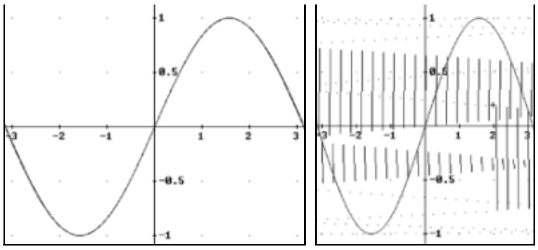


Abb. 12: Simulation von $\sin(x)$ und $\sin(ax)$ (mit $a = ?$) mittels Derive, nur die Fenstergröße wurde variiert.

Wie können wir das erklären? Welcher Funktionenplotter ist „besser"? Wie verhalten sich hier andere Funktionenplotter? Testen Sie Ihren eigenen!

Wir untersuchen die Einstellmöglichkeiten von ParaPlot genauer und stellen fest: Hier kann man die Anzahl der Stützstellen frei wählen, d. h. in „klassischer Ausdrucksweise": Man kann selbstständig entscheiden, wie viele Stützpunkte die Wertetabelle enthalten soll, die zum „Zeichnen" des Graphen verwendet werden. Bei Derive hingegen suchen wir eine solche Option vergebens. Also können wir vermuten, dass Derive eine eingebaute *Stützstellenautomatik* besitzt, mit der die Stützstellenanzahl an die aktuelle Fensterbreite und möglicherweise auch an die aktuelle Bildschirmauflösung angepasst wird. Das gibt dann auch erste Hinweise zur Deutung des unterschiedlichen Simulationsverhaltens der beiden Programme.

Allerdings wissen wir damit noch immer nicht, warum es überhaupt zu solchen Fehlsimulationen kommt und ob es dazu kommen muss! Die Lösung bzw. Erklärung liegt im

Shannonschen Abtasttheorem,

das u. a. in der Audiotechnik von großer Bedeutung ist.

Das Programm ParaPlot erlaubt nun eine zugleich elementare und elegante Demonstration dieses Abtastvorgangs und damit

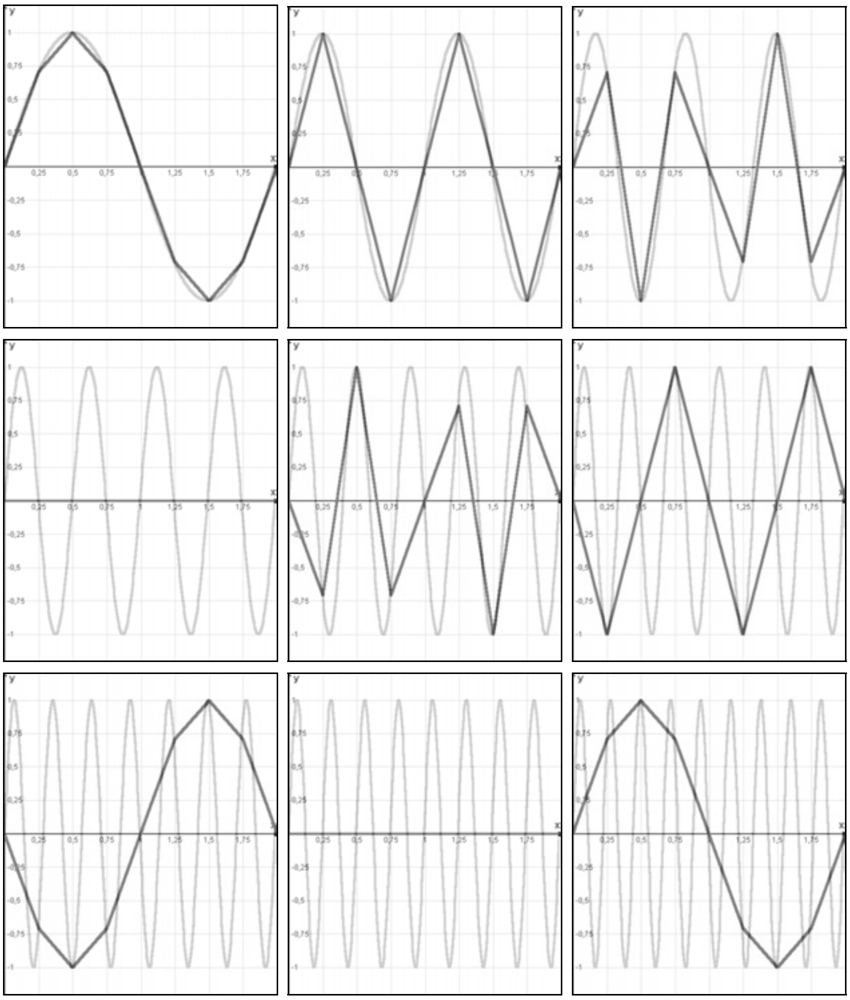


Abb. 13: Aliasing-Graphen (dunkel) von $\sin(x)$, $\sin(2x)$, ... , $\sin(9x)$ (der Reihe nach von links oben nach rechts unten) bei einer Abtastrate von 8 Intervallen in linearer Interpolation.

auch ein *Grundverständnis für das Aliasing.* Sehr hilfreich ist dafür die vom Programmautor auf meinen Wunsch hin eingebaute Option, die Stützstellenanzahl für die einzelnen Funktionsterme unabhängig voneinander festlegen zu können. Abb. 13 zeigt die Abtastung von $\sin(x)$, $\sin(2x)$, ... , $\sin(9x)$. Abgetastet wird jeweils mit 8 Intervallen. Die ersten drei Simulationen ähneln der „richtigen" (hellen, im Hintergrund) noch recht gut, dieses in Übereinstimmung mit dem Abtasttheorem, das besagt: Die Abtastfrequenz muss mindestens doppelt so groß wie die abzutastende Frequenz sein. Hier ist die Abtastfrequenz, die auch „Samplingfrequenz" heißt, stets 8, und die drei ersten Abtastfrequenzen sind 1, 2 und 3. (Übrigens würden in der Audiotechnik diese drei abzutastenden Kurven exakt rekonstruiert werden!) Sind die abzutastenden Frequenzen größer als 4, ergeben sich erkennbar Fehlsimulationen. Die Sonderfälle 4 und 8, bei denen sich nur die horizontale Achse als Simulation ergibt, möge man selber erforschen!

ParaPlot erweist sich damit nicht nur als Werkzeug, sondern darüber hinaus als *selbstreferentielles Werkzeug*, das also zur Untersuchung seiner selbst geeignet ist und auf diese Weise in besonderem Maße medienkundlichen und – bei entsprechender reflektierender Vertiefung im Unterricht – auch medienerzieherischen Unterrichtszielen dienen kann.

6.4 Die Hauptsätze für Funktionenplotter

Diese seien abschließend nur genannt und mögen zum Nachdenken anregen. [31]

Erster Hauptsatz für Funktionenplotter:
Jeder Funktionsplot ist stetig.

Anders: *Jede durch einen Funktionenplotter dargestellte Funktion zeigt in ihrer Simulation eine stetige Funktion.*

Der Satz ist trivial, weil bei einem Funktionsplot (aufgefasst als reelle Funktion) die Definitionsmenge endlich ist und diese also nur aus isolierten Stelle besteht. Das bedeutet insbesondere, dass man Unstetigkeiten mit einem Funktionenplotter eigentlich gar nicht darstellen bzw. simulieren kann. Darüber hat man bisher vielleicht noch nicht nachgedacht, aber nun ist es klar!

Wenn es denn einen ersten Hauptsatz gibt, so doch wohl auch einen zweiten!? Voilà:

Zweiter Hauptsatz für Funktionenplotter:
Der Funktionsplot einer trigonometrischen Funktion ist meist falsch.

Das ist *nicht* statistisch bezüglich der Benutzer gemeint. Gemeint ist also *nicht*, dass man als Anwender meistens eine falsche Simulation erhält. (Das müsste empirisch untersucht werden!) Gemeint ist etwas anderes: Wenn man z. B. $x \mapsto \sin(ax)$ plotten will und dabei eine stochastisch erzeugte Belegung für a verwendet, dann wird sich in der *„in der Regel"* ein falscher Plot ergeben.

7 Von der Keilschrift zum Computer: Funktionen und Medien

7.1 Übersicht

In 6.2 gelangten wir zur Frage, was denn eigentlich eine Funktion sei. Das führt auf einen wichtigen Zusammenhang mit Medien, dieser sei zum Schluss skizziert. [32]

Wann tauchte zum ersten Mal der Funktionsbegriff auf? Und in welchem Zusammenhang?

---

[31] Mehr dazu bei [Hischer 2002, 307 ff].

[32] Ausführlich in [Hischer 2002, 319 ff], ferner im Preprint: http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint54.pdf

Will man dieser Frage nachgehen, so ist zu untersuchen, wie uns *heute* der Funktionsbegriff begegnet – und das ist keinesfalls einheitlich, auch nicht in der Mathematik, denn *„Funktionen haben viele Gesichter“*. [33] Und so können wir heute folgende Vielfalt beobachten:

- eindeutige Zuordnung,
- Abhängigkeit einer Größe von einer anderen, insbesondere zeitabhängige Größe,
- Tabelle, (empirische) Wertetabelle,
- „Kurve“, Graph, Datendiagramm, Funktionsplot,
- Formel.

Zwar lassen sich all diese Erscheinungen von Funktionen zusammenfassend und formal als *„rechtseindeutige Relation“* beschreiben, jedoch geht dabei das jeweils Eigentümliche und Inhaltliche verloren. Durchforstet man daraufhin die historische, auch außermathematische, Literatur, so entdeckt man folgende

Meilensteine bei der Entwicklung des Funktionsbegriffs:

19. Jh. v. Chr.	**Babylonier** (*Tabellierung* von Funktionen, *„Formeln“*)
5. Jh. v. Chr. ff	griech. **Antike** (*Kurven* in kinematischer Darstellung)
10.-14. Jh. n. Chr.	**Mittelalter**: **Arezzo**: Erfindung der *Notenschrift* gegen 1000 n. Chr. **Oresme**: g*raphische Darstellung* zeitabhängiger Größen,
17. Jh.	**Newton** (*Fluxionen, Fluenten*) **Leibniz,** Jakob I **Bernoulli** (zuerst das Wort „*Funktion*“)
18. Jh.	Johann I **Bernoulli** (erstmalige Definition von „*Funktion*“) **Euler** (Funktion als *„analytischer Ausdruck“*, d. h. als *„Term“*, ferner: Funktion als *freihändig gezeichnete Kurve*) **Lambert** (empirische Zusammenhänge)
19. Jh.	**Fourier**, **Dirichlet** (Funktion als *eindeutige Zuordnung*) **Peano, Peirce, Schröder** (Funktion als *Relation*)
Anfang 20. Jh.	**Hausdorff** (Funktion als *zweistellige rechtseindeutige Relation*)

7.2 Babylonier: Plimpton 322

Seit der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden im heutigen Irak, dem früheren Mesopotamien, etwa *eine halbe Million babylonischer Keilschrifttafeln* ausgegraben bzw. in Bibliotheken gefunden. Dieses kulturelle Erbe hat nahezu 4000 Jahre bis zu seiner Entdeckung überdauert.

Unter diesen Tafeln befinden sich etwa *vierhundert*, die *mathematische Probleme* oder *mathematische Tabellen* enthalten. Besondere Berühmtheit hat für die Mathematik u. a. „Plimpton 322“ erlangt. Das ist die Tafel Nr. 322 in der Sammlung von G. A. Plimpton in der Universität von Columbia. Sie wurde in den 1920er Jahren gefunden und gelangte für wenige Dollar in den Besitz von Plimpton.

Diese etwa handflächengroße Tontafel von ca. 2 cm Dicke zeigt eine *Tabelle*, bestehend aus 15 Zeilen und 4 Spalten (vgl. Abb. 14).

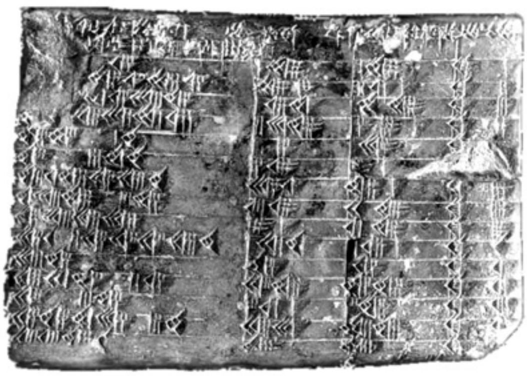


Abb. 14: Keilschrifttafel „Plimpton 322“

[33] [Herget et. al. 2000]

Abb. 15: Aktuelle Transkription von Plimpton 322

1;59,0,15	(1.9834)	1,59	(119)	2,49	(169)	1
1;56,56,58,14,50,6,15	(1.9492)	56,7	(3367)	1,20,25	*(4825)	2
1;55,7,41,15,33,45	(1.9188)	1,16,41	(4601)	1,50,49	(6649)	3
1;53,10,29,32,52,16	(1.8862)	3,31,49	(12709)	5,9,1	(18541)	4
1;48,54,1,40	(1.8150)	1,5	(65)	1,37	(97)	5
1;47,6,41,40	(1.7852)	5,19	(319)	8,1	(481)	6
1;43,11,56,28,26,40	(1.7200)	38,11	(2291)	59,1	(3541)	7
1;41,33,45,14,3,45	(1.6927)	13,19	(799)	20,49	(1249)	8
1;38,33,36,36	(1.6427)	8,1	*(481)	12,49	(769)	9
1;35,10,2,28,27,24,26,40	(1.5861)	1,22,41	(4961)	2,16,1	(8161)	10
1;33,45	(1.5625)	45,0	(45)	1,15,0	(75)	11
1;29,21,54,2,15	(1.4894)	27,59	(1679)	48,49	(2929)	12
1;27,0,3,45	(1.4500)	2,41	*(161)	4,49	(289)	13
1;25,48,51,35,6,40	(1.4302)	29,31	(1771)	53,49	(3229)	14
1;23,13,46,40	(1.3872)	56	(56)	1,46	*(106)	15

Abb. 16: Transliteration von Plimpton 322 — jeweils in Klammern sind auch die dezimalen Werte angegeben (Zahlenangaben mit * waren im Original falsch, sie sind hier korrigiert angegeben).

Sie ist zwar links oben und rechts in der Mitte beschädigt, konnte jedoch inhaltlich rekonstruiert werden. 1945 wurde sie erstmals dechiffriert. 2002 publizierte Eleanor Robson mit Abb. 15 die neueste Transkription und mit Abb. 16 eine zugehörige Transliteration vom babylonischen Sexagesimalsystem in unsere dezimale Notation. [34]

Es handelt sich hierbei um eine numerische Tabelle, wie wir sie heute von *Tabellenkalkulationsprogrammen* kennen: Beachten wir, dass in diesem Kulturkreis von rechts nach links geschrieben wurde, so erkennen wir die erste Spalte ganz rechts einfach als *Zeilennummerierung* (wie bei einer Tabellenkalkulation), und wir haben somit 3 Spalten und 15 Zeilen, deren Inhalt zu interpretieren ist. Die oberste Zeile in den Abb. 14 und 15 enthält sogar *Spaltenköpfe* mit informierendem Text.

Es sei an dieser Stelle nur Folgendes mitgeteilt: [35] In beiden mittleren Spalten stehen jeweils zwei Zahlen eines pythagoreischen Tripels, und zwar Hypotenuse und eine Kathete, die Zeilen sind nach abnehmendem Winkel geordnet, und ganz links steht das Quadrat des Sekans dieses Winkels. Es liegt hier also eine **tabellierte Funktion** vor!

Aufgrund der im Februar 2002 publizierten Forschungsergebnisse von Robson ist nun Plimpton 322 ist nicht mehr – wie bisher – als Dokument zahlentheoretischer Forschung anzusehen, sondern diese

Tafel diente Lehrenden zur Vorbereitung ihrer Übungsaufgaben.

Man kann also davon ausgehen, dass die Tafel entsprechend mehrfach für diesen Gebrauch kopiert wurde. Die Entstehungszeit dieser Tafel konnte Robson auf ca. 1800 v. Chr. bestimmen. Damit liegt nicht nur eine tabellierte Funktion vor, sondern ein nahezu *viertausend Jahre altes Unterrichtsmittel*: Mit der *Keilschrifttafel als Medium* wird eine *Funktion dargestellt* bzw. „simuliert", aber die *Funktion ihrerseits ist ein Medium* zur Vermittlung eines kulturellen Zusammenhangs – ganz im Sinne der Begriffsdefinition von „Medium" in Abschnitt 2.2.

Es wird eine spannende Aufgabe im Mathematikunterricht sein, Plimpton 322 unter Hinzuziehung der Transliteration und einer noch zu erbringenden Keilschriftdeutung zumindest teilweise selbstständig zu transkribieren, die Sexagesimalzahlen dezimal umzuwandeln, alles mit einer Tabellenkalkulation zu erfassen und nachzudeuten: Dies liefert einen wichtigen Zusammenhang zwischen *Neuen Medien und alten Medien* und damit dann auch zum Begriffsverständnis. [36]

34 [Robson 2002], Eleanor Robson ist Mathematikerin und Orientalistin. Vgl. auch [Hischer 2002, 327 ff] und im Preprint: http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint54.pdf

35 Mehr dazu in [Hischer 2002, 328 ff] und im Preprint: http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint54.pdf

36 Vgl. als weiteres Beispiel [Hischer 2002], Kapitel 14: Darstellung und Untersuchung Platonischer Körper „haptisch-händisch" mit Hilfe von „Klickies" bzw. „virtuell" mit Hilfe eines 3D-Programms.

7.3 Mittelalter: Zeitachsen

Von Aristoteles wissen wir, dass er sich in seiner „Physica" u. a. auch mit der *Zeit* befasste und diese mit einer *nach rechts verlaufenden Linie* verglich! Diese Vorstellung hat sich als maßgeblich bis in unsere Zeit erwiesen, und zwar in Verbindung mit der graphischen Darstellung zeitabhängiger Daten. Insbesondere ist offenbar die *zeitachsenorientierte Darstellung* die außerhalb der Mathematik *am meisten genutzte Methode zur Visualisierung von Daten*. Dies ist das Ergebnis einer viel beachteten Langzeitstudie von 1983: *ca. 75 % der in den wichtigsten Zeitungen und Magazinen verwendeten Graphiken sind zeitachsenorientiert!* [37]

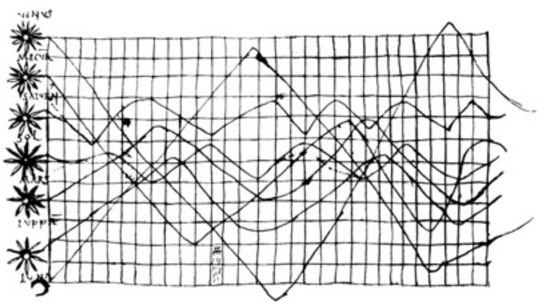


Abb. 17: Zodiac — Planetenbahnen im Tierkreis über einer horizontalen Zeitachse, ca. 950 n. Chr.

Die historische Forschung dokumentiert zeitachsenorientierte Darstellungen erstmals für das Mittelalter um die Jahrtausendwende: Vermutlich von 950 n. Chr., evtl. auch aus dem 11. Jht., stammt die in Abb. 17 wiedergegebene Zeichnung, die im 19. Jht. von Sigmund Günther als Teil eines Manuskripts entdeckt wurde, das der Bayerischen Nationalbibliothek in München gehört. Er publizierte seine Entdeckung 1877. [38]

Es handelt sich bei dieser zeitachsenorientierten Darstellung um eine Veranschaulichung der *Inklination* der *Planetenbahnen* von Venus, Merkur, Saturn, Mars und Jupiter und der Bahnen von Mond und Sonne, also des Zodiac, d. h., des Tierkreises. Und diese Zeichnung wurde für die Verwendung in Klosterschulen erstellt. So können wir festhalten: Diese graphische Darstellung ist ein *Medium*, und sie *stellt* eine zeitabhängige *Funktion dar*, diese *Funktion* wiederum stellt einen wichtigen kulturellen Zusammenhang über die Erkenntnis der Planetenbewegungen im Tierkreis dar, sie *ist* also *ein Medium*. Und dieses Medium wurde in einer Klosterschule erstellt bzw. benutzt, es ist also darüber hinaus ein *Unterrichtsmittel*.

Etwa zur selben Zeit tauchte im europäischen Mittelalter eine andere zeitachsenorientierte Darstellung auf, nämlich die *Notenschrift*, Anfang des 11. Jahrhunderts von Guido von Arezzo erfunden. Die Zeitachse verläuft auch hier (und wie bei Aristoteles) von links nach rechts, und vertikal werden die Ton- und Notenwerte abgetragen. Wir können also nachträglich die *Notenschrift im Sinne des entstehenden funktionalen Denkens* verstehen. Und genau dieses geschieht ja heute bei der digitalen Darstellung der Notenschrift in einer sog. MIDI-Datei. [39]

7.4 Neuzeit: empirische Funktionen

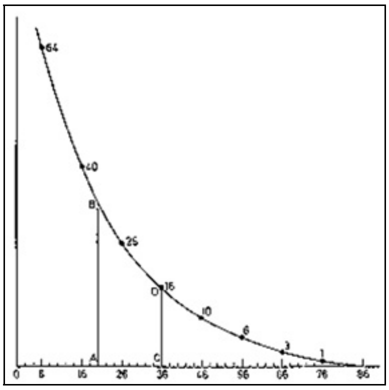


Abb. 18: Lebenserwartungskurve von Huygens

Auf die bekannten Schritte zur Entwicklung des mathematischen Funktionsbegriffs durch Leibniz, Bernoulli, Euler, Fourier und Dirichlet gehe ich hier nicht ein. [40] Stattdessen skizziere ich einige in der Mathematik weniger bekannte Beispiele.

1669: Christiaan Huygens stellt aufgrund empirischer Sterbetabellen seine Berechnungen zur Lebenserwartung dar (Abb. 18).

1686: Edmond Halley, bekannt durch den nach ihm benannten Kometen, berichtete über Beobachtungen, die er mit einem Barometer in verschiedenen Höhen ge-

37 Edward Tufte, dargestellt in [Hischer 2002, 335].

38 Dargestellt in [Hischer 2002, 336 ff].

39 Vgl. hierzu [Hischer 2002, 339 f, 370].

40 Mehr dazu in [Hischer 2002, 319 ff] und im Preprint: http://www.math.uni-sb.de/PREPRINTS/preprint54.pdf

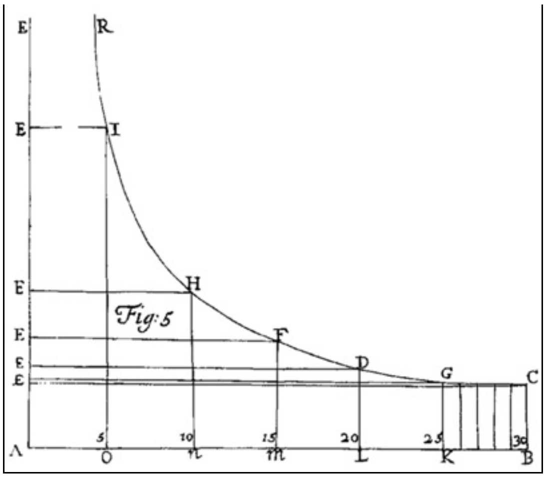


Abb. 19: Luftdruckkurve von Halley

macht hatte. Dabei interpretierte er seine Messwertpaare aus Höhe und Luftdruck als Punkte, die auf einer *Hyperbel* liegen (Abb. 19). Hier erscheint also eine *Hyperbel* nicht mehr wie bisher im geometrischen Zusammenhang, sondern *als Funktionsgraph.* Die Punkte auf einer Hyperbel anzunehmen, war zwar eine Fehldeutung; aber konnte er wissen, dass es eigentlich eine Exponentialfunktion ist?

1760: Johann Heinrich Lambert erfindet Ausgleichskurven zur Interpolation empirischer Daten. Er führte auch Langzeitmessungen der Veränderung der Erdbodentemperatur durch und stellt die Ergebnisse in einer *zeitachsenorientierten Graphik* dar (Abb. 20, **1779** posthum publiziert), wodurch der *Charakter periodischer Funktionen* offenbart wird. Lambert knüpft damit an die 800 Jahre zurück liegende mittelalterliche Methode zeitachsenorientierter Darstellungen an, was vor ihm rund 100 Jahre vorher Huygens gemacht hatte (Abb. 18). Heutige Messergebnisse differieren trotz größerer Datenbasis nur wenig vom Lamberts Messungen!

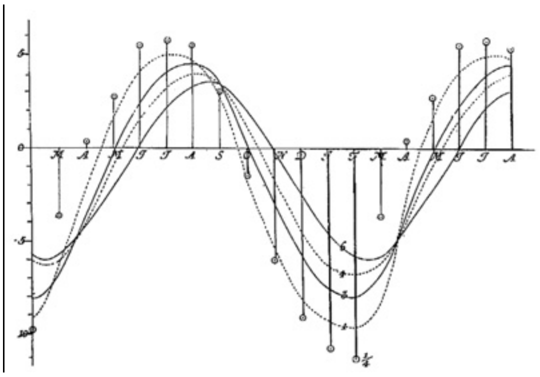


Abb. 20: Langzeittemperaturmessung im Erdboden („Pyrometrie“) durch Lambert

Wir erkennen hieran, dass parallel zur Entwicklung des mathematischen Funktionsbegriffs (aus den Bedürfnissen der Analysis heraus!) *empirische Funktionen* eine immer stärkere Bedeutung erlangten.

Das machen die folgenden Beispiele um so mehr deutlich: So werden ja Statistische Daten zunächst in Tabellen erfasst und nicht nur mit numerischen Methoden analysiert, sondern auch *graphisch visualisiert*, wie wir das gerade bei der Bundestagswahl wieder erlebt haben.

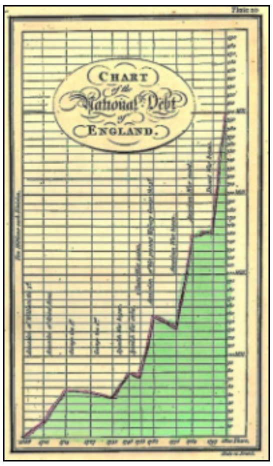


Abb. 21: Liniendiagramm von Playfaire

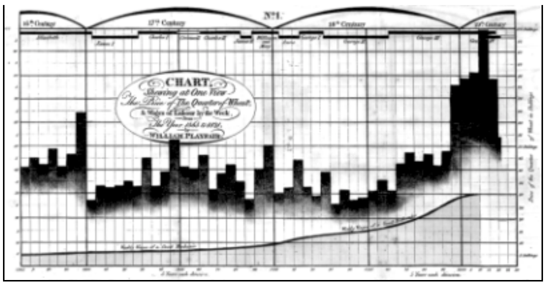


Abb. 22: Balkendiagramm von Playfaire

Die wichtigsten hierfür noch heute verwendeten Visualisierungsformen wie z. B. *Balkengraphik, Liniendiagramm* und *Kreisdiagramm* bzw. *Tortendiagramm* gehen alle auf den Engländer **William Playfaire** zurück, der hierfür seine *„Lineare Arithmetik“* entwickelte. **1786** veröffentlichte Playfaire Darstellungen ökonomischer Daten mittels Balken- und Liniendiagrammen (Abb. 21 und 22).

Es gibt viele weitere Beispiele für empirische Funktionen, von denen noch zwei erwähnt seien:

1796: John Southern und **James Watt** führen in England die *erste automatische Aufzeichnung von Messwertdaten-Paaren* durch, und zwar für die Aufzeichnung von Druck und Volumen bei Dampfmaschinen (sog. „Watt-Indikator“, bis 1822 geheim gehalten). Abb. 23 zeigt ein Foto dieses Watt-Indikators. Wir erkennen deutlich, dass dieses *„funktionierende“* Gerät eine geschlossene Linie zeichnet: Hier wird also ein *thermody-*

namischer „Kreisprozess" erfasst! Das Studium und Verständnis dieser Kurve, die ja einen *funktionalen Zusammenhang* zwischen Druck und Volumen darstellt, ist zugleich ein Schlüssel zum Verständnis der *„Funktion"* der Dampfmaschine!

Dieser Watt-Indikator ist in beeindruckender Form eine *Symbiose aus Medium und Funktion*:

Er vermittelt ein wichtigen Zusammenhang zur Funktionsweise der Dampfmaschine (und erlaubt vor allem ihre Untersuchung und Kontrolle!). Und aufgrund seiner Darstellungsweise ist er „Funktion" im doppelten Sinn: bezüglich der „Funktionsweise" und vor allem der mechanischen Realisierung einer mathematischen Funktion.

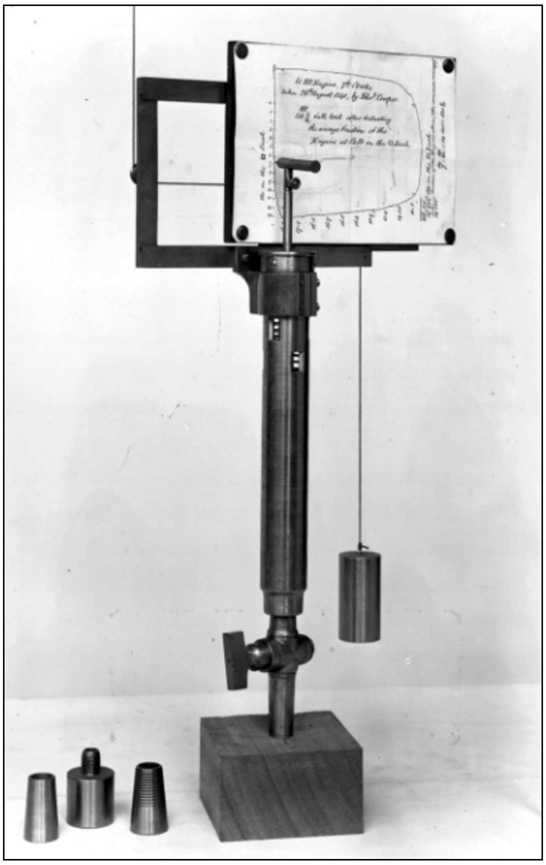


Abb. 23: „Watt-Indikator" von 1796 zur automatischen Aufzeichnung der Volumen-Druck-Kurve bei einer Dampfmaschine

1821: Jean Baptiste Joseph Fourier stellt die *Häufigkeitsverteilung der Altersstruktur* der Einwohner von Paris durch einen *Funktionsgraphen* dar (Abb. 24).

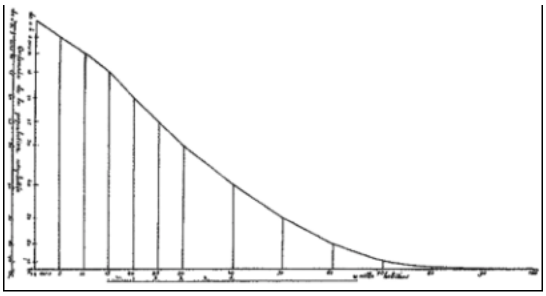


Abb. 24: Häufigkeitsverteilung von Fourier

Hier ist anzumerken, dass wir Fourier und seinem Schüler Dirichlet die entscheidenden Schritte zur Entwicklung des abstrakten Funktionsbegriffs in der Mathematik verdanken! So schreibt Fourier 1822 in seinem Hauptwerk „Theorie der Wärme": [41]

> Allgemein repräsentiert die Funktion $f(x)$ eine Folge von Werten oder Ordinaten, von denen jeder beliebig ist. Da die Abszissen x unendlich viele Werte annehmen dürfen, so gibt es auch unendlich viele Ordinaten $f(x)$. Alle haben bestimmte Zahlenwerte, die positiv, negativ oder Null sein können. Es wird keineswegs angenommen, dass diese Ordinaten einem gemeinsamen Gesetz unterworfen sind; sie folgen einander auf irgendeine Weise und jede Ordinate ist so gegeben, als wäre sie allein gegeben.

Fourier spricht zwar (noch) nicht – wie in der heutigen Mathematik – von der *„Funktion f"*, sondern er bezeichnet den Funktionsterm $f(x)$ als Funktion, aber das war damals (seit den mathematisch-formalen Anfängen bei Bernoulli und Euler) üblich, und es machen wundersamer Weise u. a. viele (Anwender) auch heute (wieder bzw. noch?). Es ist zu vermuten, dass diese verallgemeinernde Sichtweise aus Fouriers eigener Beschäftigung mit *empirischen Daten aus der Physik und der Soziologie* entstanden ist. Denn solche Primärdaten sind ja – wenn überhaupt – nur angenähert durch termdefinierte Funktionen darstellbar.

Damit erscheinen also bereits vor knapp 200 Jahren – mit Bezug auf die Definition von Fourier – die graphischen bzw. numerischen bzw. mechanischen Darstellungen *empirischer Daten* von Huygens, Halley, Lambert, Playfair, Watt, und Fourier *als Funktionen* – Darstellungen, die wir bereits *als Medien* zur Darstellung von Kultur und Wirklichkeit erkannt haben.

---

41 Siehe [Hischer 2002, 359].

7.5 Und heute?

Dieser kulturhistorische Überblick deutet an, in welcher Vielfalt uns „Funktionen“ in den letzten 4000 Jahren der Menschheitsgeschichte begegnen. Dabei zeigen die Beispiele zugleich, dass mittels Funktionen immer wieder Wirklichkeit und Kultur dargestellt wurden, dass ***Funktionen in diesem weiten Sinne*** also ***in der Rolle eines Mediums*** auftreten, während sie in der Mathematik selbst, dieser „Wirklichkeit sui generis“, [42] vor allem zu einem eigenständigen Objekt geworden sind, das auch ohne diesen medialen „Anwendungsaspekt“ bedeutsam ist. Eine solche kulturhistorische Betrachtung von Funktionen und Medien hilft uns dann, den Begriff „Neue Medien“ besser zu verstehen.

- **Weitere Beispiele**

Mit Blick auf die bisherigen Ausführungen modifiziere ich die bekannte Aussage des Technomathematikers Helmut Neunzert über die Mathematik [43] folgt:

Funktionen und Medien sind überall, nur wer weiß das schon!

Dass Funktionen überall in der Mathematik sind, ist wohl klar. Aber außerhalb der Mathematik?

Dazu zum Abschluss noch einige „moderne“ Beispiele, die auf Neuen Medien beruhen.

○ *Pixelgraphik*

Wenn eine **Bitmap-Datei** auf einem Bildschirm dargestellt wird, so liegt eine Funktion vor, die jedem Pixel (also jedem Punkt z. B. der Bildschirm-Matrix) einen Farbcode zuordnet. Durch Zoomen kann man dieses auch direkt erleben: Wenn man nämlich so weit vergrößert, dass man die ursprünglichen Pixel als monochromes Quadrat sieht. Im RGB-Modus wird dabei jedem Bildschirmpixel-Punkt mit den Koordinaten (x, y) ein Zahlentripel $f(x,y) \in B^3$ mit $B = \{0, 1, 2, ... , 255\}$ (also 256 Helligkeitsstufen für jede der drei Farben R, G, B) zugeordnet, so dass damit jedem Bildpunkt 2^{24} Farbwerte zugeordnet werden können (24-Bit-Darstellung).

In Abb. 25 wird dies für 256 Graustufen mit $f(x,y) \in B$ exemplarisch am Buchstaben „*f*“ dargestellt, der nebeneinander in drei Pixelgraphiken von normaler Größe, in vierfacher und in sechzehnfacher Vergrößerung zu sehen ist. Die einzelnen Pixel und ihre marginalen Graustufen (aufgrund einer *Anti-Aliasing-Darstellung*) sind erkennbar.

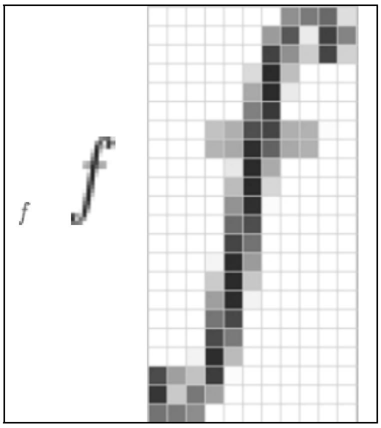


Abb. 25: Graustufen-Pixel in 4- und 16-facher Vergrößerung

○ *WAV: Audio-Datei als „Sample-Tabelle“*

Eine **WAV-Datei** kann als zeitachsenorientierte Funktion aufgefasst werden, die wir als Funktionsgraph sichtbar machen können (bzw. durch nachgeschalteter Verkettung mit „Audio-Funktionen“) auch hören können. Bei ihr werden über den Abtastzeitpunkten der Zeitachse als Funktionswerte die abgetasteten Samples dargestellt. Bei der konkreten Bildschirmdarstellung werden jedoch nicht Abtastzeitpunkte, sondern äquidistante, lückenlos aufeinander folgende Abtastintervalle benutzt, und über diesen werden die Samples als Funktionswerte aufgetragen, so dass eine *Treppenfunktion* vorliegt. Dieses kann man sich mit der Software veranschaulichen, die heute bei nahezu jeder Soundkarte eines PC mitgeliefert wird. Auch hier kann man durch horizontales Zoomen (in der Zeitachse) bis in die Details hineingehen. Noch besser geht es mit einem professionellen Programm, bei dem man auch vertikal zoomen kann (vgl. Abb. 26 und 27). [44]

[42] Nach Wittenberg, siehe auch [Hischer 2002, 125, 132]

[43] „Mathematik ist überall, nur weiß das schon!“. Zitiert in [Hischer 2002, 107].

[44] Hier SEKD Samplitude 2496.

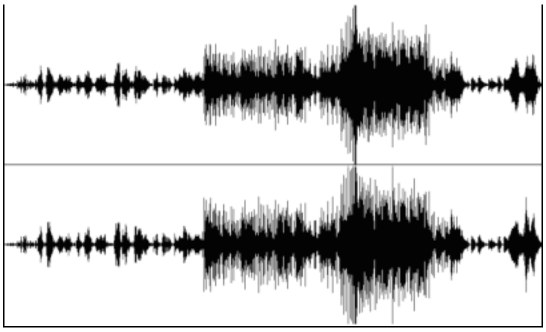


Abb. 26.: WAV-Datei eines Musikstücks mit beiden Stereokanälen

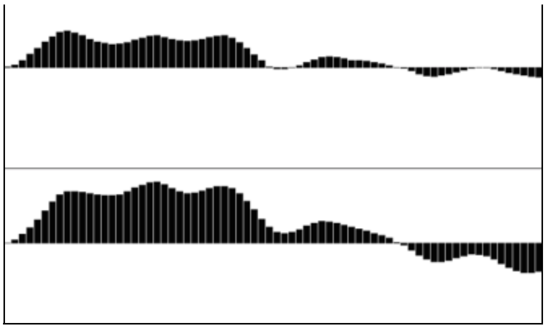


Abb. 27: horizontal und vertikal gezoomter Ausschnitt aus Abb. 26, bei dem man die Abtastintervalle mit den darüber aufgetragenen Samples erkennt. Es liegt also eine Treppenfunktion vor. Die Stereosignale sind hier nicht identisch.

o *MIDI: Audio-Datei als „Steuerdatei“*

Eine **MIDI-Datei** kann ebenfalls als zeitachsenorientierte Funktion aufgefasst werden, die wir sogar als *Partitur* sichtbar machen und durch Verkettung auch hören können. Durch Verkettung können wir dabei jeder einzelnen Stimme ein beliebiges „synthetisches Instrument“ zuordnen. Dieses sollte man mit der eigenen Soundkarte und passender Software ausprobieren. [45]

Diese exemplarisch gedachte Liste ungewohnter Beispiele für *Funktionen außerhalb der Mathematik* möge dazu anregen, auf weitere *Funktionensuche* zu gehen. Das können dann z. B. Tabellen, Formeln, ... , Balkendiagramme, ... , Algorithmen etc. sein, wobei solche Funktionen dann häufig (immer?) auch *Medien* sind und andererseits mit Hilfe (auch Neuer!) Medien *simulierbar* sind.

8 Literatur

Brieskorn, Egbert & Knörrer, Horst [1981]: Ebene algebraische Kurven. Basel / Boston / Stuttgart: Birkhäuser.

Dürr, Hans-Peter & Zimmerli, Walter Ch. (Hrsg.) [1989]: Geist und Natur — Über den Widerspruch zwischen naturwissenschaftlicher Erkenntnis und philosophischer Welterfahrung. Bern / München / Wien: Scherz.

Ermert, Karl (Hrsg.) [1983]: Neue Technologien und Schule — Dokumentation einer Tagung der Evangelischen Akademie Loccum und des Niedersächsischen Kultusministeriums vom 14. bis 16. Oktober 1983. Loccumer Protokolle 23/1983.

Fischer, Roland & Malle, Günter [1985]: Mensch und Mathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut.

Guggenberger, Bernd [1987]: Das Menschenrecht auf Irrtum — Anleitung zur Unvollkommenheit. München, Wien: Carl Hanser Verlag.

v. Hentig, Hartmut [1984]: Das allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit — Ein Pädagoge ermutigt zum Nachdenken über die Neuen Medien. München / Wien: Carl Hanser Verlag.

v. Hentig, Hartmut [2002]: Der technischen Zivilisation gewachsen bleiben. — Nachdenken über die Neuen Medien und das gar nicht mehr allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit. Weinheim / Basel: Beltz Verlag, München / Wien: Carl Hanser Verlag.

[45] Empfehlenswert ist die kostenlose Demoversion des Kompositionsprogramms SIBELIUS ™, herunterladbar unter: http://sibelius.com.

Herget, Wilfried & Malitte, Elvira & Richter, Karin: Funktionen haben viele Gesichter — auch im Unterricht! In: Flade, Lothar & Herget, Wilfried (Hrsg.): Mathematik lehren und lernen nach TIMSS — Anregungen für die Sekundarschulen. Berlin: Verlag Volk und Wissen, 2000, 115 – 124.

Hischer, Horst [2002]: Mathematikunterricht und Neue Medien – Hintergründe und Begründungen aus fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Mit Beiträgen von Anselm Lambert, Thomas Sandmann und Walther Ch. Zimmerli. Hildesheim: Franzbecker.

Issing, Ludwig J. (Hrsg.) [1987]: Medienpädagogik im Informationszeitalter. Weinheim: Deutscher Studienverlag

Jonas, Hans [1984]: Das Prinzip Verantwortung — Versuch einer Ethik für die technologische Zivilisation. Frankfurt.

Kotzmann, Ernst [1989]: Alte Theorie — Neue Praxis. Informationstechnologische Auswirkungen auf die Mathematik. In: Maaß, Jürgen & Schlöglmann, Wolfgang (Hrsg.) [1989]: Mathematik als Technologie? Wechselwirkungen zwischen Mathematik, Neuen Technologien, Aus- und Weiterbildung. Weinheim: Deutscher Studienverlag 1989, 189 – 196.

Kron, Friedrich W. [2000]: Grundwissen Didaktik. München / Basel: UTB, (1. Auflage 1993).

Penrose, Roger [1991]: Computerdenken — Die Debatte um Künstliche Intelligenz, Bewußtsein und die Gesetze der Physik. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft.

Robson, Eleanor [2002]: Words and pictures: new light on Plimpton 322. In: *American Mathematical Monthly*, **109**(2002)2, 105 – 120.

Sandmann, Thomas [2002]: Aliasing bei digitalen Audiosignalen. In: [Hischer 2002, 310 – 318].

Stoll, Clifford [2001]: LogOut — Warum Computer nichts im Klassenzimmer zu suchen haben und andere High-Tech-Ketzereien. Frankfurt am Main: S. Fischer.

Tulodziecki, Gerhard [1989]: Medienerziehung in Schule und Unterricht. Bad Heilbrunn OBB: Verlag Julius Klinkhardt.

von Weizsäcker, Carl Friedrich [1989]: Geist und Natur. In [Dürr & Zimmerli 1989, 17 – 27].

von Weizsäcker, Carl Friedrich [1992]: Zeit und Wissen. München / Wien: Carl Hanser Verlag.

Winkelmann, Bernard [1992]: Zur Rolle des Rechnens in anwendungsorientierter Mathematik: Algebraische, numerische und geometrische (qualitative) Methoden und ihre jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen. In: Hischer, Horst (Hrsg.): Mathematikunterricht im Umbruch? — Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker 1992, 32 – 42.

Zimmerli, Walther Ch. [1989]: Der Mensch als Schöpfer seiner selbst — Realität und Utopie der Neuen Technologien. In: Kwiran, Manfred & Wiater, Werner: Schule im Bannkreis der Computertechnologie. Braunschweig / Augsburg: Brockhaus Verlag. ISBN 3-417-26903-2, 1989, 81 – 96.

Zimmerli, Walther Ch. [2002]: Bildung ist das Paradies. In: [Hischer 2002, 19 – 22]. Erstmals publiziert in DIE WOCHE, 14.7.2000.