

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

Preprint

**Neue Medien und (Allgemein-)Bildung —  
dargestellt am Beispiel des Mathematikunterrichts**

Horst Hischer

Preprint No. 80  
Saarbrücken 2003

Universität des Saarlandes



Fachrichtung 6.1 – Mathematik

**Neue Medien und (Allgemein-)Bildung —  
dargestellt am Beispiel des Mathematikunterrichts**

Horst Hischer

Saarland University  
Department of Mathematics  
Postfach 15 11 50  
D-66041 Saarbrücken  
Germany  
E-Mail: hischer@math.uni-sb.de

submitted: April 09, 2003

Preprint No. 80  
Saarbrücken 2003

Edited by  
FR 6.1 — Mathematik  
Im Stadtwald  
D-66041 Saarbrücken  
Germany

Fax: + 49 (0) 681 302 4443  
E-Mail: [preprint@math.uni-sb.de](mailto:preprint@math.uni-sb.de)  
WWW : <http://www.math.uni-sb.de/>

## Neue Medien und (Allgemein-)Bildung — dargestellt am Beispiel des Mathematikunterrichts

**Horst Hischer**

Fakultät für Mathematik und Informatik – Universität des Saarlandes

Postfach 15 11 50, 66041 Saarbrücken – Germany

Web: [hischer.de/horst/](http://hischer.de/horst/)

Email: [horst@hischer.de](mailto:horst@hischer.de)

**Zusammenfassung:** Im vorliegenden Beitrag wird der Standpunkt eingenommen, dass die Neuen Medien nicht nur als methodisches Hilfsmittel in Lehr-Lern-Prozessen eine Rolle spielen (sollten), sondern dass sie vor allem *allgemeinbildungsrelevant* sind: Hierin zeigt sich eine wichtige *Bildungsaufgabe* für die Schule insgesamt, und zwar im Rahmen einer *Integrativen Medienpädagogik*, bei der im Prinzip alle Unterrichtsfächer (fach-)spezifische *Beiträge zum Verständnis der gesellschaftlich bedeutsamen Neuen Medien* leisten können – *spezifisch* sowohl bezüglich der Verwendung als Unterrichtsmittel (und zwar auch im Rahmen multimedial gestützter Lehr- und Lernprozesse) als auch bezüglich der analysierenden und reflektierenden Betrachtung der Neuen Medien im jeweiligen Fachunterricht – in deren Auftreten und Bedeutung außerhalb der Schule! Dieses Anliegen wird exemplarisch für den Mathematikunterricht erläutert, und zwar am Beispiel des Funktionsbegriffs, denn beim Einsatz von Funktionenplottern kann der „Computer als Täuscher“ erscheinen. Das hierfür verantwortliche „Aliasing“ lässt sich im Mathematikunterricht entzaubern, womit sowohl ein Beitrag zur Medienkunde als auch zur Medienerziehung geleistet wird – denn: Bildung ist das Paradies (Walther Ch. Zimmerli)!

### 1 Einleitung

Seit einigen Jahren gibt es (erneut seit den 1980ern) bildungspolitische Aktivitäten dahingehend, die Schulen „modern“ mit sog. „*Neuen Medien*“ auszustatten, um damit allen Schülerinnen und Schülern den Umgang mit dem *Computer* und (das ist tatsächlich neu:) mit dem *Internet* zu ermöglichen. Zugleich soll damit dann das *multimedial gestützte Lehren und Lernen* über die (finanziell oft aufwendige) Entwicklung entsprechender „*Lernumgebungen*“ vorangetrieben werden. Und solche Aktionen beschränken sich dann nicht etwa nur auf bestimmte Unterrichtsfächer, sondern sie beziehen sich auf die Schule insgesamt. Dabei besteht in der kritischen und engagierten Öffentlichkeit aus Politik, Presse, Elternhaus, Schule und Wissenschaft – auch aus der Erziehungswissenschaft – keineswegs Einmütigkeit über die Bildungsbedeutsamkeit solcher Maßnahmen, die uns überdies oft mit *Schlagwörtern* wie z. B. „Computerführerschein“, „Internetführerschein“ oder „Medienkompetenz“ begegnen – statt mit „*schlagenden Argumenten*“ – und dann oftmals auch noch in Verbindung mit „Schlüsselqualifikation“ (wo es dann eher um „Schlüsselprobleme“ gehen sollte). Und dabei werden diese Attribuierungen teils lobend und befürwortend, teils abfällig und kritisierend verwendet.

Gemeinsam ist solchen recht unterschiedlichen Standpunkten i. d. R., dass es dann (nur!) um das Für und Wider des *Einsatzes* Neuer Medien in Lehr- und Lernprozessen geht. Aus medienpädagogischer Sicht betrifft dies dann die sog. „Mediendidaktik“ (die eigentlich besser „Medienmethodik“ heißen müsste), wohingegen die nicht minder wichtigen Bereiche „Medienkunde“ und „Medienerziehung“ in der Diskussion eine (wenn überhaupt!) nur marginale Rolle spielen. Wenn jedoch medienkundliche bzw. medienerzieherische Aspekte im Bildungsprozess relevant werden sollen, müssen die Neuen Medien zum *Inhalt des Unterrichts* werden: Sie müssen in einem allgemein bildenden Rahmen einerseits in ihrer (grundsätzlichen) Funktionsweise verstanden werden, und andererseits muss ihre Bedeutung für Individuum und Gesellschaft kritisch wahrgenommen werden (können). Ein solches Ansinnen stellt jedoch für viele Fachdidaktiken (noch immer!) eine provokative Herausforderung dar, weil es als „fachfremd“ empfunden wird.

Es gibt aber in letzter Zeit *erneut* Stimmen, die eindringlich fordern, dass die Begegnung von Schule mit den Neuen Medien sich nicht in deren Einsatz erschöpfen darf – „erneut“ deshalb, weil dieses bereits 1983 gefordert wurde<sup>1</sup> –, die Zeit damals aber wohl noch nicht reif war für eine nachhaltige Umsetzung im Unterricht.

Besondere Bekanntheit erreichte in diesem Zusammenhang im Jahre 2001 Clifford Stoll mit seinem Buch „*LogOut — Warum Computer nichts im Klassenzimmer zu suchen haben und andere High-Tech-Ketzereien*“.<sup>2</sup> Dieses auf den ersten Blick unterhaltsam und amüsant geschriebene Buch verfolgt (leider?) – wie sich schon im Untertitel „... *Ketzereien* ...“ andeutet – nicht das Ziel objektiver (Auf-)Klärung, sondern es bezieht einseitig und ablehnend Stellungnahme.

Beachtenswert ist vor allem das kürzlich erschienene Buch von Hartmut von Hentig: „*Der technischen Zivilisation gewachsen bleiben — Nachdenken über die Neuen Medien und das gar nicht mehr allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit*“. Mit diesem neuen Werk, das abwägend und vor allem mahnend geschrieben ist, greift von Hentig sein bekanntes Buch ähnlichen Titels von 1984 vertiefend auf: „*Das allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit — Ein Pädagoge ermutigt zum Nachdenken über die Neuen Medien*“.<sup>3</sup>

Nimmt man sowohl Stolls als auch von Hentigs Kritik ernst, so wird plausibel, dass es in der didaktischen Forschung und auch bei der Gestaltung von Unterricht nicht nur um den Einsatz solcher neuartiger Medien gehen sollte, sondern dass man auch untersuchen müsste, berücksichtigen müsste, welche Wirkungen hierdurch bei den Schülerinnen und Schülern hervorgerufen werden!

Und wir müssen noch einen Schritt weiter gehen und fragen, welche Rolle denn die Neuen Medien im Rahmen von Bildung und Allgemeinbildung spielen sollen. Ist etwa nur „Benutzungskompetenz“ das Ziel? Der Philosoph Walter Ch. Zimmerli schreibt hierzu mit Bezug auf das Internet u. a.:<sup>4</sup>

Aber Bildung bedeutet nicht nur Internet-Benutzungskompetenz, sondern auch *Persönlichkeitsbildung*. Deren Ziele bestehen nicht in Karrieremustern oder Kognitionsfertigkeiten, sondern in einer *Schärfung der Urteilskraft*, der *Erringung transkultureller Kompetenz* sowie der *Stärkung geistiger Orientierung*. [...]

Wenn wir uns klarmachen, dass auch eine große Bibliothek ein externer Wissensspeicher ist, dessen Inhalt selbst gebildete Menschen nicht ständig vor sich haben, dann leuchtet ein, dass auch das Internet strukturell nichts anderes bereitstellt, als eine große Bibliothek, für die wir allerdings keinen Gesamtkatalog haben. Über Bildung zu verfügen hieße daher, so viel zu wissen, dass man sich in den externen Wissensspeichern zurechtfindet – oder in den Worten von Georg Simmel: „*Gebildet ist, wer weiß, wo er findet, was er nicht weiß.*“

Es geht also darum, *im Nichtwissen intelligent navigieren* zu können. Voraussetzung dafür ist ein *Wissen um die Grenzen der eigenen Kompetenz* und zugleich zu wissen, wie und mit welcher technischen Hilfe man sucht, was man noch nicht weiß, was aber als *latentes Wissen* im Netz stehen könnte, [...] Nach wie vor trifft zu, dass Bildung im Sinne dessen, was man einmal gelernt hat, eine ähnliche Bedeutung hat, wie Jean Paul sie der Erinnerung zuschrieb: *das Paradies zu sein, aus dem wir nicht vertrieben werden können.*

Wenn also gemäß Zimmerli künftig als gebildet nur noch jemand gelten kann, der sich das Wissen der Welt im Internet erschließen kann und dessen Urteilskraft geschärft ist, so sollten wir über das Internet hinausweisend bedenken: Offenbar genügt es nicht, Neue Medien im Unterricht einzusetzen, sondern sie müssen auch bezüglich ihrer Möglichkeiten kritisch reflektiert werden – und zwar sowohl bezüglich ihrer Chancen und Risiken! *Und das macht dann erst Bildung aus!* Zugleich haben wir damit andeutungsweise erfahren, worum es in der Medienpädagogik gehen könnte.

Die hier verwendeten Bezeichnungen „Neue Medien“, „Mediendidaktik“ etc. sollen nun zunächst eine kurze inhaltliche Klärung erfahren.

---

<sup>1</sup> Auf einer Experten-Grundsatztagung zum Thema „Neue Technologien und Schule“; vgl. [Ermert 1983].

<sup>2</sup> [Stoll 2001]

<sup>3</sup> [von Hentig 2002] und [von Hentig 1984]

<sup>4</sup> [Zimmerli 2000, 22]

## 2 Medienpädagogische Begriffsklärungen

### 2.1 Medium, Medien

Was wollen oder können wir im Rahmen von Allgemeinbildung unter „Medien“ verstehen? Die lateinischen Wurzeln geben uns einen ersten Hinweis: <sup>5</sup>

- „**medius**“: *in der Mitte, dazwischen liegend, Mittelding, vermitteln*, ferner auch: *störend*
- „**medium**“: *Mitte*, aber auch: *Öffentlichkeit, Gemeinwohl, Gemeingut*

So treten uns Medien *im pädagogischen Kontext* in zwei etymologisch bedingten Grundbedeutungen gegenüber:

1. Medien als *Vermittler von Kultur* – Medien in diesem Sinne sind Dinge, Instrumente, symbolische Ausdrucksformen, „*die zwischen Mensch und Welt etwas vermitteln*“. Inhalt dieses Vermittlungszusammenhangs ist im weitesten Sinn *Kultur*, im engeren Sinn *Information über Kultur*.
2. Medien als *Darstellung von Kultur* – Medien in diesem Sinne sind öffentliche kulturelle Darstellungen als „*Gemeingut*“, also *für alle zugängliche dargestellte Kultur*. Auch *Verständnis und Funktion der Massenmedien* gehören zu diesem Wortsinn.

Diese pädagogikbezogene Deutung von Medien zeigt uns eine *Doppelgesichtigkeit von Medien* auf, die wir auch wie folgt beschreiben können:

- Medien *vermitteln Kultur*, und Medien *sind* dargestellte *Kultur*.

Und Kron ergänzt: <sup>6</sup>

- Von didaktischem Interesse ist die erste Bestimmung. Hier weist die Bedeutung des Wortes darauf hin, dass Menschen an einer Handlung oder an deren Wirkung beteiligt sind. Medien werden also von Menschen hervorgebracht, und in diesem Prozeß der Hervorbringung des Mediums und seines Inhalts in der Handlung bringt der Mensch zugleich sich selbst ins Spiel. Darauf weist der reflexive Sinngehalt hin. In und mit Medien also stellt der Mensch seine Kultur und zugleich sich selbst dar.

Da wir hier „Neue Medien“ in ihrer pädagogischen Relevanz reflektieren, sollten wir also dem o. g. *reflexiven Sinngehalt* und dem *Handlungsaspekt* der Medien *Beachtung schenken!* Auch diese Feststellung weist darauf hin, dass wir „Neue Medien“ nicht nur in Bezug auf ihre Einsatzmöglichkeiten im Unterricht zu betrachten haben. So zitiert Kron zwei wichtige der Kommunikationswissenschaft entnommene „Mediendefinitionen“ <sup>7</sup> und merkt dazu kritisch an: <sup>8</sup>

- Die didaktischen Mediendefinitionen rücken den Vermittlungscharakter der Medien im Rahmen der organisierten Lehr- und Lernprozesse ins Zentrum. In einer starken Engführung wird den Medien [...] die Rolle von Hilfsmitteln zugespielt.

Und den letzten Satz möchte ich wie folgt ausschärfen:

- In einer starken Engführung wird den Medien *nur* die Rolle von Hilfsmitteln zugespielt.

Kron geht auch auf die *enge Auffassung* und die *weite Auffassung von Medien* ein: <sup>9</sup>

- [...] ist die Frage nach der Klassifikation der Medien aufgetaucht. [...] Zwei Grundbedeutungen sind zu erkennen [...]:

- Die *weite Auffassung*. Hier werden alle Medien berücksichtigt, wie z. B. Sprache, Gestik und Mimik; Spiel, Fest und Feier; Unterricht; Theater; Schrift; Bild; aber auch Unterrichtsmittel wie z. B. Lehr-, Lern- und Arbeitsmittel [...]; Lernprogramme; technische, audiovisuelle und elektronische Medien; Computer(-spiele); Internet; Multimedia.

---

<sup>5</sup> Nach [Kron 2000, 324 f].

<sup>6</sup> [Kron 2000, 324]; Hervorhebungen nicht im Original.

<sup>7</sup> [Kron 2000, 324 f]

<sup>8</sup> [Kron 2000, 325]; Hervorhebung nicht im Original.

<sup>9</sup> [Kron 2000, 327]

Hierzu schreibt Tulodziecki: <sup>10</sup>

Geht man von einem solch weiten Medienbegriff aus, so hat jede Interaktion und Kommunikation – d. h. auch jeder unterrichtliche und erzieherische Vorgang – eine mediale Komponente.

Dieser weite Medienbegriff ist somit in unserem Rahmen wenig hilfreich, wir brauchen daher auch eine *enge* Auffassung von „Medium“, von der man dann spricht, <sup>11</sup>

wenn Informationen mit Hilfe technischer Geräte gespeichert oder übertragen und in bildlicher und symbolischer Darstellung wiedergegeben werden. Beispiele für Medien in diesem engeren Sinn sind Arbeits- und Diaprojektoren, Film, Video und Fernsehen, Schallplatte, Tonband und Hörfunk, Bildplatte, Bildschirmtext und Computer.

## 2.2 Medienpädagogik

An mehreren Stellen wurde bereits deutlich, dass es aus pädagogischer Sicht *nicht nur um den Einsatz* von Medien gehen kann, sondern dass diese auch selbst in den pädagogischen Blickpunkt geraten müssen. Das führt zu einer Charakterisierung der *Medienpädagogik*: <sup>12</sup>

Für die Behandlung pädagogischer Fragen theoretischer und praktischer Art im Zusammenhang mit Medien wird in der Literatur am häufigsten der Begriff **Medienpädagogik** verwendet [...]. Er umfaßt alle Bereiche, in denen Medien für die Entwicklung des Menschen, für die Erziehung, für die Aus- und Weiterbildung sowie für die Erwachsenenbildung pädagogische Relevanz haben. Es erscheint deshalb sinnvoll, den Begriff „Medienpädagogik“ als übergeordnete Bezeichnung für alle pädagogisch orientierten Beschäftigungen mit Medien in Theorie und Praxis zu verstehen und einzelne Aspekte der Medienpädagogik näher zu spezifizieren.

Issing hebt anschließend die Teilbereiche *Mediendidaktik*, *Medienkunde*, *Medienerziehung* und *Medienforschung* hervor, wobei Kron folgende Auffassung vertritt: <sup>13</sup>

In den vorgenannten Literaturquellen wird Medienforschung als eigenständiges Gebiet angegeben. Im Horizont der Auffassung von Didaktik als Wissenschaft kann diese Sonderstellung verabschiedet werden, insofern Forschung zu den konstitutiven Grundaufgaben einer jeden Wissenschaftsdisziplin – einschließlich der Teildisziplinen – gehört.

Ich teile diese Auffassung und charakterisiere damit mit Bezug auf Issing: <sup>14</sup>

Die **Mediendidaktik** befasst sich

mit den Funktionen und Wirkungen von Medien in Lehr- und Lernprozessen, d. h. also mit medienvermitteltem Lernen [...]. Ihr Ziel ist die Förderung des Lernens durch eine didaktisch geeignete Gestaltung und methodisch wirksame Verwendung von Medien. Die Auswahl und der Einsatz von Medien soll dabei in Abstimmung mit den Unterrichtszielen, den Unterrichtsinhalten und den Unterrichtsmethoden erfolgen sowie unter Berücksichtigung der anthropogenen und soziokulturellen Bedingungen von Schule und Umwelt [...].

Die sog. „Neuen Medien“, insbesondere also Computer, Hypertextdarstellungen und multimediale Lernumgebungen, bilden damit einen wichtigen Untersuchungsgegenstand der Mediendidaktik.

Die **Medienkunde** betrifft die

Vermittlung von Kenntnissen über Medien, z. B. über die historische Entwicklung der Medien, über Medieninstitutionen und ihre Organisation, über Mediengesetzgebung, Produktionsprozesse, Technik und Gestaltung von Medien; auch die Vermittlung von Erfahrungen in der Bedienung und praktischen Handhabung von Medien zählt zu den Aufgaben der Medienkunde.

Hier erkennen wir einen *weiteren* die „Neuen Medien“ betreffenden pädagogischen Aspekt. Die **„Medienerziehung“** wird gemäß Issing in der Literatur z. T. auch als *„Medienpädagogik im engeren Sinn“* definiert, und er fährt fort:

Die Medienerziehung befaßt sich [...] vorwiegend mit den Massenmedien, aber auch mit Unterrichtsmedien. Sie hat das Ziel, zu einem bewußten, reflektierten, kritischen, d. h. sozial erwünschten Umgang mit Medien zu erziehen.

„Neue Medien“ sind damit auch Gegenstand von Untersuchungen zur *Medienerziehung*.

---

<sup>10</sup> [Tulodziecki 1989, 14]

<sup>11</sup> [Tulodziecki 1989, 16 f]

<sup>12</sup> [Issing 1987, 24]

<sup>13</sup> [Kron 2000, 322]; Hervorhebung nicht im Original.

<sup>14</sup> [Issing 1987, 25 f]

### 2.3 Integrative Medienpädagogik

Auf dem Bisherigen aufbauend postuliere ich nun eine **Integrative Medienpädagogik** als normativen Begriff, bei dem „integrativ“ eine *zweifache Qualität* hat:

1. Alle drei Aspekte der *Medienpädagogik* – *Mediendidaktik*, *Medienerziehung* und *Medienkunde* – sind bei Planung, Durchführung und Evaluation von Unterricht *in ihrer Ganzheit* (also „*integrativ*“!) und nicht losgelöst voneinander oder nur für sich zu berücksichtigen.
2. Eine so verstandene Medienpädagogik kann bei Bezug auf die „Neuen Medien“ wegen der Komplexität des Gegenstandes nicht von einem Unterrichtsfach allein übernommen werden, auch weder vom Fach Mathematik noch vom Fach Informatik – vielmehr sind *im Prinzip alle Unterrichtsfächer* gemeinsam (also „*integrativ*“!) mit je spezifischen Ansätzen (!) gefordert.

Die zweite Aussage ist zugleich eine klare Absage an das in den 1980er Jahren oft propagierte „Leitfachprinzip“, weil sich jedes „Leitfach“ damit verheben würde. Eine *integrative Medienpädagogik* kommt somit also stets in ihrem *doppelten Sinn* zum Tragen: nämlich über alle drei Aspekte der Medienpädagogik *und* über (im Prinzip) alle Unterrichtsfächer! Und hinsichtlich der drei Aspekte der Medienpädagogik gilt dann speziell bezüglich der Neuen Medien:

- **Mediendidaktik:** Computer und Internet werden eine immer wichtigere Rolle im Rahmen von Lehr- und Lernprozessen spielen, und zwar als ein *neuartiges Medium* (*Hilfsmittel* oder *Werkzeug*) bei der Aneignung von und Teilhabe an Kultur, also beim *Enkulturationsprozess*. Lehrkräfte, Didaktiker, Bildungsplaner, Softwareentwickler und Schulbuchverlage stehen hier vor großen Herausforderungen.
- **Medienkunde:** Voraussetzung für eine sinnvolle Nutzung solcher Medien ist eine *solide Kompetenz im Umgang* mit ihnen. Dazu gehören auch *Kenntnisse u. a. über Aufbau und Funktionsweise* solcher Medien, die als *grundlegend und allgemeinbildend* zu bestimmen (!) sind.
- **Medienerziehung:** Unverzichtbar zur Persönlichkeitsbildung ist eine *Anleitung zum bewussten, reflektierten und kritischen Umgang* mit solchen Medien, und zwar im Rahmen eines Allgemeinbildungskonzept.

Die Umsetzung dieser Aspekte ist eine Bildungsaufgabe für Schule insgesamt und damit prinzipiell für alle Unterrichtsfächer mit je spezifischer Ausrichtung. Dies wird in Abb. 1 dargestellt.

Zugleich vertritt diese Graphik den pädagogischen Anspruch, dass auch das sog. „multimediale Lernen“ *nicht nur* einseitig in instrumenteller Anwendung der Neuen Medien bezüglich einer Effektivierung der Lernvorgänge zu sehen ist, sondern dass möglichst auch hier die skizzierten medienpädagogischen Aspekte berücksichtigt werden sollten und somit die verwendete „black box“ (zumindest ein wenig!) zu einer „white box“ werden kann.



Abb. 1: Integrative Medienpädagogik als eine Bildungsaufgabe von Schule



## 2.4 Neue Medien

In Abschnitt 2.1 wurde dargelegt, dass es im vorliegenden Themenfeld *um Medien im engeren Sinne* geht. Wir betrachten somit vorrangig „*technische Medien*“, und „Neue Medien“ haben somit etwas mit dem zu tun, was uns oft unter den Bezeichnungen „Neue Techniken“ begegnet.

Nun ist die Geschichte der Entwicklung der Technik aus anthropologischer Sicht zugleich eine Geschichte der „Auslagerung“ mechanischer Fähigkeiten und Fertigkeiten des Menschen auf Geräte und Maschinen, angefangen beim Faustkeil über Waffen und Werkzeuge bis hin zu heutigen geradezu monumentalen Baumaschinen, die mit dem kleinen Finger zu bedienen sind. Die universellen *Verarbeitungsmöglichkeiten heutiger und erst recht künftiger informatischer Systeme* sind nun insofern *revolutionär*, als hier erstmals nicht wie bei früheren Maschinen mechanische Fähigkeiten bzw. Fertigkeiten des Menschen „ausgelagert“ werden,<sup>15</sup> sondern ein neuer Maschinentypus *Fähigkeiten* übernimmt, die *bisher den menschlichen Geistesleistungen zuzurechnen* waren. Wir brauchen hier nur an das *Schachspiel* zu denken, dessen souveräne Beherrschung stets als Kennzeichen besonderer Intelligenz galt, und nunmehr treten Großmeister gegen Schachautomaten an, und als „normaler“ Schachspieler hat man ohnehin Schwierigkeiten, gegen gute Schachcomputer, die es ja bereits für den PC gibt, zu gewinnen. Bedeutet das nun, dass die Fähigkeit zum Schachspielen gar nichts oder nur wenig mit Denkvermögen und Intelligenz zu tun hat, oder bedeutet das, dass Schachcomputer *denken* können und damit in gewissem Sinn *intelligent* sind?<sup>16</sup> So wird also durch das Auftreten solcher Systeme unser bisheriges Menschenbild in Frage gestellt! Immerhin wird nun in diesem Sinn – mit aller gebotenen Vorsicht formuliert – „*Denkfähigkeit*“ *auf den Computer ausgelagert* – mag uns dies nun passen oder nicht! Und *das* begründet die herausragende Stellung der auf der Mikroelektronik beruhenden Informations- (und der Kommunikations-) Techniken und somit ihre „Neuheit“, was zu folgender Charakterisierung führt:

**Neue Techniken** sind die alle Technologien und Wissenschaften durchdringenden datenprozessierenden Informationstechniken, sie sind sog. „Querschnittstechniken“ – mit anderen Worten: Der Computer erweist sich in nahezu allen Bereichen als ein nützliches Werkzeug, ja gar als ein unverzichtbares Werkzeug! **Neue Medien** sind dann solche *technischen Medien*, die auf diesen Neuen Techniken beruhen.

Und weil diese „Neuheit“ nicht nur heute vorliegt, sondern weil sie wegen des Qualitätssprungs von der Auslagerung mechanischer Fähigkeiten auf Geräte und Maschinen hin zur Auslagerung menschlicher Geistesleistungen auf informatische Systeme von grundsätzlicher Art ist, führt dies zur Großschreibung „Neue Techniken“ und „Neue Medien“.<sup>17</sup>

## 2.5 Unterrichtsmittel vs. Unterrichtsinhalt, Werkzeug vs. Hilfsmittel

Während es bei den *mediendidaktischen* Aspekten Neuer Medien vorrangig um ihren *fachdidaktisch begründeten Einsatz* im Unterricht und damit um den *Umgang* mit ihnen geht, werden die Neuen Medien nun sowohl unter *medienkundlichen* als auch unter *medienerzieherischen* Aspekten zum *Unterrichtsinhalt*, sie werden also *im Unterricht untersucht*, und sie dienen dabei der *Aufklärung* und der Vermittlung von *Haltungen* und *Einstellungen*. Damit ist klar, dass auch der *Umgang* mit den Neuen Medien und ihre *Anwendung* nicht nur mediendidaktischen Zielen dienen, sondern dass entsprechende individuelle Erfahrungen eine geradezu unverzichtbare Voraussetzung dafür sind, dass sie zum Unterrichtsinhalt werden können, indem ihre *Grundlagen* und *Grundstrukturen* und ihre *Bedeutung für Individuum und Gesellschaft* erörtert werden.

---

<sup>15</sup> Vgl. [Fischer & Malle 1985, 257 – 258].

<sup>16</sup> Vgl. hierzu u. a. [Penrose 1991, 12].

<sup>17</sup> Die Großschreibung „Neue Techniken“ verwendet bereits Habermas, wenn auch in anderem Sinn. Die Großschreibung „Neue Medien“ verwendet auch [von Hentig 2002].

Da sowohl dieser Umgang mit den Neuen Medien als auch deren Erörterung jeweils in *Unterrichtsfächern* erfolgt, liegt hier eine zweifache *fachdidaktische Perspektive* vor: Neue Medien in ihrer doppelten Rolle als *Unterrichtsmittel* und als *Unterrichtsinhalt*.

Die in Abschnitt 2.3 ausführlich diskutierten drei medienpädagogischen Aspekte zählen methodologisch zur sog. *Bereichsdidaktik*.<sup>18</sup> Damit haben wir zumindest folgende Perspektiven gefunden, unter denen wir die Neuen Medien betrachten können:

- **fachdidaktische Funktion** Neuer Medien:
  - als *Unterrichtsmittel* (d. h.: als *Werkzeug* oder *Hilfsmittel*)
  - als *Unterrichtsinhalt* (d. h.: als *Gegenstand des Unterrichts*)
- **bereichsdidaktische Sicht** Neuer Medien:
  - *mediendidaktisch* — *medienkundlich* — *medienerzieherisch*

Diese *zweifache Sichtweise Neuer Medien* lässt sich in einer *Perspektivenmatrix* darstellen (Abb. 2): Die Neuen Medien spielen unter medienpädagogischem Aspekt zunächst *methodisch* als *Werkzeug* oder *Hilfsmittel* die entscheidende Rolle. Daneben sollte aber im Unterricht auch ihre instrumentelle Rolle für den individuellen Erkenntnis- und Lernvorgang *inhaltlich* reflektiert werden, sie sollten also *auch* in ihrer medienpädagogischen Rolle zum *Unterrichtsinhalt* werden.

<b>Neue Medien</b>	<b>als</b>	<b>Unterrichtsmittel</b>	<b>Unterrichtsinhalt</b>
<b>unter dem Aspekt</b>			
<b>Mediendidaktik</b>			
<b>Medienkunde</b>			
<b>Medienerziehung</b>			

Abb. 2: Perspektivenmatrix Neuer Medien —  
bereichsdidaktische Sicht (links) und fachdidaktische Funktion (oben)

Diese Darstellung soll deutlich machen, dass die beiden Kategorien „Unterrichtsmittel“ und „Unterrichtsinhalt“ der Perspektivenmatrix nicht trennscharf sind: dass also einerseits zum Unterrichtsmittel, dem „Instrument“, stets auch der Unterrichtsinhalt, das „Thema“ bzw. der „Gegenstand“, gehört und umgekehrt; dass jedoch andererseits „Mediendidaktik“, „Medienkunde“ und „Medienerziehung“ zwar jeweils *Schwerpunkte unterrichtlichen Handelns* beschreiben, aber dennoch *nicht voneinander zu trennen* sind. Oder anders:

- *Neue Medien als Unterrichtsmittel* gehören zwar aus bereichsdidaktischer Sicht im Rahmen von Unterrichtsplanung und -evaluation zunächst in die Mediendidaktik, aber dennoch müssen teilweise auch ihre medienkundlichen und medienpädagogischen Aspekte berücksichtigt werden, indem sie unter diesen Aspekten dann zum Unterrichtsinhalt werden.
- *Neue Medien als Unterrichtsinhalt* sind primär medienkundlich und medienpädagogisch von Bedeutung, aber hierzu müssen sie auch in gewissem Umfang medienpädagogisch betrachtet werden und also als Unterrichtsmittel verwendet werden.
- Und gleichwohl wird es unterrichtliche Situationen geben, in denen Neue Medien als Unterrichtsmittel nicht auch zum Unterrichtsinhalt werden (können oder sollen), und es wird vielfach unvermeidbar sein, dass Neue Medien als Unterrichtsinhalt nicht auch zum Unterrichtsmittel werden können oder sollen (z. B. weil eine Verwendung spezieller Medien im Unterricht gar nicht möglich ist – evtl. auch gar nicht erwünscht ist!).

<sup>18</sup> Vgl. [Kron 2000, 35 f].

Die noch nicht spezifizierte Unterscheidung der Unterrichtsmittel in *Werkzeug* und *Hilfsmittel* mag irritieren, weil sie nicht selbstredend (und ebenfalls nicht trennscharf!) ist. Sie zielt jedoch akzentuierend auf *idealtypisch grundsätzliche Unterschiede im Anwendungsbereich* solcher Medien ab: Ein *Werkzeug* ist – so meine implizite Definition im pädagogischen Kontext – in diesem Sinne dadurch gekennzeichnet, dass es – zumindest in einem bestimmten Bereich – recht vielseitig verwendbar ist. Ein *Hilfsmittel* dagegen ist (nach diesem Verständnis) weniger vielseitig, sondern es kann im Prinzip für nur einen Zweck konstruiert worden sein. So wird ein Korkenzieher in der Regel nur ein *Hilfsmittel* sein und nur in extremen Notsituationen als *Werkzeug* verwendet werden (wenn anderes nicht verfügbar ist). Ein Werkzeug verleiht seinem Benutzer aber – im Gegensatz zum Hilfsmittel – *Macht* im Sinne von Carl Friedrich von Weizsäcker: <sup>19</sup>

Macht nenne ich die Bereitstellung von Mitteln für offengehaltene Zwecke.

So wäre beispielsweise ein Computeralgebrasystem als (vielseitiges!) „*Macht verleihendes*“ *Werkzeug* anzusehen, hingegen wäre ein „kastrierter“ Funktionenplotter, der nur die Veranschaulichung und Konstantenvariation fest implementierter Funktionsterme erlaubt, ein geradezu „*ohnmächtiges*“ *Hilfsmittel*, das nur für vom „Autor“ vorgegebene Zwecke verwendet werden kann. <sup>20</sup> Diese Betrachtungen können generell auf jegliche sog. „*Lehr- und Lernprogramme*“ <sup>21</sup> ausgedehnt werden: Wenn sie „offen“ konzipiert sind, für nicht eng umgrenzte Gebiete anwendbar sind (wie z. B. Computeralgebrasysteme, Programmiersprachen), sind sie „mächtig“, sonst sind sie nur Hilfsmittel. „*Bildung als Paradies*“ <sup>22</sup> braucht aber „*Offenheit*“!

Ich betrachte im Folgenden nur *Werkzeuge* in diesem Sinn. Weitere Beispiele für solche „Werkzeuge“ aus dem Bereich der Neuen Medien wären dann etwa *im fächerübergreifenden Kontext* Programme für Textverarbeitung und Tabellenkalkulation, *in der Mathematik* Funktionenplotter und *in der Informatik* mächtige Programmiersprachen wie z. B. SML.

### 3 Neue Medien als Unterrichtsinhalt — zum Beispiel: Funktionenplotter

#### 3.1 Wichtige Werkzeuge im Mathematikunterricht

Folgende *Werkzeuge*, die auf Neuen Medien basieren, sind derzeit und in naher Zukunft für den Mathematikunterricht bedeutsam:

*Funktionenplotter, Computeralgebrasysteme, Dynamische Geometriesysteme, Tabellenkalkulationssysteme, Werkzeuge zur Visualisierung* und das *Internet*.

Die Gruppierung der ersten vier Werkzeugtypen ist keinesfalls trennscharf, denn das Anwendungsspektrum der einzelnen Systeme nimmt zu, und die ursprünglich unterschiedlichen, für spezielle Anwendungen konzipierten Systeme wachsen zusammen – eine Tendenz, die wir bei den sog. „Anwendungsprogrammen“ wie etwa zur Textverarbeitung oder zur Graphikbearbeitung seit langem beobachten können. Wenn hier also diese Bezeichnungen für vornehmlich *mathematikorientierte Anwendersoftware* benutzt wird, dann ist hiermit eine *idealtypische Verwendung* gemeint, mit der die *ursprünglich intendierten Anwendungsrichtungen* angesprochen werden. Insbesondere aktuelle leistungsfähige Versionen der *Taschencomputer* (TC) wie *ClassPad 300* (CASIO) oder *Voyage 200* (Texas Instruments) weisen ein derartiges Zusammenwachsen idealtypisch unterschiedlicher Teilsysteme zu einem Ganzen auf.

Im Folgenden betrachte ich exemplarisch nur **Funktionenplotter**, und das, was sie als Ausgabe liefern, ist ein **Funktionsplot**.

---

<sup>19</sup> [von Weizsäcker 1992, 19]. In [von Weizsäcker 1989, 1054] schreibt er: „Ich definiere Macht als [...] Bereitstellung von Mitteln für freigehaltene Zwecke.“

<sup>20</sup> Hierbei soll jedoch nicht geleugnet werden, dass auch ein Korkenzieher gelegentlich Macht verleihen kann.

<sup>21</sup> Ein fachwissenschaftlich *noch nicht* definierter Terminus – z. Z. noch extrem „fuzzy“.

<sup>22</sup> Nach Walther Ch. Zimmerli, vgl. die Einleitung.

### 3.2 Ein Phänomen: der Rechner als „Täuscher“

Funktionsplotter sind ein nützliches Werkzeug, und sie liefern von termdefinierten Funktionen schnell einen mehr oder weniger „schönen“ Funktionsplot. Es gibt sie als eigenständige Anwendung für PCs, aber sie sind heute wesentlicher Bestandteil jedes grafikfähigen Taschenrechners (GTR) und jedes Taschencomputers (TC), und man findet sie als selbstverständliche Beigabe zu den derzeit üblichen Computeralgebrasystemen, obwohl sie nichts mit Computeralgebra zu tun haben, sondern nur die „NG-Betriebsart“ des CAS betreffen (den „numerisch-graphischen Modus“).

Abb. 3 zeigt den Graphen der Sinusfunktion, dargestellt mit einem der handelsüblichen Taschencomputer. Jedoch ergibt sich ein **verheerender Effekt**: Nimmt man z. B. den CASIO FX 2.0, so sind die Graphen von  $\sin(x)$  und  $\sin(127x)$  identisch, jedoch ist der TI 92 keinesfalls besser, denn bei ihm sind die Graphen von  $\sin(x)$  und  $\sin(239x)$  identisch. — Also können wir den Taschencomputern doch nicht so recht trauen, wenn sie uns so massiv *täuschen*!? Die Hoffnung, dass es die für den PC konzipierten Funktionsplotter besser machen, erweist sich bei genauerer Untersuchung als trügerisch, denn dieser Effekt ist systembedingt typisch für alle mathematischen Funktionsplotter! Darauf wird noch einzugehen sein.

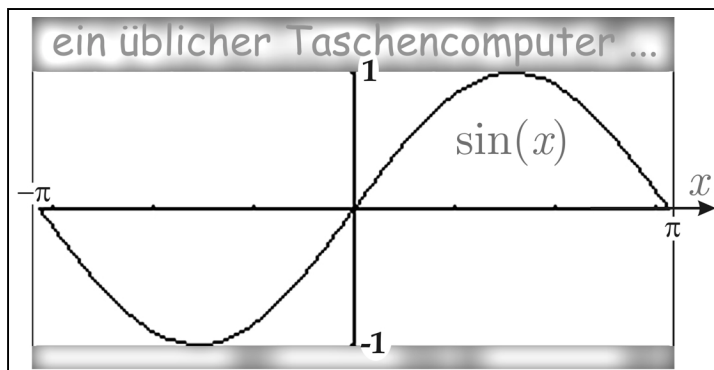


Abb. 3: Rechner als Täuscher —  
CASIO FX 2.0: Graphen von  $\sin(x)$  und  $\sin(127x)$  sind identisch,  
TI 92: Graphen von  $\sin(x)$  und  $\sin(239x)$  sind identisch.

Doch halten wir zunächst **phänomenologisch** fest: Die Funktionsplots zweier verschiedener Funktionen können unter gewissen Bedingungen (welchen?) identisch sein – *wir werden also* u. U. durch die Neuen Medien massiv *getäuscht*, d. h.: Uns begegnet hier der „Rechner als Täuscher“. Für den Mathematikunterricht ergibt sich nun hieraus die Aufgabe, im *medienkundlichen* Sinn dieses Phänomen zu entschlüsseln und darüber hinaus im *medienerzieherischen* Sinn eine kritische und wachsame Haltung gegenüber den Ergebnissen zu entwickeln, die uns die Neuen Medien liefern. Und wir sehen erneut: *Bildung ist das Paradies!*

So liegt hier ein im Unterricht leicht demonstrierbares bzw. erfahrbares und zugleich überzeugendes Beispiel dafür vor, wie ein *Unterrichtsmittel* zum *Unterrichtsinhalt* werden kann und wie zugleich ein *Transfer* auf andere Eigenschaften Neuer Medien möglich ist, weil hieran exemplarisch deutlich werden kann, dass die durch die Neuen Medien präsentierten Ergebnisse nicht vorbehaltlos „geglaubt“ werden dürfen, sondern dass stets eine kritische Haltung erforderlich ist.

### 3.3 Funktion und Simulation

Winkelmann macht darauf aufmerksam, dass man Funktionsplotter unter dem Aspekt der *Simulation* sehen muss: <sup>23</sup>

- **Begriff der Simulation**

Simulation ist die effektive Übersetzung eines mathematischen Objekts oder Prozesses in numerische Operationen und gegebenenfalls graphische Darstellungen. Dazu gehören Parameter-Festlegungen, Approximationen, Auswählen von Randbedingungen. [...]

Das mathematische Objekt ist der Graph einer Funktion [...]. Für die Simulation muß ich die Zahlengerade durch ein endliches Intervall ersetzen (Randbedingung), dieses Intervall durch endlich-viele Punkte darin approximieren, für diese Punkte eine Approximation des Funktionswertes berechnen, die berechneten Punkte durch Bildschirmpixel approximieren und diese durch Zwischenpixel verbinden. Mit etwas mathematischem Verständnis, z. B. bezüglich Stetigkeit und Periodizität der Sinusfunktion, gewinnt man dennoch einen gültigen Eindruck der Funktion.

<sup>23</sup> [Winkelmann 1992, 34]

Doch Abb. 3 macht uns stutzig: Ergeben solche Simulationen auch immer einen *gültigen Eindruck des Graphen* – auch „mit etwas mathematischem Verständnis“? Dabei erwähnt Winkelmann selber das in dieser Abbildung dargestellte Phänomen, das er „Stroboskopeffekt“ nennt.

Zur Klärung werfen wir einen Blick auf die sprachlichen Wurzeln von „Simulation“: So tritt das lateinische **simulo** (*abbilden, darstellen*; auch: *vorgeben, erheucheln*) sowohl in **simulacrum** (*Abbild, Nachbildung*; auch: *Trugbild*) als auch in **simulatio** (*Verstellung, Heuchelei, Täuschung*) wieder auf! „Simulation“ hat damit ursprünglich eine negative Konnotation, die aber offenbar aus dem Bewusstsein verschwunden ist: Denn es beabsichtigt wohl niemand, eine *trügerische Darstellung* zu liefern, wenn es um „Modellbildung und Simulation“ geht!

Gleichwohl zeigt uns Abb. 3 nach Winkelmann sowohl eine Simulation von  $\sin(x)$  im heutigen Verständnis als auch eine Simulation von z. B.  $\sin(127x)$  im ursprünglichen Verständnis, nämlich als „trügerische Darstellung“ und damit als „Täuschung“. Ich werde daher solche „Fehldarstellungen“ in Anknüpfung an Winkelmann pleonastisch als „**Fehlsimulation**“ bezeichnen.

Keinesfalls haben diese Fehlsimulationen aber etwas mit „optischen Täuschungen“ zu tun, denn die hier beobachteten „Täuschungen“ sind ja objektiv vorhanden, während optische Täuschungen subjektive, physiologische Wahrnehmungsstörungen sind!

Mit der *Interpretation des Funktionenplottens als Simulation* zeigt sich im Nachhinein, dass auch die vertraute *händische* Darstellung von Funktionen im Rahmen klassischer Kurvendiskussionen eigentlich nur eine *Simulation* (von Funktionsgraphen) ist – aber mit welcher Güte? Aber was *ist* dann eigentlich ein *Funktionsgraph* oder gar eine *Funktion*? Und wir können solche Betrachtungen fortsetzen, etwa bei der Zeichnung eines Kreises. Was *ist* eigentlich eine Gerade, ein Kreis, ...?

Wenn wir also Neue Medien zum *Unterrichtsinhalt* werden lassen, werden damit zugleich klassische philosophisch-mathematische Fragen bedeutsam, so etwa die Unterscheidung zwischen der *Idee* eines Objekts und dessen *Darstellung* – hier wirken Neue Medien auf alte Medien zurück:

*Wir können damit neue Inhalte in alten sehen!*

### 3.4 Stroboskopeffekt als „Aliasing“

Die von Winkelmann verwendete Bezeichnung „*Stroboskopeffekt*“ für das in Abb. 3 dargestellte Phänomen soll deutlich machen, dass hier eine Ähnlichkeit zu dem Effekt der sich scheinbar rückwärts drehenden Kutschenräder in Wildwestfilmen besteht. Ganz im Sinne der in diesem Beitrag propagierten medienkundlichen und medienerzieherischen Aspekte plädierte Winkelmann bereits 1991 dafür, solche Probleme zum *Unterrichtsinhalt* zu machen.

Doch können wir das im Mathematikunterricht leisten? Können wir mehr leisten, als diesen Stroboskopeffekt nur zu demonstrieren bzw. ihn erleben zu lassen und dann *medienerzieherisch* ein kritisches Bewusstsein zu wecken, oder können wir bei den Schülerinnen und Schülern (und den Lehrkräften!) darüber hinaus auch *medienkundlich* ein Verständnis für die Ursache(n) des Stroboskopeffekts entwickeln? Können wir ihn vielleicht sogar gezielt *erzeugen*?

In der Numerik zählt dieses Phänomen zum sog. „Aliasing“ (von lateinisch **alias** für „sonst“, auch „anders als angegeben“) – das sind also „andere“ (d. h. hier: falsche) Darstellungen (nunmehr pleonastisch: *Fehlsimulationen*). Das Aliasing wird in der Numerik unter der „Theorie der Moiré-Phänomene“ umfassend behandelt.<sup>24</sup> (Und bei Graphikprogrammen haben wir uns vielleicht schon oft gefragt, was denn wohl die dort verfügbare Einstellung „Anti-Aliasing“ bedeutet!)

Wenngleich das Aliasing keine optische Täuschung ist, so ist es dennoch eine *Täuschung*, nämlich eine *Fehlsimulation* (s. o.). Wie können wir nun im Unterricht vorgehen, um dieses Phänomen medienkundlich aufzuklären? Dies sei im Folgenden dargestellt.

---

<sup>24</sup> Vgl. z. B. [Amidror 2002].

### 3.5 Erste analysierende Experimente zum Aliasing

Wir nähern uns der Ursache des Phänomens durch Erzeugung des Aliasing mit unterschiedlichen Funktionenplottern: Nachdem wir den Effekt bei *einem* Funktionenplotter (etwa einem Taschencomputer) an dem Term  $\sin(ax)$  für einen konkreten Frequenzfaktor  $a$  entdeckt haben (etwa wie in Abb. 3), erforschen wir ihn experimentell für andere Werte und Plotter. Dabei ist es vorteilhaft,  $\sin(a\pi x)$  anstelle von  $\sin(ax)$  zu untersuchen und dabei im Graphikfenster die  $x$ -Achse von  $-1$  bis  $+1$  oder von  $0$  bis  $2$  zu skalieren.

Experimentieren wir in diesem Sinne etwa mit Derive™ bei einer Bildschirmauflösung von  $1024 \times 768$  Pixeln und *nebeneinander* angeordnetem Algebra- und Graphikfenster, so ergeben sich identische Plots für  $\sin(\pi x)$  und  $\sin(1393\pi x)$ ! Ändern wir nun interaktiv die Breite des Graphikfensters, so erhalten wir eine *Fülle verheerender Simulationen*: Je nach Fensterbreite (und damit je nach horizontaler verfügbarer Pixel-Zahl im Graphikfenster) erhalten wir unterschiedliche Fehlsimulationen für  $\sin(1393\pi x)$ . Abb. 4 zeigt zwei Beispiele: Im linken Fenster ist die Fehlsimulation von

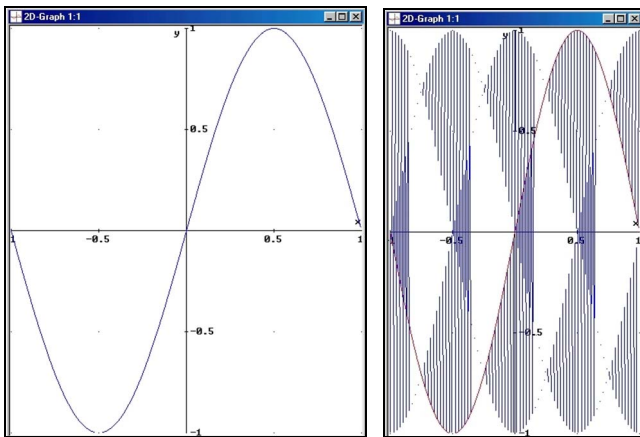


Abb. 4: Simulation von  $\sin(\pi x)$  und  $\sin(1393\pi x)$  mittels Derive, nur die Fenstergröße wurde variiert. Links sind beide Simulationen identisch.

$\sin(1393\pi x)$  identisch mit der „richtigen“ Simulation von  $\sin(\pi x)$ , im rechten schmaleren Fenster ergibt sich hingegen eine andere Fehlsimulation von  $\sin(1393\pi x)$ , während die von  $\sin(\pi x)$  weiterhin richtig ist.

Für die Veränderung neigt man spontan zu einer naiven Erklärung, etwa: das Aliasing „irgendwie“ der diskreten Pixeldarstellung auf dem Bildschirm zuzuschreiben. Wir können jedoch mit anderen Funktionenplotttern auch zu ganz anderen Ergebnissen gelangen, etwa mit dem Programm ParaPlot von Robert Triftshäuser, vgl.:

<http://hischer.de/mathematik/didaktik/neuemedien/>

Wenn wir hier in Analogie zu Derive einen „richtigen“ Wert für  $a$  gefunden haben, der zu einer „Fehlsimulation“ wie in Abb. 4 links führt, so ist diese Simulation überraschenderweise unabhängig von der Fensterbreite – ganz im Gegensatz zu Derive! Das Durchforsten der Einstellungsmöglichkeiten von ParaPlot führt dann zu der Entdeckung, dass man hier die Anzahl der (äquidistanten) Stützstellen frei wählen kann – bei Derive hingegen sucht man eine solche Option vergeblich: Derive muss also eine eingebaute *Stützstellenautomatik* haben, was durch Kontaktaufnahme mit den Programmentwicklern auch bestätigt wird! Dieses unterschiedliche Verhalten der Funktionenplotter kommt uns sehr gelegen: Es führt uns zur Problemlösung!

### 3.6 Aliasing als Abtastphänomen

Halten wir fest: Da der Stroboskopeffekt *nicht* bei allen Funktionenplotttern von der Fensterbreite abhängt, wird er somit (primär) *nicht* durch die diskrete Bildschirmauflösung verursacht, sondern seine Ursache muss bereits *rechnerintern* zu suchen sein: Der Funktionsterm wird durch die vorgegebenen bzw. gewählten Stützstellen *abgetastet*, und die damit erhaltenen Koordinatenpaare  $(x; f(x))$  bilden eine interne Wertetabelle, um dann als Pixel auf dem Bildschirm dargestellt zu werden. Dabei ist ein sekundärer Aliasing-Effekt bei der Bildschirmdarstellung möglich, dem wir hier nicht nachgehen müssen, weil er für die grundlegende Erklärung des Phänomens entbehrlich ist.

Das Programm ParaPlot macht dieses Phänomen nun auch für Schülerinnen und Schüler erfahrbar und „begreifbar“, weil die *Stützstellenanzahl einzeln für jeden Funktionsterm (!) wählbar* ist.

Das folgende Beispiel zeigt das Wesentliche des Aliasing (Abb. 5):

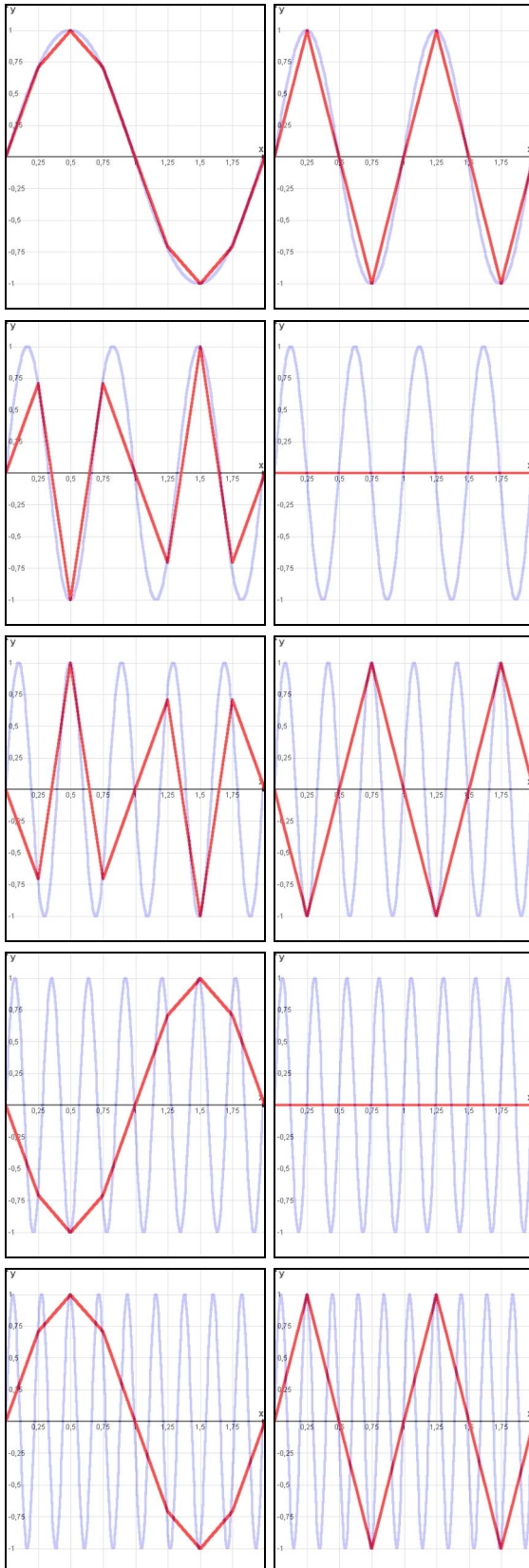


Abb. 5: Aliasing-Graphen (rot bzw. dunkel) von  $\sin(x)$ ,  $\sin(2x)$ , ...,  $\sin(10x)$  (zeilenweise der Reihe nach von links oben nach rechts unten) bei einer Abtastrate von 8 in linearer Interpolation, zusätzlich die „richtigen“ Graphen (hell).

Sukzessive werden hier die Graphen von  $\sin(\pi x)$ ,  $\sin(2\pi x)$ , ...,  $\sin(10\pi x)$  jeweils über dem Intervall  $[0; 2]$  „abgetastet“ (rechnerintern wird hierbei eine Wertetabelle mit äquidistanten Stützstellen erstellt), und die so gefundenen Wertepaare  $(x; f(x))$  werden durch Pixel auf dem Bildschirm *linear interpoliert* dargestellt (rot bzw. dunkel). Als Schrittweite wurde in diesem elementaren Beispiel  $\frac{1}{4}$  gewählt, d. h., in hier gibt es 9 Stützstellen und damit 8 Abtastintervalle. Die Anzahl der Abtastintervalle ist die **Abtastrate**  $F_S$ , die sog. „**Sampling-Frequenz**“, es ist also  $F_S = 8$ .

Jedes Einzelbild enthält zugleich eine „richtige“ Simulation (hellblau bzw. hellgrau) mit hoher Abtastrate (hier: 500).

Es wird dann einsichtig, weshalb sich bei der Abtastung von  $\sin(4x)$  (Frequenz  $F = 4 = \frac{1}{2} F_S$ ) und  $\sin(8x)$  (Frequenz  $F = 8 = F_S$ ) als „Aliasing-Graph“ jeweils die  $x$ -Achse ergibt: Die Abtastung erfolgt immer gerade im Nulldurchgang des Graphen!

Sind die abzutastenden Frequenzen größer als 4, so ergeben sich erkennbar Fehlsimulationen.

Die Abtastung von  $\sin(9x)$  mit der Abtastrate 8 ist identisch mit der Abtastung von  $\sin(x)$ , die von  $\sin(10x)$  ist identisch mit der Abtastung von  $\sin(2x)$  etc.!

Wir entdecken somit insgesamt:

1. Die „Fehlsimulationen“ von  $\sin(n\pi x)$  wiederholen sich mit wachsendem  $n$  „periodisch“ (wie weit?), konkret: Die Simulationen von  $\sin(k\pi x)$  und  $\sin((8n+k)\pi x)$  sind identisch!
2. Die Samplingfrequenz  $F_S$  muss größer als die doppelte abzutastende Frequenz sein, um einen einigermaßen guten Eindruck von der zu simulierenden Funktion zu erhalten:  $F_S > 2F$

Mit der zweiten Entdeckung haben wir das *Shannon-sche Abtasttheorem* der Informationstheorie plausibel gemacht, das in der Audiotechnik von großer Wichtigkeit ist.

ParaPlot erweist sich damit nicht nur als Werkzeug, sondern darüber hinaus als *selbstreferentielles Werkzeug*, das also zur Untersuchung seiner selbst geeignet ist und auf diese Weise in besonderem Maße medienkundlichen und – bei entsprechender reflektierender Vertiefung im Unterricht – auch medien-erzieherischen Unterrichtszielen dienen kann. (ParaPlot ist Freeware.)

### 3.7 Ein Exkurs: Fourierrücktransformation

Das Shannonsche Abtasttheorem besagt ja mehr, als wir entdeckt haben: Sind die abzutastenden Frequenzen (etwa bei der A/D-Wandlung bei einer Mikrophonaufnahme) kleiner als die halbe Sampling-Frequenz, so ist eine *exakte Rekonstruktion des Originalsignals möglich*. Mit dem folgenden kleinen für das Computeralgebrasystem Maple geschriebene Programm kann man dies testen (Abb. 6). Es stellt eine Komplettierung der Abtastung aus Abb. 5 dar, und es liefert tatsächlich für  $F_S > 2F$  die „Originalsignale“.

Diese Rücktransformation übersteigt allerdings das in der Schule Leistbare und Sinnvolle, weil die dafür erforderliche Mathematik zu aufwendig ist, um eigenständig von den Schülerinnen und Schülern entdeckt und entwickelt werden zu können. Dennoch wird dieses Programm für Lehrkräfte eine sinnvolle Hintergrundinformation sein können, und es ist legitim, so etwas im Unterricht zu demonstrieren, wobei Maple hier nur exemplarisch verwendet worden ist. Es wird für die Schülerinnen und Schüler beeindruckend sein, zu sehen, wie es hier tatsächlich bei Einhaltung der Shannon-Bedingung zur exakten Rekonstruktion kommt.

```

restart;
Frequ_Sample := 8;
Frequ_half := icoquo(Frequ_Sample, 2);
Anzahl := 10;
for a to Anzahl do
  for Sample from 0 to Frequ_Sample do
    x_Sample := 0 +  $\frac{2 \text{ Sample}}{\text{Frequ\_Sample}}$ ; f_Sample := sin( $\pi a x_{\text{Sample}}$ )
  end do ;
  for n from 0 to Frequ_half do
    
$$A_n := \frac{2 \left( \sum_{kA=0}^{\text{Frequ\_Sample}-1} f_{kA} \cos(\pi n x_{kA}) \right)}{\text{Frequ\_Sample}};$$

    
$$B_n := \frac{2 \left( \sum_{kB=0}^{\text{Frequ\_Sample}-1} f_{kB} \sin(\pi n x_{kB}) \right)}{\text{Frequ\_Sample}}$$

  end do ;
  
$$\Phi(x) := \frac{A_0}{2} + \left( \sum_{kPhi=1}^{\text{Frequ\_halb}} (A_{kPhi} \cos(\pi kPhi x) + B_{kPhi} \sin(\pi kPhi x)) \right);$$

  Punkte_a := plot([seq([x_ks, f_ks], ks = 0 .. Frequ_Sample)], x = 0 .. 2, style = point,
    color = black);
  LinIntPol_a := plot([seq([x_ks, f_ks], ks = 0 .. Frequ_Sample)], x = 0 .. 2, style = line,
    color = red, thickness = 4);
  Phiplot_a := plot( $\Phi(x)$ , x = 0 .. 2, color = green, thickness = 8);
  Orgplot_a := plot(sin( $\pi a x$ ), x = 0 .. 2, color = blue, thickness = 2)
end do ;
for a to Anzahl do plotsdisplay(Punkte_a, LinIntPol_a, Phiplot_a, Orgplot_a) end do

```

Abb. 6: Maple-Programm zur Fourierrücktransformation

### 3.8 Untersuchung „unbekannter“ Funktionenplotter

Wir sind nunmehr (auch ohne den Exkurs im vorigen Abschnitt) in der Lage, bei jedem Funktionenplotter das Aliasing gezielt erzeugen, vorausgesetzt, dass wir die Stützstellendichte (und damit die „Sampling-Frequenz“!) kennen oder diese wählen können: Wählen wir das Graphikfenster wie in den Abb. 3, 4 oder 5, so ist die Simulation von  $\sin((F_S + 1)\pi x)$  identisch mit der von  $\sin(\pi x)$ ! Wenn wir andererseits bei einem Funktionenplotter Aliasing zufällig oder über geduldiges Probieren entdecken, so können wir durch Variation des aktuellen Frequenzfaktors daraus die aktuelle Abtastrate ermitteln: Entdecken wir für einen Frequenzfaktor  $F > 1$  Aliasing, so muss  $F = kF_S + 1$  mit einer natürlichen Zahl  $k$  gelten. Wir simulieren dann  $\sin((F - 1)\pi x)$ , und es muss sich die  $x$ -Achse ergeben. Wegen  $F - 1 = kF_S$  kann diese Frequenz aber noch ein Vielfaches der gesuchten Sampling-Frequenz sein. Bei Taschencomputern wird die so gefundene Abtastfrequenz in aller Regel nur geringfügig kleiner als die horizontale Bildschirmauflösung sein (einige Randpixel werden nicht für die Funktionsabtastung verwendet). Angenommen, wir hätten nun bereits die Sampling-Frequenz gefunden, dann müsste sich bei dem halben Wert von  $F - 1$  auch die  $x$ -Achse ergeben, und wenn wir diesen Wert dann um 1 erhöhen, darf *keine* mit  $\sin(\pi x)$  identische Simulation entstehen!

Wir können all uns diese Testmethoden exemplarisch an Abb. 5 verdeutlichen. Geht man zu höheren (realistischen) Auflösungen über, so bleibt das Prinzip von Abb. 5 erhalten, denn die Pixel der intern erzeugten Wertetabelle werden i. d. R. linear interpoliert.



### 3.9 Die Hauptsätze für Funktionenplotter <sup>25</sup>

**Erster Hauptsatz:** Jeder Funktionsplot ist stetig.

Anders: *Jede durch einen Funktionenplotter dargestellte Funktion zeigt in ihrer Simulation eine stetige Funktion.* Der Satz ist trivial, weil bei einem Funktionsplot (aufgefasst als reelle Funktion) die Definitionsmenge endlich ist und diese also nur aus isolierten Stelle besteht. Das bedeutet insbesondere, dass man Unstetigkeiten mit einem Funktionenplotter eigentlich gar nicht darstellen bzw. simulieren kann.

**Zweiter Hauptsatz:** Der Funktionsplot einer trigonometrischen Funktion ist meist falsch.

Das ist *nicht* statistisch bezüglich der Benutzer gemeint. Gemeint ist also *nicht*, dass man als Anwender meistens eine falsche Simulation erhält. (Das müsste empirisch untersucht werden!) Gemeint ist etwas anderes: Wenn man z. B.  $x \mapsto \sin(ax)$  plotten will und dabei eine stochastisch erzeugte Belegung für  $a$  verwendet, dann wird sich in der „in der Regel“ ein falscher Plot ergeben.

## 4 Literatur

- Amidor, Isaac [2000]: The Theory of the Moiré Phenomenon. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Dürr, Hans-Peter & Zimmerli, Walter Ch. (Hrsg.) [1989]: Geist und Natur — Über den Widerspruch zwischen naturwissenschaftlicher Erkenntnis und philosophischer Welterfahrung. Bern / München / Wien: Scherz.
- Ermert, Karl (Hrsg.) [1983]: Neue Technologien und Schule — Dokumentation einer Tagung der Evangelischen Akademie Loccum und des Niedersächsischen Kultusministeriums vom 14. bis 16. Oktober 1983. Loccum Protokolle 23/1983.
- Fischer, Roland & Malle, Günter [1985]: Mensch und Mathematik. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Hentig, Hartmut v. [1984]: Das allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit — Ein Pädagoge ermutigt zum Nachdenken über die Neuen Medien. München / Wien: Carl Hanser Verlag.
- Hentig, Hartmut v. [2002]: Der technischen Zivilisation gewachsen bleiben. — Nachdenken über die Neuen Medien und das gar nicht mehr allmähliche Verschwinden der Wirklichkeit. Weinheim / Basel: Beltz Verlag, München / Wien: Carl Hanser Verlag.
- Hischer, Horst (Hrsg.) [1992]: Mathematikunterricht im Umbruch? — Erörterungen zur möglichen „Trivialisierung“ von mathematischen Gebieten durch Hardware und Software. Bericht über die 9. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 27. bis 29. September 1991 in Wolfenbüttel. Hildesheim: Franzbecker.
- Hischer, Horst [2002]: Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Mit Beiträgen von Anselm Lambert, Thomas Sandmann und Walther Ch. Zimmerli. Hildesheim: Franzbecker.
- Issing, Ludwig J. (Hrsg.) [1987]: Medienpädagogik im Informationszeitalter. Weinheim: Deutscher Studienverlag.
- Kron, Friedrich W. [2000]: Grundwissen Didaktik. München / Basel: UTB (1. Auflage 1993).
- Penrose, Roger [1991]: Computerdenken — Die Debatte um Künstliche Intelligenz, Bewußtsein und die Gesetze der Physik. Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft.
- Stoll, Clifford [2001]: LogOut — Warum Computer nichts im Klassenzimmer zu suchen haben und andere High-Tech-Ketzereien. Frankfurt am Main: S. Fischer.
- Tulodziecki, Gerhard [1989]: Medienerziehung in Schule und Unterricht. Bad Heilbrunn OBB: Verlag Julius Klinkhardt.
- Weizsäcker, Carl Friedrich von [1989]: Geist und Natur. In [Dürr & Zimerli 1989, 17 – 27].
- Weizsäcker, Carl Friedrich von [1992]: Zeit und Wissen. München / Wien: Carl Hanser Verlag.
- Winkelmann, Bernard [1992]: Zur Rolle des Rechnens in anwendungsorientierter Mathematik: Algebraische, numerische und geometrische (qualitative) Methoden und ihre jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen. In: [Hischer 1992, 32 – 42].
- Zimmerli, Walther Ch. [2000]: Bildung ist das Paradies. In: DIE WOCHE, 14.7.2000.

---

<sup>25</sup> Mehr dazu bei [Hischer 2002, 307 ff].