

Iterative Monoide *

Reiner Marzinkewitsch

A 85 /18

Abstract: This paper introduces the notion of iterative monoides, which are an algebraic description of the structure of formal languages. By proving some invariants concerning structure-preserving mappings we justify this definition. Especially we exhibit, that a language's iterative monoides and those of its image under canonical homomorphism as subset of the language's syntactical monoid are closely related.

Furthermore we try to obtain finiteness-conditions for some classes of formal languages (regular languages, Dyck-languages, bracketed c.f. languages, c.f. languages) by taking advantage of the new concepts.

* Diese Arbeit wurde 1985 vom Verfasser als Diplomarbeit am Fachbereich für angewandte Mathematik und Informatik der Universität des Saarlandes eingereicht. Die Themenstellung stammt von Prof. Dr. G. Hotz.

Notationen

$\langle A \rangle$ Sei M ein Monoid, $A \subset M$. Dann ist $\langle A \rangle$ das von A erzeugte Untermonoid von M .

$x \in A \ (R)$ Ist R eine Äquivalenzrelation auf der Menge M und $x \in M$, $A \subset M$, so schreiben wir $x \in A \ (R)$ für $\exists a \in A : x = a \ (R)$.

$B \subset A \ (R)$ analog mit $A, B \subset M$

\mathbb{N} ist die Menge der natürlichen Zahlen,
 \mathbb{P} die Menge der Primzahlen.

$A.B$ bezeichnet das Komplexprodukt der Mengen A und B .
 $A.B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$
Um in Kapitel 4 zwischen dem Gebrauch von $($ bzw. $)$ als Metazeichen und als Elementen von \tilde{X}_1 unterscheiden zu können, verabreden wir, daß die Metazeichen gemeint sind, solange nicht durch Verwendung des Komplexproduktes oder des Konkatenationszeichens das Gegenteil angedeutet wird.
($\{\}.B.\}$) oder $(.w.)$)

(VN, X, S, P) ist unsere Notation für kontextfreie Grammatiken.
 VN ist die Menge der Nichtterminale, X die der Terminale,
 $S \subset VN^*$ ist eine endliche Menge von Axiomen und P die Menge der Produktionen. Wir nehmen an, daß kontextfreie Grammatiken frei von nutzlosen Variablen sind.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Vorwort	1
Kapitel 1: Definitionen und einige Eigenschaften	3
Kapitel 2: Iterative Monoide und syntaktische Monoide	7
Kapitel 3: Beispiele	12
Kapitel 4: Iterative Monoide der Klammersprachen	23
Literatur	34

In der Theorie der formalen Sprachen ist es üblich, die Struktur der Sprachen mit Hilfe von Grammatiken, Automaten o. ä. zu beschreiben.

Dieses mechanistische Vorgehen kommt der Intuition entgegen, erschwert aber die Untersuchung von Sprachen unter algebraischen Gesichtspunkten. So ist die Suche nach Invarianten formaler Sprachen d.h. Charakterisierungen, die unabhängig von speziellen Darstellungen der Sprache z.B. durch Grammatiken sind, verständlich. Die bekanntesten Invarianten in diesem Sinne dürften die syntaktischen Monoide sein, die von Schützenberger eingeführt wurden.

Bedauerlicherweise ist es u.U. sehr schwierig, das syntaktische Monoid einer Sprache aus einer der üblichen Darstellungen einer Sprache abzulesen. In [Ho 2] wird gezeigt, daß es bereits für kontextfreie Sprachen kein effektives Verfahren gibt, um aus einer beliebigen Grammatik eine Darstellung des syntaktischen Monoides herzuleiten.

Um diesen Übergang besser verstehen zu können, ist eine genaue Vorstellung von dem, was die Struktur einer Sprache ausmacht, nötig. In dieser Arbeit werden formale Sprachen im Hinblick auf Muster, die ihre Struktur bestimmen, untersucht. Die Untersuchung einer Sprache auf Muster ist auch aus einem anderen Blickwinkel interessant. Der alltägliche Umgang mit natürlichen Sprachen lehrt, daß die Bildung von Sätzen einer Sprache durch Kopieren von Standardmustern eine nicht unbedeutende Rolle spielt.

Um das Konzept des Musters algebraisch zu fassen, wird der Begriff des iterativen Monoides eingeführt. Indem gleichartige iterative Monoide in Klassen zusammengefaßt werden, erhalten wir einen sehr abstrakten Musterbegriff. Eine etwas einfachere Version des iterativen Monoides wird unter dem Namen "quasi-paire" in [Bo] untersucht und dazu benutzt, eine hinreichende Bedingung dafür herzuleiten, wann kontextfreie Sprachen regulär sind. Seit 1972 scheint diese Idee aber nicht wieder aufgenommen worden zu sein.

Nachdem im 1. Kapitel die grundlegenden Definitionen vorgestellt worden sind, werden einige ihrer Eigenschaften in mehreren Lemmata festgehalten, um mit den neu eingeführten Begriffen vertraut zu machen.

Die folgenden Kapitel sind überwiegend der in diesem Zusammenhang interessant scheinenden Frage gewidmet, ob sich in gewissen Sprachen nur endlich viele Muster finden lassen, d. h. ob die Sprache nur eine endliche Anzahl von Klassen gleichartiger iterativer Monoide induziert.

In Kapitel 2 wird der Übergang von einer formalen Sprache als Teilmenge eines beliebigen Monoides auf ihr Bild unter kanonischer Projektion als Teilmenge ihres syntaktischen Monoides untersucht.

Die hier formulierten Sätze gelangen in Kapitel 3 bei der Diskussion einiger Beispiele zur Anwendung und sind auch darüberhinaus von Interesse weil sie die Definitionen aus Kapitel 1 rechtfertigen.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit den Klammersprachen als einer wichtigen Teilfamilie kontextfreier Sprachen. Diese wurden von Mc. Naughton benutzt, um einen Algorithmus zur Lösung des Problems der Strukturäquivalenz kontextfreier Sprachen zu konstruieren.

Die Klammersprachen sind für die Untersuchung iterativer Monoide deshalb von Bedeutung, weil man sie als übergeordnete Sehweise kontextfreier Sprachen auffassen kann, in der die Sätze der Sprache zusätzlich eine Information über ihre Konstruktion gemäß der kontextfreien Grammatik tragen.

Abschließend werden in Kapitel 4 einige Fragen aufgeworfen, die für die weitere Untersuchung iterativer Monoide interessant erscheinen.

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Herrn Prof. Dr. Hotz für die interessante Themenstellung, die hilfreichen Gespräche sowie die darüberhinausgehende Unterstützung bedanken.

Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Boasson für die wertvollen Diskussionen. Von ihm stammt das in Kapitel 3 angeführte Beispiel Nr. 3.

Kapitel 1

Um uns der Definition der zentralen Begriffe zuwenden zu können, benötigen wir zunächst einige technische Definitionen.

Definition 1

Sei $\sigma \in \{0, 1\}^n$ und (M, \circ) ein beliebiges Monoid.

Unter dem Monoid M^σ verstehen wir die Menge M^n mit der Verknüpfung \circ_σ , die wie folgt definiert ist:

$$(u_1, \dots, u_n) \circ_\sigma (v_1, \dots, v_n) := \begin{cases} (\dots, u_i \circ v_i, \dots) & \text{falls } \sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} 1 \sigma_{i+1} \dots \sigma_n \\ (\dots, v_i \circ u_i, \dots) & \text{falls } \sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} 0 \sigma_{i+1} \dots \sigma_n \end{cases}$$

In der Folge werden wir sowohl die Elemente aus M^σ als auch die aus M^n als n -Tupel bezeichnen und auch sonst keine Unterscheidung zwischen ihnen treffen.

Definition 2

Sei $n \in \mathbb{N}$ und (M, \circ) ein beliebiges Monoid. Die Abbildung

$$\nabla_n: M^{n+1} \times M^n \rightarrow M$$

bezeichnet die Einfülloperation:

$$(u_1, \dots, u_{n+1}) \nabla_n (v_1, \dots, v_n) := u_1 \circ v_1 \circ u_2 \dots v_n \circ u_{n+1}$$

Das Konzept der iterativen Monoide ist aus dem Standardbeweis des Lemmas von Bar-Hillel abgeleitet worden. In diesem Beweis werden—ausgehend von einer kontextfreien Grammatik $G = (VN, X, S, P)$ —Worte $w_1, w_2 \in X^*$ gesucht, die die Eigenschaft $A \xRightarrow{*} w_1 A w_2$ für irgendein $A \in VN$ besitzen.

Definieren wir

$$M_A := \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in X^* \text{ mit } \exists A \in VN : A \xRightarrow{*} w_1 A w_2\},$$

so ist M_A ein Untermonoid von $(X^*)^{10}$.

Weil diese Definition für unsere Zwecke zu sehr auf die gegebene Grammatik fixiert ist, abstrahieren wir von der zugrundeliegenden Grammatik und erhalten die

Definition 3 (Iterative σ - Monoide)

Sei (M, \circ) ein beliebiges Monoid, $L \subset M$ formale Sprache, $\sigma \in \{0, 1\}^n$ und $w \in M^{n+1}$.

$$I_L^\sigma(w) := \left\{ N \subset M^\sigma \mid \begin{array}{l} 1) N \text{ ist Untermonoid von } M^\sigma, \\ 2) w \nabla_n N \subset L, \\ 3) \forall P \subset M^\sigma, P \text{ erfüllt 1) und 2) : } \begin{array}{l} N \not\subset P \\ \text{oder} \\ N = P \end{array} \end{array} \right\}$$

$N \in I_L^\sigma(w)$ heißt iteratives σ -Monoid der Umgebung w . Die Elemente von N heißen iterative n -Tupel. Die Eigenschaft 3) der Definition werden wir in der Folge kurz als Maximalitätsbedingung bezeichnen. Zurückkehrend zu unserem Ausgangspunkt, dem Lemma von Bar-Hillel, beobachten wir folgendes Phänomen: Sei $G = (V, N, X, \mathcal{S}, P)$ wie gehabt, $A, B \in VN$ und $A \xrightarrow{\cdot} l_1 B l_2, B \xrightarrow{\cdot} k_1 A k_2$ für irgendwelche $k_1, k_2, l_1, l_2 \in X^*$.

Dann ist für $(w_1, w_2) \in M_A$ und $(v_1, v_2) \in M_B$

$$(k_1 w_1 l_1, l_2 w_2 k_2) \in M_B$$

und

$$(l_1 v_1 k_1, k_2 v_2 l_2) \in M_A.$$

Dies erinnert uns an das Phänomen der Konjugiertheit im Zusammenhang mit den inneren Automorphismen einer Gruppe. Wir werden diese Bezeichnung deshalb übernehmen.

Definition 4 (konjugierte Monoide)

Sei M ein beliebiges Monoid und $\sigma \in \{0, 1\}^n$. Zwei Untermonoide P_1, P_2 von M^σ heißen konjugiert, i.Z. $P_1 \sim_\sigma P_2$ g.d.w. es $k, l \in M^\sigma$ gibt mit

$$l \circ_\sigma P_1 \circ_\sigma k \subset P_2$$

und

$$k \circ_\sigma P_2 \circ_\sigma l \subset P_1$$

Trifft dieser Sachverhalt für zwei iterative σ -Monoide zu, so tragen beide Monoide die gleiche Information. Im Sinne unserer Untersuchung einer Sprache nach Mustern sollten wir konjugierte σ -Monoide also identifizieren.

Wie man leicht nachprüfen kann, ist \sim_σ auf

$$M_L^\sigma := \bigcup_{w \in M^{L \nabla_n \sigma(\sigma)^{-1}}} I_L^\sigma(w)$$

eine Äquivalenz. Für unseren angestrebten abstrakten Musterbegriff werden wir also die Äquivalenzklassen von \sim_σ auf M_L^σ verwenden.

Die Anzahl dieser Äquivalenzklassen bezeichnen wir als σ -Index von L .

An diesem Punkt stellen sich mehrere Fragen, von denen einige in dieser Arbeit beantwortet werden sollen.

Da wir an einem Mustervorrat, der die Sprache charakterisiert, interessiert sind, sollten wir uns insbesondere um die Frage kümmern, ob der σ -Index für Sprachen spezieller Sprachklassen endlich ist. Die meiste Aufmerksamkeit werden wir dabei den kontextfreien Sprachen und dem 10-Index, der ja auf natürliche Weise mit den kontextfreien Sprachen verbunden zu sein scheint, widmen.

Die Beantwortung der Frage, ob sich der σ -Index ändert, wenn wir von der formalen Sprache L als Teilmenge des Monoides M auf das Bild von L unter kanonischer Projektion als Teilmenge des syntaktischen Monoides übergehen, kann bei der Beantwortung der ersten Frage hilfreich sein und ist auch für sich genommen interessant.

Bevor wir mit der Untersuchung der aufgeworfenen Fragen in Kapitel 2 beginnen, wollen wir noch einige Lemmata zusammentragen, um uns mit den gegebenen Definitionen vertraut zu machen.

Lemma 1

Sei M ein beliebiges Monoid, $L \subset M$,
 $\sigma \in \{0, 1\}^n$, $u \in M^{n+1}$

$N \in I_L^\sigma(u)$.

Dann gilt

$$v \in N \iff \forall l \in N : \forall {}^1v, \dots, {}^lv \in N : \\ u \nabla_n ({}^1v \circ_\sigma v \circ_\sigma {}^2v \dots \circ_\sigma {}^lv) \in L$$

Beweis

Offensichtlich ist

$$P := \langle N \cup \{v\} \rangle$$

ein Untermonoid von M^σ , das die Eigenschaft

$$u \nabla_n P \subset L$$

erfüllt. Aufgrund der Maximalitätsbedingung gilt aber $P \subset N$. □

Für die Lemmata 2 und 3 dehnen wir den Begriff der Konjugiertheit auf beliebige Teilmengen von M aus.

Lemma 2

Seien $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subset M^\sigma$ zwei Monoide.
Dann gilt

$$\mathcal{N}_1 \sim_\sigma \mathcal{N}_2 \iff \exists I_1, I_2 \\ I_1 \text{ ist (halbseitiges) Ideal von } \mathcal{N}_1 : I_1 \sim_\sigma I_2$$

Beweis

" \implies " \mathcal{N}_1 ist triviales Ideal von \mathcal{N}_1

" \impliedby " Sei $i_1 \in I_1$ und $i_2 \in I_2$. Weiterhin seien I_1 und I_2 o.E. rechtseitige Ideale von \mathcal{N}_1 bzw. \mathcal{N}_2 .

$$I_1 \sim_\sigma I_2 \iff \exists h, k \in M^\sigma : h \circ_\sigma I_1 \circ_\sigma k \subset I_2 \\ k \circ_\sigma I_2 \circ_\sigma h \subset I_1$$

also

$$i_2 \circ_\sigma h \circ_\sigma \mathcal{N}_1 \circ_\sigma i_1 \circ_\sigma k \subset i_2 \circ_\sigma h \circ_\sigma I_1 \circ_\sigma k \subset I_2 \subset \mathcal{N}_2$$

und umgekehrt, d.h. insgesamt ist $\mathcal{N}_1 \sim_\sigma \mathcal{N}_2$ □

Lemma 3

Sei $L \subset M$, $I \subset L$ und I beidseitiges Ideal von M . Dann sind alle σ -Indizes von L gleich 1.

Beweis

Weil $L \supset I \neq \emptyset$, gibt es mindestens ein iteratives Monoid in M_L^σ . Seien nun $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \in M_L^\sigma$. $I' := I \times M^{\sigma^{-1}}$ ist Ideal von M^σ . $I' \subset \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$ wegen Lemma 1 und außerdem ist I' Ideal von \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 . Da I' natürlich zu sich selbst konjugiert ist, gilt wegen Lemma 2 $\mathcal{N}_1 \sim_\sigma \mathcal{N}_2$ □

Kapitel 2

Wie bereits angekündigt, wird sich dieses Kapitel mit den syntaktischen Monoiden formaler Sprachen beschäftigen. Um unsere Sätze formulieren zu können, benötigen wir einige Definitionen.

Die ursprüngliche Fassung des syntaktischen Monoides stammt von Schützenberger, Eine für unsere Zwecke interessante Verallgemeinerung findet man in [Ho].

Ist M ein Monoid $\sigma \in \{0, 1\}^n$ und $L \subset M$ formale Sprache, so ist

$$w = v \quad (L) \iff_{Def} \forall u \in M^{n+1} : (u \nabla_n w \in L \iff u \nabla_n v \in L) \quad (A)$$

eine Kongruenz auf M^σ [Ho].

Definition 5 (syntaktische σ - Monoide von L)

Bezeichnen wir mit k die Kongruenz (A), dann heißt

$$S_M^\sigma(L) := M^\sigma / k$$

das syntaktische σ - Monoid von L .

$$\varphi : M^\sigma \longrightarrow S_M^\sigma(L); w \mapsto [w]_k$$

heißt kanonischer Homomorphismus.

Das Konzept des "Monoides mit Grundpunkt" wird in [Sak] ausführlich erörtert. Wir verstehen unter einem Monoid mit Grundpunkt (monoïde pointée, kurz p - Monoid) ein Paar M_P , wobei M ein Monoid und $P \subset M$ ist. Ein Homomorphismus $\phi : M_P \rightarrow N_Q$ heißt "p - Monoidhomomorphismus", wenn er die Grundpunkte respektiert, d.h. wenn $Q\phi^{-1} = P$ ist. Mit diesen Begriffen ausgestattet, formulieren wir das

Lemma 4

Seien $\sigma \in \{0, 1\}^n$, M_P, M_Q beliebige p- Monoide. Ist

$$\phi : M_P \rightarrow N_Q$$

p- Monoidhomomorphismus, und erweitern wir ϕ komponentenweise auf M^σ . so ist

$$\phi : M_{P^\sigma}^\sigma \rightarrow N_{Q^\sigma}^\sigma$$

ebenfalls p- Monoidhomomorphismus und es gilt für alle $u \in N^{\sigma^{-1}}$:

$$\tilde{O} \in I_Q^\sigma(u) \implies \tilde{O}\phi^{-1} \in I_P^\sigma(v)$$

falls $v\phi = u$

Beweis:

Wir wollen an dieser Stelle nur die letzte Aussage des Lemmas nachweisen. Sei also $\tilde{O} \in I_Q^\sigma(u)$. $\tilde{O}\phi^{-1}$ ist in $I_P^\sigma(v)$, da $\tilde{O}\phi^{-1}$ die drei-Eigenschaften der Definition 3 besitzt:

- 1) $\tilde{O}\phi^{-1}$ ist ein Untermonoid von M^σ
- 2) $(v \nabla_n \tilde{O}\phi^{-1})\phi = v\phi \nabla_n \tilde{O}\phi^{-1}\phi \subset u \nabla_n \tilde{O} \subset Q$
also ist $v \nabla_n \tilde{O}\phi^{-1} \subset Q\phi^{-1} = P$
- 3) Um zu zeigen, daß $\tilde{O}\phi^{-1}$ maximal im Sinne von Definition 3 ist, nehmen wir ein Untermonoid $O' \subset M^\sigma$ mit $v \nabla_n O' \subset P$ und $\tilde{O}\phi^{-1} \subset O'$ an. Für alle $x \in O'$ und alle ${}^i m \in \tilde{O}\phi^{-1}$, $1 \leq i \leq l$ gilt:

$$v \nabla_n ({}^1 m \circ_\sigma x \circ_\sigma \dots \circ_\sigma {}^l m) \in P$$

also auch

$$\begin{aligned} u \nabla_n ({}^1 m\phi \circ_\sigma x\phi \circ_\sigma \dots \circ_\sigma {}^l m\phi) = \\ (v \nabla_n ({}^1 m \circ_\sigma x \circ_\sigma \dots \circ_\sigma {}^l m))\phi \in P\phi \subset Q \end{aligned}$$

Indem wir uns auf Lemma 1 berufen, schließen wir daraus $x\phi \in \tilde{O}$ und damit zugleich $x \in \tilde{O}\phi^{-1}$. O' liegt also in $\tilde{O}\phi^{-1}$ und damit ist auch die Maximalitätseigenschaft von $\tilde{O}\phi^{-1}$ gezeigt.

Insgesamt gilt also in der Tat

$$\tilde{O}\phi^{-1} \in I_P^\sigma(v)$$

□

Nachdem wir zeigen konnten, daß iterative σ - Monoide unter inversem p - Monoidhomomorphismus wieder in iterative σ - Monoide übergehen, ist es naheliegend, den Fall des p - Monoidhomomorphismus in Augenschein zu nehmen.

Lemma 5

Sind die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllt und ist ϕ zusätzlich surjektiv, so gilt für alle $v \in M^{n-1}$:

$$O \in I_P^\sigma(v) \implies O\phi \in I_Q^\sigma(v\phi)$$

Beweis

Der Beweis dieses Lemmas folgt im wesentlichen dem Schema des letzten Beweises.

- 1) $O\phi$ ist Untermonoid von N^σ .
- 2) $v\phi \nabla_n O\phi = (v \nabla_n O)\phi \subset P\phi \subset Q$.
- 3) Sei $\tilde{O}' \subset N^\sigma$ wieder Untermonoid von N^σ , $v\phi \nabla_n \tilde{O}' \subset Q$ und $O\phi \subset \tilde{O}'$.

$$\implies \tilde{O}'\phi^{-1} \supset O\phi\phi^{-1} \supset O$$

und

$$\begin{aligned} & (v \nabla_n \bar{O}' \phi^{-1}) \phi \\ &= v \phi \nabla_n \bar{O}' \phi^{-1} \phi \\ &= u \nabla_n \bar{O}' \phi^{-1} \phi \\ &= u \nabla_n \bar{O}' \subset Q \end{aligned}$$

also

$$v \nabla_n \bar{O}' \phi^{-1} \subset P$$

wegen der Maximalität von O ist also

$$\bar{O}' \phi^{-1} = O,$$

woraus sich zusammen mit der Surjektivität von ϕ

$$O \phi = \bar{O}' \phi^{-1} \phi = \bar{O}'$$

und insgesamt

$$O \phi \in I_Q^\sigma(v \phi)$$

ergibt .

□

Die Resultate des 2. Kapitels wollen wir in einem Hauptsatz auswerten. Dazu benötigen wir noch die in das folgende Lemma gekleidete Beobachtung:

Lemma 6

Sei $\phi : M \rightarrow N$ surjektiver Monoidhomomorphismus,

$$\sigma \in \{0, 1\}^n$$

$$O_1, O_2 \subset M^\sigma$$

$$P_1, P_2 \subset N^\sigma$$

Weiterhin gelte $O_1 \sim_\sigma O_2$ und $P_1 \sim_\sigma P_2$.

Dehnen wir ϕ wie in den Lemmata 4 und 5 auf M^σ respektive N^σ aus, so gilt ebenfalls

$$O_1 \phi \sim_\sigma O_2 \phi$$

und

$$P_1 \phi^{-1} \sim_\sigma P_2 \phi^{-1}.$$

Ohne Beweis

Hauptsatz 1 (Korollar der Lemmata 4-6)

Sei M ein Monoid, $L \subset M$, $\sigma \in \{0,1\}^n$ und $S_M^1(L)$ das syntaktische 1-Monoid von L . Ist $\phi : M \rightarrow S_M^1(L)$ die kanonische Projektion und dehnen wir ϕ kanonisch auf M^σ aus, so gelten die drei folgenden Aussagen:

- 1) $Q \in I_L^\sigma(u) \implies Q\phi \in I_{L\phi}^\sigma(u\phi)$
- 2) $P \in I_{L\phi}^\sigma(v) \implies \forall u \in M^{n-1} : P\phi^{-1} \in I_L^\sigma(u)$
 $u\phi = v$
- 3) $\forall Q_1, Q_2 \in M_L^\sigma : Q_1 \sim_\sigma Q_2 \iff Q_1\phi \sim_\sigma Q_2\phi$

Beweis:

1) und 2) folgen wegen $L\phi\phi^{-1} = L$ direkt aus Lemma 4 und Lemma 5.

3) Die Richtung " \implies " bereitet wegen Lemma 6 keine Schwierigkeiten. Um auch die Richtung " \impliedby " auf Lemma 6 zurückzuführen, zeigen wir noch

$$Q \in I_L^\sigma(u) \implies Q\phi\phi^{-1} = Q$$

Dies ist aber leicht einzusehen, weil

$$Q\phi \in I_{L\phi}^\sigma(u\phi)$$

laut 1) und somit

$$Q\phi\phi^{-1} \in I_L^\sigma(u)$$

laut 2). Weil

$$Q\phi\phi^{-1} \supset Q$$

muß laut Maximalität von Q $Q\phi\phi^{-1} = Q$ gelten. \square

Korollar 1

Der σ -Index einer Sprache $L \subset M$ ist gleich dem σ -Index von $L\phi \subset S_M^\sigma(L)$, falls ϕ die kanonische Projektion bezeichnet.

Dieser Satz gibt uns zunächst ein mächtiges Werkzeug für die Untersuchung konkreter Beispiele in die Hand, weil sich im syntaktischen Monoid einer Sprache meist einfacher arbeiten läßt als im ursprünglichen Monoid, das die Sprache umfaßt. Einen Hinweis auf die Mächtigkeit des Satzes wird uns das nächste Korollar geben. Darüberhinaus verleiht dieser Satz aber auch unseren grundlegenden Definitionen Existenzberechtigung, indem er ihnen im Sinne von Korollar 1 Natürlichkeit bescheinigt.

Versucht man, diesen Satz für die zunächst natürlicher erscheinende Version des iterativen Monoides, das an die Variable einer kontextfreien Grammatik gebundene Monoid

$$M_A := \{(w_1, w_2) \mid w_1, w_2 \in X^*, \exists A \in V.N : A \xrightarrow{\cdot} w_1 A w_2\}$$

zu beweisen, wird man verstehen, daß dieser Satz nicht selbstverständlich ist.
Wir wollen noch das angekündigte Korollar behandeln.

Korollar 2

Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle $\sigma \in \{1, 0\}^n$ ist $\#M_L^\sigma < \infty$, falls $L \subset M$ regulär ist.

Beweis:

Sei

$$\phi : M \rightarrow S_M^1(L)$$

die kanonische Projektion. Laut Hauptsatz 1 gilt

$$\#M_L^\sigma < \infty \iff M_{L\phi}^\sigma < \infty$$

Da alle Monoide $P \in M_{L\phi}^\sigma$ Untermonoide von $(S_M^1(L))^\sigma$ sind und das syntaktische 1-Monoid einer regulären Sprache bekanntlich endlich ist, kann es nur endlich viele Monoide in $M_{L\phi}^\sigma$ geben. Die σ -Indizes von $L\phi \subset S_M^1(L)$ sind also trivialerweise endlich. \square

Kapitel 3

Ausgestattet mit den Hilfsmitteln, die wir uns in Kapitel 1 und Kapitel 2 zusammengestellt haben, wollen wir einige Beispiele untersuchen, um einige offene Fragen klären zu können. Wir werden unsere Untersuchungen hauptsächlich in den syntaktischen Monoiden der Sprachen durchführen. Dabei werden wir das größte beidseitige Ideal von $S_M^1(L)$, dessen Schnitt mit dem Bild der Sprache unter kanonischer Projektion leer ist, als 0 bezeichnen:

Sei $L \subset M$, $\phi : M \rightarrow S_M^1(L)$ kanonische Projektion und $I \subset S_M^1(L)$ beidseitiges Ideal mit

$$I \cap L\phi = \emptyset$$

Der Reessche Quotient $S_M^1(L) \parallel I$ ist folgendermaßen definiert:

$$S_M^1(L) \parallel I = (S_M^1(L) \setminus I) \cup \{0\}$$

wobei 0 ein neues Symbol ist. Die Verknüpfung auf $S_M^1(L) \parallel I$ wird durch

$$a \circ b := \begin{cases} a \circ b & \text{falls } a \circ b \notin I \text{ und } a, b \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

erklärt [Clif].

Es liegt auf der Hand, daß unsere Untersuchung der iterativen Monoide von dieser Vereinfachung nicht berührt wird, da

$$\xi : (S_M^1(L))_{L\phi} \rightarrow (S_M^1(L) \parallel I)_{L\phi\xi}; \quad x\xi = \begin{cases} x & \text{falls } x \notin I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

surjektiver p -Monoidhomomorphismus ist, der außerdem auf $S_M^1(L) \setminus I$ injektiv ist. Die Aussage von Hauptsatz 1 läßt sich deshalb sinngemäß übertragen.

Beispiel 1 (Semi-) Dycksprache

Unser Interesse für die Dycksprache bedarf sicher keiner besonderen Rechtfertigung, da diese Sprache in der Theorie der kontextfreien Sprachen eine zentrale Rolle spielt. Weil wir unsere Sätze für beliebige Anzahlen von Klammertypen formulieren werden, wird in der Folge kurz von der Dycksprache die Rede sein. Wir werden hier nur stichpunktartig einige Eigenschaften der Dycksprache nennen und für weitergehende Informationen auf die Literatur verweisen [Ho2, Sak]

Definition 6 (Dycksprache)

Sei $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Menge der Mächtigkeit n , \bar{X}_n eine durchschnittfremde Menge und

$$()^{-1} : X_n \rightarrow \bar{X}_n$$

eine bijektive Abbildung. Die (Semi-) Dycksprache über n Klartypen ist die durch folgende Grammatik definierte kontextfreie Sprache:

$$G = (\{S\}, \tilde{X}_n, S, P)$$

mit $\tilde{X}_n = X_n \cup \bar{X}_n$ und

$$P = \{S \rightarrow \sum_{x_i} x_i S x_i^{-1} + S S + 1\}$$

Es ist bekannt, daß das syntaktische 1-Monoid der Dycksprache durch die Menge \tilde{X}_n und die Relationenmenge

$$R = \{x_1 x_1^{-1} = 1\}$$

$$\cup_{i,k \in \{1, \dots, n\}} \{x_i x_i^{-1} = x_k x_k^{-1}\}$$

$$\cup_{\substack{i,j,k,l \in \{1, \dots, n\} \\ i \neq j, k \neq l}} \{x_i x_j^{-1} = x_l x_k^{-1}\}$$

$$\cup_{x_i, x_j \in \tilde{X}_n} \{x_i x_1 x_2^{-1} x_j = x_1 x_2^{-1}\}$$

erzeugt wird. (Die letzte Gruppe von Relationen fällt weg für $n=1$) Schreiben wir S_D für das syntaktische 1-Monoid der Dycksprache und betrachten wir für $n \geq 2$ den Reesschen Quotienten $P := S_M^1(D) // (x_1 x_2^{-1} \phi)$, und die Relationenmenge

$$i = R \cup \{x_1 x_2^{-1} = 0\}$$

so ist

$$P = \tilde{X}_n \cup \{0\} / R$$

und die Abbildung

$$\rho : (\tilde{X}_n)^* \rightarrow \tilde{X}_n^* \cdot X_n^* \cup \{0\}; x\rho := [x]_{R'} \cap (\tilde{X}_n^* \cdot X_n^* \cup \{0\})$$

wohldefiniert. ρ wird im Allgemeinen als Dyckkürzung bezeichnet.

Ausgestattet mit diesen Begriffen nehmen wir ein Lemma in Angriff, das sich mit der Form iterativer Paare in M^{10}_D beschäftigt.

Lemma 7 :

Sei

$$u \in ((\tilde{X}_n^*))^3,$$

$$\rho : (\tilde{X}_n^*) \rightarrow (\tilde{X}_n^*)$$

die Dyckkürzung und

$$m = (m_1, m_2) \in M \in I^{10}_{D_n}(u).$$

Dann hat $m\rho$ die folgende Form:

$$1) \ m_1\rho = ({}^1m_1)^{-1}({}^2m_1')({}^2m_1'')({}^1m_1)$$

$$2) \ m_2\rho = ({}^1m_2)^{-1}({}^2m_1')^{-1}({}^2m_1'')^{-1}({}^1m_2)$$

Dabei sind ${}^1m_1, {}^2m_1', {}^2m_1'', {}^1m_2 \in X^*$ und

$$(\)^{-1} : (\tilde{X}_n^*) \rightarrow (\tilde{X}_n^*)$$

der durch $(x)^{-1} = \bar{x}$ und $(\bar{x})^{-1} = x$ eindeutig definierte, bijektive Antihomomorphismus.

Beweis

Der Beweis beruht auf einem einfachen induktiven Argument. Wir wollen ihn dennoch ausführen, da wir das Lemma in Kapitel 4 benötigen.

1a) Sei $m_1\rho = {}^1m_1^{-1}\bar{m}_1$ wobei ${}^1m_1^{-1} \in (X^{-1})^*$ und $\bar{m}_1 \in X^*$. Es ist klar, daß

$$\text{Länge}({}^1m_1^{-1}) \leq \text{Länge}(\bar{m}_1),$$

weil sonst $u_1 m_1^k u_2 m_2^k u_3 \notin D$ ab irgendeinem $k \in \mathbb{N}$.

Außerdem ist $\bar{m}_1 = {}^2m_1^{-1}m_1$ weil sonst $m_1 m_1 = 0$ (D) **Widerspruch**

Bisher haben wir also gezeigt:

$$m_1 = {}^1m_2^{-1}{}^2m_1^{-1}m_1$$

und aus Symmetriegründen auch

$$m_2 = {}^1m_2^{-1}{}^2m_1^{-1}m_2$$

1b) Mit dem gleichen Argument sieht man $\text{Länge}({}^2m_1) = \text{Länge}({}^2m_2)$ ein.

2a) Durch Induktion über $k \geq 1$ zeigt man

$$m_i^k \rho = {}^1m_i^{-1} ({}^2m_i)^{k-1} m_i, \quad i = 1, 2$$

Sei

$$w = (m_1^k u_2 m_2^k) \rho$$

$$= ({}^1m_1^{-1} \underbrace{({}^2m_1)^{k-1} m_1}_p u_2 \underbrace{{}^1m_2^{-1} ({}^2m_2)^{k-1} m_2}_q) \rho$$

Wegen $p \in X^*$ und $q \in (X^{-1})^*$ gibt es $k_0 \in \mathbb{N}_0$, für das ${}^1m_1 u_2 {}^1m_2^{-1}$

voilständig weggekürzt wurde. Dies geht, weil $w \neq 0$ (D).

$$\begin{aligned} u_0 &= (m_1^{k_0} u_2 m_2^{k_0}) \quad (D) \\ &= ({}^1 m_1^{-1} ({}^2 m_2)^j R ({}^2 m_2)^{j-1} m_2) \quad (D) \end{aligned}$$

O.E. $R \in (X^{-1})^*$ und $Länge(R) \leq Länge({}^2 m_1) = Länge({}^2 m_2)$

Also muß $R\rho$ Postfix von ${}^2 m_1 = {}^2 m_1 \rho$ sein, weil sonst ${}^2 m_1 R = 0$ (D) **Widerspruch**.
Wir definieren also ${}^2 m_1 =: {}^2 m_1' {}^2 m_1''$ mit ${}^2 m_1'' = R^{-1} \rho$

2b) $({}^2 m_1')^{-1}$ ist Präfix von ${}^2 m_2$, weil sonst

$${}^2 m_1' \underbrace{{}^2 m_1''}_{=1} R {}^2 m_2 = 0 \quad (D) \quad \text{Widerspruch}$$

Wir kürzen also weiter und erhalten

$$= {}^1 m_1^{-1} ({}^2 m_1)^{j-1} {}^2 m_2'' ({}^2 m_2'')^{j-1}$$

2c) Also ist $({}^2 m_2'')^{-1}$ Postfix von ${}^2 m_1$.

Wegen $Länge({}^2 m_1) = Länge({}^2 m_2)$ gilt:

$$\begin{aligned} {}^2 m_2 &= {}^2 m_2' {}^2 m_2'' \\ {}^2 m_2' &= ({}^2 m_1')^{-1} \quad \text{wegen 2b)} \\ {}^2 m_2'' &= ({}^2 m_1'')^{-1} \quad \text{wegen 2c)} \end{aligned}$$

□

Die Aussage dieses Lemmas ist im Wesentlichen, daß die Form der iterativen Paare der Dycksprache verhältnismäßig eng an die durch die kontextfreie Grammatik vorgegebene Struktur gebunden ist. Aus diesem Grunde scheint die Hoffnung berechtigt, endlichen 10- Index von D verifizieren zu können.

Lemma 8

Der 10- Index von D ist gleich 1.

Beweis

Für den Beweis ziehen wir uns auf das syntaktische 1- Monoid der Dycksprache zurück. Sei also $S := S^1_{\tilde{X}}(D)$ und $\phi: \tilde{X}^* \rightarrow S$ die kanonische Projektion.

Wir zeigen

$$\forall u \in (\tilde{X}^*)^3 : M \in I^{10}_{\{1\}}(u) \implies M \sim_{10} M_0 \text{ wobei } \{M_0\} = I^{10}_{\{1\}}((1, 1, 1)).$$

Ist $M \in I^{10}_{\{1\}}(u)$ beliebig gewählt, $u = (u_1, u_2, u_3)$, so gilt

$$1 = u \nabla_2 M = (u_1, u_3) \circ_{10} M \nabla_2 u_2$$

Es ist einzusehen, daß

$$I_{\{1\}}^{10}((1, 1, 1)) = \{M_0\} \text{ wobei } M_0 = \{(x, y) \in S^{\cdot, 0} \mid xy = 1\}.$$

Sicher gilt deshalb $(u_1, u_3) \circ_{10} M \circ_{10} (1, u_2) \subset M_0$. Bleibt noch $(1, u_2) \circ_{10} M_0 \circ_{10} (u_1, u_3)$ nachzuweisen, wozu wir wieder Lemma 1 bemühen werden.

Durch Induktion über l zeigen wir

$$u \nabla_2 (m_1 \circ_{10} n \circ_{10} m_2 \circ_{10} \dots \circ_{10} m_l) = 1$$

für alle $n \in (1, u_2) \circ_{10} M_0 \circ_{10} (u_1, u_3)$ und alle $m_1, \dots, m_l \in M$.
Gemäß Lemma 1 ist deshalb $(1, u_2) \circ_{10} M_0 \circ_{10} (u_1, u_3) \subset M$.

Induktionsanfang

Sei $l = 0$ und $n = ({}^1 n u_1, u_3 {}^2 n u_2)$

$$\begin{aligned} u \nabla_2 n &= u_1 \underbrace{{}^1 n u_1 u_2 u_3} = 1 \underbrace{{}^2 n u_2 u_3} = 1 \\ &= u_1 u_2 u_3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Induktionsschritt

$l \rightarrow l + 1$

Sei $m_i = ({}^1 m_i, {}^2 m_i)$ für $i = 1 \dots l$.

$$\begin{aligned} &u \nabla_2 (m_1 \circ_{10} n \circ_{10} m_2 \dots \circ_{10} n \circ_{10} m_l) \\ &= (u_1, {}^1 n u_1 {}^1 m_l u_2 {}^2 m_l u_3 {}^2 n u_2, u_3) \nabla_2 (m_1 \circ_{10} n \dots \circ_{10} m_{l-1}) \end{aligned}$$

Mit ähnlicher Begründung wie beim Induktionsanfang ist dies gleich

$$u \nabla_2 (m_1 \circ_{10} \dots \circ_{10} m_{l-1}) = 1 \quad \text{lt. Induktionsannahme}$$

Somit ist der Induktionsschritt geleistet und wir können zusammenfassend feststellen, daß

$$\forall M \in M^{10}_S(u) : M \sim_{10} M_0$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Korollar 3

Der 10- Index der symmetrischen Dycksprache ist ebenfalls 1.

Beweis

Die symmetrische Dycksprache wird durch die kontextfreie Grammatik $G = (V, N, \tilde{X}^*, S, P)$ mit

$$V, N = S = \{S\} \text{ und}$$

$$P = \{S \rightarrow SS + 1 + \sum_{x_i \in X_n} x_i S x_i^{-1} + \sum_{x_i \in X_n} x_i^{-1} S x_i\}$$

beschrieben. Ihr syntaktisches Monoid ist die durch X_n frei erzeugte Gruppe. Deshalb können wir den Beweis für Lemma 8 unverändert an diese Stelle übernehmen. \square

Ermutigt durch Lemma 6, Korollar 2 und Lemma 8 könnte man versucht sein, einen Satz über endlichen 10-Index im Falle kontextfreier Sprachen mit Hilfe des Satzes von Chomsky-Schützenberger zu beweisen. Dieser Satz besagt, daß sich jede kontextfreie Sprache als homomorphes Bild des Durchschnittes einer Semi-dycksprache und einer regulären Menge darstellen läßt, d.h.

$$L \text{ kontextfrei} \implies L = (D_n \cap R)\phi,$$

mit $L \subset T^*$, $R, D_n \subset \tilde{X}^*$. $\phi: \tilde{X}^* \rightarrow T^*$ ist Homomorphismus. Als kritisch stellt sich jedoch das Schneiden zweier Sprachen heraus.

Lemma 9

Seien $L_1, L_2 \subset M$, $\sigma \in \{0, 1\}^n$ und $n \in M^{n+1}$.

$$I^{\sigma}_{L_1 \cap L_2}(u) = \left\{ M \in J := \{M_1 \cap M_2 \mid M_i \in I^{\sigma_{L_i}}(u)\} \mid M' \in J \text{ und } M' \supset M \implies M = M' \right\}$$

Beweis

Die Eigenschaften 1) und 2) der Definition 3 sind schnell nachgerechnet, die Maximalität wird ausdrücklich verlangt. \square

Aussagen über die Konjugiertheit iterativer σ -Monoide von L_1 und L_2 lassen sich also nicht in solche über die Konjugiertheit iterativer σ -Monoide von $L_1 \cap L_2$ überführen. Der Grund dafür liegt u.a. darin, daß es bisher keine Sätze gibt, die einen Zusammenhang zwischen den syntaktischen σ -Monoiden von L_1 und L_2 und dem von $L_1 \cap L_2$ herstellen.* Tatsächlich lassen sich kontextfreie Sprachen finden, deren 10-Index nicht endlich ist.

* Zwar gibt es in [Sak] einen Satz, der feststellt, daß $S^1_{L_1 \cap L_2} = S^1_{L_1} \times S^1_{L_2}$ teilt, doch ist diese Aussage für unsern Bedarf zu schwach.

Beispiel 2

Wir betrachten die Menge der Palindrome

$$P := \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^{*P}\}$$

wobei $(\)^{*P} : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$ der durch $a^{*P} = a$, $b^{*P} = b$ definierte Antihomomorphismus ist. Das syntaktische 1-Monoid von P , \mathcal{S}_P , ist trivial in dem Sinne, daß $\mathcal{S}_P \cong \{a, b\}^*$ ist.

Seien nämlich $w_1, w_2 \in \{a, b\}^*$, $w_1 \neq w_2$. Sicher ist $w_1 w_1^{*P} \in P$. Wir nehmen nun an, daß $w_2 w_1^{*P} \in P$. O.E. gilt $Länge(w_1) > Länge(w_2)$ und somit

$$w_1^{*P} = w w_2^{*P} \text{ mit } w = w^{*P}.$$

Sei o.E. $w \in a \cdot \{a, b\}^*$. Dann ist $w_1 b w_1^{*P} \in P$ aber $w_2 b w_1^{*P} \notin P$, da $b w \neq (b w)^{*P}$. Somit gilt also

$$w_1 \neq w_2 \implies w_1 \neq w_2(P).$$

\mathcal{S}_P ist also endlich erzeugt; auf der anderen Seite ist die Sprache P jedoch unendliche Vereinigung von Klassen der syntaktischen Kongruenz.

Lemma 10

Der 10- Index von P ist nicht endlich.

Beweis

Da \mathcal{S}_P uns keine Vorteile beschert, argumentieren wir in $\{a, b\}^*$. Für $u_n := (ab^n a, 1, 1)$ gibt es ein Monoid $M_n \in I^{10}_P(u_n)$ mit $\{(ab^n a, 1), (1, ab^n a)\} \subset M_n$. Ein induktives Argument liefert

$$M_n = \langle (ab^n a, 1), (1, ab^n a) \rangle.$$

Demzufolge gilt aber $M_n \neq M_m$ für $n \neq m$ □

Das nächste Beispiel stammt von L.Boasson. Es wird hier — mit etwas abgeändertem Beweis — trotzdem aufgeführt, weil es das erste Beispiel einer kontextfreien Sprache mit unendlichem 10- Index war und weil die hier durchgeführte Argumentation auch bei einigen anderen Beispielen greift.

Beispiel 3

Sei $L_\neq := \{a^n b^m \mid n \neq m\}$. L_\neq wird durch die kontextfreie Grammatik

$$G_\neq := (\{S, L, R\}, \{a, b\}, S, P)$$

mit

$$P = \{S \rightarrow aSb + L + R, L \rightarrow aL + A, R \rightarrow bR + b\}$$

definiert. Im syntaktischen Monoid der Sprache gelten die Gleichungen

$$aabb = ab \text{ und } 0 = ba.$$

Lemma 11

Der 10 - Index der Sprache L_{\neq} ist nicht endlich.

Beweis

Im Beweis wird ein zahlentheoretisches Argument benutzt. Den dabei verwendeten Satz wollen wir 'Satz des Euklid' nennen, weil er eine Folgerung aus dem Euklidischen Algorithmus zur Ermittlung des ggT zweier Zahlen ist.

Satz (Euklid)

Sind $n, m \in \mathbb{N}$ teilerfremd und ist $c \in \mathbb{N}$, so gibt es $z_1, z_2 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$z_1 n - z_2 m = c$$

Wir betrachten nun die iterativen 10 -Monoide der Umgebung $u = (1, aab, 1)$. Zu jeder natürlichen Zahl $i > 1$, also erst recht zu jeder Primzahl $i > 1$ gibt es ein iteratives Monoid M_i mit

$$(a^i, 1), (1, b^i) \in M_i.$$

Wir nehmen nun an, daß $M_i \sim_{10} M_{i'}$ für $i, i' \in \mathbb{P}$ und $i \neq i'$. Laut Definition gibt es also $k, l \in (\{a, b\}^*)^{10}$ mit

$$k \circ_{10} M_i \circ_{10} l \subset M_{i'} \text{ und umgekehrt.}$$

Wegen $aabb = ab$ (L_{\neq}) und $ba = 0$ (L_{\neq}) dürfen wir o.E. annehmen, daß

$$k = (a^n, b^m), l = (1, 1)$$

und

$$n \in \mathbb{N}, m = 0 \text{ oder } n \in \{1, 0\}, m \in \mathbb{N}_0$$

Wir betrachten den Fall $k = (a^n, 1)$ und kombinieren die Elemente

$$(a^n, 1), (a^n, b^{j_1}), (a^{i'}, 1) \in M_{i'} \quad \text{für } j \in \mathbb{N}.$$

$$\forall j_1, j_2 \in \mathbb{N} : (a^n)^{j_1} (a^{i'})^{j_2} (a^n)^{j_3} aab (b^{j_1})^{j_3} \in L_{\neq}$$

\iff

$$\forall j_1, j_2 \in \mathbb{N} : n j_1 + i' j_2 + n j_3 + 1 \neq (j_1 j_2)$$

Da wir $j_1, j_2 \in \mathbb{N}_0$ beliebig wählen dürfen, wählen wir $j_1 = j_2 = 1$.

\implies

$$\forall j_2, j \in \mathbb{N} : 2n + i'j_2 + 1 \neq (ji)$$

\Leftrightarrow

$$\forall j_2, j \in \mathbb{N} : 2n + 1 \neq ij - i'j_2$$

Widerspruch (zu Euklid)

Da man also eine surjektive Abbildung

$$h : M^{10}_{L_{\neq}} / \sim_{10} \longrightarrow \mathbb{P}$$

angeben kann, ist der 10 - Index von L_{\neq} nicht endlich. □

Beispiel 3 gibt uns die Möglichkeit, einige Betrachtungen im Hinblick auf Lemma 9 anzustellen. Dort hatten wir festgestellt, daß von den 10 - Indizes zweier Sprachen L_1 und L_2 nicht ohne weiteres auf den 10 - Index von $L_1 \cap L_2$ geschlossen werden kann. Betrachten wir die Sprache

$$L_{\neq,0} := L_{\neq} \cup \{a, b\}^* ba \{a, b\}^*,$$

deren 10 - Index laut Lemma 3 gleich 1 ist. Durch Schneiden mit der regulären Sprache

$$L_1 := a^* b^*$$

erhalten wir die Sprache L_{\neq} , deren 10 - Index nicht endlich ist. Andererseits erhalten wir durch Schneiden mit der regulären Sprache

$$L_2 := \{a, b\}^* ba \{a, b\}^*$$

aus $L_{\neq,0}$ wieder L_2 , deren 10 - Index gleich 1 ist.

Eine auffallende Gemeinsamkeit der Sprachen P und L_{\neq} ist, daß sich beide aus einer nicht endlichen Anzahl von Klassen ihrer syntaktischen Kongruenz zusammensetzen. Diese Beobachtung verdient sicher einige Aufmerksamkeit. Wir wenden zunächst einen einfachen Trick an, indem wir L_{\neq} zu $\bar{L}_{\neq} = \dagger.L_{\neq}.\ddagger \subset \{a, b, \dagger, \ddagger\}$ abändern. \bar{L}_{\neq} besteht nur aus einer einzigen Klasse ihrer syntaktischen Kongruenz. Außerdem ist das syntaktische 1 - Monoid von \bar{L}_{\neq} endlich darstellbar. Die gleichen Überlegungen, die wir bei L_{\neq} anstellten, zeigen, daß \bar{L}_{\neq} nicht endlichen 10 - Index haben kann.

Um weitere Schritte in diese Richtung zu gehen, werden wir die folgenden Beispiele so wählen, daß die Sprachen entweder unendliche Vereinigung von Klassen ihrer syntaktischen Kongruenz sind oder ihre syntaktische Kongruenz nicht endlich erzeugt ist.

Beispiel 4

Sei L_3 die von Sakarovich in seiner Arbeit [Sak] angesprochene Sprache

$$L_3 := \{a^x b^y c^z \mid x \neq y \text{ oder } y \neq z\}.$$

Das syntaktische 1 - Monoid dieser Sprache ist nicht endlich darstellbar, da die Relationen

$$a^n b^n c^n = a^m b^m c^m \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$$

gelten. Um den 10 - Index von L_3 festzustellen, gehen wir folgendermaßen vor:

Seien $M_1, M_2 \in M^{10}_{L_3}$. Da $0 = ba = ca = cb(L_3)$ gilt, muß einer der folgenden sechs Fälle eintreten:

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1) $M_i \subset (a^*)^2$ | 4) $M_i \subset (b^*)^2$ |
| 2) $M_i \subset a^* \times b^*$ | 5) $M_i \subset (c^*)^2$ |
| 3) $M_i \subset b^* \times c^*$ | 6) $M_i \subset a^* \times c^*$ |

Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß

$$M_i \in I^{10}_L(a^{k_i}, b^{k_i}, c^{l_i}) \text{ für } i = 1, 2$$

und zeigen, daß $M_1 \sim_{10} M_2$, falls für beide der gleiche Fall laut obenstehender Fallunterscheidung eintritt. Ohne die Allgemeingültigkeit einzuschränken, dürfen wir nun $M_1, M_2 \subset a^* \times b^*$ voraussetzen, da die anderen Fälle sich analog abhandeln lassen. Ist $\Delta = \max\{1 + l_1 - k_1, 1 + l_2 - k_2, 0\}$, so gilt sicher :

$$(a^{k_1}, b^{k_1}, c^{l_1}) \nabla_3 ((1, b^\Delta) \circ_{10} M_1) \subset L_3$$

und

$$(a^{k_2}, b^{k_2}, c^{l_2}) \nabla_3 (M_2 \circ_{10} (1, b^\Delta)) \subset L_3.$$

Natürlich ist auch

$$(1, b^\Delta) \circ_{10} M_1 \subset M_2$$

und

$$M_2 \circ_{10} (1, b^\Delta) \subset M_1$$

Der 10 - Index von L_3 ist also durch 6 nach oben beschränkt. Bei Licht besehen, beruht der Beweis im Wesentlichen jedoch darauf, daß nicht drei Komponenten eines Wortes gleichzeitig iteriert werden können. Deshalb ist es auch nicht weiter verwunderlich, daß man mit der Beweistechnik, die bei Beispiel 3 angewendet wurde, unendlichen 101, 110 und 111 - Index der Sprache L_3 nachweisen kann.

Beispiel 5

Wir wollen noch einmal zu unserem ersten Beispiel, der Semidycksprache, zurückkehren. Diesmal werden wir nicht die Sprache selbst, sondern ihr Komplement in \tilde{X}_n untersuchen. Da das Komplement \bar{L} einer Sprache L und die Sprache L

dieselben syntaktischen σ -Monoide besitzen, erhalten wir auf einfache Weise neue Beispiele für Sprachen, die sich aus unendlich vielen Klassen ihrer syntaktischen Kongruenz zusammensetzen. Wir nennen das Komplement der Semidycksprache über n Klammertypen \tilde{D}_n . Die Untersuchung der σ -Indizes von \tilde{D}_n mit $n > 1$ bereitet keinerlei Schwierigkeiten, da \tilde{D}_n das Ideal 0 der Semidycksprache enthält. Lemma 3 liefert uns also wieder den Wert eins für alle σ -Indizes. Bei \tilde{D}_1 läßt sich dieser Schluß nicht vollziehen und da die iterativen 10-Monoide

$$I^{10}_{D_1}((,)) \ni M_\lambda \text{ mit } ((^\lambda, 1), (1,)^\lambda) \in M_\lambda$$

und

$$I^{10}_{D_1}((,)) \ni M_{\lambda'} \text{ mit } ((^{\lambda'}, 1), (1,)^{\lambda'}) \in M_{\lambda'}$$

für $\lambda, \lambda' \in \mathbb{P}$, $\lambda \neq \lambda'$ nicht konjugiert sein können — was man auf die gleiche Weise einsieht wie bei Beispiel 3 — erhalten wir unendlichen 10-Index für \tilde{D}_1 .

Zum Abschluß wollen wir die Ergebnisse dieses Kapitels interpretieren. Lemma 9 sowie die Beispiele 2 und 3 geben einen Hinweis darauf, daß es schwierig ist, ausgehend von den klassischen Charakterisierungen formaler Sprachen Aussagen über iterative σ -Monoide und σ -Indizes zu machen. Das liegt zum einen daran, daß σ -Indizes und iterative σ -Monoide sich beim Schneiden oder Vereinigen zweier Sprachen unvorhersehbar ändern können. Andererseits kann die Struktur einer Sprache, wie sie sich in den iterativen σ -Monoiden einer Sprache zeigt, erheblich von der durch eine erzeugende Grammatik dargestellten abweichen. Wir haben dies an den Beispielen 2 und 3 gesehen, wo uns "unnatürliche" iterative σ -Monoide, d.h. solche, die man beim intuitiven Erzeugen von Worten der Sprache nicht benutzen würde, unendlichen 10-Index bescherten.

Dies läßt vermuten, daß es schwierig ist, Eigenschaften formaler Sprachen, die eng mit dem Begriff der (kontextfreien) Grammatik verknüpft sind, wie dies z.B. bei inhärenter Mehrdeutigkeit der Fall ist, von den iterativen σ -Monoiden abzulesen.

Den besten Zugang zu den iterativen Monoiden scheinen die syntaktischen σ -Monoide zu bieten, d.h. Charakterisierungen von Sprachen mit Hilfe von Kongruenzrelationen. Dieser Eindruck soll im nächsten Kapitel verstärkt werden, wo auf einen interessanten Sonderfall kontextfreier Sprachen, die Klammersprachen, eingegangen wird.

Kapitel 4

Wie bereits angekündigt, werden in diesem Kapitel die Klammersprachen unter dem Gesichtspunkt der iterativen 10 - Monoide untersucht. Eine Klammersprache ist zunächst nichts anderes als eine kontextfreie Sprache $L \subset (X \cup \tilde{X}_1)^*$, wobei X ein beliebiges Alphabet und $X_1 = \{(\cdot, \cdot)\}$ ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- 1) $L \subset \{(\cdot, \cdot)(X \cup \tilde{X}_1)^*(\cdot, \cdot)\}$
- 2) Ist $\varphi_1 : (X \cup \tilde{X}_1)^* \rightarrow \tilde{X}_1$ der "Vergißhomomorphismus" und $\rho : \tilde{X}_1^* \rightarrow \tilde{X}_1^* \cup \{0\}$ die Dyckkürzung, so ist $L\varphi_1\rho = 1$
- 3) $\exists n \in \mathbf{N} : \forall w \in (X \cup \tilde{X}_1)^* : w = 0(L)$

$$w = w_1 v w_2$$

$$\text{Länge}(w_1) + \text{Länge}(w_2) \triangleright n$$

$$w_1, w_2 \in X^*$$

$$v\varphi_1\rho = 1$$

$$w_1, w_2 \in X^*$$

Klammersprachen werden in [Knuth] untersucht. Dort wird auch eine Definition der Klammersprachen gegeben, die der obigen entspricht. Da Knuth die Konzepte des syntaktischen Monoides bzw. der Dyckkürzung nicht verwendet, formuliert er die Eigenschaften 2) und 3) etwas anders. Wir wollen trotzdem seine Terminologie beibehalten und so insbesondere die Eigenschaft 3) als "bounded associates" bezeichnen. In [Knuth] wird bewiesen, daß eine Klammersprache sich durch eine sog. Klammergrammatik erzeugen läßt, d.h. durch eine kontextfreie Grammatik $G = (VN, (X \cup \tilde{X}_1)^*, S, P)$, so daß

$$\forall (A \rightarrow w) \in P : w \in \{(\cdot, \cdot)(X \cup VN)^*(\cdot, \cdot)\} \text{ gilt.}$$

Umgekehrt ist jede durch eine solche Grammatik erzeugte Sprache natürlich eine Klammersprache.

Wir wollen an dieser Stelle eine Eigenschaft von Klammergrammatiken festhalten, die wir später in einigen Beweisen brauchen werden.

Lemma 12

Sei $G_P = (VN, X \cup \tilde{X}_1, S, P)$ Klammergrammatik, $L = L_G$, $w = (\cdot, w') \in \{(\cdot, \cdot)(X \cup \tilde{X}_1)^*(\cdot, \cdot)\}$, $w \neq 0(L)$ und $w'\varphi_1\rho = 1$ wobei φ_1, ρ wie oben definiert sind. Dann gibt es $A \in VN$ mit $A \xrightarrow{\cdot} w$.

(Ohne Beweis)

Klammersprachen besitzen einige weitere Eigenschaften die der Umgang mit ihnen sehr angenehm machen. Zu jeder Klammersprache L_P läßt sich eine Klammergrammatik G_P finden, die L_P erzeugt und außerdem invertierbar ist [Mc Naughton]. Unter Invertierbarkeit verstehen wir dabei die Eigenschaft

$$\forall A \rightarrow v, B \rightarrow w \in P : v = w \implies A = B$$

Die Produktionen invertierbarer Klammergrammatiken lassen sich als Gleichungen lesen. Gilt nämlich $A \xrightarrow{\cdot} w_1 w_2 w_3$ mit $A \in V.N$ und $w_i \in (X \cup \bar{X}_1 \cup V.N)^*$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und gibt es außerdem eine Produktion $B \rightarrow w_2 \in P$, so muß $A \xrightarrow{\cdot} w_1 B w_3$ gelten.

Eine etwas schwächere Eigenschaft wird i.A. als Sackgassenfreiheit bezeichnet:

$$\begin{aligned} \forall S \in \mathcal{S} : S \xrightarrow{\cdot} w_1 w_2 w_3 : \quad \exists S' \in \mathcal{S} : S' \xrightarrow{\cdot} w_1 A w_3 \\ w_i \in (V.N \cup T)^* \text{ für } i = 1, 2, 3 \\ A \xrightarrow{\cdot} w_2 \text{ für } A \in V.N \end{aligned}$$

Mit T soll dabei das gesamte Terminalalphabet gemeint sein.

Faktorisieren wir nun das freie Monoid $(V.N \cup T)^*$ nach P aus, so gilt das folgende Lemma.

Lemma 13

Ist $G = (V.N, X, \mathcal{S}, P)$ eine sackgassenfreie Grammatik, die L erzeugt, und \hat{P} die kleinste Kongruenz auf $(X \cup V.N)^*$, die P enthält, so ist

$$\hat{P}' := \hat{P} \cap (X^*)^2$$

eine Verfeinerung der syntaktischen 1 - Kongruenz auf X^* .

Beweis

Sei $(w, v) \in \hat{P}'$. Es gibt also

$$w_0, \dots, w_z \in (X \cup V.N)^* \text{ mit}$$

$$w = w_0, w_z = v \text{ und}$$

$$\begin{aligned} \text{entweder } w_i = w'_i A w''_i, w_{i+1} = w'_i m_{i+1} w''_i \text{ und } A \rightarrow m_{i+1} \in P \\ \text{oder } w_i = w'_i m_i w''_i, w_{i-1} = w'_i A w''_i \text{ und } A \rightarrow m_i \in P \end{aligned}$$

Wir zeigen zunächst durch Induktion über z , daß aus $S \xrightarrow{\cdot} w$

$$\forall 0 \leq i \leq z : \exists S' \in \mathcal{S} : S' \xrightarrow{\cdot} w_i$$

folgt.

I.A. Für $z = 0$ gibt es nichts zu zeigen.

I.S. Laut Induktionsannahme gilt $\exists S \in \mathcal{S} \quad S \xrightarrow{\circ} w_x$. Der Voraussetzung nach unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall $w_x = w'_x A w''_x$
 $w_{x+1} = w'_x m_{x+1} w''_x$ und $A \rightarrow m_{x+1} \in P$
 $S \xrightarrow{\circ} w_{x+1}$ folgt also direkt aus $S \xrightarrow{\circ} w_x$
2. Fall $w_x = w'_x m_x w''_x$
 $w_{x+1} = w'_x A w''_x$
 Die Sackgassenfreiheit liefert direkt $S \xrightarrow{\circ} w'_x A w''_x$.

Nun kommen wir auf die Behauptung des Lemmas zurück. Seien $x_1, x_2 \in X^*$ beliebig und $x_1 w x_2 \in L$. Es gibt also $S \in \mathcal{S}$ mit $S \xrightarrow{\circ} x_1 w x_2$. Da \hat{P} eine Kongruenz ist, gilt

$$(x_1, x_2) \circ_{10} (w, v) \circ_{10} (x_2, x_1) \in \hat{P}$$

und unsere Hilfsbehauptung liefert $S' \xrightarrow{\circ} x_1 v x_2$ für irgendein $S' \in \mathcal{S}$ und in der Konsequenz $x_1 v x_2 \in L$. Da wir die Argumentation auch symmetrisch ansetzen können, gilt sicher auch die andere Richtung und wir haben

$$\forall x_1, x_2 \in X^* : x_1 w x_2 \in L \iff x_1 v x_2 \in L$$

Dies war aber gerade die Bedingung für syntaktische Äquivalenz □

Zum Abschluß des Exkurses wollen wir noch das Konzept der σ -Monoiden übernehmen. Dazu definieren wir

$$I := \{w \in X^* \mid \forall S \in \mathcal{S}, x_1, x_2 \in X^* : x_1 w x_2 \neq S \quad (P)\}.$$

I ist natürlich wieder ein beidseitiges Ideal von $(X \cup V N)^*$, so daß wir wieder von

$$(X \cup V N)^* / P$$

auf den Reesschen Quotienten

$$((X \cup V N)^* / P) / I$$

Die besondere Bedeutung der Klammersprachen ergibt sich daraus, daß sich mit ihrer Hilfe das Problem der Strukturäquivalenz kontextfreier Sprachen effektiv lösen läßt. Zu diesem Zwecke konstruiert man zu gegebener kontextfreier Grammatik G eine Klammergrammatik G_P , die neben der Information über die Sprache auch Informationen über durch die zugrundeliegende kontextfreie Grammatik dargestellte Struktur enthält. Wir sehen dies kurz an folgendem Beispiel:

$$\text{Sei } L_\pm = L_G \text{ für } G = (\{S, L, R\}, \{a, b\}, \{S\}, \{S \rightarrow aSb + aL + bR, \\ L \rightarrow aL + a, \\ R \rightarrow bR + b\})$$

Die dazugehörige Klammergrammatik erhalten wir, indem wir die rechten Seiten der Produktionen in Klammern einschließen.

$$G_P = (\{S, L, R\}, \{a, b\}, \{S\}, \{S \rightarrow (aSb) + (aL) + (Rb) \\ L \rightarrow (aL) + (a) \\ R \rightarrow (bR) + (b)\})$$

Der Übergang von L_ε auf $L_{\varepsilon, P}$ hat beträchtliche Auswirkungen auf den 10 - Index. Statt unendlichen 10 - Index erhalten wir nun den 10 - Index 3, wie er aufgrund der Grammatik auch zu erwarten gewesen wäre. Wir fragen uns also, ob die durch die iterativen 10 - Monoiden dargestellte Struktur der geklammerten Version einer kontextfreien Sprache enger an die Struktur, wie sie in der zugehörigen kontextfreien Grammatik zum Ausdruck kommt, gebunden ist, als dies i.A. bei kontextfreien Sprachen der Fall ist. Eine erste Antwort auf diese Frage erteilt das folgende Lemma.

Lemma 14

Sei L eine Klammersprache, die von der invertierbaren Klammergrammatik G erzeugt wird. Ist $(m_1, m_2) \neq (1, 1)$ Element eines iterativen 10 - Monoides $\mathcal{M} \in I^{10}_L(u_1, u_2, u_3)$, so gibt es Variable $A_0, \dots, A_n \in VN$ mit $A_i \neq A_j$ für $i \neq j$ und eine Zerlegung $(\tilde{m}_1, \tilde{m}_2) (\hat{m}_1, \hat{m}_2)$ von (m_1, m_2) , so daß gilt:

- 1) $(\hat{m}_1, \tilde{m}_2) \circ_{10} (\tilde{m}_1, \hat{m}_2) \nabla_2 A_i = A_{i+1}(P)$ für $i \in \{0, \dots, n\}$
- 2) $\exists j \in \{1, \dots, n\} : (\hat{m}_1, \tilde{m}_2) \circ_{10} (\tilde{m}_1, \hat{m}_2) \nabla_2 A_n = A_j(P)$
- 3) $\exists k, l \in \mathbf{N}_0 : \forall A_i, i = 1, \dots, n : \exists S \in \mathcal{S} : u_1 m_1^k \tilde{m}_1 A_i \hat{m}_2 m_2^l u_3 = S$
- 4) $A_0 = \hat{m}_1 m_1^{n-k} u_2 m_2^{n-l} \tilde{m}_2$

Bevor wir den Beweis in Angriff nehmen, wollen wir uns die Aussage dieses Lemmas genauer ansehen. Jetzt und für das folgende Lemma ist eine graphische Anschauung sehr vorteilhaft. Wir betrachten also zu gegebener Klammergrammatik $G = (VN, X, \mathcal{S}, P)$ den Graphen $\mathcal{G}(G) = (E, K)$, der die Eckenmenge

$$E = VN \cup \{1\}$$

und die Kantenmenge

$$K = \{(A, (v_1, v_2), B) \mid A \rightarrow v_1 B v_2 \in P\} \\ \cup \\ \{(A, (w, 1), 1) \mid A \rightarrow w \in P\}$$

besitzt und durch die Abbildungen

$$Q : K \rightarrow E; (A, (v_1, v_2), B)Q = A$$

$$Z : K \rightarrow E; (A, (v_1, v_2), B)Z = B$$

charakterisiert wird. Diesen Graphen beschriften wir mit Hilfe des Funktors Θ , der die freie Wegekatgorie $\mathcal{W}(\mathcal{G})$ des Graphen \mathcal{G} in das Monoid

$$((VN \cup X)^*/P)^{10}$$

abbildet:

$$\Theta : \mathcal{W}(\mathcal{G}) \rightarrow ((VN \cup X)^*/P)^{10}; \begin{cases} A\Theta_1 = 1 \\ (x, (v_1, v_2), y)\Theta_2 = (v_1, v_2) \end{cases}$$

Aus dieser Perspektive betrachtet, sagt das Lemma nichts anderes aus, als daß man $\mathcal{G}(G)$ die iterativen Paare ansehen kann, d.h. daß jedem iterativen Paar mindestens ein Zyklus des Graphen entspricht.

Beweis(Lemma 14)

Wir bezeichnen wieder mit

$\rho : \tilde{X}_1^* \rightarrow \tilde{X}_1^* \cup \{0\}$ die Dyckkürzung,

$\varphi_1 : (X \cup \tilde{X}_1)^* \rightarrow \tilde{X}_1^*$ den einen "Vergißhomomorphismus", und mit

$\varphi_2 : (X \cup \tilde{X}_1)^* \rightarrow X^*$ den anderen "Vergißhomomorphismus".

$F(X_1)$ ist die von X_1 frei erzeugte Gruppe, d.h.

$$F(X_1) = \tilde{X}_1^* / \{x_1 x_1^{-1} = 1 = x_1^{-1} x_1\}.$$

Wir erweitern die Homomorphismen ggf. komponentenweise auf $((X \cup \tilde{X}_1)^*)^{10}$.

1) Weil $(m_1, m_2) \neq (1, 1)$, gilt

$$m_1 \varphi_1 \rho \neq 1 \text{ in } F(X_1)$$

und

$$m_2 \varphi_1 \rho \neq 1 \text{ in } F(X_1),$$

da sich sonst ein Widerspruch zur Eigenschaft "bounded associates" bzw. zur Endlichkeit der Produktionenmenge ergäbe.

2) Da $(m_1, m_2) \varphi_1 \rho$ ein iteratives Paar der Dycksprache ist, gilt laut Lemma 7

$$(m_1, m_2) \varphi_1 \rho = ({}^1 n_1^{-1} {}^2 n_1 {}^1 n_1, {}^1 n_2^{-1} {}^2 n_1^{-1} {}^1 n_2)$$

mit ${}^1 n_i, {}^2 n_i \in (X)^*$ für $i = 1, 2$. Eigenschaft 1) liefert zusätzlich, daß ${}^2 n_1 \neq 1$ ist.

Es ist also möglich, m_i für $i = 1, 2$ in \tilde{m}_i, \hat{m}_i zu zerlegen und $l, k \in \mathbb{N}$ zu finden, so daß

$$(.R.) := \hat{m}_1 m_1^k u_2 m_2^l \tilde{m}_2 \in \{(\cdot)(X \cup \tilde{X}_1)^* \cdot\} \quad (1)$$

und

$$R = 1 \quad (D) \quad (2)$$

Worte mit den Eigenschaften 1) und 2) lassen sich gemäß einer Klammere-grammatik laut Lemma 12 aus einem Nichtterminal ableiten, d.h.

$$\exists A_0 \in V.N : A_0 = \hat{m}_1 m_1^k u_2 m_2^l \tilde{m}_2.$$

Aus 1) und 2) folgt darüberhinaus, daß

$$\forall n \in \mathbb{N} : [(\hat{m}_1 \tilde{m}_1)^k \hat{m}_1 m_1^k u_2 m_2^l \tilde{m}_2 (\hat{m}_2 \tilde{m}_2)^k] \varphi_1 \rho = 1 \quad (D)$$

weshalb es für alle $i \in \mathbb{N}$, Variablen $A_i \in V.N$ mit

$$A_i = (\hat{m}_1 \tilde{m}_1)^i \hat{m}_1 m_1^k u_2 m_2^l \tilde{m}_2 (\hat{m}_2 \tilde{m}_2)^i \quad (P)$$

$$= (\hat{m}_1 \tilde{m}_1) A_{i-1} (\hat{m}_2 \tilde{m}_2)$$

gibt. Weil $V.N$ endlich ist, gibt es $n \neq j$ mit $A_n = A_{j-1}$, es gilt also

$$A_j = \hat{m}_1 \tilde{m}_1 A_n \hat{m}_2 \tilde{m}_2 (P)$$

Ist nun $n := \max(k, l)$, so haben wir außerdem

$$\begin{aligned} L \ni (u_1, u_2, u_3) \nabla_3 (m_1, m_2)^{n+1} \\ &= (u_1, u_3) \circ_{10} (\tilde{m}_1 (\hat{m}_1 \tilde{m}_1)^{n-k}, (\tilde{m}_2 \tilde{m}_2)^{n-l} \hat{m}_2) \\ &\quad \circ_{10} ((\hat{m}_1 \tilde{m}_1)^{k+1} \hat{m}_1, \tilde{m}_2 (\hat{m}_2 \tilde{m}_2)^{l-1}) \\ &\quad \nabla_2 u_2 \end{aligned}$$

woraus wegen

$$A_i = (\hat{m}_1 \tilde{m}_1)^{k-1} \hat{m}_1 u_2 \tilde{m}_2 (\hat{m}_2 \tilde{m}_2)^{l-1} \quad (P)$$

auch die dritte und die vierte Aussage des Lemmas folgen. \square

Lemma 14 gibt uns nun die Mittel in die Hand, die wir benötigen, um den folgenden Satz zu verifizieren. Auch bei diesem Satz scheint es hilfreich zu sein, die graphische Darstellung einer Klammergrammatik vor Augen zu haben.

Satz 2

Ist L eine Klammersprache, so ist der 10 - Index von L endlich.

Beweis

Aufgrund der Sätze von Knuth und Mc. Naughton dürfen wir annehmen, daß L von einer invertierbaren Klammergrammatik erzeugt wird.

Unter einer Quelle Q in der Umgebung (u_1, u_3) verstehen wir eine Menge von Nichtterminalen

$$Q = \{A_1, \dots, A_n\} \subset V_i N,$$

so daß es

- 1.) Paare $(m_1, m_2) \in ((V_i N \cup X \cup \tilde{X}_1)^*)^{10}$ gibt, mit $(m_1, m_2) \nabla_1 Q \subset Q \quad (P)$
- 2.) $(u_1, u_3) \nabla_2 Q \subset S \quad (P)$

$$M_Q := \{(m_1, m_2) \mid (m_1, m_2) \nabla_2 Q \subset Q(P)\}$$

heißt das "von Q ausgehende Monoid".

Wir zeigen nun, daß es zu jedem iterativen Monoid $N \in M^{10}_L$ eine Quelle $Q \subset V_i N$ gibt, so daß $N \sim_{10} M_Q$. Da es maximal $2^{\#V_i N}$ verschiedene Quellen gibt, stellt diese Zahl eine obere Schranke für den 10 - Index von L dar. Die Relation $<$ auf N sei wie folgt definiert:

Zu $(m_1, m_2), (p_1, p_2) \in N$ sei

$$\begin{aligned} (m_1, m_2) \varphi_1 \rho &= ({}^1 n_1^{-12} n_1 {}^1 n_1, {}^1 n_2^{-12} n_1^{-11} n_2) \\ (p_1, p_2) \varphi_1 \rho &= ({}^1 q_1^{-12} q_1 {}^1 q_1, {}^1 q_2^{-12} q_1^{-11} q_2) \end{aligned}$$

wobei ${}^2 n_1, {}^2 q_1, {}^1 n_i, {}^1 q_i \in (X_1)^*$ für $i = 1, 2$ (siehe Beweis zu Lemma 14)

$$\begin{aligned} (m_1, m_2) < (p_1, p_2) &\iff_{Def} \text{Länge}({}^1 n_1) < \text{Länge}({}^1 q_1) \\ &\text{und} \\ &\text{Länge}({}^1 n_2) < \text{Länge}({}^1 q_2) \end{aligned}$$

(\mathcal{N}, \prec) ist eine partielle Ordnung, die ein maximales Element besitzt, da

$$\forall (m_1, m_2) \in \mathcal{N} : \text{Länge}(^1 n_1) + \text{Länge}(^1 n_2) \leq \text{Länge}(u_1 \varphi_1 \rho) + \text{Länge}(u_3 \varphi_1 \rho)$$

gilt. Dem Beweis von Lemma 14 entnehmen wir nun, daß es ein Element $(m_1, m_2) = (\tilde{m}_1 \hat{m}_1, \tilde{m}_2 \hat{m}_2) \in \mathcal{N}$ gibt, mit

- 1) $\hat{m}_1 q_1 \tilde{m}_1 \varphi_1 \rho \in (X_1)^*$
 $\tilde{m}_2 q_2 \tilde{m}_2 \varphi_1 \rho \in (X_1^{-1})^*$ für alle $(q_1, q_2) \in \mathcal{N}$
- 2) $\hat{m}_1 u_2 \tilde{m}_2 \varphi_1 \rho = 1$

Dazu nehmen wir einfach ein Element $(o_1, o_2) \in \mathcal{N}$. Der Beweis von Lemma 14 lehrt, daß es $k, l \in \mathbf{N}$ und eine Zerlegung $(o_1, o_2) = (\tilde{o}_1 \hat{o}_1, \tilde{o}_2 \hat{o}_2)$ gibt, mit

- 1') $\hat{o}_1 \varphi_1 \rho \in (X)^+$ $\tilde{o}_1 \in (X_1^{-1})^*$
 $\tilde{o}_2 \varphi_1 \rho \in (X_1^{-1})^+$ $\hat{o}_2 \in (X_1)^*$
- 2') $\hat{o}_1 o_1^k u_2 o_2^l \tilde{o}_2 \varphi_1 \rho = 1$

Wir definieren, falls $n = \max(k, l)$ ist,

$$\tilde{m}_1 = \tilde{o}_1 (\hat{o}_1 \tilde{o}_1)^{n-k}$$

$$\hat{m}_1 = (\hat{o}_1 \tilde{o}_1)^k \hat{o}_1$$

$$\tilde{m}_2 = (\tilde{o}_2 (\hat{o}_2 \tilde{o}_2))^l$$

$$\hat{m}_2 = (\hat{o}_2 \tilde{o}_2)^{n-l} \hat{o}_2,$$

so daß gilt

$$(m_1, m_2) = (o_1, o_2)^{n+1} \in \mathbf{N}$$

Da wir n auch größer als $\max(k, l)$ wählen können und die partielle Ordnung (\mathcal{N}, \prec) beschränkt ist, dürfen wir auch Behauptung 1) als erfüllt ansehen.

3) Aus der Konstruktion von (m_1, m_2) folgt

$$\forall A \in V.N, (p_1, p_2) \in \mathcal{N} : \left[(\hat{m}_1, \tilde{m}_2) \circ_{10} (p_1, p_2) \nabla_2 A \right] \varphi_1 \rho = 1.$$

Weil $0 \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\hat{m}_1 p_1 \tilde{m}_1, \hat{m}_2 p_2 \tilde{m}_2)^i \nabla_2 \hat{m}_1 u_2 \tilde{m}_2$
ist

$$Q := \{A \in V.N \mid \exists (p_1, p_2) \in N : A = (\hat{m}_1, \tilde{m}_2) \circ_{10} (p_1, p_2) \nabla_2 u_2(P)\}$$

eine Quelle in den Umgebungen

$$(u_1, u_3) \circ_{10} (p_1, p_2) \circ_{10} (\tilde{m}_1, \hat{m}_2) \text{ f\"ur } (p_1, p_2) \in N,$$

die die Eigenschaft

$$(\hat{m}_1, \tilde{m}_2) \circ_{10} N \circ_{10} (\tilde{m}_1, \hat{m}_2) \subset M_Q \text{ besitzt.}$$

Sei nun umgekehrt $(q_1, q_2) \in M_Q$, d.h.

$$(q_1, q_2) \nabla_2 Q \subset Q \quad (P)$$

und

$$({}^i p_1, {}^i p_2) \in M \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq l.$$

4) Durch Induktion über l zeigen wir, daß

$$\hat{m}_1^2 p_1 \dots \tilde{m}_1 q_1 \hat{m}_1^l p_1 u_2^l p_2 \dots \tilde{m}_2 \in Q \quad (P) \quad (*)$$

I. A. $l = 1$

$\hat{m}_1 u_2 \tilde{m}_2 \in Q$ laut Definition.

I. S. $l \rightarrow l+1$

$$w := \hat{m}_1^2 p_1 \tilde{m}_1 q_1 \hat{m}_1^3 p_1 \dots {}^l p_1 \tilde{m}_1 q_1 \hat{m}_1^{l+1} p_1 u_2^{l+1} p_2 \tilde{m}_2 q_2 \hat{m}_2^l p_2 \dots {}^3 p_2 \tilde{m}_2 q_2 \hat{m}_2^2 p_2 \tilde{m}_2$$

$\in Q \quad (P) \text{ laut Induktionsannahme}$

$$(\hat{m}_1^l p_1 \tilde{m}_1, \hat{m}_2^l p_2 \tilde{m}_2), (q_1, q_2) \in M_Q$$

also ist auch $w \in Q \quad (P)$, womit der Induktionsschritt geleistet ist.

Weil Q eine Quelle in den Umgebungen

$$(u_1, u_3) \circ_{10} (p_1, p_2) \circ_{10} (\tilde{m}_1, \hat{m}_2) \text{ f\"ur alle } (p_1, p_2) \in N$$

ist, folgt aus $(*)$, daß

$$u_1^l p_1 \tilde{m}_1 q_1 \hat{m}_1^2 p_1 \tilde{m}_1 q_1 \hat{m}_1 \dots \circ_2 \dots u_3 \in L$$

Wir haben insgesamt

$$N \sim_{10} M_Q$$

gezeigt. □

Versteht man Klammersprachen als übergeordnete Schweise kontextfreier Sprachen, denen die Strukturinformationen einer Grammatik beigelegt sind, so läßt sich der Satz 2 so interpretieren, daß bei Kenntnis der Grammatik einer Sprache nur noch endlich viele Klassen konjugierter iterativer 10 - Monoide möglich sind. Damit wären wir wieder an unserem Ausgangspunkt angelangt, an dem wir einen abstrakten Musterbegriff zur Formung von Sätzen einer Sprache gesucht hatten. Im Verlauf der Arbeit hatten wir uns nicht um die Handlichkeit dieses Musterbegriffes gekümmert. Zunächst wäre endliche Darstellbarkeit der Muster — Monoide —, die bei der Erzeugung der Sprache zur Anwendung kommen, von Vorteil. Leider sind die iterativen σ - Monoide i.A. nicht endlich erzeugt, wie wir dies schon an dem einfachen 10 - Monoid

$$M_0 \in I_{D(1,1,1)}^{10}$$

der Dycksprache sehen. Eine Lösung scheint hier das Konzept der ineinandergeschachtelten Muster zu sein, was jedoch wieder in die Nähe der kontextfreien Grammatiken führt, von denen wir eigentlich abstrahieren wollten.

Ein noch wichtigerer Aspekt der Handlichkeit ist die Endlichkeit des Mustervorrates. In der Arbeit hatten wir schon bei relativ einfachen kontextfreien Sprachen unendlichen 10 - Index konstatieren müssen. Wie bereits gesagt, beruhte dies darauf, daß unsere Definition alle Muster einer Sprache in Betracht zieht und nicht nur Mengen von zur Erzeugung der Sprache notwendigen Mustern.

Unser letztes Kapitel bietet uns bei näherem Hinsehen aber die Möglichkeit, bei kontextfreien Sprachen eine Unterscheidung zwischen notwendigen und überflüssigen Mustern zu treffen und dabei stets eine endliche Anzahl von Klassen konjugierter Monoide zu erhalten.

Dazu nehmen wir die Klassen konjugierter 10 - Monoide, die die mit einer gegebenen kontextfreien Grammatik assoziierte Klammergrammatik liefert, und löschen in diesen Monoiden alle Klammern aus, indem wir die Monoide mit Hilfe des Vergißhomomorphismus' ρ_2 nach X^* abbilden. Dieses Vorgehen beschert uns eine Menge von Monoiden, deren Index bzgl. \sim_{10} endlich ist und die zum Erzeugen der Sprache ausreicht.

Bemerkenswert ist in dem Zusammenhang, daß die Konstruktion unter den üblichen trivialen Grammatiktransformationen * invariant ist. Es stellt sich natürlich die Frage, wie verschieden die durch diese Konstruktion für eine Sprache erhaltenen Klassen sein können, oder, anders ausgedrückt, wie verschieden die "Rezepte" sein können, nach denen eine Sprache mit kontextfreien Grammatiken

* z.B. Einfügen zusätzlicher Nichtterminale, Übergang auf CNF ...

erzeugt werden kann. Die Beantwortung dieser Frage wäre interessant, scheint zur Zeit aber noch sehr schwierig zu sein. Mehr Hoffnung als eine Vermutung bleibt, daß die zur Erzeugung einer Sprachen notwendigen Monoide bis auf Konjugiertheit fest sind, d.h. daß die Klassen konjugierter Monoide eine Invariante kontextfreier Sprachen darstellen.

Literatur

- [Bo] L. Boasson
Paires Iterantes et Langages Algebriques
These, Paris 1974
- [Clif] A.H. Clifford, G.A. Preston
The Algebraic Theory of Semigroups
Vol. 1 + 2
American Mathematical Society 1961
- [Ho] G. Hotz
K - dimensionale syntaktische Monoide
EIK 1981
- [Ho1] G. Hotz
Über die Darstellbarkeit des syntaktischen Monoides kontextfreier Sprachen
R.A.I.R.O. 1979
- [Ho2] G. Hotz K. Estenfeld
Formale Sprachen
BI 1981
- [Knuth] D.E. Knuth
A Characterization of Paranthesis Languages
Information and Control 1967
- [Nau] R. Mc.Naughton
Paranthesis Grammars
Journal of ACM 1967
- [Sak] J. Sakarovitch
Monoïdes syntactiques et Langages algebriques
These, Paris 1977

Weitere, nicht zitierte Literatur

P. Deussen
Halbyruppen und Automaten
Springer 1971

J.E. Hopcroft J.D. Ullman
*Introduction to Automata Theory, Languages
and Computation*
Addison Wesley 1979

G. Hotz
*Der Satz von Chomsky - Schützenberger und
die schwerste kontextfreie Sprache
von S. Greibach*
Societe Mathematique de France
Asterisque 1976

A.K. Salomaa
Formale Sprachen
Springer Verlag 1977

A.K. Salomaa
Computation and Automata
Encyclopedia of Mathematics and Its Applications
Cambridge University Press 1985