Bemerkungen zur Theorie der quadratischen Formen über semilokalen Ringen

Manfred Knebusch

A 70 - 04

Manfred Knebusch, Saarbrücken
Universität des Saarlandes

Bemerkungen zur Theorie der quadratischen Formen über semilokalen Ringen

Vorläufiger Bericht über Versuche, einige wohlbekannte Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen über Körpern oder diskreten Bewertungsringen auf semilokale Ringe zu übertragen.

1. Bezeichnungen. C sei ein semilokaler Ring, d.h. ein kommutativer Ring mit Einselement, der nur endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}_1,\dots\mathfrak{m}_t$ besitzt. Mit $\mathfrak{r}$ bezeichnen wir das Radikal (= Durchschnitt der $\mathfrak{m}_i$), mit C^* die Einheitengruppe von C. Unter einem (symmetrisch) bilinearen Raum E über C verstehen wir einen freien, endlich erzeugten C-Modul E, versehen mit einer symmetrischen bilinearen Form $B: E\times E\to C$. Wir beschreiben E häufig durch die Wertematrix $(B(e_i,e_j))$ zu einer Basis $e_1,\dots e_n$. Der Raum E (oder die Form B) heiße nicht entartet, falls die Determinante dieser Matrix eine Einheit ist. Zu zwei bilinearen Räumen E und F erklärt man in naheliegender Weise die orthogonale Summe $E\perp F$ und das Tensorprodukt $E\otimes F$ ([B], §1, Def. 11). Dadurch wird die Menge S(C) der Isomorphieklassen nichtentarteter bilinearer Räume über C ein Halbring.

Unter einem quadratischen Raum E über C verstehen wir einen freien endlich erzeugten C-Modul E, versehen mit einer quadratischen Form q, d.h. einer Abbildung $q: E\to C$, so daß für $x,y\in E, \lambda\in C$ gilt: $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $q(x+y) = q(x) + q(y) + B(x,y)$ mit bilinearer Form B. Wir beschreiben E oft durch die Wertetabelle $[a_{ij}]$, $a_{ii}:= q(e_i)$, $a_{ij}:= B(e_i,e_j)$ für $i\neq j$, zu einer

Basis $\{e_i\}$ von E über C. Der quadratische Raum E heiße nicht entartet, falls B nicht entartet ist. Zu einem bilinearen Raum (E,B_1) und einem quadratischen Raum (F, q_2) läßt sich auf dem Tensorprodukt $E \otimes_C F$ eine quadratische Form q definieren, so daß für $x \in E$ und $y \in F$ gilt: $q(x \otimes y) = B_1(e,e)q_2(y)$. Den Raum $(E \otimes_C F, q)$ bezeichnen wir kurz als $E \otimes F$. Die Halbgruppe $Sq(C)$ der Isomorphieklassen aller nichtentarteten quadratischen Räume über C (orthogonale Summe $\perp$) ist unter dem Tensorprodukt ein Halbmodul über $S(C)$. Ist $2 \in C^*$, so ist $Sq(C) = S(C)$, denn jeder symmetrischen Bilinearform B entspricht dann genau eine quadratische Form $q(x) = \frac{1}{2} B(x,x)$. Für die quadratischen bzw. bilinearen Formen aller auftretenden Räume schreiben wir unterschiedslos q bzw. B, solange keine Verwirrung entstehen kann. Die orthogonale Summe von r Kopien eines Raumes E bezeichnen wir mit $r \times E$.

2. Zerlegung in kleine Räume.

Alle Räume in diesem Abschnitt seien nicht entartet .

Sei E zunächst bilinearer Raum. Als Norm $n(x)$ eines $x \in E$ bezeichnen wir den Wert $B(x,x)$. Wir nennen E eigentlich, falls $n(E) \cap C^* \neq \emptyset$ ist, sonst uneigentlich. E ist genau dann eigentlich, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}_i$ der Raum $E/\mathfrak{m}_i E$ über $C/\mathfrak{m}_i$ eigentlich ist.

Satz 2.1. Ein eigentlicher Raum läßt sich orthogonal in eindimensionale Räume zerlegen, ein uneigentlicher Raum in zweidimensionale.

Beweis. Dieser Sachverhalt gilt über Körpern, also zu beliebigen E über C für den Raum

$$E/\mathfrak{r}E \cong \prod E/\mathfrak{m}_i E$$

über $C/\mathfrak{r}$. Jede orthogonale Zerlegung von $E/\mathfrak{r}E$ läßt sich liften zu einer orthogonalen Zerlegung von E.

<u>Bezeichnungen.</u> Ein zweidimensionaler (nichtentarteter) bilinearer Raum besitzt eine Basis mit Wertematrix $\begin{pmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{pmatrix}$. Für diese Matrix schreiben wir kurz $A(\alpha,\beta)$. Dabei setzen wir grundsätzlich $1-\alpha\beta\in C^*$ voraus. Für einen Raum $(\lambda_1)\perp\ldots\perp(\lambda_n)$ mit $\lambda_i\in C^*$ schreiben wir auch $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$.

Ein quadratischer Raum gerader Dimension läßt sich - aufgrund derselben Argumentation - orthogonal in binäre (= 2-dimensionale) Räume zerlegen. Ein binärer quadratischer Raum hat eine Basis mit Wertetabelle $\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & \beta\end{bmatrix}$, worfür wir auch $A[\alpha,\beta]$ schreiben. Stillschweigend wird stets $1-4\alpha\beta\in C^*$ vorausgesetzt. Man kann überdies erreichen, daß α Einheit ist, denn jede nichtentartete quadratische Form stellt Einheiten dar (weil dies über Körpern gilt).

Spezielle binäre Räume liefern uns die <u>quadratisch étalen Algebren</u> B über C $\{$B kommutativ mit Einselement, als Modul frei vom Rang 2 über C, jede Reduktion $B/\mathfrak{m}_i B$ separabel über $C/\mathfrak{m}_i\}$. Eine solche Algebra hat die Gestalt $B = C + Cz$ mit $z^2 - z = \beta\in C$. Für die "Artin-Schreier-Erzeugende" z schreiben wir auch $\frac{1}{\wp}\beta$. B besitzt eine kanonische Involution ς, die z auf $-z+1$ abbildet. Die Minimalnorm $N(x) := x\varsigma(x)$ ist nichtentartete quadratische Form $N: B\rightarrow C$. Ihre Wertetabelle bzgl. 1,z ist $A[1,-\beta]$.

Jeder binäre (nichtentartete) quadratische Raum F ist zu einer étalen quadratischen Algebra B - aufgefaßt als quadratischer Raum - ähnlich, d.h. $F = (\lambda)\otimes B$ mit $\lambda\in C^*$. Wir erhalten also abschließend

<u>Satz 2.2.</u> Jeder nichtentartete quadratische Raum E gerader Dimension über C hat die Gestalt

$$E = (\lambda_1)\otimes B_1 \perp \dots \perp (\lambda_m)\otimes B_m$$

mit quadratisch étalen Algebren B_i und $\lambda_i \in C^*$.

<u>N.B.</u> Ist 2 nicht Einheit, so können keine nichtentarteten quadratischen Räume ungerader Dimension auftreten.

<u>3. Kürzungssätze.</u> Als <u>Teilräume</u> eines quadratischen bzw. bilinearen Raumes E bezeichnen wir die Untermoduln von E, die frei und direkte Summanden des Moduls E sind, versehen mit der Einschränkung der quadratischen bzw. bilinearen Form von E. Es gilt die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Witt (s. [K]):

<u>Satz 3.1.</u> Sei $\sigma: F \to F'$ ein Isomorphismus zwischen Teilräumen F, F' eines quadratischen Raumes E. Ist E oder F nicht entartet, so läßt sich σ zu einem Automorphismus von E fortsetzen.

Insbesondere gilt in Sq(C) die Kürzungsregel:

(3.2) $$F \perp G_1 \cong F \perp G_2 \Rightarrow G_1 \cong G_2.$$

(Für einen Satz über allgemeineren Ringen C mit $2 \in C^*$ s. [R].)
In der additiven Gruppe von S(C) gilt jedoch die Kürzungsregel <u>nicht</u>, falls $2 \notin C^*$ ist. Man sieht nämlich für beliebiges $E \in S(C)$, $z \in E$, $a \in C$ leicht ein (vgl. $[K]_1$, Satz 3.4.1):

(3.3) $$E \perp A(a,o) \cong E \perp A(a + n(z),o).$$

Insbesondere ist

(3.4) $$A(-a,o) \perp A(a,o) \cong A(-a,o) \perp A(o,o).$$

Hingegen gilt $A(a,o) \cong A(o,o)$ nur, falls $a \in 2C$ ist.

Als Normgruppe $\mathfrak{g}E$ eines bilinearen Raumes E bezeichnen wir mit O'Meara ([OM], § 93 A) die von den Normen $n(z)$ aller $z \in E$ additiv in C erzeugte Gruppe. Bei nichtentartetem E umfaßt $\mathfrak{g}E$ das Ideal $2C$.

Satz 3.5. (vgl. [OM], 93:14a). a) Ist C lokal, so gilt für nichtentartete bilineare Räume F_1, F_2, G über C: Ist $\mathfrak{g}G$ in $\mathfrak{g}F_1$ und $\mathfrak{g}F_2$ enthalten und $F_1 \perp G \cong F_2 \perp G$, so ist $F_1 \cong F_2$.

b) Ist C nur semilokal, so bleibt dies wenigstens richtig, wenn wir zusätzlich voraussetzen, daß $n(G)$ ein Element 2η mit $\eta \in C^*$ enthält.

Ein Beweis für diesen Satz läßt sich ähnlich wie der Beweis obiger Kürzungsregel (3.2) in [K], § 2 erbringen. Man zieht sich zunächst auf den Fall $G = A(o,o)$ zurück und operiert dann mit "Siegeltransformationen" $E(f,g,\lambda)$, die sich auf einem beliebigen symmetrisch bilinearen Raum M für Tripel $(f,g,\lambda) \in M \times M \times C$ mit $n(f) = B(f,g) = o$, $n(g) = 2\lambda$ definieren lassen durch

$$E(f,g,\lambda)\,(z) = z + B(z,g)f - B(z,f)g - \lambda B(z,f)f.$$

Im lokalen Falle erhält man auch leicht einen Beweis nach der von O'Meara in [OM], § 93 C benutzten Methode (vgl. $[K]_1$, § 6).

4. Hyperbolische und metabolische Räume, Wittgruppen.

Wir nennen einen Teilraum V eines quadratischen oder bilinearen Raumes E totalisotrop, falls $q(V) = o$ bzw. $B(V \times V) = o$ ist. Besitzt E von Null verschiedene totalisotrope Teilräume, so heiße E isotrop, sonst anisotrop.

Als hyperbolisch bezeichnen wir die zu Räumen $m \times A[o,o]$ oder $m \times A(o,o)$ isomorphen Räume, als metabolisch Räume der Gestalt $A(a_1,o) \perp \ldots \perp A(a_m,o)$ mit beliebigen $a_i \in C$.

Bemerkung 4.1. Ein quadratischer (bzw. bilinearer) nichtentarteter Raum gerader Dimension 2m ist genau dann hyperbolisch (bzw. metabolisch), wenn er einen totalisotropen Teilraum der Dimension m besitzt.

Satz 4.2. Ist C lokal, so sind zwei bilineare metabolische Räume M_1, M_2 gleicher Dimension und Normgruppe isomorph. Ist C nur semilokal, so gilt dies zumindest, falls außerdem $n(M_1)$ ein Element 2η mit $\eta \in C^*$ enthält (z.B. M_1 einen Teilraum A(o,o) besitzt).

Beweis. Man zeigt mit (3.3), daß $M_1 \perp (-M_1) \cong M_2 \perp (-M_1)$ ist, und wendet Satz 3.5 an (vgl. $[K]_1$, § 6).

Im folgenden seien alle Räume nicht entartet. Man verifiziert leicht

Lemma 4.3. Jeder nichtentartete quadratische (bzw. bilineare) Raum E hat mindestens eine Zerlegung

$$E = K \perp M$$

mit anisotropem K und hyperbolischem (bzw. metabolischem) M.

Im quadratischen Fall ist K durch E nach (3.2) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und heiße ein Kernraum von E. Im bilinearen Falle braucht dies nicht der Fall zu sein (s. z.B. $[K]_1$, Satz 9.4.14). Ist allerdings C ein Körper der Charakteristik 2 oder allgemeiner ein lokaler Ring mit $2\xi = \xi^2 = o$ für jede Nichteinheit ξ, so ist auch für bilineares E in der Zerlegung nach Lemma 4.3 der Raum K bis auf Isomorphie durch E festgelegt (s. $[K]_1$, § 8.2).

Wir nennen zwei quadratische bzw. bilineare Räume E,F äquivalent und schreiben $E \sim F$, wenn es hyperbolische bzw. metabolische Räume M,N gibt mit $E \perp M \cong F \perp N$ (vgl. [W]).

Im quadratischen Fall bedeutet dies, daß E und F isomorphe Kernräume haben.

Zu einem Raum E bezeichne -E der Raum, der durch Änderung der quadratischen Form q bzw. bilinearen Form B in -q bzw. -B aus E entsteht. $E \perp (-E)$ ist stets hyperbolisch bzw. metabolisch. Daher sind die Quotienten

$$Wq(C) := Sq(C)/\sim \quad , \quad W(C) := S(C)/\sim$$

unter der von $\perp$ induzierten Verknüpfung abelsche Gruppen ("Wittgruppen"). Sie sind die Quotienten der Grothendieckgruppen von Sq(C) bzw. S(C) nach den von $A[o,o]$ bzw. $A(o,o)$ erzeugten Untergruppen. (Man beachte im bilinearen Falle (3.4).)

Das Tensorprodukt zweier bilinearer Räume ist metabolisch, falls einer der Faktoren metabolisch ist. Ebenso ist das Tensorprodukt eines bilinearen E mit einem quadratischen F hyperbolisch, falls E metabolisch oder F hyperbolisch ist (s. Bemerkung 4.1). Daher ist W(C) in natürlicher Weise ein Ring und Wq(C) ein Modul über W(C).

<u>Problem 4.4.</u> Das Element 2 sei in C nicht Nullteiler. Ist dann die kanonische Abbildung von Wq(C) nach W(C) stets injektiv? {Ja, falls C Bewertungsring, da sich dann W(C) und Wq(C) beide in W(L), L = Quotientenkörper von C, injizieren; vgl. $[K]_1$ § 11.}

<u>5. Evidente Invarianten und Erzeugende für W(C).</u>

Sei $Q(C) = C^*/C^{*2}$ die Quadratklassengruppe von C, $\mathbb{Z}_2 \circ Q(C)$ die Gruppe aller Paare (μ, a) mit $\mu \in \mathbb{Z}_2$ $(= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $a \in Q(C)$ unter der Verknüpfung

$$(\mu_1, a_1)(\mu_2, a_2) = (\mu_1 + \mu_2, (-1)^{\mu_1 \mu_2} a_1 a_2).$$

Wir erhalten eine wohlbekannte additive Abbildung

(5.1) $(\nu, d): W(C) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \circ Q(C)$,

indem wir einer Raumklasse $(a_{ij}) \in S(C)$ der Dimension n das Element $(\nu(E), d(E))$ mit $\nu(E) = n \bmod 2$,

$$d(E) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det (a_{ij})\, C^{*2}$$

zuordnen $\{\nu(E)$ = "Dimensionsindex", $d(E)$ = "signierte Determinante"$\}$. Für $\xi, \eta \in W(C)$ ist

(5.2) $\nu(\xi \cdot \eta) = \nu(\xi)\nu(\eta)$, $d(\xi \cdot \eta) = d(\xi)^{\nu(\eta)} d(\eta)^{\nu(\xi)}$.

$W_o(C)$ bzeichne das maximale Ideal aller $\xi \in W(C)$ mit $\nu(\xi) = o$.

<u>Satz 5.3.</u> Der Kern der Abbildung (ν, d) (s. 5.1) ist $W_o(C)^2$.

Zum Beweis s. Satz 2.1 u. [P], S. 122. Für ein Studium weiterer Ideale von W(C) im Falle C lokal, $2 \notin C^*$, s. $[K]_1$, § 9.

Wir können Q(C) als die multiplikative Gruppe der eindimensionalen Elemente von S(C) auffassen und dann auch als Untergruppe der Einheitengruppe von W(C). Der von dieser Inklusion $Q(C) \hookrightarrow W(C)$ induzierte Homomorphismus Φ des Gruppenringes $\mathbb{Z}[Q(C)]$ nach W(C) ist nach Satz 2.1 surjektiv.

<u>Satz 5.4.</u> ($[K]_1$, § 5.5, vgl. [W], Satz 7). Die Restklassenkörper $C/\mathfrak{m}_i$ $(i = 1,..r)$ mögen sämtlich mehr als 2 Elemente besitzen. Dann wird der Kern von Φ als Ideal erzeugt von $1 + [-1]$ u. den Elementen

$$q(\varepsilon, \lambda, \mu) = ([\varepsilon] + 1)([\mu^2 + \lambda^2 \varepsilon] - 1)$$

mit $\varepsilon \in C^*, \lambda, \mu \in C, \mu^2 + \lambda^2 \varepsilon \in C^*$. $\{[\varepsilon] :=$ Bild von ε in $\mathbb{Z}[Q(C)]$

6. Quadratische étale Algebren, Quaternionenalgebren.

Die Menge $\Delta(C)$ der Isomorphieklassen der quadratischen étalen Algebren über C läßt sich zu einer abelschen Gruppe von Exponenten 2 machen: Man ordne zwei solchen Algebren B_1, B_2 mit den kanonischen Involutionen ϱ_1, ϱ_2 als Produkt $B_1 \circ B_2$ die Fixalgebra von $\varrho_1 \otimes \varrho_2$ in $B_1 \underset{C}{\otimes} B_2$ zu. Ist $B_i = C(\frac{1}{\wp}\beta_i)$, $i = 1,2$, so ist $B_1 \circ B_2 = C(\frac{1}{\wp}\beta)$ mit

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 + 4\beta_1\beta_2. \tag{6.1}$$

Wir erhalten einen kanonischen Homomorphismus

$$\Delta(C) \longrightarrow Q(C), \tag{6.2}$$

indem wir einer Algebra $C(\frac{1}{\wp}\beta)$ die Quadratklasse von $1 + 4\beta$ zuordnen. Ist $2 \in C^*$, so ist (6.2) bijektiv.

Zu einer Quadratklasse $(\lambda) \in Q(C)$ und einer quadratischen étalen Algebra $B = C(\frac{1}{\wp}\beta)$ mit kanonischer Involution ϱ läßt sich eine - mit $(\lambda, B]$ oder $(\lambda, \beta]$ bezeichnete - "Quaternionenalgebra" $\mathfrak{A}$ bilden: $\mathfrak{A}$ ist die B umfassende assoziative C-Algebra $B + e \cdot B$ mit den Relationen $e^2 = \lambda$, $b \cdot e = e \cdot \varrho(b)$. Diese Algebren $(\lambda, B]$ sind bis auf Isomorphie genau alle Azumaya-Algebren {freie C-Moduln, Reduktionen nach allen $\mathfrak{m}_i$ zentral einfach, s. [A —G], [G]} vom Rang 4 über C. Ist ε eine durch die Normform von B dargestellte Einheit, so gilt $(\lambda, B] \cong (\varepsilon\lambda, B]$.

Satz 6.3. Die Bildung $(\lambda, B]$ ergibt - aufgefaßt als Element der Brauergruppe Br(C) (s. [A-G], [G]) - eine biadditive Abbildung

$$Q(C) \times \Delta(C) \longrightarrow Br(C). \tag{6.3.1}$$

Zum Beweis. $(\lambda, B]$ zerfällt, falls $\lambda = 1$ oder $B \cong C \times C$. Man konstruiere allgemein einen Isomorphismus

$$(\lambda_1\lambda_2, B_2] \otimes (\lambda_1, B_1 \circ B_2] \xrightarrow{\sim} (\lambda_1, B_1] \otimes (\lambda_2, B_2]$$

(vgl. $[W]_1$, S 137/138) und spezialisiere $\lambda_1 = \lambda_2$ bzw. $B_1 = B_2$.

Bemerkung 6.4. Ist C semilokal, so gilt - analog zu (3.2) - in der Halbgruppe der Isomorphieklassen aller Azumaya-Algebren über C (Multiplikation $\otimes$) die Kürzungsregel ("Skolem-Noether"). Eine Azumaya-Algebra ist dann durch ihren Rang über C und ihr Bild in Br(C) bis auf Isomorphie festgelegt.

Lemma 6.5. Sei B quadratische étale Algebra über C, (λ) die zu B gehörige Quadratklasse (s. (6.2)). Dann zerfällt $(-\lambda, B]$.

Beweis. Die Normform von B stellt $(-\lambda)$ dar. Daher $(-\lambda, B] \cong (1, B]$.

Durch Polarisation ergibt sich aus Lemma 6.5 mit Satz 6.3: Sind (λ_1), (λ_2) die Quadratklassen zu B_1, B_2, so haben $(\lambda_1, B_2]$ und $(\lambda_2, B_1]$ gleiches Bild in Br(C), sind also isomorph. Für $(\lambda_1, B_2]$ schreiben wir auch $[B_1, B_2]$, im Falle $2 \in C^*$ auch (λ_1, λ_2). Die Algebra (λ_1, λ_2) hat ein Erzeugendensystem x_1, x_2 mit den Relationen $x_1^2 = \lambda_1$, $x_2^2 = \lambda_2$, $x_1x_2 = -x_2x_1$.

Jede Quaternionenalgebra $(\lambda, B]$ ist unter ihrer Minimalnorm ([G], S. 15) ein quadratischer Raum, der zu $(1, -\lambda) \otimes B$ isomorph ist.

7. Wittinvarianten

(Für eine gründlichere Behandlung über beliebigen kommutativen Ringen unter Benutzung der "graduierten Brauergruppen" s. [Ba], Kap. IV, V.).

Auch in diesem und sämtlichen folgenden Abschnitten seien alle auftretenden Räume nicht entartet.

Sei E quadratischer Raum über C, $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}^+(E) \oplus \mathcal{C}^-(E)$ seine <u>Cliffordalgebra</u> (natürliche Semigraduierung). Ist dimE gerade, so ist $\mathcal{C}(E)$ Azumaya-Algebra über C, anderenfalls ist $\mathcal{C}^+(E)$ Azumaya-Algebra über C. $\gamma(E)$ bezeichne das Bild von $\mathcal{C}(E)$ bzw. $\mathcal{C}^+(E)$ in Br(C). Der Zentralisator $\mathfrak{D}(E)$ von $\mathcal{C}^+(E)$ in $\mathcal{C}(E)$ ist eine étale quadratische Erweiterung von C. Ihre Isomorphieklasse $\delta(E) \in \Delta(C)$ nennen wir die <u>Diskriminante</u> von E. Die Quadratklasse zu $\delta(E)$ (s. 6.2) ist gerade die signierte Determinante d(E) der zu E gehörigen Bilinearform.

Die "Wittinvarianten" $\delta(E)$ und $\gamma(E)$ hängen nur von der Äquivalenzklasse (s. Abschn. 4) von E ab. Für die induzierten Abbildungen

(7.1) $\delta : Wq(C) \longrightarrow \Delta(C), \quad \gamma : Wq(C) \longrightarrow Br(C)$

gilt: Liegen η_1, η_2 in dem Teilmodul $Wq_0(C)$ der Elemente gerader Dimension aus Wq(C), so ist

(7.2) $\delta(\eta_1 + \eta_2) = \delta\eta_1 + \delta\eta_2,$

(7.3) $\gamma(\eta_1 + \eta_2) = \gamma\eta_1 + \gamma\eta_2 + [\delta\eta_1, \delta\eta_2].$

Weiter gilt für $\xi \in W(C)$, $\eta \in Wq_0(C)$:

(7.4) $\delta(\xi \cdot \eta) = \mathrm{v}(\xi)\,\delta(\eta)$

(7.5) $\gamma(\xi \cdot \eta) = \mathrm{v}(\xi)\,\gamma(\eta) + (\mathrm{d}\xi, \delta\eta].$

Man braucht die Formeln (7.4) und (7.5) nur für $\xi \in Q(C)$ zu verifizieren. Für andere ξ folgen sie dann mit (7.2) und (7.3).

Ist $2 \in C^*$, so ist Wq(C) = W(C). Wir haben dann für beliebige $\xi, \eta \in W(C)$ folgende Formeln:

Falls $\nu(\xi) = \nu(\eta)$:

(7.6a) $\gamma(\xi+\eta) = \gamma(\xi) + \gamma(\eta) + (d\xi, d\eta)$.

Falls $\nu(\xi) = 1$, $\nu(\eta) = 0$:

(7.6b) $\gamma(\xi+\eta) = \gamma(\xi) + \gamma(\eta) + (-d\xi, d\eta)$.

Allgemein:

(7.7) $\gamma(\xi\cdot\eta) = \nu(\eta)\gamma(\xi) + \nu(\xi)\gamma(\eta) + \{1+\nu(\xi)\nu(\eta)\}(d\xi, d\eta)$

Ein Raum $E = A[1,-\beta]$ hat die Invarianten $\delta(E) = (C(\frac{1}{8}\beta))$, $\gamma(E) = o$. Im Falle $2 \in C^*$ gilt weiter $\gamma((\lambda)) = o$ für jede Quadratklasse (λ). Damit lassen sich aufgrund von (7.2) - (7.7) die Wittvarianten jedes Raumes hinschreiben, für den eine Zerlegung in zwei- oder eindimensionale Räume (s. Abschnitt 2) vorgegeben ist.

Beispiel 7.8.

$$E: = (\lambda_1)\otimes A[1,-\beta_1] \perp \dots \perp (\lambda_m)\otimes A[1,-\beta_m]$$

hat die Diskriminante $\delta(E) = (C(\frac{1}{8}\beta))$ mit

$$\beta : = \sum_i \beta_i + 4\sum_{i<j}\beta_i\beta_j + 16\sum_{i<j<k}\beta_i\beta_j\beta_k + \dots .$$

Ist $2 = o$, so erhalten wir gerade die klassische "Pseudodiskriminante" von Arf (vgl. [A], [Kn]). —

Für einen quadratischen oder bilinearen Raum E bezeichne $N(E)$ die Gruppe der Ähnlichkeitsnormen von E, d.h. der $\lambda \in C^*$ mit $(\lambda)\otimes E \cong E$. Mit Hilfe der Wittinvarianten ergibt sich

Satz 7.9. Für jeden quadratischen Raum E gilt $N(E) \subset N(\mathcal{D}(E))$. Ist $\dim E$ ungerade, so gilt sogar $N(E) = C^{*2}$.

Beweis. Sei $E \cong (\lambda)\otimes E$. Ist $\dim E$ gerade, so ergibt Anwendung von γ, daß $(\lambda, \mathcal{D}(E)]$ zerfällt (s. 7.5). Der zugehörige quadratische Raum $(1,-\lambda)\otimes\mathcal{D}(E)$ muß hyperbolisch sein. Daher ist λ Ähnlichkeitsnorm von $\mathcal{D}(E)$. Ist $\dim E$ ungerade, so folgt aus $d(E) = d((\lambda)\otimes E)$ nach (5.2), daß $(\lambda) = 1$ ist.

q.e.d.

In Analogie zu Satz 5.3 gilt

Satz 7.10. Die Elemente aus $Wq_o(C)$ mit verschwindender Diskriminante bilden das Ideal $W_o(C)\cdot Wq_o(C)$.

Beweis. Aufgrund von (7.4) ist $\delta\left(W_o(C)\cdot Wq_o(C)\right) = o$.

Sei

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i)\cdot A[1,-\beta_i]$$

ein Element aus $W_o(C)$ mit $\delta(\xi) = o$. Modulo $W_o(C)\cdot Wq_o(C)$ ist

$$\xi \equiv \sum_{i=1}^{m} A[1,-\beta_i] .$$

Nun gilt für quadratische étale Algebren B_i mit zugehörigen Quadratklassen (μ_i) $(i = 1,2)$

(7.11) $$B_1 \perp (-B_2) \cong A[o,o] \perp (\mu_2)\otimes B_1\circ B_2.$$

Daher läßt sich ξ modulo $W_o(C)\cdot Wq_o(C)$ auf ein Element $A[1,-\beta]$ reduzieren. Wegen $\delta(\xi) = o$ muß dieses Element in $Wq(C)$ Null sein.

q.e.d.

Das Problem, den Teilmodul der $\xi\in Wq_o(C)$ mit $\delta(\xi) = o$, $\gamma(\xi) = o$ in ähnlicher Weise zu beschreiben, ist selbst über Körpern ungelöst, vgl. [P] , Satz 14.

Bemerkung 7.12. Wie über Körpern (s. [Sp]; [S] S. III - 25) lassen sich auch hier die Wittinvarianten eines quadratischen Raumes E kohomologisch beschreiben. Wir beschränken uns auf den Fall, daß E gerade Dimension $2m$ besitzt.

Sei X_{et} der étale Situs des Spektrums X von C (s. [D]), O_{2m} die Garbe der Automorphismen des Raumes

$E_o: = m \times A[o,o]$ auf X_{et}. Dann läßt sich die Isomorphieklasse von E als Element der Kohomologiemenge $H^1(X_{et}, O_{2m})$ auffassen (s.[G]$_1$). Sei O_{2m}^+ die Garbe der eigentlichen Morphismen, Φ_{2m} die Cliffordgruppengarbe zu E_o auf X_{et} (ähnlich definiert wie über Körpern). $\underset{\sim}{\mathbb{Z}}_2$ bezeichne die konstante Garbe mit Werten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $\mathbb{G}$ bezeichne die Garbe der Einheiten in der Strukturgarbe von X_{et}. Wir können $\Delta(C)$ mit $H^1(X_{et}, \underset{\sim}{\mathbb{Z}}_2)$ und Br(C) mit einer Untergruppe von $H^1(X_{et}, \mathbb{G})$ identifizieren (s.[G]). Die kanonischen exakten Sequenzen auf X_{et} (D = "Dickson-Invariante", N = Clifordnorm).

(7.13) $$1 \rightarrow O_{2m}^+ \rightarrow O_{2m} \xrightarrow{D} \underset{\sim}{\mathbb{Z}}_2 \rightarrow 1$$

bzw.

(7.14) $$1 \rightarrow \mathbb{G} \rightarrow \Phi_{2m} \xrightarrow{N} O_{2m} \rightarrow 1$$

liefern Abbildungen $H^1(X_{et}, O_{2m}) \rightarrow H^1(X_{et}, \underset{\sim}{\mathbb{Z}}_2)$, $H^1(X_{et}, O_{2m}) \rightarrow H^2(X_{et}, \mathbb{G})$, die gerade den Invarianten δ, γ entsprechen. Diese Methode, die Wittinvarianten zu definieren, bleibt - ebenso wie die weiter oben benutzte - natürlich über einem beliebigen Präschema X sinnvoll. Aus (7.14) erhält man durch Einschränkung eine Sequenz

(7.15) $$1 \rightarrow \mu_2 \rightarrow Spin_{2m} \rightarrow O_{2m} \rightarrow 1$$

$\{Spin_{2m}: = \text{Kern von } N, \mu_2: = \text{Garbe der 2. Einheitswurzeln}\}$, die aber i.a. nur auf dem treuflachen Situs X_{fl}(f.p.p.f, s.[D]) exakt ist. $H^1(X_{et}, O_{2m})$ läßt sich mit $H^1(X_{fl}, O_{2m})$ identifizieren. Die zu (7.15) gehörige Abbildung $H^1(X_{fl}, O_{2m}) \rightarrow H^2(X_{fl}, \mu_2)$ ist im allgemeinen eine echte Verfeinerung der Invarianten γ, z.B. schon für die Spektren mancher Dedekindringe.

Es sei noch angemerkt, daß sich die Quadratklassengruppe Q(C) in natürlicher Weise mit $H^1(X_{fl}, \mu_2)$

identifizieren läßt. Die Abbildung (6.2) wird dann die kanonische Abbildung von $H^1(X_{et}, \mathbb{Z}_2) = H^1(X_{fl}, \mathbb{Z}_2)$ nach $H^1(X_{fl}, \mu_2)$. Die Paarung (6.3.1) läßt sich deuten als ein Cup-Produkt

$$H^1(X_{fl}, \mu_2) \times H^1(X_{fl}, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^2(X_{fl}, \mathbb{G}).$$

8. Räume niedriger Dimension (vgl. [W], [A])

Alle Räume in diesem Abschnitt seien quadratisch (und nichtentartet). Wie über Körpern sieht man sofort

Satz 8.1. Ist E Raum einer Dimension ≤ 3, so wird E durch $\delta(E)$ und $\gamma(E)$ bis auf Isomorphie festgelegt.

Die vierdimensionalen Räume mit Diskriminante Null stammen - bis auf Ähnlichkeit - von den Quaternionenalgebren. Da für eine Quaternionenalgebra $\mathfrak{A}$ die Invariante $\gamma(\mathfrak{A})$ gerade das Bild von $\mathfrak{A}$ in Br(C) ist, gilt

Satz 8.2. Ein vierdimensionaler Raum E mit $\delta(E) = o$ wird durch $\gamma(E)$ bis auf Ähnlichkeit festgelegt.

Bemerkung 8.3. C besitze keine nichttrivialen Idempotente. Dann gibt es zu vorgegebenem Raum E mit $\delta(E) = o$ und vorgegebenem $e \in E$ mit $q(e) = 1$ genau zwei Quaternionenalgebra-Strukturen auf dem Modul E, die e als Einselement und die quadratische Form von E als Normform besitzen. Sie sind unter der Identität von E zueinander antiisomorph.

Satz 8.4. Sei dim $E \leq 4$. Für die Isotropie von E (s. Abschn. 4) ist notwendig und hinreichend:

dim E = 2: $\delta(E) = o$

dim E = 3: $\gamma(E) = o$

dim E = 4: $\gamma(E)$ wird durch die Erweiterung $\delta(E)$ von C zerfällt.

(Für $\dim E \leq 3$ nahezu evident. Für $\dim E = 4$ muß ich leider etwas rechnen.)

9. Runde Räume. Für viele Resultate aus [P] und anderen Arbeiten von A.Pfister zur Theorie der quadratischen Formen über Körpern wurden von E.Witt 1967/68 einfachere Beweise gefunden (unveröffentlicht). Einige dieser Beweise lassen sich mühelos auf semilokale Ringe übertragen. Davon soll in den folgenden Abschnitten die Rede sein. Nach wie vor betrachten wir nur nichtentartete Räume.

Sei E quadratischer oder bilinearer Raum. E^* bezeichne die Menge der strikt anisotropen Vektoren, d.h. der $x \in E$ mit $q(x) \in C^*$ bzw. $n(x) \in C^*$. Wir nennen mit Witt E rund, falls $q(E^*) = N(E)$ bzw. $n(E^*) = N(E)$ ist. $\{N(E)$ = Gruppe der Ähnlichkeitsnormen, s. Abschn. 7.$\}$

N.B. Allgemein gilt für bilineares E : Ist $1 \in n(E^*)$, so ist $N(E) \subset n(E^*)$. Ist $n(E^*) \subset N(E)$, $n(E^*) \neq \emptyset$, so ist $1 \in n(E^*)$, also E rund. Entsprechend für quadratisches E.

Beispiele 9.1. Jeder binäre bilineare oder quadratische Raum, der die 1 darstellt, ist rund. Aus Theorem 9.2 weiter unten folgt - unter einer kleinen Einschränkung über die Restklassenkörper von C-, daß für beliebiges $r \geq 1$ alle Räume der Gestalt $(1,a_1) \otimes \dots \otimes (1,a_r)$ oder $(1,a_1) \otimes \dots \otimes (1,a_r) \otimes B$ mit quadratischer étaler Algebra B rund sind. Diese Räume nennen wir Pfister-Räume. Runde Räume E einer ungeraden Dimension $n > 1$ können nur selten auftreten: Da $N(E) = C^{*2}$ ist (s. Satz 7.9), muß $E \cong n \times (1)$ sein und überdies jede Einheit von C, die sich als Summe von n Quadraten schreiben läßt, selbst Quadrat sein. (Zumindest bei lokalem C folgt daraus leicht, daß überhaupt jede Einheit, die Quadratsumme ist, ein Quadrat ist.)

<u>Theorem 9.2.</u> (vgl. [P], Satz 4). Alle Restklassenkörper C/m_i $(i = 1,\ldots r)$ mögen mindestens drei Elemente enthalten. Dann gilt für beliebiges $a \in C^*$: Ist F ein runder bilinearer oder quadratischer Raum, so ist $(1,a)\otimes F$ ebenfalls rund.

Für den Beweis benötigen wir

<u>Hilfssatz 9.3.</u> Sei F quadratischer oder bilinearer Raum, $\lambda,\mu \in N(F)$, $a \in C^*$, $\xi,\eta \in C$. Ist $\varepsilon := \xi^2\lambda + \eta^2 a\mu$ Einheit, so ist ε Ähnlichkeitsnorm von $(1,a)\otimes F$.

<u>Beweis</u> (Witt). Es ist

$$(\lambda,\ a\mu) \cong (\varepsilon)\otimes(1,a\lambda\mu).$$

Man tensoriere beide Seiten mit F. -

Zum Beweis von Th. 9.1 ist im bilinearen Fall zu zeigen, daß für beliebige $x,y \in F$ das Element $\rho(x,y) := n(x) + an(y)$ in $N(E)$ liegt, sofern es Einheit ist. Nach dem Hilfssatz können wir dazu $\rho(x,y)$ mit einer beliebigen Einheit der Gestalt $\varepsilon = \xi^2 n(u) + \eta^2 n(v)a$ $(\xi,\eta \in C;\ u,v \in F^*)$ multiplizieren. Man überzeugt sich, daß $\varepsilon\,\rho(x,y)$ wieder von der Form $\rho(x',y')$ mit $x', y' \in F$ ist. Enthält jeder Körper C/m_i, $i = 1,..r$ mehr als 5 Elemente, so läßt sich bei geeigneter Wahl von ε erreichen, daß x' und y' strikt anisotrop sind, und wir sind - wieder nach Hfs. 9.3 - fertig. Enthalten alle C/m_i mindestens 3 Elemente und ist $\dim F > 2$, so kommt man durch Multiplikation von $\rho(x,y)$ mit höchstens drei geeigneten Einheiten ε obiger Art ans Ziel. Im Falle $\dim F \leq 2$ läßt sich bekanntlich auf E eine (assoziative) Multiplikation $x\cdot y$ definieren mit $B(z\cdot x, z\cdot y) = n(z)\, B(x,y)$ für alle $x,y,z \in E$, und E ist ersichtlich ebenfalls rund.

Mit der gleichen Methode läßt sich Th. 9.1 auch in quadratischem Fall beweisen.

10. Nullteiler und nilpotente Elemente in W(C).

In diesem Abschnitt seien alle Räume symmetrisch bilinear (und nichtentartet). Alle $C/\mathfrak{m}_i$ $(i = 1,..r)$ mögen mindestens 3 Elemente enthalten.

Theorem 10.1. (vgl. [P]). Jedes Torsionselement der additiven Gruppe von $W(C)$ hat als Ordnung eine 2-Potenz.

Zum Beweis (nach einer Methode von E.Witt, s.o.) benötigen wir einen Hilfssatz, der sich leicht aus (3.3), Satz 3.5 und Satz 4.2 herleiten läßt.

Hilfssatz 10.2. E und M seien Räume über C mit $\mathfrak{q}E \supset \mathfrak{q}M$, M und $E \perp M$ seien metablisch. Dann ist $k \times E$ metabolisch für $k \geq 3$.

Sei nun E ein Raum, dessen Bild in $W(C)$ Torsionselement ist. Nach Satz 2.1 ist E zu einem Raum $(a_1,\ldots,a_n)$ äquivalent. Zu jedem n-Tupel $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ von Vorzeichen $\varepsilon_i = \pm 1$ bilden wir den Raum

$$\pi(\varepsilon,a) := \bigotimes_{i=1}^{n} (1, \varepsilon_i a_i).$$

Ersichtlich ist $(a_i) \otimes \pi(\varepsilon,a) \cong (\varepsilon_i) \otimes \pi(\varepsilon,a)$ für $1 \leq i \leq n$. Daher gilt

$$(10.3) \qquad E \otimes \pi(\varepsilon,a) \sim \varphi(\varepsilon) \times \pi(\varepsilon,a)$$

mit $\varphi(\varepsilon) := \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \in \mathbb{Z}$.

Aus (10.3) erhalten wir durch Summation über alle n-Tupel ε :

$$(10.4) \qquad 2^n \times E \sim \frac{1}{\varepsilon}\, \varphi(\varepsilon) \times \pi(\varepsilon, a).$$

Es genügt zu zeigen, daß jedes $\pi(\varepsilon, a)$ mit $\varphi(\varepsilon) \neq o$ in $W(C)$ als Ordnung eine 2-Potenz hat. Nach (10.3) ist $\pi(\varepsilon, a)$ ein Torsionselement. Wir haben uns damit auf den Fall zurückgezogen, daß E von der Form $\pi(\varepsilon, a)$, also nach Th. 9.2 rund ist.

Sei also E rund, $m \times E \sim o$ mit $m > o$. Wir können einen Raum

$$M := A(o,b_1) \perp \ldots \perp A(o,b_r)$$

finden, so daß $m \times E \perp M$ metabolisch ist. Zu jedem r-Tupel $\eta = (\eta_1, \ldots \eta_r)$ von Vorzeichen bilden wir den Raum

$$\pi(\eta, b) := \bigotimes_{i=1}^{r} (1, \eta_i b_i).$$

Für jedes η ist

$$g[M \otimes \pi(\eta, b)] = g\,\pi(\eta, b) \subset g\,[E \otimes \pi(\eta, b)],$$

also nach Hfs. 10.2 der Raum $3m \times E \otimes \pi(\eta, b)$ metabolisch. Sei $2^N > 3m$. Nach Th. 9.2 ist $2^N \times E \otimes \pi(\eta, b)$ ein runder Raum. Er enthält einen Teilraum der Gestalt $(\lambda, -\lambda)$ mit $\lambda \in C^*$, besitzt also (-1) als Ähnlichkeitsnorm. Für jedes η ist somit $2^{N+1} \times E \otimes \pi(\eta, b)$ metabolisch. Summation über alle η ergibt $2^{N+r+1} \times E \sim o$.

q.e.d.

Das soeben bewiesene Theorem läßt sich verschärfen (s. [P], S.120) zu

<u>Satz 10.5.</u> In $W(C)$ gibt es keine Nullteiler ungerader Dimension.

<u>Problem 10.6.</u> Man zeige, daß ein Element ungerader Dimension aus $W(C)$ auch kein Element $\neq o$ von $Wq(C)$ annulliert.

<u>Satz 10.7.</u> (vgl. [P], Satz 17, Satz 22). Das Nilradikal von $W(C)$ besteht aus den in $W_o(C)$ enthaltenen Torsionselementen.

Beweis (Witt)

a) Sei dim $E = 2m$, $2^{\mu} \times E \sim o$, E eigentlich. Wir zerlegen E nach Satz 2.1 in Räume $E_i \cong (b_i) \otimes (1, a_i)$ $(i = 1, \ldots m)$. Es ist

$$E_i^{\otimes(\mu+1)} \cong 2^{\mu} \times (b_i^{\mu}) \otimes E_i,$$

also $E_i^{\otimes(\mu+1)} \otimes E \sim o$. Daher $E^{\otimes(m\mu+2)} \sim o$.

b) Sei $E^{\otimes r} \sim o$ und ohne Einschränkung der Allgemeinheit $E \cong (a_1, \ldots, a_n)$ mit $a_i \in C^*$. Wir zeigen, daß E ein Torsionselement von W(C) liefert. Mit den im Beweis von Th. 10.1 eingeführten Hilfsräumen $\pi(\varepsilon, a)$ gilt nach (10.3)

$$\varphi(\varepsilon)^r \times \pi(\varepsilon, a) \sim E^{\otimes r} \otimes \pi(\varepsilon, a) \sim o.$$

Die $\pi(\varepsilon, a)$ mit $\varphi(\varepsilon) \neq o$ sind also Torsionselemente. Nach (10.4) ist auch E in W(C) Torsionselement.

11. Annullatoren runder Formen.

Satz 11.1. E sei runder quadratischer Raum. Es gelte eine der beiden folgenden (hoffentlich überflüssigen) Voraussetzungen:

a) dim $E > 2$, Card $(C/\mathfrak{m}_i) > 2$, $i = 1 \ldots r$,

b) dim E beliebig, Card $(C/\mathfrak{m}_i) > 3$, $i = 1 \ldots r$.

Dann läßt sich das Ideal

$$\text{Ann } E := \{ \xi \in W(C) \mid \xi \otimes E = o \text{ in } Wq(C) \}$$

von W(C) durch Räume $(1, -\lambda)$ mit $\lambda \in N(E)$ erzeugen.

Zum Beweis. (nach Witt): Wir können E als anisotrop voraussetzen. Sei I das von den $(1, -\lambda)$, $\lambda \in N(E)$ erzeugte Ideal. Wir werden mehrfach ausnutzen, daß für $b \in C^*$ und eine Einheit c der Gestalt $c = \xi^2 q(x) + b\eta^2 q(y)$ mit $\xi, \eta \in C$ und $x, y \in E^*$ die Relation

$$(1, b) \equiv (c) \otimes (1, b) \quad \text{mod } I$$

gilt. {Der Annullator $(1, -c) \otimes (1, b)$ von E läßt sich in einen metabolischen und einen eigentlichen binären Raum zerlegen.}

Angenommen, Ann $E \neq I$. Sei $F = (b_1, \ldots b_n)$ eigentlicher Raum minimaler Dimension n mit $F \not\equiv o \mod I$, $F \otimes E \sim o$. Der Raum $(b_2, \ldots b_n) \otimes E$ muß einen zu $(-b_1) \otimes E$ isomorphen Kernraum besitzen. Daher gibt es eine Gleichung

(11.2) $$b_1 + b_2\, q(x_2) + \ldots + b_n q(x_n) = o$$

mit $x_i \in F$. Wir wollen F modulo I zu einem Raum $F' = (b'_1, \ldots b'_n)$ abändern, so daß sogar

(11.3) $$b_1' + b_2' + \ldots + b_n' = o$$

ist. Dann gelangen wir wie folgt zum Widerspruch:
Sei $e_1, \ldots e_n$ Orthogonalbasis von F' mit $n(e_i) = b_i'$.
Es gibt strikt anisotrope Vektoren von F', die auf dem isotropen Vektor $e_1 + \ldots + e_n$ senkrecht stehen. Daher ist
$F' \cong A(o,\alpha) \perp G$ mit $\alpha \in C$ und eigentlichem G, das somit E annulliert, aber eine Dimension $< n$ hat. Wdspr.

Es bleibt zu klären, wie man von (11.2) nach (11.3) gelangt. Man suche ein Produkt c von Einheiten der Gestalt $\xi^2 q(x) + b_1^{-1} b_2 \eta^2 q(y)$ mit $x,y \in E^*$, $\xi, \eta \in C$, so daß $c(b_1 + b_2\, q(x_2'))$ sich in der Gestalt $b_1 q(x_1') + b_2 q(x_2')$ mit x_1', $x_2' \in E^*$ schreiben läßt (vgl. Bew. v. Th. 9.2).
Mit $b_i' := c^{-1} b_i q(x_i')$ $(i = 1,2)$ gilt nach der anfangs gemachten Bemerkung

$$(b_1, \ldots b_n) \equiv (c^{-1}b_1, c^{-1}b_2, b_3, \ldots b_n) \equiv (b_1', b_2', b_3, \ldots b_n$$

mod I und

$$b_1' + b_2' + b_3 q(x_3) + \ldots + b_n q(x_n) = o.$$

Man setze das Verfahren fort.

q.e.d.

Aus Satz 11.1 ergibt sich unmittelbar (Witt)

<u>Folgerung 11.4.</u> E sei rund quadratisch. Über E und C gelte

eine der Voraussetzungen a), b) aus Satz 11.1. Sei F bilinear und $F \otimes E \sim o$. Dann sind auch $(1,-dF) \otimes E$, $F \otimes \mathcal{D}(E)$ und $(1,-dF) \otimes \mathcal{D}(E)$ hyperbolisch.

<u>Beweis.</u> $F \sim \perp_i (b_i) \otimes (1,-c_i)$ mit $c_i \in N(E)$. $d(F) = (\prod c_i) \in N(E)$. Weiter beachte man $N(E) \subset N(\mathcal{D}(E))$. (s. Satz 7.9)

q.e.d.

<u>Problem 11.5.</u> Sei $2 \notin C^*$. Wird der Annullator eines Raumes $(1,a)$ durch eigentlich binäre Räume erzeugt?

<u>12. Stufe eines lokalen Ringes.</u>

In diesem Abschnitt müssen wir leider voraussetzen, daß C lokal und $2 \in C^*$ ist. $\mathfrak{m}$ bezeichne das maximale Ideal von C.

<u>Satz 12.1.</u> E sei isotroper Pfister-Raum. Dann gibt es einen Pfister-Raum P mit $E \cong (1,-1) \otimes P$.

<u>Beweis.</u> Sei $E = (1,a_1) \otimes \ldots \otimes (1,a_n)$ und ohne Einschränkung $n > 1$. Wir benutzen im folgenden den Raum $V := \mathbb{Z}_2^{\,n}$ über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ mit 2 Elementen als Indexmenge. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von V. Zu jedem Vektor $x = e_{i_1} + \ldots + e_{i_r}$ $(i_1 < \ldots < i_r)$ bezeichne a_x das Produkt $a_{i_1} \cdots a_{i_r}$. Nach Voraussetzung gibt es eine Gleichung

$$(12.2) \qquad \sum_{x \in V} a_x u_x^2 = o$$

mit Elementen u_x von C, die nicht alle in $\mathfrak{m}$ liegen. Wir normieren die Gleichung so, daß $u_o = 1$ ist. Für eine beliebige Hyperebene W von V bezeichne E_W den in E einbettbaren Pfister-Raum $\perp_{x \in W} (a_x)$ und c_W das von E_W dargestellte Element $\sum_{x \in W} a_x u_x^2$. Mit beliebig gewähltem $x \in V \setminus W$ und ebenfalls von

E_W dargestelltem d_W läßt sich (12.2) schreiben als Gleichung

$$c_W + a_x d_W = o.$$

Ist für mindestens eine Hyperebene W das Element c_W Einheit, so sind wir fertig: E_W hat $-a_x = c_W d_W^{-1}$ als Ähnlichkeitsnorm, also ist $E \cong (1,a_x) \otimes E_W \cong (1,-1) \otimes E_W$. Es können aber nicht alle c_W in $\mathfrak{m}$ liegen. Denn dann erhielte man durch Summation über alle W:

$$(2^n-1)\, c_o + (2^{n-1}-1) \sum_{x \neq 0} c_x \in \mathfrak{m}$$

mit $c_x := a_x \mathfrak{u}_x^{\,2}$. Aus (12.2) würde $2^{n-1} c_o \in \mathfrak{m}$ folgen, im Widerspruch zu $c_o = 1$, $2 \in C^*$.

q.e.d.

Aus diesem Satz 12.1 folgt sofort (Witt)

<u>Satz 12.2.</u> Ist E Pfister-Raum der Ordnung $2^{\mu+1}$ in $W(C)$, $o \leq \mu < \infty$, so ist $2^{\mu} \times E$ das kleinste Vielfache von E, das $-E$ als Teilraum enthält.

<u>Beweis.</u> $-E$ ist in $2^{\mu} \times (-E) \cong 2^{\mu} \times E$ enthalten. Wäre $-E$ sogar in $(2^{\mu}-1) \times E$ enthalten, so wäre $2^{\mu} \times E$ isotrop, also $\sim o$.

Als <u>Stufe</u> von C bezeichnen wir die kleinste Zahl s, zu der eine Relation

$$-1 = c_1^{\,2} + \ldots + c_s^{\,2}$$

mit $c_i \in C$ existiert ($s = \infty$, falls -1 nicht Quadratsumme). Der Spezialfall $E = (1)$ von Satz 12.2 besagt, daß die Stufe eines lokalen Ringes, in dem 2 Einheit ist, stets eine 2-Potenz ist, sofern sie endlich ist.

Saarbrücken, 15. Mai 1969.

Literatur

[A] C. Arf, Untersuchungen über quadratische Formen in Körpern der Charakteristik 2, J. reine angew. Math. 183, 148-167 (1941).

[A-G] M. Auslander, O. Goldman, The Brauer-group of a commutative ring, Trans. A.M.S. 97, 367-409 (1960).

[Ba] H. Bass, Lectures on algebraic K-theory, Tata Inst. Fund.Res., Bombay 1967.

[B] N. Bourbaki, Formes sesquilinéaires et formes quadratiques, Algèbre Chap. 9, Hermann, Paris 1959.

[D] M. Demazure, Topologies et Faisceaux, Sém. Geom. Alg.: Schémas en Groupes, Fasc 1, Exp IV, Inst. H. Et. Sci, 1963.

[G] A. Grothendieck, Le groupe de Brauer I, Sém. Bourbaki n° 290 (1965).

[G]$_1$ A. Grothendieck, Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, Sém. Bourbaki n° 190 (1959).

[K] M. Knebusch, Isometrien über semilokalen Ringen, Math. Z. 108, 255-268 (1969).

[K]$_1$ M. Knebusch, Grothendieck- und Wittringe von nicht-ausgearteten Bilinearformen, Habilschrift Hamburg 1968.

[Kn] M. Kneser, Bestimmung des Zentrums der Cliffordschen Algebren einer quadratischen Form über einem Körper der Charakteristik 2, J. reine angew. Math. 193, 123-125 (1954).

[OM] O.T.O'Meara, Introduction to quadratic forms, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1963.

[P] A. Pfister, Quadratische Formen in beliebigen Körpern, Inv. math. 1, 116-132 (1962).

[R] A. Roy, Cancellation of quadratic forms over commutative rings, J. Algebra 10, 286-298 (1968).

[S] J.P.Serre, Cohomologie galoisienne, Springer Lect. Notes 5 (1964).

[Sp] T.A. Springer, On the equivalence of quadratic forms, Proc. Ac. Amsterdam 62, 241-253 (1959).

[W] E.Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J. reine angew. Math. 176, 31-44 (1937).

[W]$_1$ E. Witt, Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik p vom Grad p^n, J. reine angew. Math. 176, 126-140 (1937).