Rekonstruktionsverfahren mit der Approximativen Inversen und einer neuen Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation

Dissertation

zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlichen-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von
Steven Oeckl

Saarbrücken
2014

Tag des Kolloquiums:	19.11.2014
Dekan:	Univ.-Prof. Dr. Markus Bläser
Vorsitzender:	Univ.-Prof. Dr. Sergej Rjasanow
Berichterstatter:	Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Alfred K. Louis
	Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster
Akademischer Beisitzer:	Dr. Aref Lakhal

Gutachter:	Univ.-Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Alfred K. Louis
	Univ.-Prof. Dr. Peter Maaß

Abstract

The objective of this work is the derivation of a reconstruction method for calculating the convolution of a function f with another function using the Radon transform or the X-ray transform of f. The approximate inverse is used for solving the inverse problems encountered.

We start with an introduction to the theory of approximate inverse and its extension for calculating features. As a feature, we calculate the Fredholm integral operator and we study the corresponding structure of the approximate inverse. In particular we investigate the convolution as a special case of a Fredholm integral operator.

Next, we develop reconstruction methods based on the inversion of the Radon transform. We investigate three different approaches: First we derive reconstruction methods which result immediately from the inversion formula. Then we apply the approximate inverse to invert the X-ray transform. Finally we use the approximate inverse for calculating features to determine the convolution directly from the Radon transform. We show that all reconstruction methods are of filtered backprojection type.

Subsequently we derive reconstruction methods which make use of a new inversion formula for the X-ray transform. Analogously to the Radon transform, we investigate three different approaches: We start with reconstruction methods which follow immediately from the new inversion formula. Next, we use the approximate inverse to invert the X-ray transform. To determine the convolution directly from the X-ray transform we finally apply the approximate inverse for calculating features. All developed reconstruction methods are backprojection methods.

Kurzfassung

Ziel dieser Arbeit ist ein Rekonstruktionsverfahren zur Berechnung der Faltung einer Funktion f mit einer weiteren Funktion anhand der Radon- oder Röntgen-Transformation von f. Die dabei auftretenden inversen Probleme sollen mit Hilfe der Approximativen Inversen gelöst werden.

Wir beginnen mit der Theorie der Approximativen Inversen und deren Erweiterung zur Berechnung von Eigenschaften. Als Eigenschaft berechnen wir den Fredholmschen Integraloperator und untersuchen die daraus resultierende Struktur der Approximativen Inversen. Dabei behandeln wir insbesondere die Faltung als Spezialfall eines Fredholmschen Integraloperators.

Als nächstes entwickeln wir Rekonstruktionsverfahren, die auf der Inversion der Radon-Transformation basieren. Dabei verfolgen wir drei unterschiedliche Ansätze: Wir geben zunächst Verfahren an, die sich direkt aus der Inversionsformel ergeben. Dann verwenden wir die Approximative Inverse, um die Inversion der Radon-Transformation zu regularisieren. Schließlich setzen wir die Approximative Inverse zur Berechnung von Eigenschaften ein, um die Faltung als Eigenschaft direkt aus der Radon-Transformation zu bestimmen. Wir zeigen, dass alle entwickelten Verfahren vom Typ gefilterte Rückprojektion sind.

Anschließend leiten wir Rekonstruktionsverfahren her, die auf einer neuen Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation beruhen. Analog zur Radon-Transformation untersuchen wir dabei drei unterschiedliche Ansätze: Wir beginnen mit Verfahren, die sich direkt aus der neuen Inversionsformel ergeben. Anschließend entwickeln wir Rekonstruktionsverfahren, die auf der Approximativen Inversen der Röntgen-Transformation basieren. Zur direkten Berechnung der Faltung aus der Röntgen-Transformation verwenden wir die Approximative Inverse zur Berechnung von Eigenschaften. Bei den entwickelten Verfahren handelt es sich stets um Rückprojektionsverfahren.

Inhaltsverzeichnis

Glossar

$\langle\cdot,\cdot\rangle$	inneres Produkt im $\mathbb{R}^n$, 18
$\langle\cdot,\cdot\rangle_H$	inneres Produkt zum Hilbertraum H, 7
2D	zweidimensional, 3
3D	dreidimensional, 3
$\mathcal{A}^*$	adjungierter Operator zum Operator $\mathcal{A}$, 6
$\mathcal{A}^\dagger$	verallgemeinerte Inverse von $\mathcal{A}$, 5
$\alpha(x)$	Winkel von $x \in \mathbb{R}^n$, 23
CT	Röntgen-Computertomographie, 1
C^∞	Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen, 49
C^m	Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, 20
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen, 11
$\mathcal{C}_\psi$	Faltung mit ψ, 50
$\mathcal{C}_\psi^{r_1,r_2}$	Faltung mit ψ hinsichtlich r_1 und r_2, 13
D	Raum der Testfunktionen, 49
$D_1^{(k)}$	k-te eindimensionale schwache Ableitung, 40
$\mathcal{D}, \mathcal{D}_{(\cdot)}$	Röntgen-Transformation, 36
$\mathcal{D}^k, \mathcal{D}^k_{(\cdot)}$	verallgemeinerte Röntgen-Transformation hinsichtlich k, 36
$\widetilde{\mathcal{D}}, \widetilde{\mathcal{D}}_{(\cdot)}$	erweiterte Röntgen-Transformation, 43
$\mathcal{D}_\phi$	Röntgen-Transformation hinsichtlich eines Weges ϕ, 46
$e^{\text{Gauß}}_{\gamma,n}$	n-dimensionale Gauß-Funktion hinsichtlich γ, 55
$\hat{f}, (f)^\wedge$	Fourier-Transformation von f, 19
$\check{f}, (f)^\vee$	inverse Fourier-Transformation von f, 21
$\mathcal{F}$	Fourier-Transformation, 19
$\mathcal{G}, \mathcal{G}_{(\cdot)}$	$\mathcal{G}f := \mathcal{G}_{(\cdot)}f := \mathcal{D}_{(\cdot)}f + \mathcal{D}_{(\cdot)}f(-\cdot)$, 37
$\mathcal{G}^k, \mathcal{G}^k_{(\cdot)}$	$\mathcal{G}^k f := \mathcal{G}^k_{(\cdot)}f := \mathcal{D}^k_{(\cdot)}f + \mathcal{D}^k_{(\cdot)}f(-\cdot)$, 37

$\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{\mathcal{G}}_{(\cdot)}$	$\widetilde{\mathcal{G}} f := \widetilde{\mathcal{G}}_{(\cdot)} f := \widetilde{\mathcal{D}}_{(\cdot)} f + \widetilde{\mathcal{D}}_{(\cdot)} f(-\cdot)$, 43
Γ_ϕ	Kurve zum Weg $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^n$, 45
H^α	Sobolev-Raum der Ordnung α, 20
$\mathcal{I}^\alpha$	Riesz-Potential hinsichtlich α, 21
$k'(s,t)$	$k'(s,t) := \overline{k(t,s)}$, 11
$\kappa_{\mathcal{A}}(e)$	Rekonstruktionskern des Operators $\mathcal{A}$ hinsichtlich e, 6
$L_{a,\theta}$	Strahl mit Anfangspunkt a in Richtung θ, 64
$L(U,V)$	Raum aller linearen stetigen Operatoren von U nach V, 6
Λ	abgeschlossenes Interval $\Lambda \subset \mathbb{R}$, 45
n	$n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, 7, 18
n_ϕ	Crofton-Symbol hinsichtlich eines Weges ϕ, 46
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, 7
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$, 20
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen, 7
$\mathbb{R}^+$	$\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, 8
$\mathbb{R}_0^+$	$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, 20
$\mathbb{R}_*^n$	$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 23
$R(\mathcal{A})$	Bildraum des Operators $\mathcal{A}$, 6
$\mathcal{R}^r$, $\mathcal{R}_{(\cdot)}^r$	Radon-Transformation hinsichtlich r, 18
$\widetilde{\mathcal{R}}, \widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}$	erweiterte Radon-Transformation, 36
$\widetilde{\mathcal{R}}^r, \widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}^r$	erweiterte Radon-Transformation hinsichtlich r, 31
$\rho(x)$	Radius von $x \in \mathbb{R}^n$, 23
S	Raum der schnellfallenden Funktionen, 36
S^{n-1}	n-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$, 18
$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)$	Approximative Inverse des Operators $\mathcal{A}$ hinsichtlich e, 7
$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e, \mathcal{T})$	Approximative Inverse des Operators $\mathcal{A}$ hinsichtlich e für die Eigenschaft $\mathcal{T}$, 9
$t_{\phi,\lambda,r}$	$\lvert\langle\phi'(\lambda), \cdot\rangle\rvert n_\phi(\cdot, \langle\phi(\lambda), \cdot\rangle)^{-1}$, 48
$\mathcal{T}_k$	Fredholmscher Integraloperator, 10
$\mathcal{T}_x$	Translation hinsichtlich x, 50
$\mathcal{T}_x^{r_1,r_2}$	Translation hinsichtlich x, r_1 und r_2, 13
$U_{u,v}$	$U_{u,v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $U_{u,v}\left(\frac{u-v}{\lVert u-v\rVert}\right) = \frac{u}{\lVert u\rVert}$, 60
$\mathcal{U}_{u,v}$	$\mathcal{U}_{u,v} f := f(U_{u,v}(\cdot))$, 60
$\mathcal{V}_c$	Dilatation hinsichtlich c, 61

$\Phi^{n,r}(\Lambda)$	Menge aller Wege in $\mathbb{R}^n$, deren Bilder außerhalb von Ω_r^n liegen, 45
Ω_r^n	n-dimensionale offene Kugel mit Radius r, 12

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist ein Rekonstruktionsverfahren zur Berechnung der Faltung einer Funktion f mit einer weiteren Funktion anhand der Radon- oder Röntgen-Transformation von f. Die dabei auftretenden inversen Probleme sollen mit Hilfe der Approximativen Inversen gelöst werden.

In der Mathematik spricht man immer dann von einem inversen Problem, wenn man die Ursache einer beobachteten Wirkung bestimmen möchte. In der Röntgen-Computertomographie (CT) wird die geschwächte Intensität einer Strahlung entlang unterschiedlicher Pfade durch ein Objekt gemessen, um daraus auf die Dichteverteilung im Objekt zu schließen. Somit handelt es sich bei der CT um ein inverses Problem.

Inverse Probleme sind in der Regel im Sinne von Hadamard [Had23] schlecht gestellt, d.h. es existiert keine Lösung, oder keine eindeutige Lösung, oder keine Lösung, die stetig von den vorliegenden Daten abhängt. Natterer zeigt in [Nat86], dass auch die CT keine Ausnahme dieser Regel darstellt. Regularisierungsverfahren erlauben die Berechnung stabiler Lösungen bei schlecht gestellten inversen Problemen. Eine Einführung in die Regularisierung schlecht gestellter Probleme geben beispielsweise Louis in [Lou89] oder Rieder in [Rie03].

Da in der vorliegenden Arbeit für die mathematische Modellierung der CT ausschließlich lineare Operatoren zum Einsatz kommen, wollen wir uns auf die Regularisierung linearer inverser Probleme beschränken. Als Regularisierungsverfahren wählen wir die Approximative Inverse, die Louis in [Lou96] einführt und deren Ursprung in den Arbeiten [LM90, LM91] von Louis und Maass zu finden ist. Die ausschließliche Verwendung der Approximativen Inversen stellt keine Einschränkung dar, da Louis in [Lou96] zeigt, dass sich viele bekannte Regularisierungsverfahren für lineare inverse Probleme als Spezialfall der Approximativen Inversen darstellen lassen.

Wir betrachten also Probleme der Form $(\mathcal{A}, U, V)$ mit separablen Hilberträumen U und V sowie einem stetigen, linearen Operator $\mathcal{A}$ von U nach V. Die Aufgabe besteht nun darin, bei gegebenen Daten $g \in V$ und bekanntem

Operator $\mathcal{A}$ ein $f \in U$ zu finden, so dass

$$\mathcal{A}f = g \tag{1}$$

gilt. Im Fall der CT entspricht g der gemessenen Intensitätsschwächung und f der gesuchten Dichteverteilung im Objekt. Abhängig von der zur Messung verwendeten Aufnahmegeometrie handelt es sich bei dem Operator $\mathcal{A}$ um die Radon- oder die Röntgen-Transformation.

Die Grundidee der Approximativen Inversen zur Lösung der in (1) formulierten Operatorgleichung erster Art besteht nun darin, die Lösung $f \in U$ an einer geeignet definierten Stelle x durch $\langle f, e(x,\cdot)\rangle_U$ mit $e(x,\cdot) \in U$ zu approximieren. Wählt man $e(x,\cdot)$ aus dem Bildraum von $\mathcal{A}^*$, dann existiert ein $\kappa_x \in V$ mit $\mathcal{A}^*\kappa_x = e(x,\cdot)$ und es gilt

$$\langle f, e(x,\cdot)\rangle_U = \langle f, \mathcal{A}^*\kappa_x\rangle_U = \langle \mathcal{A}f, \kappa_x\rangle_V = \langle g, \kappa_x\rangle_V \,. \tag{2}$$

Durch Bestimmung der inneren Produkte aus den Daten g und den sogenannten Rekonstruktionskernen κ_x erhält man also die Approximation unserer Lösung. Nachdem die Daten g gegeben sind sowie das innere Produkt durch den Bildraum des bekannten Operators $\mathcal{A}$ festgelegt ist, besteht die Hauptaufgabe bei der Lösung unseres Problems in der Bestimmung der Rekonstruktionskerne κ_x.

Oftmals wird in der Praxis die berechnete Lösung eines inversen Problems unter Verwendung eines Operators weiterverarbeitet. Beispielsweise werden im Fall der CT häufig Bildverarbeitungsoperatoren auf die berechnete Dichteverteilung angewandt, um spezifische Eigenschaften der Verteilung hervorzuheben. Seien nun X ein separabler Hilbertraum und T ein linearer, stetiger Operator von U nach X. Dann ist man in vielen Anwendungsfällen also nicht an einer Lösung f selbst interessiert, sondern vielmehr an der Eigenschaft Tf.

Um Anwendungen in der Praxis zu beschleunigen sowie numerische Ungenauigkeiten durch Vermeidung von Zwischenschritten zu reduzieren, führt Louis in [Lou08] eine Erweiterung der Approximativen Inversen ein, um eine Eigenschaft Tf direkt aus den Daten g bestimmen zu können. Die Eigenschaft Tf wird dabei an einer geeignet definierten Stelle z durch $\langle Tf, \tilde{e}(z,\cdot)\rangle_X$ mit $\tilde{e}(z,\cdot) \in X$ approximiert. Sei nun $\tilde{e}(z,\cdot)$ so gewählt, dass $T^*\tilde{e}(z,\cdot)$ im Bildraum von $\mathcal{A}^*$ liegt, dann existiert ein $\tilde{\kappa}_z \in V$ mit

$$\mathcal{A}^*\tilde{\kappa}_z = T^*\tilde{e}(z,\cdot)$$

und es gilt

$$\begin{aligned}\langle Tf, \tilde{e}(z,\cdot)\rangle_X &= \langle f, T^*\tilde{e}(z,\cdot)\rangle_U \\ &= \langle f, \mathcal{A}^*\tilde{\kappa}_z\rangle_U \\ &= \langle \mathcal{A}f, \tilde{\kappa}_z\rangle_V \\ &= \langle g, \tilde{\kappa}_z\rangle_V\,.\end{aligned}$$

Analog zu (2) liegt die Hauptaufgabe bei der Approximation der Eigenschaft Tf in der Bestimmung der Rekonstruktionskerne $\tilde{\kappa}_z$.

In dieser Arbeit werden wir die Erweiterung der Approximativen Inversen zur Berechnung einer Eigenschaft im Kontext der CT verwenden. Wir werden daher Operatorgleichungen der Form (1) betrachten, wobei die gegebenen Daten g der Radon- oder Röntgen-Transformation der Funktion f entsprechen. Die aus den Daten g direkt zu bestimmende Faltung von f mit einer weiteren Funktion werden wir als Eigenschaft Tf interpretieren und die Struktur der zugehörigen Rekonstruktionskerne $\tilde{\kappa}_z$ untersuchen. Wir werden zudem Bedingungen angeben, unter welchen ein effizientes numerisches Verfahren zur Berechnung von Tf realisierbar ist.

In Kapitel 1 werden wir die klassische Approximative Inverse und ihre Erweiterung zur Berechnung von Eigenschaften einführen. Als zu berechnende Eigenschaft werden wir die Klasse der Fredholmschen Integraloperatoren wählen und die daraus resultierende Struktur der Approximativen Inversen untersuchen. Dabei werden wir insbesondere auf die Faltung eingehen, die ein Spezialfall eines Fredholmschen Integraloperators darstellt.

Die Radon-Transformation stellt das mathematische Modell der zweidimensionalen (2D) CT bei Parallelstrahlgeometrie dar. In Kapitel 2 werden wir daher die Radon-Transformation einführen und eine Formel zur Inversion der Radon-Transformation angeben. Basierend auf der Inversionsformel werden wir drei Ansätze zur Herleitung von Rekonstruktionsverfahren untersuchen. Zunächst werden wir ein Verfahren zur Rekonstruktion der gesuchten Funktion f angeben, welches direkt aus der Inversionsformel folgt. Anschließend werden wir die klassische Approximative Inverse einsetzen, um die Rekonstruktion von f zu regularisieren. Schließlich werden wir die Faltung von f mit einer weiteren Funktion direkt aus der Radon-Transformation von f mit Hilfe der Approximativen Inversen berechnen.

Rekonstruktonsverfahren für die 2D CT bei Fächerstrahlgeometrie und für die dreidimensionale (3D) CT bei Kegelstrahlgeometrie werden wir in Kapitel 3 untersuchen. Mathematisch können diese CT-Verfahren mit Hilfe der Röntgen-Transformation modelliert werden. Wir werden daher die Röntgen-Transformation und die erweiterte Radon-Transformation einführen sowie einen Zusammenhang dieser beiden Transformationen angeben. Dieser Zusammenhang wird sich als wesentlich für die Herleitung von Formeln zur Inversion der Röntgen-Transformation und der erweiterten Röntgen-Transformation herausstellen. Ausgehend von den Inversionsformeln werden wir Rekonstruktionsverfahren entwickeln und dabei analog zu Kapitel 2 drei Ansätze verfolgen. Wir beginnen mit Verfahren zur Rekonstruktion der gesuchten Funktion f, welche sich direkt aus den Inversionsformeln ergeben. Anschließend werden wir die Rekonstruktion von f mit Hilfe der klassischen Approximativen Inversen regularisieren. Schließlich werden wir die Approximative Inverse für Eigenschaften einsetzen, um die Faltung von f mit einer weiteren Funktion direkt aus der Röntgen-Transformation von f zu berechnen.

Danksagung

Allen voran danke ich Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Alfred K. Louis für die hervorragende Betreuung. Er hatte immer Zeit für mich und meine Fragen und räumte mir sehr viel Freiraum bei der thematischen Ausrichtung meiner Arbeit ein. Zudem gab er mir die Möglichkeit, an mehreren Tagungen über Computertomographie am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach teilzunehmen.

Bei Prof. Dr. Peter Maaß möchte ich mich für die Erstellung des Zweitgutachtens bedanken.

Mein Dank gilt auch allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Fraunhofer Entwicklungszentrums für Röntgentechnik in Fürth für das sehr angenehme Arbeitsklima. Vor allem danke ich Dipl. Math. Tobias Schön für die vielen anregenden Diskussionen und das Korrekturlesen meiner Arbeit.

Ich danke auch Prof. Dr. Andreas Knauf für seine spontane Einführung in die Theorie der Distributionen an einem späten Freitag Nachmittag.

Und natürlich danke ich euch, liebe Karin, liebe Elena und liebe Amelie, für eure Unterstützung, euer Verständnis und eure Geduld.

Kapitel 1

Regularisierung linearer inverser Probleme

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir das Konzept der Approximativen Inversen zur Lösung linearer inverser Probleme vorstellen. Da wir nicht an der Lösung des Problems selbst, sondern an einer Eigenschaft der gesuchten Lösung interessiert sind, werden wir die Approximative Inverse im zweiten Abschnitt entsprechend erweitern. Die Anwendung der Faltung als Eigenschaft der gesuchten Lösung wird im dritten Abschnitt dargestellt und schließt das erste Kapitel ab.

1.1 Die Approximative Inverse

Ist die direkte Messung einer Kenngröße nicht möglich, sondern muss anhand von indirekten Beobachtungen auf die Kenngröße geschlossen werden, dann spricht man von einem *inversen Problem*. Bei Aufgabenstellungen aus Physik und Mathematik ist die Beziehung zwischen Kenngröße und Beobachtung oftmals linear und stetig. Seien daher U und V separable Hilberträume und $\mathcal{A}$ ein linearer, stetiger Operator von U nach V. Dann lassen sich lineare inverse Probleme als Operatorgleichung erster Art in der Form

$$\mathcal{A}f = g \tag{1.1}$$

darstellen. Bei gegebenen Daten $g \in V$ und bekanntem Operator $\mathcal{A}$ ist man also an einer Lösung $f \in U$ von Gleichung (1.1) interessiert.

Ist der Bildraum von $\mathcal{A}$ nicht abgeschlossen, dann ist die verallgemeinerte Inverse $\mathcal{A}^\dagger$ nicht stetig, siehe z.B. Louis [Lou89]. Das inverse Problem ist in diesem Fall gemäß der Definition von Hadamard [Had23] ein *schlecht gestelltes Problem*. Dies bedeutet eine Instabilität in dem Sinne, dass kleine

Fehler in den gegebenen Daten g, beispielsweise hervorgerufen durch Messfehler, zu großen Fehlern in der Lösung f führen. Für die Stabilisierung des Problems ist es notwendig, $\mathcal{A}^\dagger$ durch stetige Operatoren zu approximieren. Diese Operatoren werden *Regularisierungsverfahren* genannt.

Wir folgen in dieser Arbeit dem Ansatz der Approximativen Inversen, um Näherungslösungen für lineare inverse Probleme zu bestimmen. Die Approximative Inverse wurde von Louis in [Lou96] eingeführt und geht auf die Arbeiten [LM90, LM91] von Louis und Maass zurück. Da wir in der gesamten Arbeit die Lösungen unserer inversen Probleme im Raum der Funktionen, die auf einem beschränkten Gebiet quadratintegrierbar sind, suchen werden, wollen wir uns schon bei der Definition der Approximativen Inversen darauf einschränken; die ursprüngliche Definition setzt als Lösungsraum lediglich einen separablen Hilbertraum voraus.

Doch bevor wir zur Theorie der Approximativen Inversen übergehen, werden wir zunächst einige Notationen einführen: Wir bezeichnen mit $L(U, V)$ den Raum aller linearen stetigen Operatoren von U nach V. Den Bildraum eines Operators $\mathcal{A}$ werden wir mit $R(\mathcal{A})$ bezeichnen. Für den adjungierten Operator eines Operators $\mathcal{A}$ verwenden wir die Schreibweise $\mathcal{A}^*$.

Wir beginnen mit der Definition des sogenannten Rekonstruktionskerns, dessen Untersuchung hinsichtlich Struktur und Berechenbarkeit in verschiedenen Kontexten Hauptgegenstand der Arbeit ist.

Definition 1.1 (Rekonstruktionskern)**.** Seien U und V separable Hilberträume, $\mathcal{A} \in L(U, V)$ und $e \in R(\mathcal{A}^*)$. Ein Element $\kappa_{\mathcal{A}}(e) \in V$ mit

$$\mathcal{A}^* \kappa_{\mathcal{A}}(e) = e \tag{1.2}$$

heißt *Rekonstruktionskern des Operators $\mathcal{A}$ hinsichtlich e.*

In [Lou96] zeigt Louis die Übertragbarkeit von Invarianzen eines Operators auf den zugehörigen Rekonstruktionskern. Der nachfolgende Satz verallgemeinert dieses Ergebnis, obwohl die Beweise der beiden Resultate analog sind.

Satz 1.2 (Assoziierte Rekonstruktionskerne)**.** *Seien U, V, X und Y separable Hilberträume, $\mathcal{A} \in L(U, V)$ und $\mathcal{B} \in L(X, Y)$. Seien zudem $\mathcal{T}^1 \in L(U, X)$ und $\mathcal{T}^2 \in L(V, Y)$ mit*

$$\mathcal{T}^1 \mathcal{A}^* = \mathcal{B}^* \mathcal{T}^2$$

sowie $e \in R(\mathcal{A}^*)$. Dann gilt $\mathcal{T}^1 e \in R(\mathcal{B}^*)$ und

$$\kappa_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}^1 e) = \mathcal{T}^2 \kappa_{\mathcal{A}}(e)\,.$$

Beweis. (vgl. [Lou96]) Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt

$$\mathcal{T}^1 e = \mathcal{T}^1 \mathcal{A}^* \kappa_{\mathcal{A}}(e) = \mathcal{B}^* \mathcal{T}^2 \kappa_{\mathcal{A}}(e)$$

und somit $\mathcal{T}^1 e \in R(\mathcal{B}^*)$ sowie $\kappa_{\mathcal{B}}(\mathcal{T}^1 e) = \mathcal{T}^2 \kappa_{\mathcal{A}}(e)$. □

Unter Verwendung des Rekonstruktionskerns können wir nun die Approximative Inverse definieren. Wir bezeichnen mit $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen und mit $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen. Für einen Hilbertraum H bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ das zugehörige innere Produkt. Fortan sei stets $n \in \mathbb{N}$.

Definition 1.3 (Approximative Inverse)**.** Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, $U := L^2(\Omega)$, V ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{A} \in L(U, V)$, $g \in V$ und $e \in L^2(\Omega' \times \Omega)$ mit $e(x, \cdot) \in R(\mathcal{A}^*)$ für alle $x \in \Omega'$. Den durch

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)g(x) := \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(e(x, \cdot)) \rangle_V\,, \quad x \in \Omega'\,,$$

definierten Operator bezeichnen wir als *Approximative Inverse des Operators $\mathcal{A}$ hinsichtlich e.*

In der nachfolgenden Bemerkung werden wir auf die Bezeichnungen aus Definition 1.3 zurückgreifen.

Bemerkung 1.4. a) Für $f \in L^2(\Omega)$ mit $\mathcal{A}f = g$ gilt

$$\begin{aligned} \langle f, e(x, \cdot) \rangle_U &= \langle f, \mathcal{A}^* \kappa_{\mathcal{A}}(e(x, \cdot)) \rangle_U \\ &= \langle \mathcal{A}f, \kappa_{\mathcal{A}}(e(x, \cdot)) \rangle_V \\ &= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(e(x, \cdot)) \rangle_V \\ &= \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)g(x)\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Der Grundgedanke der Approximativen Inversen besteht also darin, die exakte Lösung f an der Stelle x durch $\langle f, e(x, \cdot) \rangle_U$ zu approximieren.

b) Aus (1.3) folgt $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)g \in L^2(\Omega')$, siehe Werner [Wer05]. Somit ist die Approximative Inverse $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)$ eine Abbildung von V nach $L^2(\Omega')$.

c) Wir werden bei der Berechnung von $e(x, \cdot)$ Operatoren einsetzen, die auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert sind. In diesem und anderen notwendigen Fällen werden wir implizit von der Einbettung $L^2(D) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ ausgehen, die für $f \in L^2(D)$ definiert ist durch die Fortsetzung von f mit 0 außerhalb von D, wobei $D \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiges beschränktes Gebiet bezeichnet.

d) Per Definition bietet die Approximative Inverse die Möglichkeit, die gesuchte Näherungslösung an jeder Stelle $x \in \Omega'$ individuell zu glätten. Allerdings ist diese Flexibilität eher theoretischer Natur, da eine von x abhängige Bestimmung der Näherungslösung in der Regel numerisch zu aufwendig ist.

Besitzen jedoch der Mollifier und der Operator, der dem Problem zu Grunde liegt, geeignete Invarianzen, dann weist auch der Rekonstruktionskern entsprechende Invarianzen auf, siehe Louis [Lou96]. Von diesem Verhalten der Approximativen Inversen werden wir Gebrauch machen und dabei stets auf Satz 1.2 zurückgreifen.

e) Als vorteilhaft für die Praxis erweist sich die aus (1.2) ersichtliche Unabhängigkeit der Rekonstruktionskerne von den gegebenen Daten, welche meist durch Messung generiert werden. Denn somit kann die Kernberechnung unabhängig von der Datenakquisition durchgeführt werden. Zudem haben Messfehler keinerlei Auswirkungen auf die Bestimmung der Rekonstruktionskerne.

Als nächstes werden wir einen Begriff einführen, der uns bei der Bestimmung von Näherungslösungen für (1.1) behilflich sein wird. Fortan bezeichne $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen.

Definition 1.5 (Mollifier)**.** Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete mit $\Omega' \subset \Omega$ und $E := (e_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \in (L^2(\Omega' \times \Omega))^{\mathbb{R}^+}$. Falls für alle $x \in \Omega'$ und alle $\gamma \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung

$$\int_\Omega e_\gamma(x, u)\, du = 1$$

erfüllt ist und falls für alle $f \in L^2(\Omega)$

$$\lim_{\gamma\to 0} \left\| \int_\Omega e_\gamma(\cdot, u) f(u)\, du - f \right\|_{L^2(\Omega')} = 0$$

gilt, dann wird E als *Mollifier* bezeichnet.

Hängt die Approximative Inverse von einem Mollifier ab, dann kann damit eine Lösung unseres Ausgangsproblems approximiert werden.

Satz 1.6 (Approximation einer Lösung)**.** *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete mit $\Omega' \subset \Omega$, $U := L^2(\Omega)$, V ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{A} \in L(U, V)$ und $f \in U$. Zudem sei $E := (e_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \in (L^2(\Omega' \times \Omega))^{\mathbb{R}^+}$ ein Mollifier mit $(e_\gamma(x, \cdot))_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \in (R(\mathcal{A}^*))^{\mathbb{R}^+}$ für alle $x \in \Omega'$. Dann gilt*

$$\lim_{\gamma\to 0} \|\mathcal{S}_\mathcal{A}(e_\gamma)\mathcal{A}f - f\|_{L^2(\Omega')} = 0\,.$$

Beweis. Schuster [Sch99]. □

Nachdem wir nun alle Resultate, die für unsere Zwecke notwendig sind, eingeführt haben, wollen wir weiterführende Hinweise zur Approximativen Inversen als abschließende Bemerkung dieses Abschnitts formulieren.

Bemerkung 1.7. a) Ist in der Situation von Satz 1.6 $R(\mathcal{A})$ nicht abgeschlossen, d.h. die verallgemeinerte Inverse $\mathcal{A}^\dagger$ ist nicht stetig, siehe z.B. Louis [Lou89], und setzt man zusätzlich die Kompaktheit von $\mathcal{A}$ voraus, dann zeigt Louis in [Lou99], dass $((\mathcal{S}_\mathcal{A}(e_\gamma))_{\gamma\in\mathbb{R}^+}$ lineare Regularisierungsverfahren für $\mathcal{A}^\dagger$ sind.

b) Bezeichne $N(\mathcal{A})$ den Nullraum eines linearen stetigen Operators $\mathcal{A}$. In der Definition des Rekonstruktionskerns 1.1 liegt e im Bildraum von $\mathcal{A}^*$. In den zitierten Arbeiten [Lou96, Lou99, Sch99] von Louis und Schuster werden viele Ergebnisse dieses Abschnitts auch analog für den allgemeineren Fall bewiesen, in dem man lediglich $e \in R(\mathcal{A}^*) \oplus N(\mathcal{A})$ fordert und den Rekonstruktionskern κ als Lösung der Normalengleichung

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^*\kappa = \mathcal{A}e$$

definiert.

1.2 Regularisierung für Eigenschaften

Betrachten wir zunächst wieder unser Ausgangsproblem (1.1), d.h. bei gegebenen Daten g möchte man eine Lösung f der Gleichung

$$\mathcal{A}f = g$$

finden. Bei vielen Anwendungen in der Praxis berechnet man anschließend eine Eigenschaft der berechneten Lösung. Identifiziert man diese Eigenschaft mit einem geeignet definierten Operator $\mathcal{T}$, dann ist man also letztlich nicht an einer Lösung f, sondern vielmehr an $\mathcal{T}f$ interessiert.

Wir werden in diesem Abschnitt der Fragestellung nachgehen, ob man eine Näherungslösung für $\mathcal{T}f$ direkt aus den Daten g bestimmen kann, um dadurch Anwendungen in der Praxis zu beschleunigen sowie numerische Ungenauigkeiten durch Vermeidung von Zwischenschritten zu reduzieren. Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen ist die Erweiterung der Approximativen Inversen zur Berechnung von Eigenschaften, die Louis in [Lou08] einführt.

Definition 1.8 (Approximative Inverse für Eigenschaften)**.** Seien $\Omega, \Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, $U := L^2(\Omega)$, V ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{A} \in L(U, V)$, $W := L^2(\Omega')$, $\mathcal{T} \in L(U, W)$, $g \in V$ und $e \in L^2(\Omega'' \times \Omega')$ mit $\mathcal{T}^*e(x, \cdot) \in R(\mathcal{A}^*)$ für alle $x \in \Omega''$. Den durch

$$\mathcal{S}_\mathcal{A}(e, \mathcal{T})g(x) := \langle g, \kappa_\mathcal{A}(\mathcal{T}^*e(x, \cdot))\rangle_V\,, \quad x \in \Omega'',$$

definierten Operator bezeichnen wir als *Approximative Inverse des Operators $\mathcal{A}$ hinsichtlich e für die Eigenschaft $\mathcal{T}$*.

Bemerkung 1.9. a) Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.8 und $f \in L^2(\Omega)$ mit $\mathcal{A}f = g$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{T}f, e(x,\cdot)\rangle_W &= \langle f, \mathcal{T}^* e(x,\cdot)\rangle_U \\
&= \langle f, \mathcal{A}^* \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}^* e(x,\cdot))\rangle_U \\
&= \langle \mathcal{A}f, \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}^* e(x,\cdot))\rangle_V \\
&= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}^* e(x,\cdot))\rangle_V \\
&= \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e,\mathcal{T})g(x)\,.
\end{aligned}$$

Die Grundidee der Approximativen Inversen für eine Eigenschaft besteht somit darin, die Eigenschaft $\mathcal{T}$ einer exakten Lösung f an der Stelle x durch $\langle \mathcal{T}f, e(x,\cdot)\rangle_W$ zu approximieren.

b) In der ursprünglichen Definition der Approximativen Inversen zur Berechnung einer Eigenschaft verwendet LOUIS in [Lou08] eine Eigenschaft $\mathcal{T}$ aus $L(U,W)$, wobei W einen separablen Hilbertraum bezeichnet. Wir wählen $W := L^2(\Omega')$ in Definition 1.8, da dies für unsere Zwecke ausreichend ist und zudem die Notation vereinfacht

Das nachfolgende Korollar zu Satz 1.2 zeigt, dass der Rekonstruktionskern der Approximativen Inversen einer Eigenschaft unter bestimmten Voraussetzungen aus dem Rekonstruktionskern der klassischen Approximativen Inversen hervorgeht.

Korollar 1.10. *Seien U, V, X und Y separable Hilberträume, $\mathcal{A} \in L(U,V)$ und $\mathcal{B} \in L(X,Y)$. Seien zudem $\mathcal{T}^1 \in L(X,U)$ und $\mathcal{T}^2 \in L(Y,V)$ mit*

$$\mathcal{A}\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}^2\mathcal{B}$$

sowie $e \in R(\mathcal{A}^*)$. Dann gilt ${\mathcal{T}^1}^* e \in R(\mathcal{B}^*)$ und

$$\kappa_{\mathcal{B}}({\mathcal{T}^1}^* e) = {\mathcal{T}^2}^* \kappa_{\mathcal{A}}(e)\,.$$

Beweis. Da die Bedingung $\mathcal{A}\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}^2\mathcal{B}$ äquivalent zu ${\mathcal{T}^1}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^*{\mathcal{T}^2}^*$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 1.2. □

Für den Rest dieses Abschnitts werden wir uns bei der Approximativen Inversen auf den Fredholmschen Integraloperator als zu berechnende Eigenschaft einschränken.

Satz und Definition 1.11 (Fredholmscher Integraloperator)**.** Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, $f \in L^2(\Omega)$ und $k \in L^2(\Omega' \times \Omega)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_k : L^2(\Omega) &\to L^2(\Omega') \\
f &\mapsto \mathcal{T}_k f := \int_{\mathbb{R}^n} k(\cdot,t) f(t)\,dt
\end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear und stetig. Die Abbildung $\mathcal{T}_k$ heißt *Fredholmscher Integraloperator (hinsichtlich k).*

Beweis. WERNER [Wer05] □

Gemäß Satz 1.11 sind Fredholmsche Integraloperatoren linear und stetig und somit als Eigenschaft in unserem Sinne geeignet. Um die Approximative Inverse anwenden zu können, benötigen wir den zugehörigen adjungierten Operator. Daher werden wir folgende Schreibweise einführen: Für eine Abbildung $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ und $s, t \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$k'(s,t) := \overline{k(t,s)}\,,$$

wobei $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet.

Lemma 1.12. *Seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete und $k \in L^2(\Omega' \times \Omega)$. Dann gilt*

$$\mathcal{T}_k{}^* = \mathcal{T}_{k'}\,.$$

Beweis. WERNER [Wer05] □

Als nächstes werden wir den Zusammenhang zwischen der klassischen Approximativen Inversen und der Approximativen Inversen für Eigenschaften untersuchen. Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.3 und 1.8 kann gemäß Bemerkung 1.9 mit Hilfe der Approximativen Inversen für Eigenschaften die Näherung

$$\langle \mathcal{T} f, e(x,\cdot)\rangle_U \tag{1.4}$$

an die exakte Eigenschaft $\mathcal{T} f$ direkt aus den Daten g bestimmt werden. Bislang wurde eine Approximation von $\mathcal{T} f$ durch die Bestimmung von

$$\mathcal{T}\langle f, e(x,\cdot)\rangle_U \tag{1.5}$$

in zwei Schritten realisiert: Zunächst wurde $\langle f, e(x,\cdot)\rangle_U$ mittels Approximativer Inversen berechnet, und anschließend der Operator $\mathcal{T}$ angewendet. Der nachfolgende Satz zeigt, dass mit Hilfe der Approximativen Inversen für Eigenschaften (1.5) direkt aus den Daten g berechnet werden kann. Die Beweisidee zu Satz 1.13 stammt von LOUIS, siehe [Lou09].

Satz 1.13. *Seien $\Omega, \Omega', \Omega'' \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Gebiete, $U := L^2(\Omega)$, V ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{A} \in L(U,V)$, $e \in L^2(\Omega' \times \Omega)$ mit $e(x,\cdot) \in R(\mathcal{A}^*)$ für alle $x \in \Omega'$ und $k \in L^2(\Omega'' \times \Omega')$ mit $\mathcal{T}_{\bar{e}}{}^*\bar{k}(y,\cdot) \in R(\mathcal{A}^*)$ für alle $y \in \Omega''$. Dann gilt*

$$\mathcal{T}_k \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\bar{k}, \mathcal{T}_{\bar{e}})\,.$$

Beweis. Für $g \in V$ gilt nach Bemerkung 1.4 $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)g \in L^2(\Omega')$. Somit ist der Operator $\mathcal{T}_k\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e_\gamma)$ wohldefiniert. Zudem gilt für $f \in U$ mit $\mathcal{A}f = g$ und fast alle $y \in \Omega''$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_k\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e_\gamma)g(y) &= \int_{\Omega'} k(y,x)\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e)g(x)\,dx \\
&= \int_{\Omega'} k(y,x)\langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(e(x,\cdot))\rangle_V\,dx \\
&= \int_{\Omega'} k(y,x)\langle f, e(x,\cdot)\rangle_U\,dx \\
&= \int_{\Omega'}\int_{\Omega} k(y,x)f(t)\overline{e(x,t)}\,dt\,dx \\
&= \int_{\Omega} f(t)\int_{\Omega'} e'(t,x)k(y,x)\,dx\,dt \\
&= \int_{\Omega} f(t)\mathcal{T}_{e'}k(y,\cdot)(t)\,dt \\
&= \int_{\Omega} f(t)\mathcal{T}_e{}^*k(y,\cdot)(t)\,dt\,,
\end{aligned}
$$

wobei der letzte Schritt aus Lemma 1.12 folgt. Somit ergibt sich für fast alle $y \in \Omega''$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_k\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e_\gamma)g(y) &= \langle f, \overline{\mathcal{T}_e{}^*k(y,\cdot)}\rangle_U \\
&= \langle f, \mathcal{T}_{\bar{e}}{}^*\overline{k(y,\cdot)}\rangle_U \\
&= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}_{\bar{e}}{}^*\overline{k(y,\cdot)})\rangle_V \\
&= \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\bar{k}, \mathcal{T}_{\bar{e}})g(y)
\end{aligned}
$$

und daher die Behauptung. □

1.3 Die Faltung als regularisierte Eigenschaft

In der nachfolgenden Definition werden wir die Faltung als Operator für Funktionen einführen, die auf einem beschränkten Gebiet quadratintegrierbar sind. Somit können wir die Faltung als Fredholmschen Integraloperator betrachten und die Resultate des vorangegangenen Abschnitts verwenden, um die Faltung als regularisierte Eigenschaft zu untersuchen. Hierfür bezeichne fortan

$$\Omega_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$$

die n-dimensionale offene Kugel mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$.

Satz und Definition 1.14 (Faltung)**.** Seien $r^2, r^3 \in \mathbb{R}^+$ mit $r^2 > r^3$, $r^1 := r^2 - r^3$ und $\psi \in L^2(\Omega^n_{r^3})$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\psi^{r_1,r_2} : L^2(\Omega^n_{r_1}) &\to L^2(\Omega^n_{r_2}) \\ f &\mapsto \mathcal{C}_\psi^{r_1,r_2} f := (f * \psi) := \int_{\Omega^n_{r1}} f(x)\psi(\cdot - x)\, dx \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear und stetig. Wir bezeichnen $\mathcal{C}_\psi^{r_1,r_2}$ als *Faltung mit ψ (hinsichtlich r_1 und r_2).*

Beweis. Seien $r^2, r^3 \in \mathbb{R}^+$ mit $r^2 > r^3$, $r^1 := r^2 - r^3$, $\psi \in L^2(\Omega^n_{r^3})$ und $t \in \Omega^n_{r_1}$. Dann gilt für $k(\cdot, t) := \psi(\cdot - t)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^n_{r_1}} \int_{\Omega^n_{r_2}} |k(s,t)|^2\, ds\, dt &\leq \int_{\Omega^n_{r_1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(s-t)|^2\, ds\, dt \\ &= \|\psi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \int_{\Omega^n_{r_1}} dt < \infty \end{aligned} \tag{1.6}$$

und daher $k \in L^2(\Omega^n_{r_2} \times \Omega^n_{r_1})$. Somit ist $\mathcal{C}_\psi^{r_1,r_2} = \mathcal{T}_k$ ein Fredholmscher Integraloperator und daher nach Satz 1.11 wohldefiniert, linear und stetig. □

Bemerkung 1.15. Ist ψ in Satz 1.14 gerade, d.h. es gilt $\psi = \psi(-\cdot)$, und ist ψ zudem reellwertig, dann gilt nach Lemma 1.12

$$(\mathcal{C}_\psi^{r_1,r_2})^* = \mathcal{C}_\psi^{r_2,r_1}\,.$$

Für die Konstruktion einer geeigneten Funktion e in Satz 1.13 benötigen wir die nachfolgende Definition.

Satz und Definition 1.16 (Translation)**.** Seien $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $r_1 < r_2$, $r_3 := r_2 - r_1$ und $x \in \Omega^n_{r_3}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_x^{r_1,r_2} : L^2(\Omega^n_{r_1}) &\to L^2(\Omega^n_{r_2}) \\ f &\mapsto f(\cdot - x) \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear und stetig. Wir bezeichnen $\mathcal{T}_x^{r_1,r_2}$ als *Translation (hinsichtlich x, r_1 und r_2).*

Beweis. Die Wohldefiniertheit und die Linearität von $\mathcal{T}_x^{r_1,r_2}$ sind offensichtlich, die Stetigkeit folgt aus $\|\mathcal{T}_x^{r_1,r_2} f\|_{L^2(\Omega^n_{r_2})} = \|f\|_{L^2(\Omega^n_{r_1})}$. □

Bemerkung 1.17. Mit den Bezeichnungen aus Definition 1.16 gilt für den adjungierten Operator der Translation offensichtlich

$$(\mathcal{T}_x^{r_1,r_2})^* = \mathcal{T}_{-x}^{r_2,r_1}\,.$$

Wird die Translation einer geraden Funktion mit einer geraden Funktion gefaltet, dann verhalten sich die beiden Funktionen kommutativ.

Lemma 1.18. *Seien $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $2\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $r'' := r' - \tilde{r}$ sowie $\tilde{e}, \psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$ gerade Funktionen. Dann gilt für alle $y \in \Omega_{r''}^n$*

$$\mathcal{C}_{\tilde{e}}^{r',r}\mathcal{T}_y^{\tilde{r},r'}\psi = \mathcal{C}_{\psi}^{r',r}\mathcal{T}_y^{\tilde{r},r'}\tilde{e}\,. \tag{1.7}$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt für fast alle $x \in \Omega_r^n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\tilde{e}}^{r',r}\mathcal{T}_y^{\tilde{r},r'}\psi(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t-y)\tilde{e}(x-t)\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(s)\tilde{e}(x-(s+y))\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(s)\tilde{e}(-y+(x-s))\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x-t)\tilde{e}(t-y)\,dt \\
&= \mathcal{C}_{\psi}^{r',r}\mathcal{T}_y^{\tilde{r},r'}\tilde{e}(x)\,.
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1.19. In der Situation von Lemma 1.18 wird zu $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $2\tilde{r} < r$ der Radius r'' so gewählt, dass $\mathcal{T}_y^{\tilde{r},r'}\psi, \mathcal{T}_y^{\tilde{r},r'}\tilde{e} \in L^2(\Omega_{r'}^n)$ gilt und somit (1.7) wohldefiniert ist. Gleichzeitig wählen wir r' derart, dass stets $r' > \tilde{r}$ gilt und die Faltung einer Funktion $f \in L^2(\Omega_{r'}^n)$ mit $\tilde{e}, \psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$ eine Funktion mit Träger in Ω_r^n ergibt. In diesem Sinne sind $\mathcal{C}_{\tilde{e}}^{r',r}$ und $\mathcal{C}_{\psi}^{r',r}$ ebenfalls wohldefiniert.

Wählt man in Satz 1.13 als Eigenschaft die Faltung mit einer geraden, reellwertigen Funktion und geht die zweiparametrige Funktion e aus einer einparametrigen, geraden, reellwertigen Funktion durch Translation hervor, dann sind (1.4) und (1.5) unter Vernachlässigung der Räume, auf denen die Faltung agiert, äquivalent. Dies zeigt das nachfolgende Korollar zu Satz 1.13.

Korollar 1.20. *Seien $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $2\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $r'' := r' - \tilde{r}$. Zudem seien $U := L^2(\Omega_r^n)$, V ein separabler Hilbertraum, $\mathcal{A} \in L(U,V)$,*

$\tilde{e}, \psi \in L^2(\Omega^n_{\tilde{r}})$ gerade und reellwertig mit $e(x,\cdot) := \mathcal{T}^{\tilde{r},r}_x \tilde{e} \in R(\mathcal{A}^*)$ für alle $x \in \Omega^n_{r'}$ und $\left(\mathcal{C}^{r,r'}_{\tilde{e}}\right)^* \mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_y \psi \in R(\mathcal{A}^*)$ für alle $y \in \Omega^n_{r''}$. Dann gilt

$$\mathcal{C}^{r',r''}_{\psi} \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e, \mathcal{C}^{r,r'}_{\psi})\,.$$

Beweis. Da $\tilde{e}$ und ψ reellwertig sind, folgt nach Satz 1.13

$$\mathcal{C}^{r',r''}_{\psi} \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e) = \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_{(\cdot)} \psi, \mathcal{C}^{r,r'}_{\tilde{e}})\,.$$

Nach Bemerkung 1.15 und Lemma 1.18 gilt für $g \in V$ und fast alle $y \in \Omega^n_{r''}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{\mathcal{A}}(\mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_{(\cdot)} \psi, \mathcal{C}^{r,r'}_{\tilde{e}}) g(y) &= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}((\mathcal{C}^{r,r'}_{\tilde{e}})^* \mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_y \psi)\rangle_V \\
&= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{r',r}_{\tilde{e}} \mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_y \psi)\rangle_V \\
&= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}(\mathcal{C}^{r',r}_{\psi} \mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_y \tilde{e})\rangle_V \\
&= \langle g, \kappa_{\mathcal{A}}((\mathcal{C}^{r,r'}_{\psi})^* e(y,\cdot))\rangle_V \\
&= \mathcal{S}_{\mathcal{A}}(e, \mathcal{C}^{r,r'}_{\psi}) g(y)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Kapitel 2

Radon-Transformation und Rekonstruktion

Die Radon-Transformation stellt das mathematische Modell der 2D CT bei Parallelstrahlgeometrie dar. Daher werden wir im ersten Abschnitt die Radon-Transformation sowie einige ihrer Eigenschaften einführen und im zweiten Abschnitt eine Formel zur Inversion der Radon-Transformation wiedergeben. Im dritten Abschnitt werden wir uns mit Rekonstruktionsverfahren befassen, wobei wir mit Verfahren beginnen werden, die sich direkt aus der Inversionsformel ergeben. Anschließend werden wir die Struktur der Approximativen Inversen der Radon-Transformation sowie deren Erweiterung für die Faltung als regularisierte Eigenschaft untersuchen und unter Ausnutzung von Invarianzen effiziente Rekonstruktionsverfahren angeben.

2.1 Die Radon-Transformation

In [Rad17] führt Radon die nach ihm benannte Transformation ein, welche als mathematisches Modell der 2D CT dient, siehe z.B. Natterer [Nat86]. Grundlegende Eigenschaften der Radon-Transformation sind wohlbekannt und werden beispielsweise in Radon [Rad17], Natterer [Nat86], Louis [Lou89] oder Helgason [Hel99] untersucht. Wir werden in diesem Abschnitt die für uns relevanten Resultate zur Radon-Transformation wiedergeben.

Definiert man die Radon-Transformation für Funktionen mit kompaktem Träger Ω, dann hängt der Bildraum der Radon-Transformation von Ω ab. Da wir im weiteren Verlauf der Arbeit Operatoren auf den Bildraum der Radon-Transformation anwenden werden, nehmen wir in der nachfolgenden Definition die Abhängigkeit vom Träger in Form des Radius $r \in \mathbb{R}^+$ in den Bezeichner für die Radon-Transformation mit auf.

Fortan sei stets $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Die n-dimensionale Einheitssphäre im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit S^{n-1}.

Satz und Definition 2.1 (Radon-Transformation)**.** Seien $r \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann sind die Abbildungen $\mathcal{R}_\theta^r : L^2(\Omega_r^n) \to L^2(\,]-r,r[\,)$, definiert durch

$$f \mapsto \mathcal{R}_\theta^r f := \int_{\Omega_r^n} f(x)\delta(\langle x,\theta\rangle - \cdot)\,dx\,,$$

und $\mathcal{R}^r : L^2(\Omega_r^n) \to L^2(S^{n-1}\times\,]-r,r[\,)$, defininiert durch

$$f \mapsto \mathcal{R}^r f := \mathcal{R}_{(\cdot)}^r f\,,$$

wohldefiniert, linear und stetig. Die Abbildung $\mathcal{R}^r$ heißt *Radon-Transformation (hinsichtlich r)*.

Beweis. Natterer [Nat86]. □

Bemerkung 2.2. a) Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $f \in L^2(\Omega_r^n)$ folgt unmittelbar aus der Definition der Radon-Transformation, dass $\mathcal{R}^r f$ hinsichtlich $L^2(S^{n-1}\times\,]-r,r[\,)$ gerade ist, d.h. für fast alle $(\theta,s) \in S^{n-1}\times\,]-r,r[$ gilt

$$\mathcal{R}^r f(-\theta,-s) = \mathcal{R}^r f(\theta,s)\,.$$

b) Operatoren, die für einparametrige Funktionen definiert sind und auf das zweiparametrige Bild der Radon-Transformation angewendet werden, wirken stets auf den zweiten Parameter.

Als nächstes werden wir den adjungierten Operator der Radon-Transformation wiedergeben, da dieser für die Anwendung der Approximativen Inversen notwendig ist.

Satz 2.3 (Adjungierte Radon-Transformation)**.** *Für $r \in \mathbb{R}^+$ ist der adjungierte Operator zur Radon-Transformatinon gegeben durch*

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}^r)^* : L^2(S^{n-1}\times[-r,r]) &\to L^2(\Omega_r^n) \\ g &\mapsto (\mathcal{R}^r)^* g := \int_{S^{n-1}} g(\omega,\langle\cdot,\omega\rangle)\,d\omega\,. \end{aligned}$$

Beweis. Natterer [Nat86]. □

Bemerkung 2.4. Die adjungierte Radon-Transformation wird häufig auch als *Rückprojektion* bezeichnet.

Als wichtiges Werkzeug zur Berechnung des Rekonstruktionskerns der Radon-Transformation wird sich die Fourier-Transformation erweisen. Das innere Produkt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen wir mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Satz und Definition 2.5 (Fourier-Transformation)**.** Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\hat{f} := \underset{r\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega_r^n} f(x) e^{-i\langle x,\cdot\rangle}\, dx \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

wobei l.i.m. für die Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^n)$ steht. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\to L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \mathcal{F}f := (f)\hat{} := \hat{f} \end{aligned}$$

heißt *Fourier-Transformation.*

Beweis. Werner [Wer05] □

Von den nachfolgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit Gebrauch machen.

Lemma 2.6 (Eigenschaften der Fourier-Transformation)**.** *a) Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ ist ein isometrischer Isomorphismus.*

b) Seien $\tilde{r}, r' \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r'$, $r := r' - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$ und $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$. Dann gilt

$$(\mathcal{C}_\psi^{r,r'} f)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{\psi}$$

und für alle $x \in \Omega_{\tilde{r}}^n$

$$(\mathcal{T}_x^{r,r'} f)\hat{} = e^{-i\langle\cdot,x\rangle} \hat{f}\,.$$

Beweis. a) Werner [Wer05]. b) Beide Resultate ergeben sich durch einfache Rechnung. □

Bemerkung 2.7. Da sich nach Lemma 2.6 b) die Faltung und die Translation jeweils als Multiplikation im Fourier-Raum darstellen lassen, ist die Hintereinanderausführung von Faltung und Translation kommutativ.

Den engen Zusammenhang zwischen Radon- und Fourier-Transformation zeigt der nachfolgende Satz, der auch unter der Bezeichnung *Fourier slice theorem* bekannt ist.

Satz 2.8 (Projektionssatz für die Radon-Transformation)**.** *Für $f \in L^2(\Omega_r^n)$ und $\theta \in S^{n-1}$ gilt*

$$\widehat{\mathcal{R}_\theta^r f} = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\cdot\theta)\,. \tag{2.1}$$

Beweis. Natterer [Nat86]. □

Bemerkung 2.9. Da im vorangegangenen Satz f und somit $\mathcal{R}_\theta^r f$ einen kompakten Träger besitzen, sind $\hat{f}$ und $\widehat{\mathcal{R}_\theta^r f}$ nach dem Satz von Paley-Wiener, siehe z.B. Yosida [Yos95], reell analytisch. Damit gilt die Gleichheit in (2.1) sogar punktweise.

2.2 Die Inversion der Radon-Transformation

Als nächstes werden wir Sobolev-Räume einführen, da wir diese für die Inversion der Radon-Transformation benötigen. Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen.

Definition 2.10 (Sobolev-Raum)**.** Für $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ und $r \in \mathbb{R}^+$ heißt

$$H^\alpha(\Omega_r^n) := \{f \in L^2(\Omega_r^n) : (1 + \|\cdot\|^2)^{\alpha/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Sobolev-Raum der Ordnung α.

Versehen mit einer entsprechenden Norm handelt es sich bei Sobolev-Räumen um Hilberträume.

Satz 2.11. *Seien* $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, $r \in \mathbb{R}^+$ *und* $f, g \in H^\alpha(\Omega_r^n)$. *Dann ist* $H^\alpha(\Omega_r^n)$ *ein Hilbertraum mit innerem Produkt*

$$\langle f, g\rangle_{H^\alpha(\Omega_r^n)} := \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^\alpha \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi$$

und Norm

$$\|f\|_{H^\alpha(\Omega_r^n)} := \|(1 + \|\cdot\|^2)^{\alpha/2}\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Beweis. WERNER [Wer05]. □

Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $m \in \mathbb{N}$ bezeichne $C^m(\Omega_r^n)$ den Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen von Ω_r^n nach $\mathbb{C}$. Der nachfolgende Satz zeigt den Zusammenhang zwischen Sobolev-Räumen und stetig differenzierbaren Funktionen. Wir definieren $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Satz 2.12 (Lemma von Sobolev)**.** *Seien* $r \in \mathbb{R}^+$, m, $k \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m > k + \frac{n}{2}$ *und* $f \in H^m(\Omega_r^n)$. *Dann existiert eine Funktion* $g \in C^k(\Omega_r^n)$, *die mit* f *fast überall übereinstimmt.*

Beweis. WERNER [Wer05]. □

Der nachfolgende Satz gibt wohlbekannte Abschätzungen für die Radon-Transformation hinsichtlich der Sobolev-Norm wieder.

Satz 2.13. *Seien* $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$ *und* $\theta \in S^{n-1}$. *Dann existieren Konstanten* $c_{\alpha,n}$ *und* $C_{\alpha,n}$, *so dass*

$$c_{\alpha,n}\|f\|_{H^\alpha(\Omega_r^n)} \leq \|\mathcal{R}_\theta f\|_{H^{\alpha+(n-1)/2}(]-r,r[)} \leq C_{\alpha,n}\|f\|_{H^\alpha(\Omega_r^n)}\,.$$

Beweis. NATTERER [Nat86] □

Korollar 2.14. *Seien $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$, $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt*

$$\mathcal{R}_\theta f \in H^{\alpha+(n-1)/2}(\,]-r,r[\,)\,.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 2.13 sowie der Definition von $H^\alpha(\Omega_r^n)$ und $\|\cdot\|_{H^\alpha(\Omega_r^n)}$. □

Das letzte Resultat dieses Abschnitts ist eine Formel zur Inversion der Radon-Transformation. Die nachfolgende Definition wird uns dabei behilflich sein.

Definition 2.15 (Riesz-Potential)**.** Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < n$, $\beta := \min\{\alpha, 0\}$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Der für $f \in H^{-\beta}(\Omega_r^n)$ durch

$$(\mathcal{I}^\alpha f)\hat{} := |\cdot|^{-\alpha}\hat{f}$$

definierte Operator $\mathcal{I}^\alpha$ heißt *Riesz-Potential (hinsichtlich α).*

Bemerkung 2.16. a) Nach Definition 2.10 gilt unter den Voraussetzungen von Definition 2.15 offensichtlich $|\cdot|^{-\alpha}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Daher ist $\mathcal{I}^\alpha$ wohldefiniert.

b) Analog zu Bemerkung 2.7 ist die Hintereinanderausführung von Faltung und Riesz-Potential kommutativ.

In [Nat86] zeigt Natterer die nachfolgende Inversion der Radon-Transformation mit Hilfe des Riesz-Potentials.

Satz 2.17 (Inversion der Radon-Transformation)**.** Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $f \in H^{(n-1)/2}(\Omega_r^n)$ gilt

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(\mathcal{R}^r)^* I^{1-n}\mathcal{R}^r f\,. \tag{2.2}$$

Beweis. Natterer [Nat86]. □

2.3 Rekonstruktionsverfahren

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Ansätze untersuchen, um Rekonstruktionsverfahren für die Radon-Transformation herzuleiten.

Da Rekonstruktionsverfahren, die auf der Formel zur Inversion der Radon-Transformation basieren, schon eingehend untersucht wurden, werden wir hierauf nur kurz eingehen. Anschließend werden wir die Approximative Inverse einsetzen, um die Inversion der Radon-Transformation zu regularisieren. Dabei werden wir Invarianzen der Radon-Transformation nutzen, um ein effizientes Rekonstruktionsverfahren zu erhalten. Zum Abschluss dieses Abschnitts werden wir auch ein Verfahren angeben, mit dem die Faltung als regularisierte Eigenschaft berechnet werden kann.

2.3.1 Anwendung der Inversionsformel

Aus der Formel (2.2) zur Inversion der Radon-Transformation ergibt sich direkt ein Rekonstruktionsverfahren. Bezeichne $\check{f} := (f)\check{} := \mathcal{F}^{-1}f$ die inverse Fourier-Transformation von $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann können wir für $r \in \mathbb{R}^+$ und $f \in H^{(n-1)/2}(\Omega_r^n)$ die Inversionsformel (2.2) schreiben als

$$f = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(\mathcal{R}^r)^*(|\cdot|^{1-n}(\mathcal{R}^r f)\hat{})\check{}\,. \tag{2.3}$$

Die Radon-Transformation von f entspricht in der Praxis den gemessenen Projektionsdaten. In (2.3) wird die Fourier-Transformation der gemessenen Daten mit $|\cdot|^{1-n}$ multipliziert. Dies können wir als Faltung interpretieren. Anschließend wird die adjungierte Radon-Transformation und damit gemäß Bemerkung 2.4 eine Rückprojektion ausgeführt. Da man die Faltung auch als Filterung bezeichnet, entspricht die Formel (2.3) einem Rekonstruktionsverfahren vom Typ *gefilterte Rückprojektion*. Eine gefilterte Rückprojektion genügt in der Regel den Anforderungen aus der Praxis an die Geschwindigkeit eines Rekonstruktionsverfahrens.

In [Nat86] zeigt NATTERER eine allgemeinere Form der Inversionsformel (2.2) und gibt verschiedene Rekonstruktionsverfahren an, die sich aus den verschiedenen Spezialfällen der Formel ergeben.

2.3.2 Die Approximative Inverse

Struktur und Eigenschaften der Approximativen Inversen der Radon-Transformation wurden bereits eingehend untersucht, siehe z.B. LOUIS und SCHUSTER [LS96], DIETZ [Die99], RIEDER und SCHUSTER [RS00]. Wie beispielsweise DIETZ in [Die99] werden wir die Inversionsformel (2.2) verwenden, um den Rekonstruktionskern der Radon-Transformation zu bestimmen.

Satz 2.18 (Rekonstruktionskern der Radon-Transformation)**.** *Für $r \in \mathbb{R}^+$ und $e \in H^{(n-1)/2}(\Omega_r^n)$ gilt*

$$\kappa_{\mathcal{R}^r}(e) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n}\mathcal{R}^r e\,.$$

Beweis. Nach Satz 2.17 folgt für $r \in \mathbb{R}^+$ und $e \in H^{(n-1)/2}(\Omega_r^n)$

$$(\mathcal{R}^r)^*\frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}I^{1-n}\mathcal{R}^r e = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(\mathcal{R}^r)^* I^{1-n}\mathcal{R}^r e = e$$

und daher die Behauptung. □

Die Approximative Inverse der Radon-Transformation folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen Satz.

Satz 2.19 (Approximative Inverse der Radon-Transformation)**.** *Seien* $r', r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{R}^r f$ *und* $e \in L^2(\Omega_{r'}^n \times \Omega_r^n)$ *mit* $e(x,\cdot) \in H^{(n-1)/2}(\Omega_r^n)$ *für alle* $x \in \Omega_{r'}^n$. *Dann gilt für fast alle* $x \in \Omega_{r'}^n$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}^r}(e)g(x) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_{S^{n-1}} \int_{]-r,r[} g(\theta,s)\overline{\mathcal{I}^{1-n}\mathcal{R}^r e(x,\cdot)(\theta,s)}\, ds\, d\theta\,.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.3 und Satz 2.18. □

Gehen zwei Abbildungen durch Anwendung geeigneter Operatoren auseinander hervor, dann sind die zugehörigen Rekonstruktionskerne miteinander assoziiert, siehe Satz 1.2. Wir werden als nächstes zeigen, dass aus jedem linearen stetigen Operator zwischen Bildräumen der Radon-Transformation ein weiterer Operator derart konstruiert werden kann, dass die Voraussetzungen von Satz 1.2 erfüllt sind. Dies zeigt der nachfolgende Satz, für dessen Formulierung wir eine Notation zur Darstellung eines Punktes in Polarkoordinaten benötigen: Wir definieren $\mathbb{R}^n_* := \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\rho(x) := \|x\|$$

und

$$\alpha(x) := \begin{cases} \frac{x}{\|x\|} & x \in \mathbb{R}^n_* \\ \theta \in S^{n-1} \text{ beliebig} & x = 0 \end{cases},$$

d.h. es gilt $x = \rho(x)\alpha(x)$.

Satz 2.20 (Konstruktion von Invarianzen)**.** *Seien* $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}^+$, $U_1 := L^2(\Omega^n_{r_1})$, $U_2 := L^2(\Omega^n_{r_2})$, $V_1 := L^2(]-r_1, r_1[)$, $V_2 := L^2(]-r_2, r_2[)$, $x \in \Omega^n_{r_3}$, $\theta \in S^{n-1}$ *und* $\mathcal{T}^1_{x,\theta} \in L(V_1, V_2)$. *Für* $f \in U_1$ *sei* $\mathcal{T}^2_x$ *definiert durch*

$$(\mathcal{T}^2_x f)\hat{} := (\mathcal{T}^1_{x,\alpha(\cdot)}\mathcal{R}^{r_1}_{\alpha(\cdot)} f)\hat{}(\rho(\cdot))\,.$$

Dann gilt

$$\mathcal{T}^2_x \in L(U_1, U_2) \tag{2.4}$$

sowie

$$\mathcal{R}^{r_2}_\theta \mathcal{T}^2_x = \mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta\,. \tag{2.5}$$

Zusatz *Falls für alle* $g \in V_1$

$$(\mathcal{T}^1_{x,\theta} g)\hat{}(0) = \hat{g}(0)$$

gilt, dann folgt für alle $f \in U_1$

$$(\mathcal{T}^2_x f)\hat{}(0) = \hat{f}(0)\,. \tag{2.6}$$

Beweis. Wir beginnen mit dem Beweis von Behauptung (2.4). Für $f \in U_1$ und $x \in \Omega_{r_3}^n$ gilt $\mathcal{T}^1_{x,\alpha(\cdot)}\mathcal{R}^{r_1}_{\alpha(\cdot)} f \in L^2(V_2)$. Daher ist $\mathcal{T}^2_x$ wohldefiniert. Zudem gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{r_2}^n} |\mathcal{T}^2_x f(t)|^2\, dt &= \int_{\Omega_{r_2}^n} |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{T}^2_x f(t)|^2\, dt \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_0^{r_2} \sigma^{n-1} |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{T}^2_x f(\sigma\theta)|^2\, d\sigma\, d\theta \\
&\leq r_2^{n-1} \int_{S^{n-1}} \int_0^{r_2} |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f(\sigma)|^2\, d\sigma\, d\theta \\
&\leq r_2^{n-1} \int_{S^{n-1}} \int_{-r_2}^{r_2} |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f(\sigma)|^2\, d\sigma\, d\theta \\
&= {r_2}^{n-1} \int_{S^{n-1}} \|\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f\|_{L^2(V_2)}\, d\theta\,.
\end{aligned}
$$

Da für $\theta \in S^{n-1}$ die Operatoren $\mathcal{T}^1_{x,\theta}$ und $\mathcal{R}^{r_1}_\theta$ stetig sind, siehe Satz 2.1, ist auch die Hintereinanderausführung $\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta$ stetig. Somit existiert eine Konstante c_θ mit $\|\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f\|_{L^2(V_2)} \leq c_\theta \|f\|_{L^2(U_1)}$. Seien $c := max_{\theta\in S^{n-1}}\{c_\theta\}$ sowie Γ die Γ-Funktion. Da $\int_{S^{n-1}} d\theta = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ gilt, siehe [Nat86], erhalten wir mit $C := 2\pi^{n/2} r_2^{n-1} c/\Gamma(n/2) < \infty$

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{r_2}^n} |\mathcal{T}^2_x f(t)|^2\, dt &\leq r_2^{n-1} \int_{S^{n-1}} \|\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f\|_{L^2(V_2)}\, d\theta \\
&\leq r_2^{n-1} c \int_{S^{n-1}} \|f\|_{L^2(U_1)}\, d\theta \\
&= C\|f\|_{L^2(U_1)}
\end{aligned}
$$

und somit die Stetigkeit von $\mathcal{T}^2_x$. Daher gilt $\mathcal{T}^2_x \in L(U_1, U_2)$.

Aus der Definition von $\mathcal{T}^2_x$ und Satz 2.8 folgt

$$
(\mathcal{R}^{r_2}_\theta \mathcal{T}^2_x f)\hat{} = (\mathcal{T}^2_x f)\hat{}(\cdot\theta) = (\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f)\hat{}
$$

und daher Behauptung (2.5).

Für den Beweis des Zusatzes sei $\theta \in S^{n-1}$ beliebig. Dann folgt

$$
(\mathcal{T}^2_x f)\hat{}(0) = (\mathcal{T}^1_{x,\theta}\mathcal{R}^{r_1}_\theta f)\hat{}(0) = (\mathcal{R}^{r_1}_\theta f)\hat{}(0) = \hat{f}(0)
$$

und somit Behauptung (2.6) des Zusatzes. □

Wir werden nun wie z.B. Louis und Schuster in [LS96] eine Translationsinvarianz nutzen, um zu einem geeigneten Rekonstruktionsverfahren zu gelangen. Dazu gibt der nachfolgende Satz den wohlbekannten Zusammenhang zwischen der Radon-Transformation und der Translation wieder. Dabei werden wir im Beweis auf Satz 2.20 zurückgreifen, um durch Konstruktion eines geeigneten Operators das gewünschte Resultat zu erzielen.

Satz 2.21. *Für $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $x \in \Omega^n_{r'}$ und $\theta \in S^{n-1}$ gilt*

$$\mathcal{T}^{\tilde{r},r}_x (\mathcal{R}^{\tilde{r}}_\theta)^* = (\mathcal{R}^r_\theta)^* \mathcal{T}^{\tilde{r},r}_{\langle x,\theta\rangle} .$$

Beweis. Da die Translation linear und stetig ist, können wir Satz 2.20 anwenden. Unter den Voraussetzungen des Satzes definieren wir $\mathcal{T}^1_{x,\theta} := \mathcal{T}^{r,\tilde{r}}_{\langle x,\theta\rangle}$ und für $f \in L^2(\Omega^n_r)$ den Operator $\mathcal{T}^2_x$ durch $(\mathcal{T}^2_x f)\hat{} := (\mathcal{T}^1_{x,\alpha(\cdot)} \mathcal{R}^r_{\alpha(\cdot)} f)\hat{}(\rho(\cdot))$. Nach Satz 2.20 gilt

$$\mathcal{R}^{\tilde{r}}_\theta \mathcal{T}^2_x = \mathcal{T}^{r,\tilde{r}}_{\langle x,\theta\rangle} \mathcal{R}^r_\theta . \tag{2.7}$$

Aus Lemma 2.6 b) und Satz 2.8 folgt

$$(\mathcal{T}^2_x f)\hat{} = (\mathcal{T}^{r,\tilde{r}}_{\langle x,\alpha(\cdot)\rangle} \mathcal{R}^r_{\alpha(\cdot)} f)\hat{}(\rho(\cdot)) = e^{-i\langle x,\cdot\rangle} (\mathcal{R}^r_{\alpha(\cdot)} f)\hat{}(\rho(\cdot)) = (\mathcal{T}^{r,\tilde{r}}_x f)\hat{} .$$

Bildet man auf beiden Seiten von (2.7) den adjungierten Operator, dann folgt mit $y := -x$ und Bemerkung 1.17 die Behauptung. □

Geht in Satz 2.18 die zweiparametrige Funktion e durch Translation einer einparametrigen Funktion hervor, dann besitzt der zugehörige Rekonstruktionskern die nachfolgende Struktur.

Satz 2.22 (Rekonstruktionskern der Radon-Transformation bei Translationsinvarianz)**.** *Seien $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $\tilde{e} \in H^{(n-1)/2}(\Omega^n_{\tilde{r}})$, $x \in \Omega^n_{r'}$ und $e(x,\cdot) := \mathcal{T}^{\tilde{r},r}_x \tilde{e}$. Dann gilt für fast alle $(\theta, s) \in S^{n-1} \times]-r', r'[$*

$$\kappa_{\mathcal{R}^r}(e(x,\cdot))(\theta,s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n} \mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta} \tilde{e}(\langle x,\theta\rangle - s) .$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt nach Satz 2.21 die Gleichung $\mathcal{T}^{\tilde{r},r}_x (\mathcal{R}^{\tilde{r}}_\theta)^* = (\mathcal{R}^r_\theta)^* \mathcal{T}^{\tilde{r},r}_{\langle x,\theta\rangle}$ sowie nach Satz 1.2 und Bemerkung 2.2 für fast alle $(\theta, s) \in S^{n-1} \times]-r', r'[$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathcal{R}^r}(e(x,\cdot))(\theta,s) &= \mathcal{T}^{\tilde{r},r}_{\langle x,\theta\rangle} \kappa_{\mathcal{R}^{\tilde{r}}_\theta}(\tilde{e})(s) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n} \mathcal{R}^{\tilde{r}}_\theta \tilde{e}(s - \langle x,\theta\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} I^{1-n} \mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta} \tilde{e}(\langle x,\theta\rangle - s) .
\end{aligned}$$

□

Verwendet man den Rekonstruktionskern aus Satz 2.22, dann kann die Approximative Inverse wie im nachfolgendne Satz dargestellt werden.

Satz 2.23 (Approximative Inverse der Radon-Transformation bei Translationsinvarianz)**.** *Seien $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{R}^r f$, $\tilde{e} \in H^{(n-1)/2}(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r'}^n$ und $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r'}^n$*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}^r}(e)g(x) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{C}_{\bar{h}_\theta}^{r,r'} g(\theta,\cdot)(\langle x,\theta\rangle)\, d\theta\,, \tag{2.8}$$

wobei $h_\theta := \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathcal{I}^{1-n}\mathcal{R}_{-\theta}^{\tilde{r}}\tilde{e}$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.3 und Satz 2.22 □

Bemerkung 2.24. In (2.8) werden zunächst die gegebenen Daten gefaltet und anschließend die adjungierte Radon-Transformation angewendet. Daher entspricht Formel (2.8) analog zu (2.3) einem Rekonstruktionsverfahren vom Typ gefilterte Rückprojektion.

2.3.3 Die Faltung als regularisierte Eigenschaft

In [Lou08] wendet Louis die Approximative Inverse für Eigenschaften an, um direkt aus dem Bild der Radon-Transformation einer Funktion f eine Kanteninformation von f zu bestimmen. Wir werden ebenfalls die Approximative Inverse für Eigenschaften der Radon-Transformation untersuchen und hierbei die Faltung als Eigenschaft wählen.

Der nachfolgende Zusammenhang zwischen der Radon-Transformation und der Faltung ist wohlbekannt und ist beispielsweise in Natterer [Nat86] für schnellfallende Funktionen bewiesen. Wir werden den Beweis in unserem Kontext mit Hilfe von Satz 2.20 führen.

Satz 2.25. *Seien $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$ sowie $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt*

$$\mathcal{R}_\theta^{r'}\mathcal{C}_\psi^{r,r'} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'}\mathcal{R}_\theta^r\,.$$

Beweis. Da die Faltung linear und stetig ist, können wir Satz 2.20 anwenden. Unter den Voraussetzungen des Satzes definieren wir $\mathcal{T}_\theta^1 := \mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'}$ und für $f \in L^2(\Omega_r^n)$ den Operator $\mathcal{T}^2$ durch $(\mathcal{T}^2 f)\hat{} := (\mathcal{T}_{\alpha(\cdot)}^1\mathcal{R}_{\alpha(\cdot)}^r f)\hat{}(\rho(\cdot))$. Nach Satz 2.20 gilt $\mathcal{R}_\theta^{r'}\mathcal{T}^2 = \mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'}\mathcal{R}_\theta^r$. Nach Lemma 2.6 b) und Satz 2.8 folgt

$$(\mathcal{T}^2 f)\hat{} = (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_{\alpha(\cdot)}^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'}\mathcal{R}_{\alpha(\cdot)}^r f)\hat{}(\rho(\cdot)) = (\mathcal{R}_{\alpha(\cdot)}^r f)\hat{}(\mathcal{R}_{\alpha(\cdot)}^{\tilde{r}}\psi)\hat{}(\rho(\cdot)) = (\mathcal{C}_\psi^{r,r'} f)\hat{}$$

und somit die Behauptung. □

Bestimmt man also aus der eindimensionalen Faltung den zugehörigen Operator für die Konstruktion assoziierter Rekonstruktionskerne gemäß Satz 2.20, so erhält man die n-dimensionale Faltung. Somit ergibt sich der Rekonstruktionskern der Radon-Transformation für die n-dimensionale Faltung aus dem Rekonstruktionskern der klassischen Approximativen Inversen durch Anwendung der eindimensionalen Faltung. Dies zeigt der nachfolgende Satz.

Satz 2.26 (Rekonstruktionskern der Radon-Transformation für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$)**.** *Seien $\tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $e \in H^{(n-1)/2}(\Omega_{r'}^n)$ und $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$. Dann gilt für fast alle $(\theta, s) \in S^{n-1} \times]-r', r'[$*

$$\kappa_{\mathcal{R}^r}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e)(\theta, s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathcal{I}^{1-n} (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'})^* \mathcal{R}_\theta^{r'} e(s)\,.$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt nach Satz 2.25 die Gleichung $\mathcal{R}_\theta^{r'} \mathcal{C}_\psi^{r,r'} = \mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'} \mathcal{R}_\theta^r$. Somit ergibt sich aus Korollar 1.10 für fast alle $(\theta, s) \in S^{n-1} \times]-r', r'[$

$$\kappa_{\mathcal{R}^r}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e)(\theta, s) = (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'})^* (\kappa_{\mathcal{R}^{r'}}(e)(\theta, \cdot))(s)$$

und mit Hilfe von Satz 2.18 und Bemerkung 2.16 b) schließlich

$$(\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'})^* (\kappa_{\mathcal{R}^{r'}}(e)(\theta, \cdot))(s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \mathcal{I}^{1-n} (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'})^* \mathcal{R}_\theta^{r'} e(s)\,.$$

□

Die Approximative Inverse der Radon-Transformation für die Faltung ergibt sich aus dem vorangegangenen Resultat.

Satz 2.27 (Approximative Inverse der Radon-Transformation für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$)**.** *Seien $\tilde{r}, r, r'' \in \mathbb{R}^+$ mit $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{R}^r f$, $e \in L^2(\Omega_{r''}^n \times \Omega_{r'}^n)$ mit $e(x, \cdot) \in H^{(n-1)/2}(\Omega_{r'}^n)$ für $x \in \Omega_{r''}^n$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$ und $c := \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r''}^n$*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}^r}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'}) g(x) = c \int_{S^{n-1}} \int_{]-r', r'[} g(\theta, s) \overline{\mathcal{I}^{1-n} (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde{r}}\psi}^{r,r'})^* \mathcal{R}_\theta^{r'} (e(x, \cdot))(s)}\, ds\, d\theta\,.$$

Beweis. Ergibt sich unmittelbar aus Definition 1.8 und Satz 2.26. □

Konstruiert man die zweiparametrige Funktion e analog wie in Satz 2.22, dann ergibt sich für den Rekonstruktionskern zur Bestimmung der Faltung die folgende Struktur.

Satz 2.28 (Rekonstruktionskern der Radon-Transformation bei Translationsinvarianz für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$). *Seien $\tilde r, r \in \mathbb{R}^+$ mit $2\tilde{r'} < r$, $r' := r - \tilde r$, $r'' := r' - \tilde r$, $\tilde e \in H^{(n-1)/2}(\Omega_{\tilde r}^n)$, $x \in \Omega_{r''}^n$ und $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde r, r'}\tilde e$. Dann gilt für fast alle $(\theta, s) \in S^{n-1} \times \,]-r', r'[$*

$$\kappa_{\mathcal{R}^r}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e(x,\cdot))(\theta,s) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathcal{I}^{1-n}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{2\tilde{r'},\tilde r})^* \mathcal{R}_{-\theta}^{\tilde r}\tilde e(\langle x,\theta\rangle - s)\,.$$

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes folgt aus den Sätzen 2.26 und 2.21 sowie den Bemerkungen 2.7, 2.2 a) und 2.16 für fast alle $(\theta, s) \in S^{n-1} \times \,]-r', r'[$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathcal{R}^r}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e(x,\cdot))(\theta,s) &= (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{r,r'})^* \kappa_{\mathcal{R}^{r'}}(\mathcal{T}_x^{\tilde r,r'}\tilde e)(\theta,s) \\
&= (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{r,r'})^* \mathcal{T}_{\langle x,\theta\rangle}^{\tilde r,r'} \kappa_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}}(\tilde e)(s) \\
&= \mathcal{T}_{\langle x,\theta\rangle}^{2\tilde{r'},r} (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{2\tilde{r'},\tilde r})^* \kappa_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}}(\tilde e)(s) \\
&= (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{2\tilde{r'},\tilde r})^* \kappa_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}}(\tilde e)(s - \langle x,\theta\rangle) \\
&= (\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{2\tilde{r'},\tilde r})^* \kappa_{\mathcal{R}_{-\theta}^{\tilde r}}(\tilde e)(\langle x,\theta\rangle - s) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathcal{I}^{1-n}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{2\tilde{r'},\tilde r})^* \mathcal{R}_{-\theta}^{\tilde r}\tilde e(\langle x,\theta\rangle - s)\,.
\end{aligned}$$

□

Das Rekonstruktionsverfahren zur direkten Bestimmung der Faltung aus den gegebenen Daten folgt direkt aus dem vorangegangenen Satz.

Satz 2.29 (Approximative Inverse der Radon-Transformation bei Translationsinvarianz für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$). *Seien $\tilde r, r \in \mathbb{R}^+$ mit $2\tilde{r'} < r$, $r' := r - \tilde r$, $r'' := r' - \tilde r$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{R}^r f$, $\tilde e \in H^{(n-1)/2}(\Omega_{\tilde r}^n)$, $x \in \Omega_{r''}^n$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde r,r'}\tilde e$ und $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde r}^n)$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r''}^n$*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{R}^r}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'})g(x) = \int_{S^{n-1}} \mathcal{C}_{\bar h_\theta}^{r,r''} g(\theta,\cdot)(\langle x,\theta\rangle)\, d\theta\,,$$

wobei $h_\theta := \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\mathcal{I}^{1-n}(\mathcal{C}_{\mathcal{R}_\theta^{\tilde r}\psi}^{2\tilde{r'},\tilde r})^* \mathcal{R}_{-\theta}^{\tilde r}\tilde e$.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.8 und Satz 2.28. □

Bemerkung 2.30. a) Das Verfahren zur Rekonstruktion der Faltung der gesuchten Lösung in Korollar 2.29 ist wieder eine gefilterte Rückprojektion.

b) Mit den Bezeichnungen aus Korollar 2.29 gilt für die Darstellung von h_θ im Fourier-Raum

$$\begin{aligned}
\hat{h}_\theta &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}\left(\mathcal{I}^{1-n}\left(\mathcal{C}^{\widetilde{2r'},\tilde{r}}_{\mathcal{R}^{\tilde{r}}_\theta \psi}\right)^{*}\mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta}\tilde{e}\right)^{\wedge} \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}|\cdot|^{n-1}\left(\mathcal{C}^{\tilde{r},\widetilde{2r'}}_{\mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta}\bar{\psi}}\mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta}\tilde{e}\right)^{\wedge} \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}|\cdot|^{n-1}\left(\mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta}\bar{\psi}\right)^{\wedge}\left(\mathcal{R}^{\tilde{r}}_{-\theta}\tilde{e}\right)^{\wedge} \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}|\cdot|^{n-1}\hat{\bar{\psi}}(-\cdot\theta)\hat{\tilde{e}}(-\cdot\theta)\,.
\end{aligned}$$

Da für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ die Gleichung $\hat{\bar{f}} = \bar{\hat{f}}(-\cdot)$ gilt, ergibt sich für die Funktion $\bar{h}_\theta$, mit der die gegebenen Daten vor der Rückprojektion gefiltert werden, im Fourier-Raum

$$\begin{aligned}
\hat{\bar{h}}_\theta &= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}|\cdot|^{n-1}\bar{\hat{\bar{\psi}}}(\cdot\theta)\bar{\hat{\tilde{e}}}(\cdot\theta) \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}|\cdot|^{n-1}\hat{\psi}(-\cdot\theta)\hat{\bar{\tilde{e}}}(-\cdot\theta)\,.
\end{aligned}$$

Sind ψ und $\tilde{e}$ gerade und $\tilde{e}$ zudem reellwertig, dann folgt

$$\hat{\bar{h}}_\theta = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}|\cdot|^{n-1}\hat{\psi}(\cdot\theta)\hat{\tilde{e}}(\cdot\theta)\,.$$

Kapitel 3

Röntgen-Transformation und Rekonstruktion

Die Röntgen-Transformation stellt das mathematische Modell der 2D CT bei Fächerstrahlgeometrie sowie der 3D CT bei Kegelstrahlgeometrie dar. Da bei der Inversion der Röntgen-Transformation die erweiterte Radon-Transformation eine wichtige Rolle spielen wird, werden wir diese im ersten Abschnitt einführen. Im zweiten Abschnitt werden wir die Röntgen-Transformation definieren und ihren Zusammenhang mit der erweiterten Radon-Transformation darstellen. Die Inversion der Röntgen-Transformation werden wir im dritten Abschnitt untersuchen. Im vierten Abschnitt werden wir Rekonstruktionsverfahren für die Röntgen-Transformation entwickeln, wobei wir mit Verfahren beginnen werden, die sich direkt aus der Inversionsformel herleiten lassen. Anschließend werden wir Rekonstruktionsverfahren angeben, die sich aus der Approximativen Inversen und deren Erweiterung für die Faltung als regularisierte Eigenschaft ergeben.

3.1 Die erweiterte Radon-Transformation

In diesem Abschnitt werden wird die erweiterte Radon-Transformation analog zu Natterer in [Nat86] einführen und einige ihrer Eigenschaften wiedergeben bzw. herleiten.

Definition 3.1 (Erweiterte Radon-Transformation)**.** Seien $r \in \mathbb{R}^+$ und $f \in L^2(\Omega_r^n)$. Den durch

$$\widetilde{\mathcal{R}}^r f(y,t) := \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(t) := \int_{\Omega_r^n} f(x)\delta(\langle x, y\rangle - t)\, dx\,, \quad (y,t) \in \mathbb{R}_*^n \times \mathbb{R}\,,$$

definierten Operator $\widetilde{\mathcal{R}}^r$ bezeichnen wir als *erweiterte Radon-Transformation (hinsichtlich r).*

Bemerkung 3.2. a) Offensichtlich gilt für $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$ und $\theta \in S^{n-1}$

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\theta^r f = \mathcal{R}_\theta^r f \,.$$

b) Analog zur klassischen Radon-Transformation wirken Operatoren, die für einparametrige Funktionen definiert sind und auf das zweiparametrige Bild der erweiterten Radon-Transformation angewendet werden, stets auf den zweiten Parameter.

Natterer zeigt in [Nat86] die Homogenität der erweiterten Radon-Transformation vom Grad -1. Dieses Resultat geben wir im nachfolgenden Lemma wieder.

Lemma 3.3 (Homogenität der erweiterten Radon-Transformation)**.** *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt*

$$\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\rho\cdot) = \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_\theta^r f \,.$$

Beweis. (Natterer [Nat86]) Aus der Homogenität der Delta-Distribution vom Grad -1 folgt für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\rho t) &= \int_{\Omega_r^n} f(x)\delta(\langle x, \rho\theta\rangle - \rho t)\,dx \\ &= \rho^{-1}\int_{\Omega_r^n} f(x)\delta(\langle x, \theta\rangle - t)\,dx \\ &= \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_\theta^r f(t)\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Als nächstes werden wir den Bildraum der erweiterten Radon-Transformation bei festem ersten Parameter angeben.

Lemma 3.4. *Für $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$ und $y \in \mathbb{R}_*^n$ gilt*

$$\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f \in L^2(\mathbb{R}) \,.$$

Beweis. Aus Lemma 3.3 und Satz 2.1 folgt mit $\theta := y/\|y\| \in S^{n-1}$ und der Substitution $u = \|y\|^{-1}t$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f(t)|^2\,dt &\overset{3.3}{=} \|y\|^{-1}\int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\mathcal{R}}^r_\theta f(\|y\|^{-1}t)|^2\,dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\widetilde{\mathcal{R}}^r_\theta f(u)|^2\,du \\
&= \int_{-r}^{r} |\mathcal{R}^r_\theta f(u)|^2\,du \\
&= \|\mathcal{R}^r_\theta f\|_{L^2(]-r,r[)} \overset{2.1}{<} \infty
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Da nach Lemma 3.4 die Fourier-Transformation der erweiterten Radon-Transformation wohldefiniert ist, können wir im Fourier-Raum den nachfolgenden Zusammenhang zwischen der klassischen und der erweiterten Radon-Transformation herstellen.

Lemma 3.5. *Für $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega^n_r)$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in S^{n-1}$ gilt*

$$(\widetilde{\mathcal{R}}^r_{\rho\theta} f)\hat{} = (\mathcal{R}^r_\theta f)\hat{}(\rho\cdot)\,.$$

Beweis. Mit Lemma 3.3 und der Substitution $u = \rho^{-1}s$ gilt für fast alle $\sigma \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\mathcal{R}}^r_{\rho\theta} f)\hat{}(\sigma) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\mathcal{R}}^r_{\rho\theta} f(s) e^{-is\sigma}\,ds \\
&\overset{3.3}{=} (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}^r_\theta f(\rho^{-1}s)\, e^{-is\sigma}\,ds \\
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}^r_\theta f(u)\, e^{-i\rho u\sigma}\rho\,du \\
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{\mathcal{R}}^r_\theta f(u)\, e^{-iu\rho\sigma}\,du \\
&= (2\pi)^{-1/2}\int_{-r}^{r} \mathcal{R}^r_\theta f(u)\, e^{-iu\rho\sigma}\,du \\
&= (\mathcal{R}^r_\theta f)\hat{}(\rho\sigma)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Mit Hilfe des Projektionssatzes für die klassische Radon-Transformation können wir nun einen analogen Projektionssatz für die erweiterte Radon-Transformation formulieren.

Satz 3.6 (Projektionssatz für die erweiterte Radon-Transformation). *Für $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$ und $y \in \mathbb{R}_*^n$ gilt*

$$(\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f)\hat{\ } = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\cdot y)\,.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Satzes folgt mit Lemma 3.5, Satz 2.8 und $\theta := y/\|y\| \in S^{n-1}$

$$(\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f)\hat{\ } \overset{3.5}{=} (\mathcal{R}_\theta^r f)\hat{\ }(\|y\|\cdot) \overset{2.8}{=} (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\cdot\|y\|\theta) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\cdot y)\,.$$

□

Da wir auch bei der Herleitung einer Inversionsformel auf Ergebnisse der klassischen Radon-Transformation zurückgreifen wollen, werden wir als nächstes zeigen, dass die Anwendung des Riesz-Potentials auf die erweiterte Radon-Transformation wohldefiniert ist.

Lemma 3.7. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq \beta - (n-1)/2 \geq 0$. Zudem seien $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$ und $y \in \mathbb{R}_*^n$. Dann gilt*

$$\mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f \in L^2(\mathbb{R})\,.$$

Beweis. Aus den Voraussetzungen des Lemmas folgt mittels Korollar 2.14 $|\cdot|^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f} \in L^2(\mathbb{R})$. Nach Lemma 3.5 gilt mit $\rho := \|y\|$ und der Substitution $u = \rho^{-1}\sigma$

$$\begin{aligned} \rho^{-(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}} |\,|\sigma|^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f}(\sigma)|^2 \, d\sigma &= \rho^{-(\beta+1)} \int_{\mathbb{R}} |\,|\rho u|^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f}(\rho u)|^2 \rho \, du \\ &\overset{3.5}{=} \int_{\mathbb{R}} |\,|u|^\beta (\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f)\hat{\ }(u)|^2 \, du. \end{aligned}$$

Daher gilt $(\mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f)\hat{\ } \in L^2(\mathbb{R})$ und somit auch $\mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f \in L^2(\mathbb{R})$. □

Analog zur klassischen Radon-Transformation ergibt auch die erweiterte Radon-Transformation eine in beiden Variablen gerade Funktion, siehe Bemerkung 2.2 a). Wendet man das Riesz-Potential auf die erweiterte Radon-Transformation an, so bleibt diese Eigenschaft erhalten.

Lemma 3.8. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq \beta - (n-1)/2 \geq 0$. Zudem seien $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$ und $y \in \mathbb{R}_*^n$. Dann gilt für fast alle $s \in \mathbb{R}$*

$$\mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_{(-y)}^r f(-s) = \mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\,.$$

Beweis. Für $y \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r e(s) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |t|^\beta (\widetilde{\mathcal{R}}_y^r e)\hat{\ }(t)e^{its}\,dt = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |t|^\beta \hat{e}(ty)e^{its}\,dt \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |t|^\beta \hat{e}((-t)y)e^{i(-t)s}\,dt = \mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_{(-y)}^r e(-s)\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Führt man die erweiterte Radon-Transformation und das Riesz-Potential hintereinander aus, so ergibt sich wieder eine homogene Funktion, wobei der Grad der Homogenität vom Exponenten des Riesz-Potentials abhängt. Dies zeigt das nachfolgende Lemma.

Lemma 3.9. *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \geq \beta - (n-1)/2 \geq 0$. Zudem seien $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt*

$$\mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\rho\cdot) = \rho^{-(\beta+1)}\mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_\theta^r f\,.$$

Beweis. Mit Lemma 3.5 und der Substitution $u = \rho\sigma$ folgt für fast alle $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\rho s) &= \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(\mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\cdot))(\rho s) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(|\cdot|^\beta(\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f)\hat{\ })(\rho s) \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |\sigma|^\beta(\widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f)\hat{\ }(\sigma)e^{i\langle\sigma,\rho s\rangle}\,d\sigma \\ &\overset{3.5}{=} (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |\sigma|^\beta(\widetilde{\mathcal{R}}_{\theta}^r f)\hat{\ }(\rho\sigma)e^{i\langle\sigma,\rho s\rangle}\,d\sigma \\ &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |\frac{u}{\rho}|^\beta(\widetilde{\mathcal{R}}_{\theta}^r f)\hat{\ }(u)e^{i\langle u,s\rangle}\frac{1}{\rho}\,du \\ &= \frac{1}{\rho^{\beta+1}}(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} |u|^\beta(\widetilde{\mathcal{R}}_{\theta}^r f)\hat{\ }(u)e^{i\langle u,s\rangle}\,du \\ &= \frac{1}{\rho^{\beta+1}}\mathcal{I}^{-\beta}\widetilde{\mathcal{R}}_\theta^r f(s)\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Als letztes Resultat dieses Abschnitts werden wir eine Inversionsformel für die erweiterte Radon-Transformation angeben.

Satz 3.10 (Inversion der erweiterten Radon-Transformation)**.** *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^{(n-1)/2}(\Omega_r^n)$, $\omega \in S^{n-1}$ beliebig und $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ rotationssymmetrisch mit $(\cdot)^{-1}g(\cdot\omega) \in L^1(\mathbb{R})$ und $c_g := \int_0^\infty \rho^{-1}g(\rho\omega)\,d\rho \neq 0$. Dann gilt*

$$f = \frac{1}{2c_g}(2\pi)^{1-n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle\cdot, y\rangle)g(y)\,dy\,.$$

Beweis. Die Voraussetzungen an g wurden gerade so gewählt, dass c_g wohldefiniert ist. Für $\omega \in S^{n-1}$ beliebig folgt aus Satz 2.17, Lemma 3.9 und der Substitution $y = \rho\theta$

$$\begin{aligned}
c_g f &\overset{2.17}{=} \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_0^\infty \rho^{-1} g(\rho\omega)\, d\rho \int_{S^{n-1}} \mathcal{I}^{1-n} \mathcal{R}_\theta^r f(\langle \cdot, \theta \rangle)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_0^\infty \rho^{n-1} \rho^{-n} g(\rho\omega) \int_{S^{n-1}} \mathcal{I}^{1-n} \mathcal{R}_\theta^r f(\langle \cdot, \theta \rangle)\, d\theta\, d\rho \\
&\overset{3.9}{=} \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_0^\infty \rho^{n-1} g(\rho\omega) \int_{S^{n-1}} \mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\langle \cdot, \rho\theta \rangle)\, d\theta\, d\rho \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_0^\infty \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} \mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta}^r f(\langle \cdot, \rho\theta \rangle) g(\rho\theta)\, d\theta\, d\rho \\
&= \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle \cdot, y \rangle) g(y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

□

Fortan werden wir den Raum der schnellfallenden Funktionen auf einer geeigneten Menge M mit $S(M)$ bezeichnen.

Bemerkung 3.11. Die erweiterte Radon-Transformation ist auch für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, siehe NATTERER [Nat86]. In diesem Fall wählen wir die Bezeichnung $\widetilde{\mathcal{R}}$ anstatt $\widetilde{\mathcal{R}}^r$. Insbesondere gelten auch die analogen Ergebnisse zu Lemma 3.8 und Lemma 3.9, d.h. für $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$, $y \in \mathbb{R}_*^n$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_{(-y)} f(-s) = \mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_y f(s)$$

sowie für $\rho \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in S^{n-1}$

$$\mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_{\rho\theta} f(\rho s) = \rho^{-(\beta+1)} \mathcal{I}^{-\beta} \widetilde{\mathcal{R}}_\theta f(s)\,.$$

3.2 Die Röntgen-Transformation

In diesem Abschnitt werden wir die Röntgen-Transformation einführen und ihren Zusammenhang mit der erweiterten Radon-Transformation darstellen.

Satz und Definition 3.12 (Röntgen-Transformation)**.** Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in S^{n-1}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ seien

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^k f(a, \theta) &:= \mathcal{D}_a^k f(\theta) := \int_0^\infty \rho^k f(a + \rho\theta)\, d\rho\,, \\
\mathcal{D} f(a, \theta) &:= \mathcal{D}_a f(\theta) := \mathcal{D}_a^0 f(\theta)\,.
\end{aligned}$$

Der Operator $\mathcal{D}$ heißt *Röntgen-Transformation.* Den Operator $\mathcal{D}^k$ bezeichnen wir als *verallgemeinerte Röntgen-Transformation (hinsichtlich k).* Zudem definieren wir die abkürzenden Schreibweisen

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^k f(a,\theta) &:= \mathcal{G}_a^k f(\theta) := \mathcal{D}_a^k f(\theta) + \mathcal{D}_a^k f(-\theta)\,,\\ \mathcal{G} f(a,\theta) &:= \mathcal{G}_a f(\theta) := \mathcal{D}_a f(\theta) + \mathcal{D}_a f(-\theta)\,.\end{aligned}$$

Im nachfolgenden Lemma werden wir Räume angeben, in denen die Bilder der klassischen und der verallgemeinerten Röntgen-Transformation liegen.

Lemma 3.13. *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\mathcal{D}f(a,\cdot) \in L^\infty(S^{n-1}) \tag{3.1}$$

sowie für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$

$$\mathcal{D}^k f(a,\cdot) \in L^1(S^{n-1})\,. \tag{3.2}$$

Beweis. Die Behauptung (3.1) folgt direkt aus der Definition der Röntgen-Transformation.

Aus $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ folgt $f(a+\cdot) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt $-(n-1) \le k-n+1 \le 0$. Mit der Substitution $y = \rho\theta$ folgt daher

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} |\mathcal{D}_a^k f(\theta)|\,d\theta &= \int_{S^{n-1}} \Big|\int_0^\infty \rho^k f(a+\rho\theta)\,d\rho\Big|\,d\theta\\ &\le \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \rho^k |f(a+\rho\theta)|\,d\rho\,d\theta\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^{k-n+1} |f(a+y)|\,dy < \infty\end{aligned}$$

und somit Behauptung (3.2). □

Der Zusammenhang zwischen der Röntgen- und der Radon-Transformation wurde bereits eingehend untersucht, siehe Hamaker, Smith, Solmon und Wagner [HSSW80], Smith [Smi85], Gel'fand und Goncharov [GG87], Grangeat [Gra91] und Palamodov [Pal91].

Hamaker, Smith, Solmon und Wagner zeigen in [HSSW80] u.a. das nachfolgende Ergebnis, wobei wir hier die Formulierung von Natterer und Wübbeling aus [NW01] wählen: Seien die Funktionen f und h geeignet gewählt sowie h homogen vom Grad $1-n$. Dann gilt für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\omega \in S^{n-1}$

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta) h(\langle\omega,\theta\rangle)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_\omega f(s) h(s - \langle a,\omega\rangle)\,ds\,. \tag{3.3}$$

Natterer und Wübbeling zeigen in [NW01], dass sich bei geeigneter Wahl der Funktion h in (3.3) die Resultate von Smith [Smi85], Gel'fand und Goncharov [GG87] sowie Grangeat [Gra91] ergeben.

Anstatt einen Zusammenhang zwischen der Röntgen- und der Radon-Transformation zu nutzen, werden wir einen Zusammenhang zwischen der Röntgen- und der erweiterten Radon-Transformation herleiten. Dazu werden wir jedoch nicht Gleichung (3.3) verwenden, sondern auf das nachfolgende Resultat zurückgreifen, welches ebenfalls aus der Arbeit [HSSW80] von Hamaker, Smith, Solmon und Wagner stammt. Wir geben hier auch den Beweis aus [HSSW80] wieder.

Satz 3.14. *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^\infty(S^{n-1})$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$, $\tilde{h} := \|\cdot\|^{k+1-n} h(\cdot/\|\cdot\|)$ die homogene Erweiterung von h auf $\mathbb{R}^n_*$ vom Grad $k+1-n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a^k f(\theta) h(\theta)\, d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{h}(x-a)\, dx\,. \tag{3.4}$$

Beweis. Wegen $\mathcal{D}_a^k f \in L^1(S^{n-1})$, siehe Lemma 3.13, und $h \in L^\infty(S^{n-1})$ ist die linke Seite von (3.4) wohldefiniert. Zudem folgt aus der Homogenität von $\tilde{h}$ vom Grad $k+1-n$ und den Substitutionen $u = \rho\theta$ und $x = a + u$ (Hamaker et al [HSSW80])

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a^k f(\theta) h(\theta)\, d\theta &= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \rho^k f(a+\rho\theta)\, d\rho\, h(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty \rho^k f(a+\rho\theta) h(\theta)\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty f(a+\rho\theta) \rho^{n-1} \tilde{h}(\rho\theta)\, d\rho\, d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(a+u) \tilde{h}(u)\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \tilde{h}(x-a)\, dx
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Bemerkung 3.15. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.14 folgt aus (3.4) unmittelbar

$$(\mathcal{D}_a^k)^* h = \tilde{h}(\cdot - a)\,.$$

Bevor wir mit Hilfe von Satz 3.14 das Hauptresultat dieses Abschnitts zeigen, benötigen wir noch die nachfolgenden Hilfsresultate.

Lemma 3.16. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha > \beta + n/2$ und $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$. Dann gilt*

$$(\cdot)^\beta \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}) .$$

Beweis. Werner [Wer05] □

Korollar 3.17. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha > \beta + 1/2$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt*

$$(\cdot)^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f} \in L^1(\mathbb{R}) .$$

Beweis. Folgt mit Korollar 2.14 unmittelbar aus Lemma 3.16. □

Lemma 3.18. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha > \beta + 1/2$ und $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{I}^{-\beta} \mathcal{R}_{(\cdot)}^r f(\langle x, \cdot \rangle) \in L^\infty(S^{n-1}) .$$

Beweis. Für $\theta \in S^{n-1}$ gilt nach Korollar 3.17 $(\cdot)^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f} \in L^1(\mathbb{R})$. Daraus folgt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und fast alle $\theta \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^{-\beta} \mathcal{R}_\theta^r f(\langle x, \theta \rangle)| &= |(2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |t|^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f}(t) e^{it\langle x, \theta \rangle} \, dt| \\ &\leq (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} |t^\beta \widehat{\mathcal{R}_\theta^r f}(t)| \, dt < \infty \end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Bemerkung 3.19. Sei $f \in S(\mathbb{R}^n)$, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ und $\mathcal{R}$ die Radon-Transformation als Abbildung von $S(\mathbb{R}^n)$ nach $S(S^{n-1} \times \mathbb{R})$, siehe Natterer [Nat86]. Dann gilt analog zu Lemma 3.18

$$\mathcal{I}^{-\beta} \mathcal{R}_{(\cdot)} f(\langle x, \cdot \rangle) \in L^\infty(S^{n-1}) .$$

Bemerkung 3.20. Gemäß Bemerkung 1.4 c) gilt für $r \in \mathbb{R}^+$

$$L^2(\Omega_r^n) \subset L^1(\Omega_r^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) .$$

Somit ist die Röntgen-Transformation auch für Funktionen aus $L^2(\Omega_r^n)$ wohldefiniert.

Der nachfolgende Zusammenhang zwischen der Röntgen- und der erweiterten Radon-Transformation stellt das Hauptresultat dieses Abschnitts dar.

Satz 3.21. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \geq \max\{0; (n-3)/2\}$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > n - 3/2$, $\varphi \in H^\beta(\Omega_r^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta) \mathcal{I}^{2-n} \mathcal{R}_\theta^r \varphi(0) \, d\theta = \int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y \rangle) \varphi(y) \, dy .$$

Beweis. Nach Lemma 3.18 gilt $h := \mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}^r_{(\cdot)}\varphi(0) \in L^\infty(S^{n-1})$ und nach Lemma 3.9 ist $\tilde{h} := \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}^r_{(\cdot)}\varphi(0)$ die homogene Erweiterung von h auf $\mathbb{R}^n_*$ vom Grad $1-n$. Somit folgt aus Satz 3.14

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}^r_\theta\varphi(0)\,d\theta = \int_{\Omega^n_r} f(x)\mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}^r_{x-a}\varphi(0)\,dx\,.$$

Nach Lemma 3.7 ist $\mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f$ wohldefiniert und mit $c := (2\pi)^{-1/2}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^n_r} f(x)\mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}^r_{x-a}\varphi(0)\,dx = c\int_{\Omega^n_r} f(x)\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}(\widetilde{\mathcal{R}}^r_{x-a}\varphi)\hat{}(\sigma)\,d\sigma\,dx\\
&= c^2\int_{\Omega^n_r} f(x)\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\mathcal{R}}^r_{x-a}\varphi(s)e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\,dx\\
&= c^2\int_{\Omega^n_r} f(x)\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\delta(s-\langle x-a,y\rangle)\,dy\,e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\,dx\\
&= c^2\int_{\Omega^n_r} f(x)\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^n_r}\varphi(y)\delta(s-(\langle x,y\rangle-\langle a,y\rangle))\,dy\,e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\,dx\\
&= c^2\int_{\Omega^n_r} f(x)\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^n_r}\varphi(y)\delta(\langle a,y\rangle+s-\langle x,y\rangle)\,dy\,e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\,dx\\
&= c^2\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^n_r}\varphi(y)\int_{\Omega^n_r} f(x)\delta(\langle a,y\rangle+s-\langle x,y\rangle)\,dx\,dy\,e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\\
&= c^2\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\Omega^n_r}\varphi(y)\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f(\langle a,y\rangle+s)\,dy\,e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\\
&= c^2\int_{\Omega^n_r}\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}\int_{\mathbb{R}}\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f(\langle a,y\rangle+s)e^{-is\sigma}\,ds\,d\sigma\,\varphi(y)\,dy\\
&= c\int_{\Omega^n_r}\int_{\mathbb{R}}|\sigma|^{n-2}(\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f)\hat{}(\sigma)e^{i\sigma\langle a,y\rangle}\,d\sigma\,\varphi(y)\,dy\\
&= \int_{\Omega^n_r}\mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f(\langle a,y\rangle)\varphi(y)\,dy
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Als nächstes werden wir zeigen, dass sich die Formel von Grangeat [Gra91] mittels Satz 3.21 darstellen lässt. Dazu bezeichnen wir für $k \in \mathbb{N}$ die k-te eindimensionale schwache Ableitung mit $D_1^{(k)}$.

Korollar 3.22. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \geq \max\{0;(n-3)/2\}$, $f \in H^\alpha(\Omega^n_r)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > n-3/2$, $\varphi \in H^\beta(\Omega^n_r)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega^n_r} D_1^{(n-2)}\widetilde{\mathcal{R}}^r_y f(\langle a,y\rangle)\varphi(y)\,dy = \int_{S^{n-1}}\mathcal{D}_a f(\theta)D_1^{(n-2)}\mathcal{R}^r_\theta\varphi(0)\,d\theta\,.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}^+$ und $f \in H^k(\,]-r,r[\,)$ gilt $(D_1^{(k)} f)\hat{} = i^k(\cdot)^k \hat{f}$, siehe Werner [Wer05]. Damit folgt der Beweis analog zum Beweis von Satz 3.21. □

Korollar 3.23. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \geq \max\{0; (n-3)/2\}$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$, $k \in \mathbb{N}$ mit $k > n - 3/2$, $\varphi \in C^k(\Omega_r^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega_r^n} D_1^{(n-2)} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y\rangle)\varphi(y)\,dy = \int_{\Omega_r^n} (-1)^{n-2} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\delta^{(n-2)}(\langle y,\theta\rangle)\,d\theta\varphi(y)\,dy\,. \qquad (3.5)$$

Beweis. Gemäß Natterer [Nat86] schreiben wir zunächst

$$D_1^{(n-2)}\mathcal{R}_\theta^r\varphi(0) = \int_{\Omega_r^n} \varphi(y)\delta^{(n-2)}(-\langle y,\theta\rangle)\,dy.$$

Da die Delta-Distribution gerade ist, gilt für die $(n-2)$-te Ableitung der Delta-Distribution $\delta^{(n-2)}(-\cdot) = (-1)^{n-2}\delta^{(n-2)}$ und somit

$$D_1^{(n-2)}\mathcal{R}_\theta^r\varphi(0) = (-1)^{n-2} \int_{\Omega_r^n} \varphi(y)\delta^{(n-2)}(\langle y,\theta\rangle)\,dy\,.$$

Mit Korollar 3.22 folgt schließlich

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_r^n} D_1^{(n-2)} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y\rangle)\varphi(y)\,dy &= \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta) D_1^{(n-2)}\mathcal{R}_\theta^r\varphi(0)\,d\theta \\ &= \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)(-1)^{n-2}\int_{\Omega_r^n}\varphi(y)\delta^{(n-2)}(\langle y,\theta\rangle)\,dy\,d\theta \\ &= \int_{\Omega_r^n} (-1)^{n-2}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\delta^{(n-2)}(\langle y,\theta\rangle)\,d\theta\varphi(y)\,dy\,.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.24. Sei in der Situation von Korollar 3.23 $r \geq 1$. Da für alle $\varphi \in C^k(\Omega_r^n)$ die Gleichung (3.5) gilt, folgt für fast alle $y \in \Omega_r^n$

$$D_1^{(n-2)}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y\rangle) = (-1)^{n-2}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\delta^{(n-2)}(\langle y,\theta\rangle)\,d\theta\,.$$

Da für $\omega \in S^{n-1}$ die Gleichung $\widetilde{\mathcal{R}}_\omega^r f = \mathcal{R}_\omega^r f$ gilt, folgt für fast alle $\omega \in S^{n-1}$

$$D_1^{(n-2)}\mathcal{R}_\omega^r f(\langle a, \omega\rangle) = (-1)^{n-2}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\delta^{(n-2)}(\langle \omega,\theta\rangle)\,d\theta$$

und insbesondere für $n = 3$

$$D_1^{(1)}\mathcal{R}_\omega^r f(\langle a,\omega\rangle) = -\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\delta'(\langle\omega,\theta\rangle)\, d\theta\,.$$

Dies ist die Formel von Grangeat [Gra91].

Zum Abschluss werden wir den Zusammenhang zwischen Satz 3.21 und der Formel von Smith [Smi85] untersuchen. Dazu benötigen wir zunächst den folgenden Satz.

Satz 3.25. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > n - 3/2$, $\varphi \in H^\beta(\Omega_r^n)$, $h \in L^\infty(S^{n-1})$ und $\tilde{h} := \|\cdot\|^{-1}h(\cdot/\|\cdot\|)$ die homogene Erweiterung von h auf $\mathbb{R}_*^n$ vom Grad -1. Dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} h(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi(0)\, d\theta = (2\pi)^{(n-2)/2}\int_{\mathbb{R}^n}(\tilde{h}(y)+\tilde{h}(-y))\hat{\varphi}(y)\, dy\,. \tag{3.6}$$

Beweis. Nach Lemma 3.18 gilt $\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_{(\cdot)}^r\varphi(0) \in L^\infty(S^{n-1})$. Somit ist die linke Seite von Gleichung (3.6) wohldefiniert. Zudem folgt mit Hilfe von Satz 2.8

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^{-(n-2)/2}\int_{S^{n-1}} h(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi(0)\, d\theta \\
&\quad= (2\pi)^{-(n-1)/2}\int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_{\mathbb{R}}|t|^{n-2}\widehat{\mathcal{R}_\theta^r\varphi}(t)\, dt\, d\theta \\
&\quad\overset{2.8}{=} \int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_0^\infty |t|^{n-2}\hat{\varphi}(t\theta)\, dt\, d\theta + \int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_{-\infty}^0 |t|^{n-2}\hat{\varphi}(t\theta)\, dt\, d\theta \\
&\quad= \int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\varphi}(t\theta)\, dt\, d\theta + \int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\varphi}(-t\theta)\, dt\, d\theta\,.
\end{aligned}$$

Da h homogen vom Grad -1 ist, folgt mit der Substitution $y = t\theta$

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\varphi}(t\theta)\, dt\, d\theta &= \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty t^{n-2}h(\theta)\hat{\varphi}(t\theta)\, dt\, d\theta \\
&= \int_{S^{n-1}}\int_0^\infty t^{n-1}\tilde{h}(t\theta)\hat{\varphi}(t\theta)\, dt\, d\theta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{h}(y)\hat{\varphi}(y)\, dy
\end{aligned}$$

und daher auch

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} h(\theta)\int_0^\infty t^{n-2}\hat{\varphi}(-t\theta)\, dt\, d\theta &= \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{h}(y)\hat{\varphi}(-y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\tilde{h}(-y)\hat{\varphi}(y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^{-(n-2)/2} \int_{S^{n-1}} h(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi(0)\,d\theta &= \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(y)\hat{\varphi}(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{h}(-y)\hat{\varphi}(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{h}(y) + \tilde{h}(-y))\hat{\varphi}(y)\,dy
\end{aligned}
$$

und daher die Behauptung. □

Analog zur Radon-Transformation werden wir auch die Röntgen-Transformation in derjenigen Variablen, welche die Integrationsrichtung parametriert, von S^{n-1} nach $\mathbb{R}^n_*$ erweitern.

Definition 3.26 (Erweiterte Röntgen-Transformation)**.** Für $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{R}^n_*$ sei

$$
\widetilde{\mathcal{D}}f(a,y) := \widetilde{\mathcal{D}}_a f(y) := \int\limits_0^\infty f(a+ty)\,dt\,.
$$

Der Operator $\widetilde{\mathcal{D}}$ heißt *erweiterte Röntgen-Transformation*. Zudem definieren wir die abkürzende Schreibweise

$$
\widetilde{\mathcal{G}}f(a,y) := \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y) := \widetilde{\mathcal{D}}_a f(y) + \widetilde{\mathcal{D}}_a f(-y)\,.
$$

Die erweiterte Röntgen-Transformation ist homogen vom Grad -1, siehe Natterer und Wübbeling [NW01].

Lemma 3.27 (Homogenität der erweiterten Röntgen-Transformation)**.** *Sei $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt*

$$
\widetilde{\mathcal{D}}_a f(\rho\theta) = \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_a f(\theta)\,.
$$

Beweis. (Natterer und Wübbeling [NW01]) Mit der Substitution $u = t\rho$ folgt

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{D}}_a f(\rho\theta) &= \int_0^\infty f(a+t\rho\theta)\,dt \\
&= \rho^{-1}\int_0^\infty f(a+u\theta)\,du \\
&= \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{D}}_a f(\theta)\,.
\end{aligned}
$$

□

Da die erweiterte Röngen-Transformation homogen vom Grad -1 ist, können wir das nachfolgende Korollar zu Satz 3.25 angeben.

Korollar 3.28. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > n - 3/2$, $\varphi \in H^\beta(\Omega_r^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta) \mathcal{I}^{2-n} \mathcal{R}_\theta^r \varphi(0)\, d\theta = (2\pi)^{(n-2)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y) \hat{\varphi}(y)\, dy\,.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 3.25 und Lemma 3.27. □

Aus Satz 3.21 und Korollar 3.28 ergibt sich der nachfolgende Zusammenhang zwischen der erweiterten Radon- und der erweiterten Röntgen-Transformation.

Satz 3.29. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \geq \max\{0; (n-3)/2\}$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$, $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > n - 3/2$, $\varphi \in H^\beta(\Omega_r^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y\rangle) \varphi(y)\, dy = (2\pi)^{(n-2)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y) \hat{\varphi}(y)\, dy\,.$$

Beweis. Aus Satz 3.21 und Korollar 3.28 folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y\rangle) \varphi(y)\, dy &\overset{3.21}{=} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta) \mathcal{I}^{2-n} \mathcal{R}_\theta^r \varphi(0)\, d\theta \\ &\overset{3.28}{=} (2\pi)^{(n-2)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y) \hat{\varphi}(y)\, dy\,. \end{aligned}$$

□

Um aus dem vorangegangenen Satz letztlich ein Resultat für Distributionen zu erhalten, verwenden wir im nachfolgenden Korollar anstatt eines Sobolev-Raums den Raum der schnellfallenden Funktionen .

Korollar 3.30. *Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\alpha \geq \max\{0; (n-3)/2\}$, $f \in H^\alpha(\Omega_r^n)$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}^{2-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a, y\rangle) \varphi(y)\, dy = (2\pi)^{(n-2)/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y) \hat{\varphi}(y)\, dy\,. \tag{3.7}$$

Beweis. Sei $\mathcal{R}$ die Radon-Transformation als Abbildung von $S(\mathbb{R}^n)$ nach $S(S^{n-1} \times \mathbb{R})$, siehe Natterer [Nat86]. Wählen wir in der Situation von Satz 3.21 bzw. Korollar 3.28 $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ anstatt $\varphi \in H^\alpha(\Omega_r^n)$, dann sind die entsprechenden Integrale weiterhin wohldefiniert. Wir erhalten analog zu Satz 3.21

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle a,y\rangle)\varphi(y)\,dy = \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta\varphi(0)\,d\theta$$

und analog zu Korollar 3.28

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_a f(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta\varphi(0)\,d\theta = (2\pi)^{(n-2)/2}\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y)\hat{\varphi}(y)\,dy$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 3.31. Für $r \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$ und $a, y \in \mathbb{R}^n$ definiert Smith in [Smi85] die erweiterte Röntgen-Transformation $\mathcal{D}^{\text{Smith}}$ durch

$$\mathcal{D}^{\text{Smith}} f(a,y) := \int_{\mathbb{R}} f(a+ty)\,dt = \widetilde{\mathcal{D}}_a f(y) + \widetilde{\mathcal{D}}_a f(-y) = \widetilde{\mathcal{G}}_a f(y)\,.$$

Wir können nun die linke Seite von (3.7) als temperierte Distribution und die rechte Seite von (3.7) als Fourier-Transformation von $\widetilde{\mathcal{G}}_a f$ im distributiven Sinn betrachten, jeweils ausgewertet mittels der Testfunktion $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Somit gilt im distributiven Sinn

$$\mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}^r f(\langle a,\cdot\rangle) = \mathcal{F}\widetilde{\mathcal{G}}_a f\,. \tag{3.8}$$

Im Fall $n = 3$ können wir (3.8) mit der Formel von Smith [Smi85] identifizieren.

3.3 Die Inversion der Röntgen-Transformation

In diesem Abschnitt werden wir die Inversion der Röntgen-Transformation untersuchen. Dazu führen wir zunächst die Röntgen-Transformation als Abbildung hinsichtlich eines geeigneten Weges ein.

Fortan sei $\Lambda \subset \mathbb{R}$ stets ein abgeschlossenes Intervall. Die zu einem Weg $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^n$ gehörige Kurve bezeichnen wir mit

$$\Gamma_\phi := \{\phi(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \mathbb{R}^n\,.$$

Die Menge aller Wege in $\mathbb{R}^n$, deren Bilder außerhalb der offenen n-dimensionalen Kugel mit Radius $r \in \mathbb{R}^+$ liegen, bezeichnen wir mit

$$\Phi^{n,r}(\Lambda) := \{\phi : \Lambda \to \mathbb{R}^n \mid \Gamma_\phi \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega_r^n\}\,.$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir stets Wege verwenden, welche die folgende Zulässigkeitsbedingung erfüllen.

Definition 3.32 (Zulässigkeitsbedingung für Wege)**.** Sei $r \in \mathbb{R}^+$. Der Weg $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ heißt *zulässig*, falls

$$\int_\Lambda \|\phi(\lambda) - r\|^{n-1} \, d\lambda < \infty \, .$$

In der nachfolgenden Definition stellt die Voraussetzung eines zulässigen Weges die Stetigkeit der Röntgen-Transformation sicher.

Satz 3.33 (Stetigkeit der Röntgen-Transformation)**.** Seien $r \in \mathbb{R}^+$ und $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein zulässiger Weg. Die Röntgen-Transformation $\mathcal{D}_\phi$ als Abbildung

$$\mathcal{D}_\phi : L^2(\Omega_r^n) \to L^2(\Gamma_\phi \times S^{n-1}) \, ,$$

definiert für $\lambda \in \Lambda$ und $\theta \in S^{n-1}$ durch

$$\mathcal{D}_\phi f(\phi(\lambda), \theta) := \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \, ,$$

ist wohldefiniert, linear und stetig.

Beweis. Hamaker et al [HSSW80] und Schuster [Sch07]. □

Bevor wir wohlbekannte Ergebnisse zur Inversion der Rönten-Transformation wiedergeben, führen wir zunächst zwei Begriffe ein, die uns auch den Rest des Abschnitts begleiten werden.

Definition 3.34 (Tuy-Weg)**.** Für $r \in \mathbb{R}^+$ sei $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ beschränkt, stetig und fast überall differenzierbar. Existiert zudem für alle $(x, \theta) \in \Omega_r^n \times S^{n-1}$ ein $\lambda \in \Lambda$, so dass

$$\langle x, \theta \rangle = \langle \phi(\lambda), \theta \rangle \tag{3.9}$$

und

$$\langle \phi'(\lambda), \theta \rangle \neq 0 \tag{3.10}$$

gilt, dann bezeichnen wir ϕ als *Tuy-Weg*.

Bemerkung 3.35. Da für $r \in \mathbb{R}^+$ ein Tuy-Weg $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ beschränkt ist, ist jeder Tuy-Weg auch immer zulässig.

Definition 3.36 (Crofton-Symbol)**.** Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg, $\theta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir

$$n_\phi(\theta, s) := \#\{\lambda \in \Lambda \, : \, \langle \phi(\lambda), \theta \rangle = s\}$$

als *Crofton-Symbol (hinsichtlich ϕ)*.

Bemerkung 3.37. In Definition 3.34 bedeutet die Bedingung (3.9) anschaulich, dass jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$, die ein $x \in \Omega_r^n$ enthält, die Kurve Γ_ϕ in mindestens einem Punkt schneiden muss. Die Anzahl der Schnittpunkte wird dabei gerade durch das Crofton-Symbol charakterisiert, wenn man in Definition 3.36 $s = \langle x, \theta \rangle$ wählt.

Für $n = 2$ kann im Fall einer kreisförmigen Kurve die Röntgen-Transformation in die Radon-Transformation überführt werden, siehe z.B. Kak und Slaney [KS98]. Daher werden in der Regel Verfahren zur Inversion der Radon-Transformation angewendet, anstatt die Röntgen-Transformation im 2D-Fall zu invertieren.

Da es sich bei der Röntgen-Transformation um ein Linienintegral handelt, die Radon-Transformation jedoch über Hyperebenen integriert, kann das Vorgehen aus dem 2D-Fall nicht auf den Fall $n \geq 3$ übertragen werden. Da insbesondere der 3D-Fall in der Praxis relevant ist, wurde bisher die Inversion der Röntgen-Transformation vorwiegend für $n = 3$ untersucht.

Ausgehend von der inversen Fourier-Transformation zeigt Tuy in [Tuy83] eine Formel zur Inversion der 3D-Röntgen-Transformation. Diese führt zwar zu keinem Algorithmus, aber Tuy zeigt damit, dass eine stabile Inversion möglich ist, falls die zugehörige Kurve die nach ihm benannten Tuy-Bedingungen erfüllt, siehe Definition 3.34.

Formeln zur Inversion der 3D-Röntgen-Transformation bei Vorliegen einer Tuy-Kurve sowie daraus ableitbare Rekonstruktionsverfahren wurden bereits eingehend untersucht, siehe z.B. Smith [Smi85], Grangeat [Gra91], Defrise und Clack [DC94] und Kudo und Saito [KS94]. Die Inversionsformeln basieren auf einem Zusammenhang zwischen der 3D-Radon-Transformation und der 3D-Röntgen-Transformation. Dabei tritt auch das Crofton-Symbol auf, siehe Definition 3.36, welches in der Regel eine unstetige Funktion darstellt und dessen verallgemeinerte Ableitung bestimmt werden muss. Dies führt oftmals zu numerischen Sonderbehandlungen.

Katsevich gibt in [Kat03] eine weitere Formel zur Inversion der 3D-Röntgen-Transformation für beliebige Tuy-Kurven an und formuliert dazu einen Rekonstruktionsalgorithmus. Beginnend mit der Formel zur Inversion der 3D-Radon-Transformation, siehe Satz 2.17, verwendet Katsevich letztlich die Formel von Grangeat [Gra91], siehe Bemerkung 3.24, um einen Zusammenhang zwischen der 3D-Radon- und der 3D-Röntgen-Transformation herzustellen. Katsevich nutzt eine geeignete Gewichtsfunktion, um die Ableitung des Crofton-Symbols zu vermeiden, und erhält dadurch ein stabiles Rekonstruktionsverfahren. Die Bestimmung der Gewichtsfunktion ist dabei numerisch sehr aufwendig.

Eine weitere Inversionsformel für die 3D-Röntgen-Transformation im Fall beliebiger Tuy-Kurven zeigt Louis in [Lou06]. Der Ansatz von Louis ist ähnlich zum Ansatz von Defrise und Clack in [DC94], jedoch führt Louis neue Operatoren ein, um eine geeignete Struktur der Inversionsformel zu erhalten. Da die Inversionsformel von Louis auf der adjungierten Röntgen-Transformation basiert, bietet sich die Approximative Inverse an, um stabile Rekonstruktionsverfahren zu entwickeln.

In dieser Arbeit werden wir eine Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation angeben, die für beliebige Tuy-Kurven und für beliebige Dimensionen $n \geq 2$ gilt. Unser Ausgangspunkt wird die Formel zur Inversion der erweiterten Radon-Transformation aus Satz 3.10 sein. Anstatt der Formel von Grangeat [Gra91] werden wir den Zusammenhang zwischen der Röntgen-Transformation und der erweiterten Radon-Transformation aus Satz 3.21 verwenden. Das Crofton-Symbol muss bei diesem Ansatz nicht abgeleitet werden.

Wir beginnen mit einer Bemerkung zur Erweiterung der Tuy-Bedingungen und des Crofton-Symbols von S^{n-1} nach $\mathbb{R}^n_*$ bzw. $\mathbb{R}^n$ in den entsprechenden Variablen.

Bemerkung 3.38. a) Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg und $(x, \theta) \in \Omega^n_r \times S^{n-1}$. Sind die Bedingungen (3.9) und (3.10) für ein $\lambda \in \Lambda$ erfüllt, dann gilt für alle $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ offensichtlich auch

$$\langle x, \rho\theta \rangle = \langle \phi(\lambda), \rho\theta \rangle$$

und

$$\langle \phi'(\lambda), \rho\theta \rangle \neq 0\,.$$

b) Seien $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg, $\theta \in S^{n-1}$ und $s \in \mathbb{R}$. Aus der Definition des Crofton-Symbols folgt für $\rho \in \mathbb{R}$ direkt

$$n_\phi(\rho\theta, \rho s) = n_\phi(\theta, s)\,.$$

Mit Hilfe des Crofton-Symbols werden wir nun eine Funktion einführen, die eine wichtige Rolle bei der Inversion der Röntgen-Transformation spielen wird. Seien dazu $r \in \mathbb{R}^+$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg, $\lambda \in \Lambda$ und $y \in \Omega^n_r$. Wir definieren

$$t_{\phi,\lambda,r}(y) := |\langle \phi'(\lambda), y \rangle| n_\phi(y, \langle \phi(\lambda), y \rangle)^{-1}\,. \tag{3.11}$$

Bemerkung 3.39. Offentsichtlich ist die Funktion $t_{\phi,\lambda,r}$ in (3.11) gerade und homogen vom Grad 1, denn mit Bemerkung 3.38 b) folgt für $y \in \Omega^n_r$

$$\begin{aligned} t_{\phi,\lambda,r}(-y) &= |\langle \phi'(\lambda), -y \rangle| n_\phi(-y, \langle \phi(\lambda), -y \rangle)^{-1} \\ &= |\langle \phi'(\lambda), y \rangle| n_\phi(y, \langle \phi(\lambda), y \rangle)^{-1} \\ &= t_{\phi,\lambda,r}(y) \end{aligned}$$

und mit $\rho := \|y\|$ und $\theta := y/\|y\|$

$$\begin{aligned} t_{\phi,\lambda,r}(\rho\theta) &= |\langle \phi'(\lambda), \rho\theta\rangle| n_\phi(\rho\theta, \langle \phi(\lambda), \rho\theta\rangle)^{-1} \\ &= \rho|\langle \phi'(\lambda), \theta\rangle| n_\phi(\theta, \langle \phi(\lambda), \theta\rangle)^{-1} \\ &= \rho t_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,. \end{aligned}$$

Als nächstes werden wir den Raum der Testfunktionen einführen. Dazu definieren wir zunächst für $r \in \mathbb{R}^+$ den Raum der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen von Ω_r^n nach $\mathbb{C}$ durch

$$C^\infty(\Omega_r^n) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} C^m(\Omega_r^n)\,.$$

Definition 3.40 (Testfunktion)**.** Für $r \in \mathbb{R}^+$ sei

$$D(\Omega_r^n) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega_r^n) : \operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}} \subset \Omega_r^n \text{ ist kompakt}\}$$

die Menge der unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω_r^n. Elemente von $D(\Omega_r^n)$ heißen *Testfunktionen*.

In dem nachfolgenden Hilfsresultat werden wir die erweiterte Radon-Transformation $\widetilde{\mathcal{R}}$ für schnellfallende Funktionen verwenden, siehe Bemerkung 3.11.

Lemma 3.41. *Seien $z, r \in \mathbb{R}^+$ mit $z < r$, $g \in D(\Omega_r^n)$ rotationssymmetrisch mit $g\big|_{\Omega_z^n} \equiv 0$ und $e \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)} e(\langle x, \cdot\rangle) g(\cdot) \in D(\Omega_r^n)\,.$$

Beweis. Wir werden zunächst zeigen, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Funktion $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)} e(\langle x, \cdot\rangle) g(\cdot)$ in $H^m(\Omega_r^n)$ liegt. Dazu definieren wir für $x \in \mathbb{R}^n$ die Abkürzung $h_x := \mathcal{I}^{-1}\mathcal{R}_{(\cdot)} e(\langle x, \cdot\rangle)$. Nach Bemerkung 3.19 gilt $h_x \in L^\infty(S^{n-1})$. Zudem ist nach Bemerkung 3.11 die Funktion $\tilde{h}_x := \mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)} e(\langle x, \cdot\rangle)$ homogen vom Grad -2. Da $D(\Omega_r^n)$ in $L^2(\Omega_r^n)$ dicht liegt, siehe z.B. Werner [Wer05], folgt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r^n} |\tilde{h}_x(y) g(y)|^2\, dy &= \int_z^r \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} |\tilde{h}(\rho\theta) g(\rho\theta)|^2\, d\theta\, d\rho \\ &= \int_z^r \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} |\rho^{-2} h_x(\theta) g(\rho\theta)|^2\, d\theta\, d\rho \\ &\leq z^{-4} \|h_x\|^2_{L^\infty(S^{n-1})} \int_z^r \rho^{n-1} \int_{S^{n-1}} |g(\rho\theta)|^2\, d\theta\, d\rho \\ &= z^{-4} \|h_x\|^2_{L^\infty(S^{n-1})} \|g\|_{L^2(\Omega_r^n)} < \infty \end{aligned}$$

und somit $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle x,\cdot\rangle)g(\cdot)\in L^2(\Omega_r^n)$. Daher ist die Fourier-Transformation von $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle x,\cdot\rangle)g(\cdot)$ wohldefiniert und für fast alle $y\in\mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned}
|(\tilde{h}_x(\cdot)g(\cdot))\hat{}\,(y)| &= \left|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_r^n}\tilde{h}_x(u)g(u)e^{-i\langle u,y\rangle}\,du\right| \\
&= \left|(2\pi)^{-n/2}\int_z^r\rho^{n-1}\int_{S^{n-1}}\tilde{h}_x(\rho\theta)g(\rho\theta)e^{-i\langle\rho\theta,y\rangle}\,d\theta\,d\rho\right| \\
&= \left|(2\pi)^{-n/2}\int_z^r\rho^{n-1}\int_{S^{n-1}}\rho^{-2}h_x(\theta)g(\rho\theta)e^{-i\langle\rho\theta,y\rangle}\,d\theta\,d\rho\right| \\
&\le z^{-2}\|h_x\|_{L^\infty(S^{n-1})}\left|(2\pi)^{-n/2}\int_z^r\rho^{n-1}\int_{S^{n-1}}g(\rho\theta)e^{-i\langle\rho\theta,y\rangle}\,d\theta\,d\rho\right| \\
&= z^{-2}\|h_x\|_{L^\infty(S^{n-1})}\left|(2\pi)^{-n/2}\int_{\Omega_r^n}g(u)e^{-i\langle u,y\rangle}\,du\right| \\
&= z^{-2}\|h_x\|_{L^\infty(S^{n-1})}|\hat{g}(y)|\,.
\end{aligned}$$

Wegen $g\in D(\Omega_r^n)$ folgt daraus für $m\in\mathbb{N}$ beliebig

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}|(1+\|y\|^2)^{m/2}(\tilde{h}_x(\cdot)g(\cdot))\hat{}\,(y)|^2\,dy \\
&\qquad\qquad \le z^{-4}\|h_x\|^2_{L^\infty(S^{n-1})}\int_{\mathbb{R}^n}|(1+\|y\|^2)^{m/2}\hat{g}(y)|^2\,dy<\infty\,.
\end{aligned}$$

Somit gilt $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle x,\cdot\rangle)g(\cdot)\in H^m(\Omega_r^n)$ für alle $m\in\mathbb{N}$. Nach Lemma 2.12 liegt daher $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle x,\cdot\rangle)g(\cdot)$ auch in $\bigcap_{m\in\mathbb{N}}C^m(\Omega_r^n)=C^\infty(\Omega_r^n)$. Wegen $g\in D(\Omega_r^n)$ ist auch $\operatorname{supp}(\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle x,\cdot\rangle)g(\cdot))\subset\Omega_r^n$ kompakt. Somit gilt $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle x,\cdot\rangle)g(\cdot)\in D(\Omega_r^n)$. □

In den Definitionen 1.14 und 1.16 haben wir bereits die Faltung und die Translation auf geeigneten Räumen eingeführt. Für die Inversion der Röntgen-Transformation benötigen wir diese beiden Operatoren für Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Satz und Definition 3.42 (Faltung)**.** Für $f,\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $(f*\psi):=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\psi(\cdot-x)\,dx\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\psi:L^1(\mathbb{R}^n) &\to L^1(\mathbb{R}^n) \\
f &\mapsto \mathcal{C}_\psi f:=(f*\psi)
\end{aligned}$$

heißt *Faltung mit* ψ.

Beweis. Das Resultat ergibt sich durch einfache Rechnung, vgl. Werner [Wer05]. □

Definition 3.43 (Translation)**.** Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{T}_x : L^1(\mathbb{R}^n) & \to & L^1(\mathbb{R}^n) \\ f & \mapsto & f(\cdot - x) \end{array}$$

heißt *Translation (hinsichtlich x).*

Die Fourier-Transformation, siehe Definition 2.5, ist auch für Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert, siehe z.B. WERNER [Wer05]. Nachfolgend geben wir den wohlbekannten Zusammenhang zwischen der Fourier-Transformation und der Faltung wieder, siehe z.B. NATTERER [Nat86].

Lemma 3.44. *Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$(\mathcal{C}_\psi f)\hat{} = (2\pi)^{n/2} \hat{f}\hat{\psi}$$

und

$$(f\psi)\hat{} = (2\pi)^{-n/2} \mathcal{C}_{\hat{\psi}} \hat{f}\,.$$

Beweis. Beide Resultate ergeben sich durch einfache Rechnung. □

Multipliziert man eine Funktion des Sobolev-Raums der Ordnung $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit einer Testfunktion, dann liegt das Produkt wieder im Sobolev-Raum der Ordnung $\beta \in \mathbb{R}^+$. Dies zeigt das nachfolgende Resultat.

Lemma 3.45. *Sei $r, \beta \in \mathbb{R}^+$, $f \in H^\beta(\Omega_r^n)$ und $g \in D(\Omega_r^n)$. Dann gilt*

$$fg \in H^\beta(\Omega_r^n)\,.$$

Beweis. YOSIDA [Yos95]. □

Als nächstes werden wir die Anwendung des Riesz-Potentials auf die Radon-Transformation und die verallgemeinerte Röntgen-Transformation in Beziehung zueinander setzen. Hierbei wird die in (3.11) definierte Funktion eine wichtige Rolle spielen. Die Struktur der Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation wird im Wesentlichen auf dem nachfolgenden Lemma basieren.

Lemma 3.46. *Seien $\beta, z, r \in \mathbb{R}^+$ mit $z < r$ und $\beta > \max\{1, n - 3/2\}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$, $\omega \in S^{n-1}$ beliebig, $g \in D(\Omega_r^n)$ rotationssymmetrsich mit $g\big|_{\Omega_z^n} \equiv 0$ und $c_g := \int_0^\infty \rho^{-1} g(\rho\omega)\, d\rho \neq 0$, $e \in S(\mathbb{R}^n)$ und*

$$\varphi_{\phi,\lambda,e,g} := \frac{1}{c_g} \mathcal{I}^{-1} \widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)} e(\langle \phi(\lambda), \cdot \rangle) g(\cdot) t_{\phi,\lambda,r}(\cdot)\,.$$

Dann gilt

$$\varphi_{\phi,\lambda,e,g} \in H^\beta(\Omega_r^n) \tag{3.12}$$

und

$$\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0) = \frac{1}{\pi}(2\pi)^{(n-2)/2}\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,. \tag{3.13}$$

Beweis. Für $\omega \in S^{n-1}$ beliebig gilt $(\cdot)^{-1}g(\cdot\omega) \in L^1(\mathbb{R})$. Nach Satz 3.10 folgt daraus $c_g < \infty$ und somit die Wohldefiniertheit von c_g. Nach Lemma 3.41 gilt $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle\phi(\lambda),\cdot\rangle)g(\cdot) \in D(\Omega_r^n)$. Wegen $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ folgt aus Lemma 3.45 $\varphi_{\phi,\lambda,e,g} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ und damit die Behauptung (3.12).

Nach Bemerkung 3.11 ist $\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle\phi(\lambda),\cdot\rangle)$ eine gerade Funktion. Da g und $t_{\phi,\lambda,r}$ ebenfalls gerade Funktionen sind, siehe Bemerkung 3.39, ist auch $\varphi_{\phi,\lambda,e,g}$ gerade. Die Radon- und die Fourier-Transformation bilden jeweils gerade Funktionen auf gerade Funktionen ab. Für $\theta \in S^{n-1}$ gilt somit

$$(\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g})\hat{} = (\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g})\hat{}(-\cdot)$$

und daher

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}|s|^{n-2}(\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g})\hat{}(s)\,ds\\ &= 2(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty s^{n-2}(\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g})\hat{}(s)\,ds\,.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Ausgehend von (3.14) werden wir als nächstes zeigen, dass $\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0)$ unabhängig von der Wahl von g ist. Dazu sei

$$h_{\phi(\lambda)} := \mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)}e(\langle\phi(\lambda),\cdot\rangle)\,.$$

Nach Bemerkung 3.11 ist $h_{\phi(\lambda)}$ homogen vom Grad -2 und nach Bemerkung 3.39 ist $t_{\phi,\lambda,r}$ homogen vom Grad 1. Daher ist $h_{\phi(\lambda)}(\cdot)t_{\phi,\lambda,r}(\cdot)$ homogen vom Grad -1. Es folgt mit Satz 2.8, der Definition $g_1(\sigma) := g(\sigma\omega)$ für $\sigma \in \mathbb{R}^+$

und $\omega \in S^{n-1}$ beliebig sowie der Substitution $\rho = \sigma s$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0) &= 2(2\pi)^{-1/2}\int_0^\infty s^{n-2}(\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g})\hat{}(s)\,ds \\
&\overset{2.8}{=} 2(2\pi)^{(n-2)/2}\int_0^\infty s^{n-2}\hat{\varphi}_{\phi,\lambda,e,g}(s\theta)\,ds \\
&= 2(2\pi)^{(n-2)/2}(2\pi)^{-n/2}\int_0^\infty s^{n-2}\int_{\Omega_r^n}\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(x)e^{-i\langle x,s\theta\rangle}\,dx\,ds \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s^{n-2}\int_{\Omega_r^n}\frac{1}{c_g}h_{\phi(\lambda)}(x)g(x)t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,s\theta\rangle}\,dx\,ds \\
&= \frac{1}{\pi c_g}\int_0^\infty s^{n-2}\int_0^r\sigma^{n-1}\int_{S^{n-1}}h_{\phi(\lambda)}(\sigma\omega)g(\sigma\omega)t_{\phi,\lambda,r}(\sigma\omega)e^{-i\langle\sigma\omega,s\theta\rangle}\,d\omega\,d\sigma\,ds \\
&= \frac{1}{\pi c_g}\int_0^\infty s^{n-2}\int_0^r\sigma^{n-1}g_1(\sigma)\int_{S^{n-1}}h_{\phi(\lambda)}(\sigma\omega)t_{\phi,\lambda,r}(\sigma\omega)e^{-i\langle\sigma s\omega,\theta\rangle}\,d\omega\,d\sigma\,ds \\
&= \frac{1}{\pi c_g}\int_0^\infty s^{n-2}\int_0^r\sigma^{n-2}g_1(\sigma)\int_{S^{n-1}}h_{\phi(\lambda)}(\omega)t_{\phi,\lambda,r}(\omega)e^{-i\langle\sigma s\omega,\theta\rangle}\,d\omega\,d\sigma\,ds \\
&= \frac{1}{\pi c_g}\int_0^r g_1(\sigma)\int_0^\infty(\sigma s)^{n-2}\int_{S^{n-1}}h_{\phi(\lambda)}(\omega)t_{\phi,\lambda,r}(\omega)e^{-i\langle\sigma s\omega,\theta\rangle}\,d\omega\,ds\,d\sigma \\
&= \frac{1}{\pi c_g}\int_0^r\sigma^{-1}g_1(\sigma)\,d\sigma\int_0^\infty\rho^{n-2}\int_{S^{n-1}}h_{\phi(\lambda)}(\omega)t_{\phi,\lambda,r}(\omega)e^{-i\langle\rho\omega,\theta\rangle}\,d\omega\,d\rho \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\rho^{n-1}\int_{S^{n-1}}h_{\phi(\lambda)}(\rho\omega)t_{\phi,\lambda,r}(\rho\omega)e^{-i\langle\rho\omega,\theta\rangle}\,d\omega\,d\rho \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n}h_{\phi(\lambda)}(x)t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx\,. \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.8 und $c := (2\pi)^{(n-2)/2}$ können wir für $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $h_{\phi(\lambda)}(x)$ darstellen durch

$$\begin{aligned}
h_{\phi(\lambda)}(x) = \mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_x e(\langle\phi(\lambda),x\rangle) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}|\rho|(\widetilde{\mathcal{R}}_x e)\hat{}(\rho)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho \\
&\overset{2.8}{=} (2\pi)^{(n-2)/2}\int_{\mathbb{R}}|\rho|\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho \\
&= c\left(\int_0^\infty\rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho + \int_{-\infty}^0|\rho|\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho\right) \\
&= c\left(\int_0^\infty\rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho + \int_0^\infty\rho\hat{e}(-\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),-x\rangle}\,d\rho\right).
\end{aligned}$$

Somit folgt aus (3.15)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0) &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^n} h_{\phi(\lambda)}(x)t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx \\
&= \frac{c}{\pi}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \rho\hat{e}(-\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),-x\rangle}\,d\rho\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx\Bigg) \\
&= \frac{c}{\pi}\Bigg(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,-\theta\rangle}\,dx\Bigg) \\
&= \frac{c}{\pi}(q(\theta)+q(-\theta))\,, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

wobei

$$q := \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\cdot\rangle}\,dx\,.$$

Da $t_{\phi,\lambda,r}$ gerade ist, folgt $\mathcal{F}\mathcal{F}t_{\phi,\lambda,r} = t_{\phi,\lambda,r}$. Daher folgt mit den Substitutionen $\rho = \frac{1}{s}$ und $u = \frac{1}{s}x$ sowie Bemerkung 3.39 und Lemma 3.44

$$\begin{aligned}
q(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \rho\hat{e}(\rho x)e^{i\rho\langle\phi(\lambda),x\rangle}\,d\rho\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty s^{-3}\hat{e}(\frac{1}{s}x)e^{i\langle\phi(\lambda),\frac{1}{s}x\rangle}\,ds\, t_{\phi,\lambda,r}(x)e^{-i\langle x,\theta\rangle}\,dx \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n} s^{n-3}\hat{e}(u)e^{i\langle\phi(\lambda),u\rangle}t_{\phi,\lambda,r}(su)e^{-i\langle su,\theta\rangle}\,du\,ds \\
&\overset{3.39}{=} \int_0^\infty s^{n-2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{e}(u)t_{\phi,\lambda,r}(u)e^{i\langle\phi(\lambda),u\rangle}e^{-i\langle u,s\theta\rangle}\,du\,ds \\
&= \int_0^\infty s^{n-2}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{e}(u)t_{\phi,\lambda,r}(u)e^{i\langle u,\phi(\lambda)-s\theta\rangle}\,du\,ds \\
&\overset{3.44}{=} \int_0^\infty s^{n-2}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda)-s\theta)\,ds \\
&= \mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-\theta)\,. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0) &\overset{(3.16)}{=} \frac{1}{\pi}(2\pi)^{(n-2)/2}(q(\theta)+q(-\theta)) \\
&\overset{(3.17)}{=} \frac{1}{\pi}(2\pi)^{(n-2)/2}(\mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)+\mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-\theta)) \\
&= \frac{1}{\pi}(2\pi)^{(n-2)/2}\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung (3.13). □

Wir werden bei der Herleitung einer Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation die Delta-Distribution mit Hilfe der nachfolgend definierten Funktion approximieren.

Definition 3.47 (Gauß-Funktion)**.** Seien $\gamma \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen

$$e_{\gamma,n}^{\text{Gauß}}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\gamma^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{2\gamma^2}} \tag{3.18}$$

als *(n-dimensionale) Gauß-Funktion (hinsichtlich γ).*

Bemerkung 3.48. a) Für $\gamma \in \mathbb{R}^+$ liegt die Gauß-Funktion $e_{\gamma,n}^{\text{Gauß}}$ in $S(\mathbb{R}^n)$, siehe z.B. Werner [Wer05].

b) Mit Hilfe der Gauß-Funktion kann die Delta-Distribution approximiert werden, siehe z.B. Yosida [Yos95], denn für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$ und fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim_{\gamma \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e_{\gamma,n}^{\text{Gauß}}(y-x)\, dy = f(x)\,.$$

Der nachfolgende Satz zur Inversion der Röntgen-Transformation stellt das Hauptresultat dieses Abschnitts dar.

Satz 3.49 (Inversion der Röntgen-Transformation)**.** *Seien $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n - 3/2\}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt*

$$f = (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{T}_{(\cdot)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,.$$

Beweis. Seien $g \in D(\Omega_r^n)$ rotationssymmetrisch mit $g\big|_{\Omega_z^n} \equiv 0$, $\omega \in S^{n-1}$ und $c_g := \int_0^\infty \rho^{-1} g(\rho\omega)\, d\rho$. Dann gilt nach der Formel zur Inversion der erweiterten Radon-Transformation aus Satz 3.10

$$f = \frac{1}{2c_g}(2\pi)^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle \cdot, y\rangle) g(y)\, dy\,. \tag{3.19}$$

Stellen wir nun $\mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle \cdot, y\rangle)$ mit Hilfe der Delta-Distribution dar, so ergibt sich

$$\mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle \cdot, y\rangle) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n} \widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s) \delta(s - \langle \cdot, y\rangle)\, ds\,. \tag{3.20}$$

Für $e \in S(\mathbb{R}^n)$ beliebig ergibt sich daher mit $c := (2\pi)^{1-n}/2$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e(u)\,du &\overset{(3.19)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{c_g} \int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle u,y\rangle) g(y)\,dy\,e(u)\,du \\
&\overset{(3.20)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c}{c_g} \int_{\Omega_r^n} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\delta(s-\langle u,y\rangle)\,ds\,g(y)\,dy\,e(u)\,du \\
&= \frac{c}{c_g} \int_{\Omega_r^n} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s) \int_{\mathbb{R}^n} e(u)\delta(s-\langle u,y\rangle)\,du\,ds\,g(y)\,dy \\
&= \frac{c}{c_g} \int_{\Omega_r^n} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\widetilde{\mathcal{R}}_y e(s)\,ds\,g(y)\,dy\,. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Wir schreiben nun abkürzend $h := \widetilde{\mathcal{R}}_y e$. Dann folgt aus $\hat{\bar{h}} = \bar{\hat{h}}(-\cdot)$ und der Substitution $s = -s$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}^{-1}\bar{h} &= \int_{\mathbb{R}} |s|\hat{\bar{h}}(s)e^{is\cdot}\,ds = \int_{\mathbb{R}} |s|\bar{\hat{h}}(-s)e^{is\cdot}\,ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} |s|\bar{\hat{h}}(s)e^{-is\cdot}\,ds = \overline{\int_{\mathbb{R}} |s|\hat{h}(s)e^{is\cdot}\,ds} = \overline{\mathcal{I}^{-1}h}\,. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Da das Riesz-Potential selbstadjungiert ist, folgt daher

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\widetilde{\mathcal{R}}_y e(s)\,ds &= \langle \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f, \bar{h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \langle \mathcal{I}^{-1}\mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f, \bar{h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \langle \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f, \mathcal{I}^{-1}\bar{h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\overset{(3.22)}{=} \langle \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f, \overline{\mathcal{I}^{-1}h}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_y e(s)\,ds\,. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Wir haben ϕ als Tuy-Weg vorausgesetzt. Daher können wir die Substitution $s = \langle \phi(\lambda), y\rangle$ anwenden, wobei sich als Ergebnis der Nachdifferenzierung der Term $|\langle \phi'(\lambda), y\rangle| n_\phi(y, \langle \phi(\lambda), y\rangle)^{-1}$ ergibt. Diesen Term haben wir in (3.11) als $t_{\phi,\lambda,r}(y)$ definiert. Analog zu Lemma 3.46 definieren wir

$$\varphi_{\phi,\lambda,e,g} := \frac{1}{c_g}\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_{(\cdot)} e(\langle \phi(\lambda), \cdot\rangle) g(\cdot) t_{\phi,\lambda,r}(\cdot) \qquad (3.24)$$

und erhalten

$$
\begin{aligned}
&\frac{c}{c_g}\int_{\Omega_r^n}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\widetilde{\mathcal{R}}_y e(s)\,ds\,g(y)\,dy \\
&\quad\overset{(3.23)}{=} \frac{c}{c_g}\int_{\Omega_r^n}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_y e(s)\,ds\,g(y)\,dy \\
&\quad= \frac{c}{c_g}\int_{\Omega_r^n}\int_{\Lambda} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle\phi(\lambda),y\rangle)\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_y e(\langle\phi(\lambda),y\rangle)t_{\phi,\lambda,r}(y)\,d\lambda\,g(y)\,dy \\
&\quad= \frac{c}{c_g}\int_{\Lambda}\int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle\phi(\lambda),y\rangle)\mathcal{I}^{-1}\widetilde{\mathcal{R}}_y e(\langle\phi(\lambda),y\rangle)g(y)t_{\phi,\lambda,r}(y)\,dy\,d\lambda \\
&\quad\overset{(3.24)}{=} c\int_{\Lambda}\int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle\phi(\lambda),y\rangle)\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(y)\,dy\,d\lambda\,.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Da $\varphi_{\phi,\lambda,e,g}$ nach Lemma 3.46 in $H^\beta(\Omega_r^n)$ liegt, können wir den Zusammenhang zwischen der erweiterten Radon-Transformation und der Röntgen-Transformation aus Satz 3.21 anwenden und erhalten wiederum mit Lemma 3.46

$$
\begin{aligned}
&c\int_{\Lambda}\int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle\phi(\lambda),y\rangle)\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(y)\,dy\,d\lambda \\
&\qquad\overset{3.21}{=} c\int_{\Lambda}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{I}^{2-n}\mathcal{R}_\theta^r\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(0)\,d\theta\,d\lambda \\
&\qquad\overset{3.46}{=} (2\pi)^{-n/2-1}\int_{\Lambda}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,.
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

Zusammenfassend gilt

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e(u)\,du &\overset{(3.21)}{=} \frac{c}{c_g}\int_{\Omega_r^n}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{I}^{1-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(s)\widetilde{\mathcal{R}}_y e(s)\,ds\,g(y)\,dy \\
&\overset{(3.25)}{=} c\int_{\Lambda}\int_{\Omega_r^n} \mathcal{I}^{2-n}\widetilde{\mathcal{R}}_y^r f(\langle\phi(\lambda),y\rangle)\varphi_{\phi,\lambda,e,g}(y)\,dy\,d\lambda \\
&\overset{(3.26)}{=} (2\pi)^{-n/2-1}\int_{\Lambda}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{C}_e\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Da nach Bemerkung 3.48 die Gauß-Funktion schnellfallend ist, können wir als Funktion $e \in S(\mathbb{R}^n)$ in Gleichung (3.27) die um $x \in \Omega_r^n$ translierte Gauß-Funktion wählen. Dazu definieren wir für $\gamma \in \mathbb{R}^+$ die abkürzende Schreibweise

$$e_\gamma := e_{\gamma,n}^{\text{Gauß}}$$

und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e_\gamma(u-x)\,du = \\ (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_{e_\gamma(\cdot-x)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \tag{3.28}$$

Nach Bemerkung 3.48 gilt für fast alle $x \in \Omega_r^n$

$$\lim_{\gamma\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e_\gamma(u-x)\,du = f(x) \tag{3.29}$$

sowie

$$\begin{aligned}\lim_{\gamma\to 0}\mathcal{C}_{e_\gamma(\cdot-x)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r} &= \lim_{\gamma\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(u)e_\gamma(\cdot-u-x)\,du \\ &= \lim_{\gamma\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\cdot-y)e_\gamma(y-x)\,dy \\ &= \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\cdot-x) = \mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,. \end{aligned}\tag{3.30}$$

Bilden wir nun auf beiden Seiten von Gleichung (3.28) den Grenzwert $\gamma \to 0$, dann folgt aus (3.29) und (3.30) für fast alle $x \in \Omega_r^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}}\mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda$$

und somit die Behauptung. □

Ausgehend von der Inversion der Röntgen-Transformation können wir mit Hilfe von Satz 3.14 auch eine Formel zur Inversion der erweiterten Röntgen-Transformation angeben.

Satz 3.50 (Inversion der erweiterten Röntgen-Transformation)**.** *Seien $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$ und $\mathcal{W}_a := \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_{-a}$ für $a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$f = (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^n}\widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(y)\mathcal{W}_{(\phi(\lambda)-\cdot)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\,dy\,d\lambda\,.$$

Beweis. Da $t_{\phi,\lambda,r}$ eine gerade Funktion ist, siehe Bemerkung 3.39, ist auch $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ gerade. Daher folgt für $x \in \Omega_r^n$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-\theta) &= \int_{\mathbb{R}}\rho^{n-2}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda)-\rho\theta-x)\,d\rho \\ &= \int_{\mathbb{R}}\rho^{n-2}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-\phi(\lambda)+\rho\theta+x)\,d\rho \\ &= \mathcal{D}^{n-2}_{-\phi(\lambda)}\mathcal{T}_{-x}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta) &= \mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta) + \mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-\theta) \\ &= \mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta) + \mathcal{D}^{n-2}_{-\phi(\lambda)}\mathcal{T}_{-x}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,.\end{aligned}$$

Aus Satz 3.49 folgt daher für fast alle $x \in \Omega^n_r$

$$\begin{aligned}(2\pi)^{1+n/2}f(x) &= \int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda \\ &= \int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda \\ &\quad+ \int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{D}^{n-2}_{-\phi(\lambda)}\mathcal{T}_{-x}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Sei nun $k := n-2$. Da nach Lemma 3.13 $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f \in L^\infty(S^{n-1})$ gilt und nach Lemma 3.27 $\widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f$ die homogene Erweiterung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f$ auf $\mathbb{R}^n_*$ vom Grad $-1 = k+1-n$ ist, können wir Satz 3.14 anwenden und erhalten mit der Substitution $u = y - \phi(\lambda)$

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{D}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta &\overset{3.14}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(y-\phi(\lambda))\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(u)\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(u+\phi(\lambda))\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(u)\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(u+\phi(\lambda)-x)\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(u)\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(u-(x-\phi(\lambda)))\,du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(u)\mathcal{T}_{(x-\phi(\lambda))}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(u)\,du \qquad (3.32)\end{aligned}$$

sowie

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{D}^{n-2}_{-\phi(\lambda)}\mathcal{T}_{-x}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(u)\mathcal{T}_{(\phi(\lambda)-x)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(u)\,du\,. \qquad (3.33)$$

Aus (3.31), (3.32) und (3.33) folgt daher

$$f = (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)}f(y)\mathcal{W}_{(\phi(\lambda)-\cdot)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\,dy\,d\lambda$$

und somit die Behauptung. □

3.4 Rekonstruktionsverfahren

In diesem Abschnitt werden wir verschiedene Ansätze untersuchen, um Rekonstruktionverfahren für die Röntgen-Transformation herzuleiten.

Wir beginnen mit Verfahren, die auf den Formeln aus Satz 3.49 und Satz 3.50 zur Inversion der Röntgen-Transformation bzw. der erweiterten Röntgen-Transformation basieren. Anschließend werden wir die Approximative Inverse anwenden, um die Inversion der Röntgen-Transformation zu regularisieren. Die direkte Berechnung der Faltung als regularisierte Eigenschaft der zu rekonstruierenden Funktion werden wir im letzten Unterabschnitt untersuchen.

3.4.1 Anwendung der Inversionsformel

Rekonstruktionsverfahren, die auf wohlbekannten Formeln zur Inversion der Röntgen-Transformation basieren, haben wir bereits in Abschnitt 3.3 kurz dargestellt. In diesem Abschnitt werden wir Rekonstruktionsverfahren herleiten, die auf den Inversionsformeln aus Satz 3.49 und Satz 3.50 beruhen.

Zunächst wiederholen wir die Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation aus Satz 3.49: Seien $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $x \in L^2(\Omega_r^n)$

$$f(x) = (2\pi)^{n/2-1} \int_\Lambda \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{T}_x \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,. \tag{3.34}$$

Das innere Integral hinsichtlich S^{n-1} ist abhängig vom Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega_r^n$ und muss daher für jedes x neu berechnet werden. Um die Anzahl der Rechenschritte zu reduzieren, werden wir als nächstes untersuchen, ob der Wert eines für x berechneten Integrals auch für einen anderen Rekonstruktionspunkt verwendet werden kann. Sei dazu für $u \in \mathbb{R}_*^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq u$ die Abbildung

$$U_{u,v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

derart definiert, dass

$$U_{u,v}\left(\frac{u-v}{\|u-v\|}\right) = \frac{u}{\|u\|}$$

gilt. Offensichtlich ist $U_{u,v}$ eine Rotation und damit unitär. Den zugehörigen unitären Operator auf $L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir durch

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_{u,v} : L^1(\mathbb{R}^n) &\to L^1(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \mathcal{U}_{u,v} f := f(U_{u,v}(\cdot))\,. \end{aligned}$$

Das nachfolgende Resultat zeigt, dass durch Anwendung der Röntgen-Transformation eine Translation in entsprechende Rotationen umgewandelt werden kann.

Lemma 3.51. *Für $a, x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt*

$$\mathcal{D}_a^k \mathcal{T}_x = \mathcal{U}_{a,x} \mathcal{D}^k_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}a} \mathcal{U}^*_{a,x} \,.$$

Beweis. Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $a, x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ und $\theta \in S^{n-1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_a^k \mathcal{T}_x f(\theta) &= \int_0^\infty \rho^k \mathcal{T}_x f(a + \rho\theta)\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^k f(a - x + \rho\theta)\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^k f(U^*_{a,x} U_{a,x}(a - x + \rho\theta))\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^k f(U^*_{a,x} U_{a,x}(\|a-x\| \frac{a-x}{\|a-x\|} + \rho\theta))\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^k \mathcal{U}^*_{a,x} f(U_{a,x}(\|a-x\| \frac{a-x}{\|a-x\|} + \rho\theta))\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^k \mathcal{U}^*_{a,x} f(\|a-x\| \frac{a}{\|a\|} + U_{a,x}(\rho\theta))\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^k \mathcal{U}^*_{a,x} f(\frac{\|a-x\|}{\|a\|} a + \rho U_{a,x}(\theta))\, d\rho \\
&= \mathcal{D}^k_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}a} \mathcal{U}^*_{a,x} f(U_{a,x}(\theta)) \\
&= \mathcal{U}_{a,x} \mathcal{D}^k_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}a} \mathcal{U}^*_{a,x} f(\theta)
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir den nachfolgenden Begriff.

Definition 3.52 (Dilatation)**.** Sei $c \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_c : L^1(\mathbb{R}^n) &\to L^1(\mathbb{R}^n) \\
f &\mapsto \mathcal{V}_c f := f(c\cdot)
\end{aligned}$$

heißt *Dilatation (hinsichtlich c)*.

Das nächste Resultat zeigt eine Dilatationsinvarianz der Röntgen-Transformation.

Lemma 3.53. *Für $a \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^+$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt*

$$\mathcal{D}^k_{ca} = c^{k+1}\mathcal{D}^k_a\mathcal{V}_c\,.$$

Beweis. Mit der Substitution $s = c^{-1}\rho$ folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^k_{ca}f(\theta) &= \int_0^\infty \rho^k f(ca+\rho\theta)\,d\rho\\ &= \int_0^\infty \rho^k \mathcal{V}_c f(a+c^{-1}\rho\theta)\,d\rho\\ &= c\int_0^\infty (cs)^k\mathcal{V}_c f(a+s\theta)\,ds\\ &= c^{k+1}\int_0^\infty s^k\mathcal{V}_c f(a+s\theta)\,ds\\ &= c^{k+1}\mathcal{D}^k_a\mathcal{V}_c f(\theta)\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Aus den beiden vorangegangenen Ergebnissen ergibt sich die folgende Eigenschaft der Röntgen-Transformation.

Satz 3.54. *Für $a, x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt*

$$\mathcal{D}^k_a\mathcal{T}_x = \left(\frac{\|a-x\|}{\|a\|}\right)^{k+1}\mathcal{U}_{a,x}\mathcal{D}^k_a\mathcal{U}^*_{a,x}\mathcal{V}_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}}\,.$$

Beweis. Wegen $\mathcal{V}_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}}\mathcal{U}^*_{a,x} = \mathcal{U}^*_{a,x}\mathcal{V}_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}}$ folgt die Behauptung aus Lemma 3.51 und Lemma 3.53. □

Korollar 3.55. *Für $a, x \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ gilt*

$$\mathcal{G}^k_a\mathcal{T}_x = \left(\frac{\|a-x\|}{\|a\|}\right)^{k+1}\mathcal{U}_{a,x}\mathcal{G}^k_a\mathcal{U}^*_{a,x}\mathcal{V}_{\frac{\|a-x\|}{\|a\|}}\,.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 3.54 und der Definition von $\mathcal{G}^k_a$. □

Mit Korollar 3.55 ergibt sich die nachfolgende Variante der Inversionsformel (3.34).

Satz 3.56 (Inversion der Röntgen-Transformation)**.** *Seien $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $f \in L^2(\Omega^n_r)$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega^n_r)$ für $\lambda \in \Lambda$, $c_n := (2\pi)^{-n/2-1}$ und $c_{\phi(\lambda),x} := \frac{\|\phi(\lambda)-x\|}{\|\phi(\lambda)\|}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega^n_r$*

$$f(x) = c_n\int_\Lambda c^{n-1}_{\phi(\lambda),x}\int_{S^{n-1}}\mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x}\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \tag{3.35}$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.49 und Korrolar 3.55. □

In den Inversionsformeln (3.34) und (3.35) verwenden wir die in (3.11) definierte Funktion $t_{\phi,\lambda,r}$. Aus der Homogenität von $t_{\phi,\lambda,r}$, siehe Bemerkung 3.39, folgt die nachfolgende Eigenschaft von $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$, die ebenfalls als Homogenität interpretiert werden kann, wenn man die auftretende Skalierung des Trägers vernachlässigt.

Lemma 3.57. *Seien $\beta, c, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt*

$$\mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r} = c^{-(n+1)} \hat{t}_{\phi,\lambda,cr} \,.$$

Beweis. Aus $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ folgt $\hat{t}_{\phi,\lambda,r} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und damit die Wohldefiniertheit von $\mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$. Mit der Substitution $u = cs$ folgt für $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(x) &= \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(cx) \\
&= \int_{\Omega_r^n} t_{\phi,\lambda,r}(y) e^{-i\langle y, cx\rangle}\, dy \\
&= \int_0^r s^{n-1} \int_{S^{n-1}} t_{\phi,\lambda,r}(s\omega) e^{-i\langle s\omega, cx\rangle}\, d\omega\, ds \\
&= \frac{1}{c} \int_0^{cr} \left(\frac{u}{c}\right)^{n-1} \int_{S^{n-1}} t_{\phi,\lambda,cr}\left(\frac{u}{c}\omega\right) e^{-i\langle u\omega, x\rangle}\, d\omega\, du \\
&= \left(\frac{1}{c}\right)^{n+1} \int_0^{cr} u^{n-1} \int_{S^{n-1}} t_{\phi,\lambda,cr}(u\omega) e^{-i\langle u\omega, x\rangle}\, d\omega\, du \\
&= c^{-(n+1)} \int_{\Omega_{cr}^n} t_{\phi,\lambda,cr}(y) e^{-i\langle y, x\rangle}\, dy \\
&= c^{-(n+1)} \hat{t}_{\phi,\lambda,cr}(x)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Mit Lemma 3.57 ergibt sich eine weitere Variante der Inversionsformel (3.34).

Satz 3.58 (Inversion der Röntgen-Transformation)**.** *Seien $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$, $c_n := (2\pi)^{-n/2-1}$ und $c_{\phi(\lambda),x} := \frac{\|\phi(\lambda)-x\|}{\|\phi(\lambda)\|}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_r^n$*

$$f(x) = c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{-2} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^* \hat{t}_{\phi,\lambda,c_{\phi(\lambda),x} r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda \,. \tag{3.36}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 3.56 und Lemma 3.57. □

Im Gegensatz zu (3.34) und (3.35) ist in (3.36) die Abhängigkeit des inneren Integrals hinsichtlich S^{n-1} vom Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega_r^n$ nur noch in den auftretenden Rotationen und in der Skalierung des Trägers von $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ vorhanden. Dies werden wir nutzen, um durch geeignete Approximationen effiziente Rekonstruktionsverfahren anzugeben.

Approximation 3.59 (Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung)**.** Gilt in der Situation von Satz 3.56 für alle $x \in \Omega_r^n$ und alle $\lambda \in \Lambda$ die Abschätzung $\|x\| \ll \|\phi(\lambda)\|$, dann approximieren wir $\hat{t}_{\phi,\lambda,c_{\phi(\lambda)}(x)r} \approx \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ und erhalten $f \approx f^{\mathrm{BP}}$, wobei

$$f^{\mathrm{BP}}(x) := c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{-2} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^* \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,. \tag{3.37}$$

Bemerkung 3.60. a) Für einen beliebigen Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega_r^n$ und eine beliebige Kurvenposition $\lambda \in \Lambda$ schreiben wir abkürzend für das innere Integral hinsichtlich S^{n-1} in (3.37)

$$m_{\phi,\lambda,r}(x) := \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^* \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\,. \tag{3.38}$$

Für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\theta \in S^{n-1}$ bezeichne $L_{a,\theta} := \{a + \rho\theta : \rho \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^n$ den Strahl mit Anfangspunkt a in Richtung θ. Dann gilt für $x_1, x_2 \in L_{a,\theta}$ offensichtlich

$$\frac{a - x_1}{\|a - x_1\|} = \frac{a - x_2}{\|a - x_2\|}\,.$$

Daraus folgt $\mathcal{U}_{a,x_1} = \mathcal{U}_{a,x_2}$ und somit

$$m_{\phi,\lambda,r}(x_1) = m_{\phi,\lambda,r}(x_2)\,. \tag{3.39}$$

Aus (3.39) ist ersichtlich, dass (3.38) nicht für jeden Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega_r^n$ berechnet werden muss. Es ist ausreichend für jeden Strahl $L_{\phi(\lambda),\theta}$ den Wert von (3.38) für einen beliebigen Punkt $x_{\phi(\lambda),\theta} \in L_{\phi(\lambda),\theta}$ zu bestimmen, da dieser Wert für jeden anderen Punkt des Strahls ebenfalls angenommen wird. Der aus Approximation 3.59 resultierende Algorithmus entspricht daher einer Rückprojektion. In der Praxis entspricht $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f$ der gemessenen Projektion des zu rekonstruierenden Objekts f bei Quellposition $\phi(\lambda)$. Die Bestimmung von (3.38) entspricht einer Faltung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f$ mit

$$\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^* \hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,, \tag{3.40}$$

wobei (3.40) in Abhängigkeit vom Strahl, der im Punkt $\phi(\lambda)$ beginnt und den Punkt x enthält, variiert. Dies rechtfertigt die Bezeichnung Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung.

b) Um (3.40) zu berechnen, muss im Wesentlichen die Funktion $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ bestimmt und anschließend deren verallgemeinerte Röntgen-Transformation ermittelt werden. Abhängig vom Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega_r^n$ bzw. abhängig vom Strahl $L_{\phi(\lambda),\theta}$, der den Rekonstruktionspunkt x enthält, muss $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ vor Anwendung der verallgemeinerten Röntgen-Transformation mittels $\mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x}$ rotiert werden. Führt man abschließend die Rotation $\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}$ durch, so erhält man die Funktion (3.40).

c) In (3.37) entspricht der vom Rekonstruktionspunkt $x \in \Omega_r^n$ abhängige Faktor $c^{-2}_{\phi(\lambda),x}$ einer der Rückprojektion folgenden Nachgewichtung.

Approximation 3.61 (Gefilterte Rückprojektion)**.** Wenn wir in der Situation von Approximation 3.59 zusätzlich $\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta) \approx \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)$ approximieren, dann erhalten wir $f \approx f^{\mathrm{FBP}}$, wobei

$$f^{\mathrm{FBP}}(x) := c_n \int_\Lambda c^{-2}_{\phi(\lambda),x} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,. \tag{3.41}$$

Bemerkung 3.62. a) Analog zu Approximation 3.59 ergibt sich aus (3.41) eine Rückprojektion mit Nachgewichtung, siehe Bemerkung 3.60 a) und c). Das innere Integral hinsichtlich S^{n-1} in (3.41)

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta$$

entspricht einer Faltung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f$ mit $\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$. Somit handelt es sich bei dem Rekonstruktionsverfahren basierend auf Approximation 3.61 um eine gefilterte Rückprojektion. Für die Berechnung des Filters muss lediglich die verallgemeinerte Röntgen-Transformation von $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ bestimmt werden.

b) Nimmt man Rekonstruktionsartefakte in Kauf, dann sind die Ansätze aus Approximation 3.59 und 3.61 zur Herleitung von Rekonstruktionsverfahren auch bei Wegen $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ anwendbar, welche die Tuy-Bedingungen nicht erfüllen. Ein Beispiel hierfür ist ein kreisförmiger Weg im Fall $n = 3$, der in der Praxis häufig zum Einsatz kommt.

Da die Voraussetzungen für die Approximationen 3.59 und 3.61 nicht immer erfüllt sind, werden wir als nächstes ein theoretisch exaktes Rekonstruktionsverfahren angeben.

Satz 3.63 (Filterung nach gewichteter Rückprojektion)**.** *Seien* $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ *mit* $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$ *und* $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ *ein Tuy-Weg mit* $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ *für* $\lambda \in \Lambda$. *Dann gilt für fast alle* $x \in \Omega_r^n$

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda h_{f,\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda) - x) + h_{f,\phi,\lambda,r}(x - \phi(\lambda))\, d\lambda\,,$$

wobei

$$h_{f,\phi,\lambda,r} := \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^{-1} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(y/\|y\|) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\cdot - y)\, dy\,. \tag{3.42}$$

Beweis. Für $a \in \mathbb{R}^n$ sei $\mathcal{W}_a := \mathcal{T}_a + \mathcal{T}_{-a}$. Da $t_{\phi,\lambda,r}$ eine gerade Funktion ist, siehe Bemerkung 3.39, ist auch $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ gerade. Daher folgt für fast alle $x \in \Omega_r^n$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{W}_{(\phi(\lambda)-x)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\, dy \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{T}_{(\phi(\lambda)-x)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\, dy \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{T}_{(x-\phi(\lambda))} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\, dy \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{T}_{-(\phi(\lambda)-x)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-y)\, dy \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{T}_{-(x-\phi(\lambda))} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-y)\, dy \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}((\phi(\lambda)-x) - y)\, dy \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}((x-\phi(\lambda)) - y)\, dy\,.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Da die erweiterte Röntgen-Transformation homogen vom Grad -1 ist, siehe Lemma 3.27, gilt

$$\widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f = \|\cdot\|^{-1} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\cdot/\|\cdot\|)\,. \tag{3.44}$$

Mit (3.42) folgt daher

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} & \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{W}_{(\phi(\lambda)-x)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\, dy \\
& \overset{(3.43)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}((\phi(\lambda)-x)-y)\, dy \\
& \qquad + \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}((x-\phi(\lambda))-y)\, dy \\
& \overset{(3.44)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^{-1} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(y/\|y\|) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}((\phi(\lambda)-x)-y)\, dy \\
& \qquad + \int_{\mathbb{R}^n} \|y\|^{-1} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(y/\|y\|) \hat{t}_{\phi,\lambda,r}((x-\phi(\lambda))-y)\, dy \\
& \overset{(3.42)}{=} h_{f,\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda)-x) + h_{f,\phi,\lambda,r}(x-\phi(\lambda))\,. \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Aus Satz 3.50 und (3.45) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
f(x) & \overset{3.50}{=} (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\mathcal{D}}_{\phi(\lambda)} f(y) \mathcal{W}_{(\phi(\lambda)-x)} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)\, dy\, d\lambda \\
& \overset{(3.45)}{=} (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda h_{f,\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda)-x) + h_{f,\phi,\lambda,r}(x-\phi(\lambda))\, d\lambda
\end{aligned}
$$

und somit die Behauptung. □

Bemerkung 3.64. In der Situation von Satz 3.63 entspricht $h_{f,\phi,\lambda,r}$ einer Faltung von $\|\cdot\|^{-1}\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\cdot/\|\cdot\|)$ mit $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$. Sind die Daten $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta)$ für alle $\theta \in S^{n-1}$ gegeben, dann können wir zunächst $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(y/\|y\|)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ durch eine Rückprojektion bestimmen. Eine anschließende Gewichtung mit $\|\cdot\|^{-1}$ ergibt $\|y\|^{-1}\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(y/\|y\|)$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$. Daher können wir das auf Satz 3.63 basierende Rekonstruktionsverfahren als Filterung nach gewichteter Rückprojektion bezeichnen.

3.4.2 Die Approximative Inverse

Die Approximative Inverse der 2D und 3D Röntgen-Transformation wurde bereits eingehend untersucht, siehe z.B. Dietz [Die99], Louis [Lou03] und Weber [Web08]. In beiden Fällen führt die Wahl eines translationsinvarianten Mollifiers zu einem effizienten Rekonstruktionsverfahren vom Typ gefilterter Rückprojektion.

In dieser Arbeit werden wir den Rekonstruktionskern mit Hilfe der Inversionsformel aus Satz 3.49 für beliebige Dimensionen $n \geq 2$ bestimmen und damit einen einheitlichen Ansatz für die bisher getrennt betrachteten

Spezialfälle $n = 2$ und $n = 3$ angeben. Auch wir werden einen translationsinvarianten Mollifier verwenden, um ein effizientes Rekonstruktionsverfahren zu erhalten.

Wir beginnen zunächst mit dem Rekonstruktionskern der Röntgen-Transformation basierend auf einem beliebigen Mollifier.

Bemerkung 3.65. Wenn aus dem Kontext ersichtlich ist, um welchen Weg $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ es sich bei der Röntgen-Transformation $\mathcal{D}_\phi$ handelt, dann schreiben wir abkürzend $\mathcal{D}$ anstatt $\mathcal{D}_\phi$ und entsprechend $\mathcal{G}$ anstatt $\mathcal{G}_\phi$.

Satz 3.66 (Rekonstruktionskern der Röntgen-Transformation)**.** *Seien $\beta, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n - 3/2\}$, $e \in L^2(\Omega_r^n)$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $(\phi(\lambda), \theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$*

$$\kappa_{\mathcal{D}}(e)(\phi(\lambda), \theta) = (2\pi)^{-n/2-1} \mathcal{G}^{n-2} \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)\,.$$

Beweis. Seien $f, e \in L^2(\Omega_r^n)$. Mit Satz 3.49 folgt

$$\begin{aligned}
\langle f, e\rangle_{L^2(\Omega_r^n)} &= \int_{\Omega_r^n} f(y)\overline{e(y)}\, dy \\
&\overset{3.49}{=} \int_{\Omega_r^n} (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}f(\phi(\lambda), \theta)\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)\, d\theta\, d\lambda\, \overline{e(y)}\, dy \\
&= (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}f(\phi(\lambda), \theta) \int_{\Omega_r^n} \mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)\overline{e(y)}\, dy\, d\theta\, d\lambda
\end{aligned}$$

und daher für fast alle $(\lambda, \theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$

$$\kappa_{\mathcal{D}}(e)(\phi(\lambda), \theta) = (2\pi)^{-n/2-1} \int_{\Omega_r^n} \overline{\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)}e(y)\, dy\,. \tag{3.46}$$

Zudem gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_r^n} \mathcal{D}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)e(y)\, dy &= \int_{\Omega_r^n} \int_0^\infty \rho^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda) + \rho\theta)\, d\rho\, e(y)\, dy \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-2} \int_{\Omega_r^n} \mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda) + \rho\theta)e(y)\, dy\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda) + \rho\theta - y)e(y)\, dy\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(y)e(\phi(\lambda) + \rho\theta - y)\, dy\, d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-2}\mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda) + \rho\theta)\, d\rho \\
&= \mathcal{D}^{n-2}\mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)
\end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\Omega_r^n} \mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)e(y)\,dy = \mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\,. \tag{3.47}$$

Da $t_{\phi,\lambda,r}$ gerade und reell ist, folgt

$$\bar{\hat{t}}_{\phi,\lambda,r} = \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(-\cdot) = \hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,. \tag{3.48}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathcal{D}}(e)(\phi(\lambda),\theta) &\overset{(3.46)}{=} (2\pi)^{-n/2-1}\int_{\Omega_r^n} \overline{\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)}e(y)\,dy \\
&= (2\pi)^{-n/2-1}\int_{\Omega_r^n} \mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \bar{\hat{t}}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)e(y)\,dy \\
&= (2\pi)^{-n/2-1}\int_{\Omega_r^n} \mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_y \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)e(y)\,dy \\
&\overset{(3.47)}{=} (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation folgt unmittelbar aus dem vorangegangenen Satz.

Satz 3.67 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation)**.** *Seien β, r', $r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $e \in L^2(\Omega_{r'}^n \times \Omega_r^n)$ und $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r'}^n$*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e)g(x) = (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda \int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta)\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_{\overline{e(x,\cdot)}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\,d\theta\,d\lambda\,.$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.3, Satz 3.66 und (3.48). □

Geht der zweiparametrige Mollifier durch Translation einer einparametrigen Funktion hervor, dann besitzt der resultierende Rekonstruktionkern die nachfolgende Struktur.

Satz 3.68 (Rekonstruktionskern der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz)**.** *Seien $\beta, \tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r'}^n$ und $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}$. Dann gilt für fast alle $(\phi(\lambda),\theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$*

$$\kappa_{\mathcal{D}}(e(x,\cdot))(\phi(\lambda),\theta) = (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\,.$$

Beweis. Nach Bemerkung 2.7 ist die Hintereinanderausführung von Faltung und Translation kommutativ. Gemäß Bemerkung 1.4 c) gilt $\mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e} = \mathcal{T}_x\tilde{e}$ und somit

$$\mathcal{C}_{\mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r} = \mathcal{C}_{\hat{t}_{\phi,\lambda,r}}\mathcal{T}_x\tilde{e} = \mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\hat{t}_{\phi,\lambda,r}}\tilde{e} = \mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,.$$

Daher folgt aus Satz 3.66 für fast alle $(\lambda,\theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{D}}(e(x,\cdot))(\phi(\lambda),\theta) &= (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_{e(x,\cdot)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\\ &= (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_{\mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\\ &= (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei translationsinvariantem Mollifier ergibt sich direkt aus dem vorangegangenen Satz.

Satz 3.69 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz)**.** *Seien $\beta, \tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r'}^n$ und $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r'}^n$*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e)g(x) = (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta)\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \tag{3.49}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.3 und Satz 3.68. □

Bemerkung 3.70. Wählen wir in Satz 3.69 für die rechte Seite von Gleichung (3.49) die alternative Schreibweise

$$(2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,, \tag{3.50}$$

dann unterscheiden sich (3.50) und die Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation aus Satz 3.49

$$(2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{T}_x\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda$$

lediglich in einer zusätzlichen Faltung der Funktion $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ mit $\bar{\tilde{e}}$. Wählt man insbesondere eine Dirac-Folge $(\tilde{e}_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{R}^+} \in (L^2(\Omega_r^n))^{\mathbb{R}^+}$ zur Approximation der Delta-Distribution für $\gamma \to 0$ und definiert $e_\gamma(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}_\gamma$, dann gilt offensichtlich die zu erwartende Gleichung $\lim_{\gamma\to 0}\|\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e_\gamma)g - f\|_{L^2(\Omega_r^n)} = 0\,.$

Da nach Bemerkung 3.70 die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation und die Inversionsformel aus Satz 3.49 die gleiche Struktur aufweisen, können wir analog zu Abschnitt 3.4.1 vorgehen, um aus (3.50) effiziente Rekonstruktionsverfahren herzuleiten.

Daher wenden wir zunächst Korollar 3.55 an und erhalten dadurch eine Variante zu (3.50), die anstelle einer vom Rekonstruktionspunkt anhängigen Translation entsprechende Rotationen und eine Dilatation besitzt.

Satz 3.71 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz)**.** *Seien* $\beta, \tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ *mit* $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ *und* $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ *ein Tuy-Weg mit* $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ *für* $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r'}^n$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}$, $c_n := (2\pi)^{-n/2-1}$ *und* $c_{\phi(\lambda),x} := \frac{\|\phi(\lambda)-x\|}{\|\phi(\lambda)\|}$*. Dann gilt für fast alle* $x \in \Omega_{r'}^n$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e)g(x) = \\ c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{n-1} \int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^*\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \tag{3.51}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Satz 3.69 und Korollar 3.55. □

Um analog zu Abschnitt 3.4.1 eine alternative Darstellung der Dilatation in (3.51) angeben zu können, benötigen wir als nächstes einen Zusammenhang zwischen der Dilatation und der Faltung.

Lemma 3.72. *Für* $c \in \mathbb{R}^+$ *und* $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *gilt*

$$\mathcal{V}_c\mathcal{C}_e = c^n\mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e}\mathcal{V}_c\,.$$

Beweis. Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann folgt mit der Substitution $u = \frac{1}{c}y$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_c\mathcal{C}_e f(x) &= \mathcal{C}_e f(cx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e(y)f(cx-y)\,dy \\ &= c^n\int_{\mathbb{R}^n} e(cu)f(cx-cu)\,du \\ &= c^n\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{V}_c e(u)\mathcal{V}_c f(x-u)\,du \\ &= c^n\mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e}\mathcal{V}_c f(x)\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Kombiniert man das vorangegangene Lemma mit Lemma 3.57, dann erhält man das folgende Resultat.

Lemma 3.73. *Seien* $\beta, c, r \in \mathbb{R}^+$ *mit* $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ *ein Tuy-Weg mit* $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ *für* $\lambda \in \Lambda$ *und* $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Dann gilt*

$$\mathcal{V}_c \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r} = c^{-1} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e} \hat{t}_{\phi,\lambda,cr}\,.$$

Beweis. Aus Lemma 3.72 und Lemma 3.57 folgt

$$\mathcal{V}_c \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r} = c^n \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e} \mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r} = c^{-1} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e} \hat{t}_{\phi,\lambda,cr}$$

und somit die Behauptung. □

Mit Lemma 3.73 können wir nun eine weitere Variante zu (3.50) formulieren.

Satz 3.74 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz)**.** *Seien* $\beta, \tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ *mit* $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ *und* $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ *ein Tuy-Weg mit* $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ *für* $\lambda \in \Lambda$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r'}^n$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}$, $c_n := (2\pi)^{-n/2-1}$ *und* $c_{\phi(\lambda),x} := \frac{\|\phi(\lambda)-x\|}{\|\phi(\lambda)\|}$. *Dann gilt für fast alle* $x \in \Omega_{r'}^n$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e)g(x) = \\ c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{n-2} \int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^* \mathcal{C}_{\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}} \bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,c_{\phi(\lambda),x} r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,.$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.71 und Lemma 3.73. □

Ausgehend von Satz 3.74 erhalten wir unter Verwendung geeigneter Näherungen analog zu Abschnitt 3.4.1 Rückprojektionsverfahren für die Bestimmung der Approximativen Inversen.

Approximation 3.75 (Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung)**.** Gilt in der Situation von Satz 3.74 für alle $x \in \Omega_r^n$ und alle $\lambda \in \Lambda$ die Abschätzung $\|x\| \ll \|\phi(\lambda)\|$, dann approximieren wir $\hat{t}_{\phi,\lambda,c_{\phi(\lambda)}(x)r} \approx \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ sowie $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}} \bar{\tilde{e}}} \approx \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}$ und erhalten $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e)g \approx \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{BP}}(e)g$, wobei

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{\mathrm{BP}}(e)g(x) := \\ c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{n-2} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2} \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^* \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,. \tag{3.52}$$

Bemerkung 3.76. Analog zu Bemerkung 3.60 reicht es aus, für jeden Strahl $L_{\phi(\lambda),\theta}$ den Wert des inneren Integrals hinsichtlich S^{n-1} in (3.52)

$$m_{\phi,\lambda,r,\tilde{e}}(x) := \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta \tag{3.53}$$

für einen beliebigen Punkt $x_{a,\theta} \in L_{\phi(\lambda),\theta}$ zu bestimmen, da dieser Wert für jeden anderen Punkt des Strahls ebenfalls angenommen wird. Die Bestimmung von (3.53) entspricht einer Faltung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f$ mit

$$\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,, \tag{3.54}$$

wobei (3.54) in Abhängigkeit vom Strahl, der im Punkt $\phi(\lambda)$ beginnt und den Punkt x enthält, variiert. Dies rechtfertigt die Bezeichnung Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung. Die Filterfunktion in (3.54) unterscheidet sich von der Filterfunktion in (3.40) lediglich um eine zusätzliche Faltung von $\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ mit $\bar{\tilde{e}}$.

Approximation 3.77 (Gefilterte Rückprojektion)**.** Wenn wir in der Situation von Approximation 3.75 zusätzlich $\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r} \approx \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ approximieren, dann erhalten wir $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e)g \approx \mathcal{S}^{\mathrm{FBP}}_{\mathcal{D}}(e)g$, wobei

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\mathrm{FBP}}_{\mathcal{D}}(e)g(x) :=&\\ &c_n \int_\Lambda c^{n-2}_{\phi(\lambda),x} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,.\end{aligned} \tag{3.55}$$

Bemerkung 3.78. Analog zu Approximation 3.75 ergibt sich aus (3.55) eine Rückprojektion, siehe Bemerkung 3.76. Das innere Integral hinsichtlich S^{n-1} in (3.55)

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta$$

entspricht einer Faltung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f$ mit $\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$. Somit handelt es sich bei dem Rekonstruktionsverfahren basierend auf Approximation 3.77 um eine gefilterte Rückprojektion. Für die Berechnung des Filters muss lediglich die verallgemeinerte Röntgen-Transformation von $\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ bestimmt werden.

3.4.3 Die Faltung als regularisierte Eigenschaft

In diesem Abschnitt werden wir die Approximative Inverse für Eigenschaften untersuchen und hierbei die Faltung als Eigenschaft wählen. Mit Hilfe der Formel zur Inversion der Röntgen-Transsformation aus Satz 3.49 werden wir für beliebige Dimensionen $n \geq 2$ Rekonstruktionskerne bestimmen und Rekonstruktionsverfahren angeben, wobei die Verwendung eines translationsinvarianten Mollifiers wieder eine zentrale Rolle spielen wird.

Wir beginnen analog zur klassischen Approximativen Inversen im vorangegangenen Abschnitt und bestimmen zunächst den Rekonstruktionskern für einen beliebigen Mollifier.

Satz 3.79 (Rekonstruktionskern der Röntgen-Transformation für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$)**.** *Seien $\beta, \tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $e \in L^2(\Omega_{r'}^n)$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$ und $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $(\phi(\lambda), \theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$*

$$\kappa_{\mathcal{D}}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e)(\phi(\lambda), \theta) = (2\pi)^{-n/2-1} \mathcal{G}^{n-2} \mathcal{C}_\psi \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)\,.$$

Beweis. Analog zu Bemerkung 2.7 ist die Hintereinanderausführung zweier Faltungen kommutativ. Nach Bemerkung 1.15 gilt $(\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* = \mathcal{C}_\psi^{r',r}$ und gemäß Bemerkung 1.4 c) gilt $\mathcal{C}_\psi^{r',r} e = \mathcal{C}_\psi e$. Somit ergibt sich

$$\mathcal{C}_{(\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e} = \mathcal{C}_e \mathcal{C}_\psi^{r',r} = \mathcal{C}_\psi \mathcal{C}_e\,.$$

Aus Satz 3.66 folgt daher für fast alle $(\lambda, \theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathcal{D}}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e)(\phi(\lambda), \theta) &= (2\pi)^{-n/2-1} \mathcal{G}^{n-2} \mathcal{C}_{(\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta) \\
&= (2\pi)^{-n/2-1} \mathcal{G}^{n-2} \mathcal{C}_\psi \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)
\end{aligned}$$

und daher die Behauptung. □

Die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation für die Faltung als regularisierte Eigenschaft folgt direkt aus dem vorangegangenen Satz.

Satz 3.80 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$)**.** *Seien $\beta, \tilde{r}, r, r'' \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $e \in L^2(\Omega_{r''}^n \times \Omega_{r'}^n)$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$ und $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r''}^n$*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'}) g(x) = \\
&\qquad (2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda \int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda), \theta) \mathcal{G}^{n-2} \mathcal{C}_\psi \mathcal{C}_{\overline{e(x,\cdot)}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda), \theta)\, d\theta\, d\lambda\,.
\end{aligned}$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.8 und Satz 3.79. □

Als nächstes wählen wir wie im Fall der klassischen Approximativen Inversen einen translationsinvarianten Mollifier.

Satz 3.81 (Rekonstruktionskern der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$). *Seien $\beta, \tilde{r}, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $2\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $r'' := r' - \tilde{r}$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r''}^n$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r'}\tilde{e}$ und $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $(\phi(\lambda),\theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$*

$$\kappa_{\mathcal{D}}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e(x,\cdot))(\phi(\lambda),\theta) = (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\,.$$

Beweis. Nach Bemerkung 2.7 ist die Hintereinanderausführung von Faltung und Translation kommutativ. Gemäß Bemerkung 1.4 c) gilt $\mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e} = \mathcal{T}_x\tilde{e}$ und somit

$$\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r} = \mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\hat{t}_{\phi,\lambda,r}}\mathcal{T}_x\tilde{e} = \mathcal{T}_x\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\hat{t}_{\phi,\lambda,r}}\tilde{e} = \mathcal{T}_x\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,.$$

Daher folgt aus Satz 3.79 für fast alle $(\lambda,\theta) \in \Gamma_\phi \times S^{n-1}$

$$\begin{aligned}\kappa_{\mathcal{D}}((\mathcal{C}_\psi^{r,r'})^* e(x,\cdot))(\phi(\lambda),\theta) &= (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{e(x,\cdot)}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\\ &= (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\mathcal{T}_x^{\tilde{r},r}\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\\ &= (2\pi)^{-n/2-1}\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_\psi\mathcal{C}_{\tilde{e}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation für die Faltung als regularisierte Eigenschaft bei translationsinvariantem Mollifier folgt direkt aus dem vorangegangenen Satz.

Satz 3.82 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$). *Seien $\beta, \tilde{r}, r, \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $2\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $r'' := r' - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r''}^n$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r'}\tilde{e}$ und $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r''}^n$*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e,\mathcal{C}_\psi^{r,r'})g(x) = \\ (2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta)\mathcal{G}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\phi(\lambda),\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \qquad (3.56)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Definition 1.8 und Satz 3.81. □

Bemerkung 3.83. Wählen wir in Satz 3.82 für die rechte Seite von Gleichung (3.56) die alternative Schreibweise

$$(2\pi)^{-n/2-1}\int_\Lambda\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{T}_x\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,, \qquad (3.57)$$

dann unterscheiden sich (3.57) und die klassische Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei translationsinvariantem Mollifier in (3.50)

$$(2\pi)^{-n/2-1} \int_\Lambda \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta) \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{T}_x \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,,$$

lediglich in einer zusätzlichen Faltung von $\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ mit $\bar{\psi}$.

Bevor wir effiziente Rekonstruktionsverfahren für die Faltung als regularisierte Eigenschaft angeben, werden wir analog zu Abschnitt 3.4.2 eine Variante zu (3.56) angeben, die anstelle einer vom Rekonstruktionspunkt anhängigen Translation entsprechende Rotationen und eine Dilatation aufweist.

Satz 3.84 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz für $\mathcal{C}^{r,r'}_\psi$)**.** *Seien $\beta, \tilde{r}, r, \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $2\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $r'' := r' - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega^n_r)$, $g := \mathcal{D}f$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega^n_{\tilde{r}})$, $\psi \in L^2(\Omega^n_{\tilde{r}})$, $x \in \Omega^n_{r''}$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}^{\tilde{r},r'}_x \tilde{e}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega^n_r)$ für $\lambda \in \Lambda$, $c_n := (2\pi)^{-n/2-1}$ und $c_{\phi(\lambda),x} := \frac{\|\phi(\lambda)-x\|}{\|\phi(\lambda)\|}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega^n_{r''}$*

$$\begin{aligned}&\mathcal{S}_\mathcal{D}(e, \mathcal{C}^{r,r'}_\psi) g(x) = \\ &\quad c_n \int_\Lambda c^{n-1}_{\phi(\lambda),x} \int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta) \mathcal{U}_{\phi(\lambda),x} \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)} \mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x} \mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}} \mathcal{C}_{\bar{\psi}} \mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}} \hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,.\end{aligned} \tag{3.58}$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.82 und Korollar 3.55. □

Analog zu Abschnitt 3.4.2 werden wir eine alternative Darstellung der Dilatation in (3.58) angeben. Dazu benötigen wir das nachfolgende Resultat.

Lemma 3.85. *Seien $\beta, c, r \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega^n_r)$ für $\lambda \in \Lambda$ und $\psi, e \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\mathcal{V}_c \mathcal{C}_\psi \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r} = c^{n-1} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c\psi} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e} \hat{t}_{\phi,\lambda,cr}\,.$$

Beweis. Aus Lemma 3.72 und Lemma 3.57 folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_c \mathcal{C}_\psi \mathcal{C}_e \hat{t}_{\phi,\lambda,r} &= \mathcal{V}_c \mathcal{C}_{\mathcal{C}_\psi e} \hat{t}_{\phi,\lambda,r} \\ &= c^n \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c \mathcal{C}_\psi e} \mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r} \\ &= c^{2n} \mathcal{C}_{\mathcal{C}_{\mathcal{V}_c\psi} \mathcal{V}_c e} \mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r} \\ &= c^{2n} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c\psi} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e} \mathcal{V}_c \hat{t}_{\phi,\lambda,r} \\ &= c^{n-1} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c\psi} \mathcal{C}_{\mathcal{V}_c e} \hat{t}_{\phi,\lambda,cr}\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

Mit Hilfe von Lemma 3.85 können wir eine weitere Variante der Approximativen Inversen angeben.

Satz 3.86 (Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Translationsinvarianz für $\mathcal{C}_\psi^{r,r'}$)**.** *Seien $\beta, \tilde{r}, r, \in \mathbb{R}^+$ mit $\beta > \max\{1, n-3/2\}$ und $2\tilde{r} < r$, $r' := r - \tilde{r}$, $r'' := r' - \tilde{r}$, $f \in L^2(\Omega_r^n)$, $g := \mathcal{D}f$, $\tilde{e} \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $\psi \in L^2(\Omega_{\tilde{r}}^n)$, $x \in \Omega_{r''}^n$, $e(x,\cdot) := \mathcal{T}_x^{\tilde{r},r'}\tilde{e}$, $\phi \in \Phi^{n,r}(\Lambda)$ ein Tuy-Weg mit $t_{\phi,\lambda,r} \in H^\beta(\Omega_r^n)$ für $\lambda \in \Lambda$, $c_n := (2\pi)^{-n/2-1}$ und $c_{\phi(\lambda),x} := \frac{\|\phi(\lambda)-x\|}{\|\phi(\lambda)\|}$. Dann gilt für fast alle $x \in \Omega_{r''}^n$*

$$\mathcal{S}_\mathcal{D}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'})g(x) = c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{2(n-1)} \times$$
$$\int_{S^{n-1}} g(\phi(\lambda),\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^*\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}}\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}}\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,c_{\phi(\lambda),x}r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,.$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.84 und Lemma 3.85. □

Ausgehend von Satz 3.86 erhalten wir analog zu Abschnitt 3.4.2 Rückprojektionsverfahren für die Bestimmung der Approximativen Inversen, wenn wir geeignet approximieren.

Approximation 3.87 (Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung)**.** Gilt in der Situation von Satz 3.86 für alle $x \in \Omega_r^n$ und alle $\lambda \in \Lambda$ die Abschätzung $\|x\| \ll \|\phi(\lambda)\|$, dann approximieren wir $\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}}\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\mathcal{V}_{c_{\phi(\lambda),x}}\bar{\tilde{e}}} \approx \mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}$ sowie $\hat{t}_{\phi,\lambda,c_{\phi(\lambda)}(x)r} \approx \hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ und erhalten $\mathcal{S}_\mathcal{D}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'}) \approx \mathcal{S}_\mathcal{D}^{\mathrm{BP}}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'})$, wobei

$$\mathcal{S}_\mathcal{D}^{\mathrm{BP}}(e, \mathcal{C}_\psi^{r,r'})g(x) :=$$
$$c_n \int_\Lambda c_{\phi(\lambda),x}^{2(n-1)} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^*\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta\,d\lambda\,. \tag{3.59}$$

Bemerkung 3.88. Analog zu Bemerkung 3.76 reicht es aus, für jeden Strahl $L_{\phi(\lambda),\theta}$ den Wert des inneren Integrals hinsichtlich S^{n-1} in (3.59)

$$m_{\phi,\lambda,r,\tilde{e},\psi}(x) := \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f(\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^*\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\,d\theta \tag{3.60}$$

für einen beliebigen Punkt $x_{a,\theta} \in L_{\phi(\lambda),\theta}$ zu bestimmen, da dieser Wert für jeden anderen Punkt des Strahls ebenfalls angenommen wird. Die Bestimmung von (3.60) entspricht einer Faltung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f$ mit

$$\mathcal{G}_{\phi(\lambda)}^{n-2}\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}^*\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\tilde{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}\,, \tag{3.61}$$

wobei (3.61) in Abhängigkeit vom Strahl, der im Punkt $\phi(\lambda)$ beginnt und den Punkt x enthält, variiert. Dies rechtfertigt die Bezeichnung Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung. Die Filterfunktion in (3.61) unterscheidet sich von der Filterfunktion in (3.54) lediglich um eine zusätzliche Faltung von $\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ mit $\bar{\psi}$.

Approximation 3.89 (Gefilterte Rückprojektion)**.** Wenn wir in der Situation von Approximation 3.87 zusätzlich $\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{U}^*_{\phi(\lambda),x}\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r} \approx \mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ approximieren, dann erhalten wir $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}(e, \mathcal{C}^{r,r'}_{\psi}) \approx \mathcal{S}^{\mathrm{FBP}}_{\mathcal{D}}(e, \mathcal{C}^{r,r'}_{\psi})$, wobei

$$\mathcal{S}^{\mathrm{FBP}}_{\mathcal{D}}(e, \mathcal{C}^{r,r'}_{\psi})g(x) := c_n \int_{\Lambda} c^{2(n-1)}_{\phi(\lambda),x} \int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta\, d\lambda\,. \tag{3.62}$$

Bemerkung 3.90. Analog zu Approximation 3.87 ergibt sich aus (3.62) eine Rückprojektion, siehe Bemerkung 3.88. Das innere Integral hinsichtlich S^{n-1} in (3.62)

$$\int_{S^{n-1}} \mathcal{D}_{\phi(\lambda)} f(\theta)\mathcal{U}_{\phi(\lambda),x}\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}(\theta)\, d\theta$$

entspricht einer Faltung von $\mathcal{D}_{\phi(\lambda)}f$ mit $\mathcal{G}^{n-2}_{\phi(\lambda)}\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$. Somit handelt es sich bei dem Rekonstruktionsverfahren basierend auf Approximation 3.89 um eine gefilterte Rückprojektion. Für die Berechnung des Filters muss lediglich die verallgemeinerte Röntgen-Transformation von $\mathcal{C}_{\bar{\psi}}\mathcal{C}_{\bar{\bar{e}}}\hat{t}_{\phi,\lambda,r}$ bestimmt werden.

Zusammenfassung

In der CT wird die geschwächte Intensität einer Strahlung entlang unterschiedlicher Pfade durch ein Objekt gemessen, um daraus auf die Dichteverteilung im Objekt zu schließen. Die Radon- bzw. Röntgen-Transformation einer geeigneten Funktion f stellt das mathematische Modell der CT dar, wobei f dem gemessenen Objekt entspricht. Ziel dieser Arbeit ist ein Rekonstruktionsverfahren zur direkten Berechnung der Faltung von f mit einer weiteren Funktion anhand der Radon- bzw. Röntgen-Transformation von f. Die dabei auftretenden inversen Probleme sollen mit Hilfe der Approximativen Inversen gelöst werden.

In **Kapitel 1** befassen wir uns mit der Theorie der klassischen Approximativen Inversen sowie deren Erweiterung für die Berechnung von Eigenschaften. Als Eigenschaft untersuchen wir dabei insbesondere die Klasse der Fredholmschen Integraloperatoren.

Bei der Anwendung der Approximativen Inversen spielt die Berechnung von sogenannten Rekonstruktionskernen eine wichtige Rolle. In [Lou96] zeigt Louis die Übertragbarkeit von Invarianzen eines Operators auf den zugehörigen Rekonstruktionskern. In Satz 1.2 modifizieren wir dieses Ergebnis leicht und stellen einen Zusammenhang zwischen den Rekonstruktionskernen verschiedener Operatoren her. Wir nutzen dieses Resultat in Korollar 1.10 und zeigen, dass der Rekonstruktionskern der Approximativen Inversen einer Eigenschaft unter bestimmten Voraussetzungen aus dem Rekonstruktionskern der klassischen Approximativen Inversen hervorgeht.

Wir geben zudem in Satz 1.13 einen Zusammenhang zwischen der klassischen Approximativen Inversen und der Approximativen Inversen für Eigenschaften an. Bei der zu berechnenden Eigenschaft handelt es sich hierbei um den Fredholmschen Integraloperator. Den Spezialfall dieses Zusammenhangs für die Faltung zeigen wir in Korollar 1.20.

In **Kapitel 2** geben wir Rekonstruktionsverfahren für die 2D CT bei Parallalstrahlgeometrie an. Die Radon-Transformation stellt hierfür das mathematische Modell dar. Wir geben daher wohlbekannte Resultate zur Radon-Transformation wieder, insbesondere eine Inversionsformel, die Grundlage für Rekonstruktionsverfahren und Anwendung der Approximativen Inversen ist.

Die klassische Approximative Inverse der Radon-Transformation und die Verwendung von Invarianzen bei der Berechnung von Rekonstruktionskernen wurden bereits eingehend untersucht. Wir zeigen in Satz 2.20, dass aus jedem linearen stetigen Operator zwischen Bildräumen der Radon-Transformation eine Invarianz konstruiert werden kann.

Des Weiteren beschäftigen wir uns mit der Struktur der Approximativen Inversen für Eigenschaften und wählen dabei konkret die Faltung als Eigenschaft. In Satz 2.26 legen wir dar, dass sich der Rekonstruktionskern der Radon-Transformation für die n-dimensionale Faltung aus dem Rekonstruktionskern der klassischen Approximativen Inversen durch Anwendung der eindimensionalen Faltung ergibt. Die Approximative Inverse der Radon-Transformation für die Faltung geben wir in Satz 2.27 an.

Um zu einem effizienten Rekonstruktionsverfahren zu gelangen, verwenden wir anschließend einen translationsinvarianten Mollifier. Die Struktur des entsprechenden Rekonstruktionskerns zur Bestimmung der Faltung ist in Satz 2.28 dargestellt. Das Rekonstruktionsverfahren zur direkten Bestimmung der Faltung von f mit einer weiteren Funktion anhand der Radon-Transformation von f zeigen wir in Satz 2.29. Das Verfahren ist vom Typ gefilterte Rückprojektion.

In **Kapitel 3** untersuchen wir die Röntgen-Transformation, da diese die 2D CT bei Fächerstrahlgeometrie und die 3D CT bei Kegelstrahlgeometrie modelliert. Wir beginnen zunächst mit der Theorie der erweiterten Radon-Transformation und geben in Satz 3.10 eine neue Formel zur Inversion der erweiterten Radon-Transformation an. Anschließend stellen wir in Satz 3.21 einen Zusammenhang zwischen der Röntgen-Transformation und der erweiterten Radon-Transformation her. In Bemerkung 3.24 zeigen wir, dass sich die Formel von Grangeat [Gra91] mittels Satz 3.21 darstellen lässt. Den Zusammenhang zwischen Satz 3.21 und der Formel von Smith [Smi85] formulieren wir in Bemerkung 3.31.

In Lemma 3.46 werden wir die Anwendung des Riesz-Potentials auf die Radon-Transformation und die verallgemeinerte Röntgen-Transformation in Beziehung zueinander setzen. Diese Beziehung ist wesentlich für die Struktur einer neuen Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation, die wir in Satz 3.49 zeigen. Von bisher bekannten Inversionsformeln unterscheidet sich die neue Formel u.a. hinsichtlich folgender Aspekte: Die neue Formel gilt für beliebige Dimensionen und nicht nur im 3D-Fall. Anstatt der Formel von Grangeat [Gra91] verwenden wir den Zusammenhang zwischen der Röntgen-Transformation und der erweiterten Radon-Transformation aus Satz 3.21. Das Crofton-Symbol, welches in der Regel eine unstetige Funktion darstellt, muss nicht abgeleitet werden.

Ausgehend von der Inversion der Röntgen-Transformation geben wir in Satz 3.50 eine neue Formel zur Inversion der erweiterten Röntgen-Transformation an.

Anschließend entwickeln wir Rekonstruktionsverfahren und beginnen mit Verfahren, die sich direkt aus den neuen Inversionsformeln ergeben. Wir geben dazu in Satz 3.58 eine Variante zu Satz 3.49 an, bei der sich die Abhängigkeit der auftretenden Integrale vom Rekonstruktionspunkt anders darstellt. In Approximation 3.59 nutzen wir diese Variante, um durch eine Näherung ein Rekonstruktionsverfahren vom Typ Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung zu erhalten. Mittels einer weiteren Näherung zeigen wir in Approximation 3.61 ein Rekonstruktionsverfahren vom Typ gefilterte Rückprojektion.

Aus der Formel zur Inversion der erweiterten Röntgen-Transformation ergibt sich direkt ein Rekonstruktionsverfahren, bei dem die Filterung erst nach einer gewichteten Rückprojektion stattfindet und keine Approximationen notwendig sind. Dieses Verfahren zeigen wir in Satz 3.63.

Als nächstes beschäftigen wir uns mit der Approximativen Inversen der Röntgen-Transformation, die bereits eingehend für den 2D- und 3D-Fall untersucht wurde. Durch die neue Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation ergibt sich auch eine neue Struktur des Rekonstruktionskerns und damit der Approximativen Inversen. Diese beiden Resultate zeigen wir in Satz 3.66 und Satz 3.67. Ebenso wie die neue Inversionsformel gelten auch die beiden Resultate für beliebige Dimensionen.

Für die Herleitung eines Rekonstruktionsverfahrens wählen wir analog zur Radon-Transformation einen translationsinvarianten Mollifier. Die daraus resultierende Struktur des Rekonstruktionskerns und der Approximativen Inversen zeigen wir in Satz 3.68 und Satz 3.69. Mit Satz 3.74 geben wir eine alternative Darstellung der Approximativen Inversen der Röntgen-Transformation bei translationsinvariantem Mollifier an. Hierauf basiert ein Rekonstruktionsverfahren vom Typ Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung, für welches wir eine Näherung benötigen. Dieses Verfahren zeigen wir in Approximation 3.75. Wir verwenden in Approximation 3.77 eine weitere Näherung und erhalten dadurch ein Rekonstruktionsverfahren vom Typ gefilterte Rückprojektion.

Abschließend untersuchen wir die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation für Eigenschaften und wählen als Eigenschaft die Faltung. Die Struktur des zugehörigen Rekonstruktionskerns und der Approximativen Inversen zeigen wir in Satz 3.79 und Satz 3.80.

Den Rekonstruktionskern und die Approximative Inverse der Röntgen-Transformation bei Wahl eines translationsinvarianten Mollifiers geben wir in Satz 3.81 und Satz 3.82 an. Analog zu den Rekonstruktionsverfahren, die sich aus der Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation und der Approximativen Inversen der Röntgen-Transformation ergeben, leiten wir für die Approximative Inverse zur direkten Berechnung der Faltung eine alternative Darstellung in Satz 3.86 her. Durch eine Näherung erhalten wir als Rekonstruktionsverfahren wieder eine Rückprojektion mit translationsvarianter Filterung. Wenn wir eine weitere Näherung anwenden, dann ergibt sich eine gefilterte Rückprojektion. Diese beiden Resultate zeigen wir in Approximation 3.87 und Approximation 3.89.

Ausblick

Wir geben in dieser Arbeit einen Zusammenhang zwischen der klassischen Approximativen Inversen und der Approximativen Inversen für Eigenschaften an, wobei als Eigenschaft die Klasse der Fredholmschen Integraloperatoren gewählt wird. Eine zukünftige Aufgabenstellung wird sein, die Existenz weiterer Zusammenhänge auch für andere Operatorklassen zu untersuchen.

Die Implementierung der in dieser Arbeit entwickelten Rekonstruktionsverfahren wird ebenfalls eine nächste Aufgabe sein. Da die Berechnung von Wavelet-Koeffizienten als Faltung dargestellt werden kann, bietet sich die Wavelet-Analyse als praxisrelevantes Beispiel einer direkt zu berechnenden Eigenschaft an.

Rekonstruktionsverfahren für die Parallelstrahlgeometrie, die auf der Inversion der Radon-Transformation basieren und Wavelets verwenden, wurden schon eingehend untersucht, siehe Louis, Maass und Rieder [LMR98], Bonnet, Peyrin, Turjman und Prost [BPTP02] sowie Schön [Sch06]. Im Unterschied zu den bisherigen Ansätzen geben wir ein Rekonstruktionsverfahren mit Hilfe der Approximativen Inversen für Eigenschaften an. Dadurch kann neben der direkten Berechnung der Wavelet-Koeffizienten aus den gegebenen Daten auch gleichzeitig das vorliegende inverse Problem regularisiert werden. Nach erfolgreicher Implementierung der Rekonstruktionsverfahren, die in dieser Arbeit entstanden sind, müssen die Ergebnisse mit den Resulataten der eingangs erwähnten Ansätze zur direkten Rekonstruktion von Wavelet-Koeffizienten verglichen werden.

Unabhängig von der Approximativen Inversen sind aus der neuen Formel zur Inversion der Röntgen-Transformation zwei approximative und ein theoretisch exaktes Rekonstruktionsverfahren hervorgegangen. Diese müssen implementiert und mit 2D-/3D-Rekonstruktionsverfahren für Fächerstrahl- und Kegelstrahlgeometrie, die dem Stand der Technik entsprechen, verglichen werden. Insbesondere muss untersucht werden, bei welchen Aufnahmegeometrien die approximativen Verfahren vernachlässigbare Artefakte erzeugen.

Rekonstruktionsverfahren, die auf der Approximativen Inversen der Röntgen-Transformation beruhen, wurden schon eingehend untersucht. Da sich durch die neue Inversionsformel für die Röntgen-Transformation eine neue Struktur für die Approximative Inverse ergibt, müssen auch hier die Rekonstruktionsverfahren implementiert und die Ergebnisse den Resultaten von bereits existierenden Rekonstruktionsverfahren gegenübergestellt werden. Hierbei muss auch untersucht werden, welche Art der Rekonstruktionskernberechnung, z.B. numerisch oder analytisch, praktikabel ist.

Die Approximative Inverse zur direkten Berechnung der Faltung aus den gegebenen Daten bzw. die daraus resultierenden Rekonstruktionsverfahren müssen ebenfalls implementiert werden. Die Untersuchung, für welche Aufnahmegeometrien die notwendigen Approximationen geeignet sind, ist dabei wieder von besonderem Interessen.

Die Formel zur Inversion der n-dimensionalen Röntgen-Transformation wird in der voliegenden Arbeit im Kontext der CT verwendet. Ob die Formel in anderen Anwendungsgebieten gewinnbringend eingesetzt werden kann, soll in Zukunft noch genauer untersucht werden.

Literaturverzeichnis

[BPTP02] S. Bonnet, F. Peyrin, F. Turjman, and R. Prost. Multiresolution reconstruction in fan-beam tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11(3):169–176, March 2002.

[DC94] M. Defrise and R. Clack. A cone-beam reconstruction algorithm using shift-variant filtering and cone-beam backprojection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(1):186–195, March 1994.

[Die99] R. L. Dietz. *Die Approximative Inverse als Rekonstruktionsmethode in der RöntgenComputertomographie*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, 1999.

[GG87] I. M. Gel'fand and A. B. Goncharov. Recovery of a compactly supported function starting from its integrals over lines intersecting a given set of points in space. *Soviet Math. Dokl.*, 34(2):373–376, 1987.

[Gra91] P. Grangeat. Mathematical framework of cone-beam reconstruction via the first derivative of the radon transform. In G. T. Herman, A. K. Louis, and F. Natterer, editors, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1497, pages 66–97. Springer, 1991.

[Had23] J. Hadamard. *Lectures on the Cauchy problem in linear partial differential equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.

[Hel99] S. Helgason. *The Radon Transform*. Birkhäuser, second edition, 1999.

[HSSW80] C. Hamaker, K. T. Smith, D. C. Solmon, and S. L. Wagner. The divergent beam x-ray transform. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 10(1):253–283, 1980.

[Kat03] A. Katsevich. A general scheme for constructing inversion algorithms for cone beam ct. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(21):1305–1321, 2003.

[KS94] H. Kudo and T. Saito. Derivation and implementation of a cone-beam reconstruction algorithm for nonplanar orbits. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(1):196–211, March 1994.

[KS98] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1998.

[LM90] A.K. Louis and P. Maaß. A mollifier method for linear operator equations of the first kind. *Inverse Problems*, 6:427–440, 1990.

[LM91] A.K. Louis and P. Maaß. Smoothed projection methods for the moment problem. *Numerische Mathematik*, 59(1):277–294, 1991.

[LMR98] A. K. Louis, P. Maaß, and A. Rieder. *Wavelets*. Teubner, 1998.

[Lou89] A. K. Louis. *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner, 1989.

[Lou96] A. K. Louis. Approximate inverse for linear and some nonlinear problems. *Inverse Problems*, 12:175–190, 1996.

[Lou99] A. K. Louis. A unified approach to regularization methods for linear ill-posed problems. *Inverse Problems*, 15:489–498, 1999.

[Lou03] A. K. Louis. Filter design in three-dimensional cone beam tomography: circular scanning geometry. *Inverse Problems*, 19:31–40, 2003.

[Lou06] A.K. Louis. Development of algorithms in computerized tomography. In G. Olafsson and E. T. Quinto, editors, *The Radon Transform, Inverse Problems, and Tomography*, pages 25–42, 2006.

[Lou08] A.K. Louis. Combining image reconstruction and image analysis with an application to two-dimensional tomography. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 1(2):188–208, 2008.

[Lou09] A. K. Louis. *Private Kommunikation*. 2009.

[LS96] A. K. Louis and T. Schuster. A novel filter design technique in 2d computerized tomography. *Inverse Problems*, 12:685–696, 1996.

[Nat86] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. John Wiley & Sons, 1986.

[NW01] F. Natterer and F. Wübbeling. *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, 2001.

[Pal91] V. P. Palamodov. Inversion formulas for the three-dimensional ray transform. In G. T. Herman, A. K. Louis, and F. Natterer, editors, *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1497, pages 53–62. Springer, 1991.

[Rad17] J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig*, 69:262–277, 1917.

[Rie03] A. Rieder. *Keine Probleme mit inversen Problemen: Eine Einführung in ihre stabile Lösung*. Vieweg, 2003.

[RS00] A. Rieder and T. Schuster. The approximate inverse in action with an application to computerized tomography. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 37(6):1909–1929, 2000.

[Sch99] T. Schuster. *Schnelle Rekonstruktion von Geschwindigkeitsfeldern und Theorie der Approximativen Inversen*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, 1999.

[Sch06] T. Schön. Multiresolutionsanalyse in der Computer-Tomographie. Diplomarbeit, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, 2006.

[Sch07] T. Schuster. *The Method of Approximate Inverse: Theory and Applications*. Springer, 2007.

[Smi85] B. D. Smith. Image reconstruction from cone-beam projections: Necessary and sufficient conditions and reconstruction methods. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 4(1):14–25, March 1985.

[Tuy83] H. K. Tuy. An inversion formula for cone-beam reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(3):546–552, 1983.

[Web08] T. Weber. *Schnelle Rekonstruktionskernberechnung in der 3D-Computertomographie*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, 2008.

[Wer05] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2005.

[Yos95] K. Yosida. *Functional Analysis*. Springer, 6. edition, 1995.

Namen- und Sachverzeichnis