Über die Fourier-Jacobizerlegung von Klingen-Eisensteinreihen

Dissertation
zur Erlangung des Grades
des Doktors der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

von
Thorsten Paul

Saarbrücken
September 2015

Tag des Kolloquiums:	18. November 2015
Dekan:	Prof. Dr. Markus Bläser

Prüfungsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. Jörg Eschmeier
Berichterstatter:	Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot
	Prof. Dr. Ernst-Ulrich Gekeler
	Prof. Dr. Siegfried Böcherer
Akademischer Mitarbeiter:	Dr. Roland Friedrich

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Der Vektorraum $\mathcal{M}_n^k$ der Siegelschen Modulformen vom Gewicht k und Grad n besitzt nach Klingen (siehe [Kli90]) eine Zerlegung in eine direkte Summe

$$\mathcal{M}_n^k = \bigoplus_{m=0}^{n} M_{n,m}^k.$$

Der Raum $M_{n,m}^k$ von Klingen-Eisensteinreihen zu Spitzenformen vom Grad m ist dabei isomorph zum Raum $\mathcal{S}$ der Spitzenformen vom Gewicht k und Grad m.

Weiter können Siegelsche Modulformen für alle $0 \leq r \leq n$ in ihre Fourier-Jacobikoeffizienten vom Grad $(r, n-r)$ zerlegt werden.

Wie Dulinski in [Dul93] gezeigt hat, lässt sich der Vektorraum der Jacobiformen $\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T)$ vom Gewicht k, Grad $(r, n-r)$ und Index T als direkte Summe

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T) = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{J}_{r,n-r,s}^k(T)$$

schreiben. Dabei sind die Räume $\mathcal{J}_{r,n-r,s}^k(T)$ isomorph zu einer direkten Summe von Räumen von Jacobi-Spitzenformen vom Grad $(s, n-r)$ und verschiedenen Indizes.

Es stellt sich die Frage, wie diese Zerlegungen zusammenpassen. Dazu kann man die Summanden eines Jacobikoeffizienten einer Klingen-Eisensteinreihe in $M_{n,m}^k$ bezüglich der Zerlegung von $\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T)$ betrachten. Insbesondere stellt sich die Frage wie die Fourierkoeffizienten eines solchen Summanden berechnet werden können.

Für $m = n$ oder $r = 0$ ist diese Fragestellung trivial, für $m = 0$ und $r = n$ wurde dies von Böcherer gelöst. Sonst sind Ergebnisse nur für $n = 2$ unter weiteren Einschränkungen bekannt.

In dieser Arbeit werde ich diese Fourierkoeffizienten für allgemeine n und ohne Einschränkungen berechnen.

Dazu werden wir eine Verallgemeinerung der Garrettschen Abbildung $\Lambda_m^n : \mathcal{S}_m^k \to \mathcal{M}_n^k$ benutzen, die durch

$$\Lambda_m^n(f)(Z_1) = \left\langle f(*), E_{n+m,0}^k \begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\rangle$$

definiert ist. Wir werden zeigen dass die gesuchten Fourierkoeffizienten mit denen der Verallgemeinerung von Λ_m^n bis auf eine Konstante übereinstimmen. Dies können wir benutzen um die gesuchten Fourierkoeffizienten zu berechnen.

Abstract

The vector space $\mathcal{M}_n^k$ of Siegel modular forms of weight k and degree n has a decomposition (due to Klingen ([Kli90])) into a direct sum

$$\mathcal{M}_n^k = \bigoplus_{m=0}^{n} M_{n,m}^k,$$

where the spaces $M_{n,m}^k$ of Klingen-Eisenstein series are isomorphic to spaces of cusp forms of weight k and degree m.

We can also decompose a Siegel modular form into Fourier Jacobi coefficients of degree $(r, n-r)$ for all $0 \leq r \leq n$.

Due to Dulinski, the vector space of Jacobi forms $\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T)$ of weight k, degree $(r, n-r)$, and index T can be decomposed as a direct sum

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T) = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{J}_{r,n-r,s}^k(T).$$

Each space $\mathcal{J}_{r,n-r,s}^k(T)$ is isomorphic to a direct sum of spaces of Jacobi cusp forms of degree $(s, n-r)$ and varying indices.

This leads to the question how these decompositions fit together. That is, what are the components of a Fourier Jacobi coefficient of the Klingen Eisenstein sreies in the above decomposition.

In particular, we want to compute the Fourier coefficients of the summands in the spaces $\mathcal{J}_{r,n-r,s}^k(T)$.

This is trivial for $r = 0$ or $m = n$. The cases $m = 0$ and $r = n$ were solved by Böcherer.

Besides these cases there are known results only for $n = 2$ with some further restrictions.

In the present thesis, the Fourier coefficients are computed for general n and restrictions.

For that purpose, we will use a generalisation of Garrett's map $\Lambda_m^n : \mathcal{S}_m^k \to \mathcal{M}_n^k$, which is given by

$$\Lambda_m^n(f)(Z_1) = \left\langle f(*), E_{n+m,0}^k \begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\rangle.$$

In this dissertation I show that the desired after Fourier coefficients correspond to those of the generalisation of Λ_m^n up to one constant.

This can be used to compute the Fourier coefficients.

Einleitung

In dieser Arbeit werde ich die Fourierkoeffizienten von Zerlegungen der Fourier-Jacobikoeffizienten von Klingen-Eisensteinreihen berechnen.

Es sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Unter einer elliptischen Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{N}$ verstehen wir eine holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{H} \to \mathbb{C},$$

die für alle Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gleichung

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

erfüllt und eine Fourierzerlegung

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j e(jz) \qquad (\text{mit } e(z) = \exp(2\pi i z))$$

besitzt.

Gilt $b_0 = 0$, kommen in der Fourierzerlegung von f also nur Summanden zu positivem j vor, so nennen wir f eine Spitzenform. Es ist bekannt, dass der Vektorraum der Modulformen $\mathcal{M}_k$ eine Zerlegung

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{S}_k \oplus < G_k >$$

in den Raum der Spitzenformen $\mathcal{S}_k$ und das Erzeugnis der Eisensteinreihe

$$G_k(\tau) := \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(c\tau + d)^k}$$

besitzt.

Eine mögliche Verallgemeinerung von elliptischen Modulformen sind Siegelsche Modulformen. Hierbei werden Funktionen in mehreren Variablen betrachtet. Dazu betrachten wir den Siegelschen oberen Halbraum

$$\mathbb{H}_n := \{Z \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid Z =^t Z, \operatorname{Im}(Z) \text{ ist positiv definit}\}$$

und die symplektische Gruppe

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) := \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z}) \mid^t MJM = J\}, \qquad \text{mit } J := \begin{pmatrix} 0_{n,n} & 1_n \\ -1_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Siegelsche Modulformen sind holomorphe Funktionen

$$f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C},$$

die für alle $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ die Gleichung

$$f((AZ+B)(CZ+D)^{-1}) = \det(CZ+D)^k f(Z)$$

erfüllen.

Diese Funktionen haben eine Fourierzerlegung

$$f(Z) = \sum_T b_f(T) e(tr(TZ)),$$

wobei die Summation über alle symmetrischen, positiv semidefiniten, halbganzen Matrizen läuft. Auch der Begriff der Spitzenform lässt sich verallgemeinern: Von einer Spitzenform spricht man hier, wenn die Summation nur über positiv definite Matrizen T läuft.

Auch der Vektorraum der Siegelschen Modulformen $\mathcal{M}_n^k$ besitzt (für ausreichend großes Gewicht) eine Zerlegung in direkte Summanden, bei der allerdings mehr Summanden als bei elliptischen Modulformen auftreten

$$\mathcal{M}_n^k = \bigoplus_{m=0}^{n} \mathcal{M}_{n,m}^k.$$

Hierbei liefern der Siegel-Operator

$$\Phi^{n-m} : \mathcal{M}_{n,m}^k \to \mathcal{S}_m^k$$

und die Klingen-Eisensteinreihen

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m^k &\to \mathcal{M}_{n,m}^k \\ f &\mapsto E_{n,m}^k(f) \end{aligned}$$

zueinander inverse Abbildungen zwischen dem Raum $\mathcal{M}_{n,m}^k$ und dem Raum $\mathcal{S}_m^k$ der Spitzenformen vom Grad m. In diesem Zusammenhang definieren wir noch $\mathcal{S}_0^k := \mathbb{C}$.

Im Fall $n = 2$ schreiben wir $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix}$ und $T = \begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix}$. Setzen wir dies in die Fourierzerlegung von f ein, so erhalten wir

$$f(Z) = \sum_{t_1,t_2,t_4} b_f(t_1,t_2,t_4) e(t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_4 z_4),$$

wobei $4t_1t_4 - t_2^2 \geq 0$ gilt. Wir fassen dies als Funktion in z_4 auf und betrachten die Fourierkoeffizienten dieser Funktion, die wiederum Funktionen in z_1 und z_2 sind:

$$\Phi_{f,t_4}(z_1,z_2) := \sum_{t_1,t_2} b_f(t_1,t_2,t_4) e(t_1 z_1 + t_2 z_2).$$

Diese Funktionen haben ein Transformationsverhalten bezüglich einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, das sich aus dem Transformationsverhalten von f ableiten lässt.

Solche Funktionen werden Jacobiformen (vom Gewicht k und Index t_4) genannt und wurden schon von Eichler und Zagier in [EZ85] genauer untersucht.

Dort wurde gezeigt, dass auch der Raum der Jacobiformen

$$\mathcal{J}^k(t_4) = \mathcal{J}^k_{\mathrm{Eis}}(t_4) \oplus \mathcal{J}^k_{\mathrm{cusp}}(t_4)$$

eine Zerlegung in den Raum der Spitzenformen $\mathcal{J}^k_{\mathrm{cusp}}(t_4)$ und den Raum der Eisensteinreihen $\mathcal{J}^k_{\mathrm{Eis}}(t_4)$ besitzt.

Analoge Überlegungen können wir auch für beliebige n durchführen. Dazu teilen wir die Matrizen

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {}^tZ_2 & Z_4 \end{pmatrix}$$

und

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ {}^tT_2 & T_4 \end{pmatrix}$$

auf in Blöcke mit $Z_1, T_1 \in \mathbb{Z}^{r\times r}$ und $Z_4, T_4 \in \mathbb{Z}^{n-r\times n-r}$ für $0 \leq r \leq n$. Durch ähnliche Überlegungen wie im Fall $n = 2$ erhalten wir Funktionen

$$\Phi : \mathbb{H}_r \times \mathbb{C}^{r\times n-r} \to \mathbb{C},$$

die auch ein Transformationsverhalten unter einer Untergruppe der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ besitzen. Diese Jacobiformen vom Gewicht $(r, n-r)$ hat Dulinski untersucht und gezeigt, dass der Raum $\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T_4)$ eine Zerlegung

$$\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T_4) = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T_4)$$

besitzt. Hier ist der Raum $\mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T_4)$ isomorph zu einer direktem Summe von Räumen von Spitzenformen vom Grad $(s, n-r)$ und verschiedenem Index.

Es stellt sich die Frage, wie diese Zerlegungen zusammenpassen, d.h. ist $f \in \mathcal{M}^k_{n,i}$, wie zerlegt sich dann $\Phi_{T_4} = \sum_s \Phi_{T_4,s}$ mit $\Phi_{T_4,s} \in \mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T_4)$?

Für $f \in \mathcal{M}^k_{n,n}$ sehen wir leicht, dass $\Phi_{T_4} \in \mathcal{J}^k_{r,n-r,r}(T_4)$ gilt. Für $f \in \mathcal{M}^k_{n,0}$ hat Böcherer in [Böc83] nachgerechnet, dass $\Phi_{T_4} \in \mathcal{J}^k_{r,n-r,0}(T_4)$ gilt. Weiter hat er im Fall $n = 2$, $m = 1$ für Matrizen $\begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix}$ und für eine Basis des Raums $\mathcal{M}^k_{2,1}$ die Fourierkoeffizienten

$$c_{t_4,0}(t_1, t_2) = c_{2,1} \frac{1}{L_2(f, 2k-2)} a_2(T) \sum_{v\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{b(t_4 v^2)}{(t_4 v^2)^{k-1}} \tag{1}$$

von $\Phi_{t_4,0}$ und

$$c_{t_4,1}(t_1,t_2) = c_{2,1}\frac{1}{L_2(f,2k-2)}a_2(T)\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}^2\\ u\neq 0}}\frac{b(t_4v^2+t_2uv+t_1u^2)}{(t_4v^2+t_2uv+t_1u^2)^{k-1}} \tag{2}$$

von Φ^1_{f,t_4} als Teilsummen der Fourierkoeffizieten

$$c_{t_4}(t_1,t_2) = c_{2,1}\frac{1}{L_2(f,2k-2)}a_2(T)\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}^2\\ (u,v)\neq (0,0)}}\frac{b(t_4v^2+t_2uv+t_1u^2)}{(t_4v^2+t_2uv+t_1u^2)^{k-1}}$$

der Funktionen f dargestellt. Dabei ist

$$c_{2,1} := \frac{\zeta(1-k)\zeta(2k-2)}{2}$$

eine Konstante und

$$L_2(f,s) := \prod_p \frac{1}{(1-\alpha_p^2p^{-s})(1-\beta_p^2p^{-s})(1-p^{k-1-s})}$$

eine L-Funktion mit $\alpha_p+\beta_p = b(p)$ und $\alpha_p\beta_p = p^{k-1}$. Um diese Fourierkoeffizienten zu berechnen, hat Böcherer die Werte der Jacobiformen Φ_{t_4} an den Spitzen bestimmt, um so den Eisensteinreihenanteil $\Phi_{t_4,0}$ und dessen Fourierkoeffizienten $c_{t_4,0}$ berechnen zu können.

Um Böcherers Ergebnisse zu verallgemeinern, werde ich hier einen anderen Ansatz verfolgen:
Wir werden die Funktionen $\Phi_{T,s}$ zu einer Funktion $H^t_{n,m,r} : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ zusammensetzen, indem wir

$$H^t_{n,m,r}(f,\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2\\ {}^tZ_2 & Z_4\end{pmatrix}) := \sum_{T\geq 0}\Phi_{m+t-\mathrm{rg}(T)}(Z_1,Z_2)e(\mathrm{tr}(TZ_4))$$

definieren. Der Fourierkoeffizient $c_{T,s}(R_1,R_2)$ von $\Phi_{T,s}$ entspricht dann dem Fourierkoeffizient von $H^{s-m+\mathrm{rg}(T)}_{n,m,r}$ zu $\begin{pmatrix} R_1 & R_2\\ {}^tR_2 & T\end{pmatrix}$. Zum Berechnen der Fourierkoeffizienten der Funktionen $H^t_{n,m,r}$ benutzen wir die Methoden, mit Hilfe derer wir auch die Fourierkoeffizienten von $E_{n,m}(f)$ berechnen. Bei deren Berechnung nutzen wir aus, dass

$$\left\langle E_{n+m,0}(1,\begin{pmatrix} Z_1 & 0\\ 0 & Z_2\end{pmatrix}), f(Z_2)\right\rangle = \lambda(f)E^k_{n,m}(f,Z_1)$$

gilt, sofern f eine Eigenform eines speziellen Heckeoperators ist. Da der Wert $\lambda(f)\neq 0$ von Böcherer in [Böc83] und [Böc84] berechnet wurde, reicht es nun, die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$\left\langle \sum_{\gamma\in\mathbb{C}_{n+m}\setminus\mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})} j(\gamma,\begin{pmatrix} Z_1 & 0\\ 0 & Z_2\end{pmatrix})^{-k}, f(Z_2)\right\rangle$$

(als Funktion in Z_1) zu berechnen.
Wir werden diese Methode verwenden, indem wir Teilmengen $X^v_{n,m,r} \subset \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$ finden, die die Gleichung

$$\left\langle f(Z_2), \sum_{\gamma \in \mathbb{C}_{n+m} \backslash X^v_{n,m,r}} j(\gamma, \begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle = \lambda(f) H^{v-r-m}_{n,m,r}(f, Z_1)$$

erfüllen. Dann können wir die gesuchten Fourierkoeffizienten der Funktion $H^t_{n,m,r}$ bestimmen, indem wir die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$\left\langle f(Z_2), \sum_{\gamma \in \mathbb{C}_{n+m} \backslash X^v_{n,m,r}} j(\gamma, \begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$$

berechnen.
Mit Konvergenzbetrachtungen werden wir uns in dieser Arbeit nicht befassen: Die betrachteten Klingen-Eisensteinreihen konvergieren für Gewicht $k > n + m + 1$ absolut. Für diese Gewichte konvergiert auch die Siegelsche Eisensteinreihe E^k_{n+m} und damit alle anderen Funktionen als Teilreihen dieser beiden Eisensteinreihen.

In Kapitel 1 werden wir die in diesem Themenbereich üblichen Notationen einführen.

In Kapitel 2 werden wir die symplektische Gruppe definieren, einige Eigenschaften zusammenstellen und wichtige Untergruppen definieren.

In Kapitel 3 werden wir Siegelsche Modulformen definieren und einige Eigenschaften dieser zusammenstellen. Insbesondere werden wir hier die Zerlegung

$$\mathcal{M}^k_n = \oplus^n_{m=0} \mathcal{M}^k_{n,m}$$

einführen.

In Kapitel 4 werden wir Jacobiformen von beliebigem Grad definieren und wichtige Eigenschaften zusammentragen. Hier werden wir uns an die Bezeichnungen von Dulinski halten und insbesondere die Zerlegung

$$\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) = \oplus^r_{s=0} \mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T)$$

kennenlernen. Im zweiten Abschnitt werden wir noch eine kurze Zusammenfassung über Fourier-Jacobizerlegungen von Funktionen $\mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ angeben. Im letzten Abschnitt werden wir die Vorarbeit Dulinskis benutzen, um einen Vektorraum, in dem die Fourier-Jacobikoeffizienten Siegelscher Modulformen liegen, alternativ zu beschreiben.

In Kapitel 5 werden wir Mengen $M^t_{n,m,r}$ definieren. Zusätzlich werden in diesem Kapitel die notwendigen Rechnungen durchgeführt, die für die spätere Arbeit von Bedeutung sind. Insbesondere wird in Satz 5.21 ein Repräsentantensystem für $C_{n,m} \backslash M^t_{n,m,r}$

angegeben und in Satz 5.24 eine alternative Beschreibung der Mengen $M^t_{n,m,r}$.

In Kapitel 6 werden wir die Funktionen

$$H^t_{n,m,r}(f,Z) := \sum_{\gamma \in C_{n,m} \setminus M^t_{n,m,r}} f(\gamma < Z >) j(\gamma, Z)^{-k}$$

als Teilreihe der Klingen-Eisensteinreihe definieren und in Satz 6.2 nachrechnen, dass diese auch die Gleichung

$$H^t_{n,m,r}(f, \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ {}^tZ_2 & Z_4 \end{pmatrix}) := \sum_{T \geq 0} \Phi_{m+t-\mathrm{rg}(T)}$$

erfüllt. Außerdem können wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels eine genauere Beschreibung der Funktionen $\Phi_{T,i}$ angeben, indem wir sie konkret als Summe von Eisensteinreihen schreiben.

In Kapitel 7 werden wir die Mengen $X^v_{n,m,r}$ definieren und in Satz 7.7 die Formel

$$< f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) >= \lambda(f) H^{v-r-m}_{n,m,r}(f, Z_1)$$

beweisen.

In Kapitel 8 können wir schließlich in Satz 8.7 die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$\left\langle f(Z_2), \sum_{\gamma \in \mathbb{C}_{n+m} \setminus X^v_{n,m,r}} j(\gamma, \begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix})) \right\rangle$$

berechnen und anschließend in Satz 8.8 das Ergebnis der Arbeit formulieren.

Abschließend werden wir in Kapitel 9 die erhaltenen Aussagen auf Spezialfälle anwenden und mit bereits bekannten Aussagen vergleichen. Des Weiteren werden für $n = 2$ Abschätzungen für die auftretenden Fourierkoeffizienten angegeben.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Personen bedanken, die mich beim Anfertigen dieser Dissertation unterstützt haben. An erster Stelle ist dies mein Doktorvater Herr Professor Dr. Schulze-Pillot. Er hat mich auf die Theorie der Siegelschen Modulformen im Allgemeinen und die Fragestellung im Besonderen aufmerksam gemacht und meine Forschungen stets mit viel Wohlwollen begleitet.

Weiter möchte ich mich bei Dr. Enrico Varela für die mathematische und allgemeine Hilfestellung bedanken.

Ausserdem möchte ich meinen Eltern und meiner Schwester danken, die mich immer nach Kräften unterstützten.

Schließlich möchte ich mich auch für Beistand und Hilfen bedanken, die ich während dieser Arbeit von vielen Personen erhalten habe.

1 Notationen

Wie üblich nennen wir $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}^{n_1 \times n_2}$ die Menge der $n_1 \times n_2$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ und entsprechend mit $\mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ die Menge der $n_1 \times n_2$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Mit $\mathbb{Z}_*^{l_1 \times l_1}$ bezeichnen wir die Menge der quadratischen Matrizen mit vollem Rang. Weiter seien $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ die Gruppen der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in der entsprechenden Menge. Für eine Matrix A bezeichnen wir ihr Transponiertes mit ${}^tA$ und für eine weitere Matrix B definieren wir

$$A[B] := {}^tBAB,$$

sofern die Produkte definiert sind. Wir bezeichnen mit 1_n die $n \times n$-Einheitsmatrix und mit $0_{n_1,n_2}$ die $n_1 \times n_2$-Nullmatrix. Wir werden die Größe der Matrix nicht angeben, falls sie durch den Zusammenhang bestimmt ist. Für eine invertierbare Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ setzen wir

$$L(U,S) := \begin{pmatrix} {}^tU^{-1} & SU \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

und

$$L(U) := L(U,0).$$

Insbesondere werden wir die so definierte Abbildung

$$L : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Q})$$

betrachten.

Für eine Matrix A bezeichnen wir mit $\mathrm{tr}(A)$ die Spur von A und definieren

$$e(A) := \exp(2\pi i \,\mathrm{tr}(A)).$$

Ist $m \leq n$, so bezeichnen wir den oberen linken $m \times m$-Block einer komplexen symmetrischen Matrix $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit Z^*, den unteren rechten $m \times m$-Block mit Z_*.
Für eine Matrix T bedeutet $T > 0$, dass T positiv definit ist, und $T \geq 0$, dass T positiv semidefinit ist. Entsprechend bedeutet $T > T'$, dass $T - T'$ positiv definit ist, und $T \geq T'$, dass $T - T'$ positiv semidefinit ist

Wir bezeichen mit $\mathcal{A}_n^+$ die Menge der positiv definiten, symmetrischen, halbganzen $n \times n$-Matrizen und mit $\mathcal{A}_n$ die Menge der positiv semidefiniten, symmetrischen, halbganzen $n \times n$-Matrizen. Halbganz heißt für eine Matrix T, dass die Einträge auf der Diagonalen in $\mathbb{Z}$ liegen und die anderen Einträge in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Die Riemannsche Zetafunktion und die Gammafunktion werden wie üblich mit $\zeta(s)$ bzw. mit $\Gamma(s)$ bezeichent.

2 Die symplektische Gruppe

In diesem Kapitel werden wir die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ (bzw. $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$) definieren und einige Eigenschaften zusammenstellen. Diese Gruppe spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Siegelschen Modulformen, bei der sie die Rolle der Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ aus der Theorie der elliptischen Modulformen übernimmt. Weiter werden wir einige Untergruppen definieren, die bei der Untersuchung Siegelscher Modulformen und Jacobiformen auftreten.

Definition 2.1. *Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die symplektische Gruppe vom Grad n über $\mathbb{R}$ als*

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) := \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid J[M] = J\}, \qquad \textit{mit } J := \begin{pmatrix} 0_{n,n} & 1_n \\ -1_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Die eckigen Klammern $[*]$ bedeuten dabei (wie in den Notationen) $A[B] := {}^tBAB$ für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Diese Menge bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$. Entsprechend ist die Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ als Untergruppe von $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Z})$ definiert. Ein Element $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ dieser Gruppe werden wir stets in $n \times n$-Blöcke zerlegen:

$$M = \begin{pmatrix} A(M) & B(M) \\ C(M) & D(M) \end{pmatrix},$$

oder einfacher

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

falls die Matrix M aus dem Zusammenhang bestimmt ist.

Wir werden nun zwei Einbettungen der symplektischen Gruppe in eine sympektische Gruppe größerer Dimension definieren.

Bemerkung 2.2. *Für natürliche Zahlen $n, n' \in \mathbb{N}$ mit $n' \le n$ und eine symplektische Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{n'}(\mathbb{Z})$ seien*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\uparrow_n} := \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1_{n-n'} & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-n'} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$$

und

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\downarrow_n} := \begin{pmatrix} 1_{n-n'} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 1_{n-n'} & 0 \\ 0 & C & 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$$

zwei Einbettungen in die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Weiter sehen wir, dass die Abbildung

$$L : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{Q})$$

aus den Notationen schon in die symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$ *abbildet.*

Lemma 2.3. *a) Für eine Matrix*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}),$$

ist die Bedingung $J[M] = J$ *äquivalent zu*

1. *die Matrizen* ${}^tAC$ *und* ${}^tBD$ *sind symmetrisch,* ${}^tAD - {}^tCB = 1_n$, (2.1)

bzw. äquivalent zu

2. *die Matrizen* A^tB *und* C^tD *sind symmetrisch,* $A^tD - B^tC = 1_n$. (2.2)

b) Weiter erhalten wir aus dieser Darstellung das Inverse der Matrix $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} {}^tD & -{}^tB \\ -{}^tC & {}^tA \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

c) Eine Matrix M *ist genau dann in der symplektischen Gruppe* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$*, wenn dies für ihr Transponiertes* ${}^tM$ *gilt.*

Beweis. [Chr75] Gleichungen (76),(77) und (79), Satz 3.10. □

Satz 2.4. *Es seien* $A, C \in \mathbb{Z}^{n\times r}$ *für* $r \leq n$ *gegeben. Genau dann kann man* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ *zu einer Matrix in* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ *ergänzen, wenn* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ *primitiv und* ${}^tAC$ *symmetrisch ist. Primitiv heißt, dass sich die Matrix* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ *zu einer über* $\mathbb{Z}$ *invertierbaren* $n\times n-$*Matrix ergänzen lässt.*

Beweis. [Chr75] Satz 3.15. □

Lemma 2.5. *Seien* $X, Y \in \mathbb{Z}^{l_1\times l_2}$ *mit* $l_1 \geq l_2$ *gegeben, sodass* ${}^tXY$ *symmetrisch ist. Dann gibt es eine Matrix* $\gamma \in \mathrm{Sp}_{l_1}(\mathbb{Z})$ *mit*

$$\gamma \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0_{l_1,l_2} \end{pmatrix}.$$

Analog gibt es zu Matrizen $X, Y \in \mathbb{Z}^{l_1\times l_2}$*, mit* X^tY *symmetrisch, eine symplektische Matrix* $\gamma \in \mathrm{Sp}_{l_2}(\mathbb{Z})$*, die*

$$\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0_{l_1,l_2} & * \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Beweis. Seien zunächst die Spalten von $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ linear unabhängig.

Dann können wir $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ auf Elementarteilergestalt bringen, d.h. wir finden Matrizen $U \in \mathrm{GL}_{2l_1}(\mathbb{Z})$ und $V \in \mathrm{GL}_{l_2}(\mathbb{Z})$ sowie eine Matrix $T \in \mathbb{Z}^{l_1 \times l_2}$ in Elementarteilergestalt, sodass

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} V$$

gilt. Wir schreiben

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$$

mit $l_1 \times l_1$ Matrizen U_1, U_2, U_3 und U_4.
Dann gilt $X = U_1 T V$ und $Y = U_3 T V$. Mit ${}^t XY = {}^t V {}^t T {}^t U_1 U_3 T V$ ist auch ${}^t U_1 U_3$ symmetrisch, da TV vollen Spaltenrang hat. Nach Satz 2.4 kann man $\begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \end{pmatrix}$ zu einer Matrix $\gamma \in \mathrm{Sp}_{l_1}(\mathbb{Z})$ ergänzen.

Die Behauptung folgt dann aus:

$$\gamma^{-1} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} V.$$

Sind die Spalten nicht linear unabhängig, dann kann man linear abhängige Spalten streichen, wobei die Bedingung ${}^t XY = {}^t YX$ erhalten bleibt. Daher gibt es eine Matrix $\gamma \in \mathrm{Sp}_n \mathbb{Z}$, die die Behauptung für die linear unabhängigen Spalten und daher auch für die zuvor entfernten linear abhängigen Spalten erfüllt.

Die zweite Aussage erhalten wir, indem wir die erste Aussage transponieren und von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1_{l_1} \\ -1_{l_1} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_{l_1}(\mathbb{Z})$ multiplizieren. □

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$, dann definieren wir für eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$$

im Folgenden die Zerlegung

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

in Blockmatrizen der Größen

$$M = \begin{pmatrix} m \times m & m \times n-m & m \times m & m \times n-m \\ n-m \times m & n-m \times n-m & n-m \times m & n-m \times n-m \\ m \times m & m \times n-m & m \times m & m \times n-m \\ n-m \times m & n-m \times n-m & n-m \times m & n-m \times n-m \end{pmatrix}.$$

Mittels dieser Zerlegung können wir folgende Mengen definieren, die als Mengen von Block-Dreiecksmatrizen Untergruppen sind:

Definition 2.6. *Es seien die Untergruppen*

$$C_{n,m} := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0_{n-m,m} & 0_{n-m,n-m} & 0_{n-m,m} & D_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

und

$$J_{n,m} := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ 0_{n-m,m} & 0_{n-m,n-m} & 0_{n-m,m} & 1_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ *gegeben.*

Bemerkung 2.7. *Die Gruppen $C_{n,m}$ treten bei [Kli90] und [Chr75] als Fixgruppen von m-dimensionalen Spitzen auf. Insbesondere treten sie auch bei der Definition von Klingen-Eisensteinreihen auf.*

Die Gruppen $J_{n,m}$ spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der Jacobiformen. Dort wird die Quotientengruppe $J_{n,m}/\left\{ \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{n-m} & 0 & B_{22} \\ 0 & 0 & 1_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} \right\}$ *auch Jacobigruppe genannt.*

Wir können eine alternative Beschreibung dieser Gruppen angeben:

Lemma 2.8. *Es gilt*

$$C_{n,m} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{m,n-m} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & 0_{m,n-m} & D_{11} & D_{12} \\ 0_{n-m,m} & 0_{n-m,n-m} & 0_{n-m,m} & {}^tA_{22}{}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

und

$$J_{n,m} = \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{m,n-m} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & 1_{n-m} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & 0_{m,n-m} & D_{11} & D_{12} \\ 0_{n-m,m} & 0_{n-m,n-m} & 0_{n-m,m} & 1_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \right\},$$

d.h. für jede Matrix $M \in C_{n,m}$ gilt schon $C_{12} = 0, A_{12} = 0$ und $D_{22} = {}^tA_{22}^{-1}$. Für $M \in J_{n,m}$ gilt zusätzlich auch $A_{22} = 1_{n-m}$. Alternativ zu Definition 2.6 kann man die Untergruppen auch wie folgt definieren:

$$C_{n,m} := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{m,n-m} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & 0_{m,n-m} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0_{n-m,n-m} & D_{21} & {}^tA_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

und

$$J_{n,m} := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0_{m,n-m} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & 1_{n-m} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & 0_{m,n-m} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0_{n-m,n-m} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Beweis. Das folgt aus den Gleichungen (2.1) und (2.2). □

In den nachfolgenden Rechnungen benötigen wir oft die folgenden Zerlegungen von $J_{n,m}$ und $C_{n,m}$.

Satz 2.9. *a) Wir definieren die Heisenberggruppe*

$$H_{n,m} := \left\{ \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & \mu \\ {}^t\lambda & 1_{n-m} & {}^t\mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1_m & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-m} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} \lambda, \mu \in \mathbb{Z}^{m,n-m}, \kappa \in \mathbb{Z}^{n-m,n-m} \\ \kappa + {}^t\mu\lambda \text{ symmetrisch} \end{matrix} \right\}.$$

Die Gruppe $C_{n,m}$ zerlegt sich in das semidirekte Produkt

$$H_{n,m} \rtimes (\mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})^{\uparrow_n} \times L(\mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{Z}))^{\downarrow_n}).$$

Dabei sind $^{\uparrow_n}$, $^{\downarrow_n}$ und $L(*)$ wie Bemerkung 2.2 definiert.

b) Analog zerlegt sich die Gruppe $J_{n,m}$ in

$$H_{n,m} \rtimes \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}. \tag{2.4}$$

c) Für den Spezialfall $m = 0$ ergibt sich die Darstellung

$$C_{n,0} = \{M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid C(M) = 0\} = \{L(U,S) \mid U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), {}^tS = S \in \mathbb{Z}^{n\times n}\}. \tag{2.5}$$

Beweis. In Kapitel 1 aus [Dul95] □

Wir definieren noch die Gruppe $Q_s^{r,n-r}$, die für die Definition von Eisensteinreihen von Jacobiformen bei Dulinksi [Dul95] benötigt wird sowie die Gruppe $\widetilde{Q}_s^{r,n-r}$, die später in einigen Rechnungen auftaucht.

Definition 2.10. *Wir definieren die Untergruppen der symplektischen Gruppe*

$$Q_s^{r,n-r} := \{M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid C(M) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D(M) = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 1_{n-r} \end{pmatrix}\}.$$

Die Zerlegungen sind jeweils in Blöcken der Größen

$$\begin{pmatrix} s \times s & s \times r-s & s \times n-r \\ r-s \times s & r-s \times r-s & r-s \times n-r \\ n-r \times s & n-r \times r-s & n-r \times n-r \end{pmatrix}$$

gegeben. Analog definieren wir die Gruppe

$$\widetilde{Q}_s^{r,n-r} := \{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid C = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & 1_{r-s} & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\}.$$

Die Zerlegungen sind für diese Gruppe jeweils in Blöcken der Größen

$$\begin{pmatrix} s \times s & s \times n-r & s \times r-s \\ n-r \times s & n-r \times n-r & n-r \times r-s \\ r-s \times s & r-s \times n-r & r-s \times r-s \end{pmatrix}$$

gegeben.

Bemerkung 2.11. *Mit*

$$S := \begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{r-s} \\ 0 & 1_{n-r} & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\widetilde{Q}_s^{r,n-r} = L(S^{-1}) Q_s^{r,n-r} L(S).$$

Analog zu Lemma 2.8 und der dortigen Aussage über die Gruppen $C_{n,r}$ und $J_{n,r}$ kann man auch für $M \in Q_s^{r,n-r}$ zeigen, dass

$$A(M) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$$

und für $M \in \tilde{Q}_s^{r,n-r}$, dass

$$A(M) = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & 1_{n-r} & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

gilt. Analog zu den Gruppen $C_{n,m}$ und $J_{n,m}$ ist auch hier die Definition über die Bedingungen an die Blöcke $A(M)$ und $D(M)$ möglich.

Wir werden nun für $n \in \mathbb{N}$ den Siegelschen Halbraum $\mathbb{H}_n$ definieren. Dieser ist eine Verallgemeinerung der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ und wird für die Definition von Siegelschen Modulformen benötigt. Weiter geben wir eine Operation der symplektischen Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf dem Siegelschen Halbraum $\mathbb{H}_n$ an.

Definition 2.12. *Für $n > 0$ definieren wir den Siegelschen Halbraum durch*

$$\mathbb{H}_n := \{Z = X + iY \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid Z = {}^t Z,\, Y > 0\}.$$

Lemma 2.13. *Für $n > 0$ operiert die Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ vermöge*

$$\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \times \ \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}_n, \quad (M, Z) \mapsto M < Z > := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

Für festes M liefert dies eine biholomorphe Abbildung $\mathbb{H}_n \to \mathbb{H}_n$. Für $M \in \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$ mit $m \leq n$ und $Z \in \mathbb{H}_n$ gilt

$$(M^{\uparrow_n} < Z >)^* = M < Z^* >$$

und

$$(M^{\downarrow_n} < Z >)_* = M < Z_* >$$

Lemma 2.14. *Ist $dXdY = \prod_{k\leq l} dX_{kl}dY_{kl}$ das Euklidische Volumen, so ist*

$$dV_n := \frac{dXdY}{\det(Y)^{n+1}}$$

ein unter der Operation von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}_n$ invariantes Volumen von $\mathbb{H}_n$.

3 Siegelsche Modulformen

In diesem Kapitel werden wir zunächst Siegelsche Modulformen definieren und dann einige, im Folgenden benötigte Eigenschaften dieser zusammenstellen.

Definition 3.1. *a) Für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir eine Operation der Gruppe $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ auf den Funktionen $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ durch*

$$(f \mid_k M)(Z) := f(M < Z >) j(M, Z)^{-k}$$

mit $j(M, Z) := \det(CZ + D)$.

b) Eine Siegelsche Modulform von Grad n und Gewicht k ist eine Funktion

$$f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C},$$

die folgende Bedingungen erfüllt:

1. *f ist holomorph*
2. *Für alle $\gamma \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ gilt*
$$f \mid_k \gamma = f$$
3. *Im Fall $n = 1$ soll f eine Fourierentwicklung*
$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b(f, n) e(nz)$$
besitzen.

Den Vektorraum der Siegelschen Modulformen vom Grad n und Gewicht k bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_n^k$.

Dass hier eine Operation definiert wird, folgt sofort aus der Multiplikativität des Automorphiefaktors

$$j(M_1 M_2, Z) = j(M_1, M_2 < Z >) j(M_2, Z)$$

für alle $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ und $Z \in \mathbb{H}_n$.

Für $n > 1$ folgt die Existenz der Fourierzerlegung aus den ersten Bedingungen:

Satz 3.2. *(Köcher-Prinzip)*
Ist $n > 1$ und f erfüllt die Bedingungen 1. *und* 2.*, so besitzt f eine Fourierzerlegung der Form*
$$f(Z) = \sum_{T \in \mathcal{A}_n} a(T)e(TZ).$$
Dabei ist, wie in den Notationen definiert, $\mathcal{A}_n$ die Menge aller symmetrischen, positiv semidefiniten halbganzen $n \times n$-Matrizen und $\mathrm{e}(TZ) := exp(2\pi i \,\mathrm{tr}(TZ))$.

Beweis. [Kli90], Kapitel 4, Theorem 1 □

Definition 3.3. *Gilt für eine Siegelsche Modulform $f \in \mathcal{M}_n^k$ schon $a(T) = 0$ für alle nicht positiv-definiten Matrizen T, lässt sich f also schreiben als*
$$f(Z) = \sum_{T \in \mathcal{A}_n^+} a(T)e(TZ),$$
so nennen wir f eine Spitzenform. Dabei ist $\mathcal{A}_n^+$, wie in den Notationen, die Menge aller positiv definiten symmetrischen und halbganzen Matrizen.

Den Vektorraum der Spitzenformen vom Grad n und Gewicht k bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_n^k$.

Um eine alternative Charakterisierung von Spitzenformen zu erhalten, definieren wir den Siegeloperator:

Definition/Satz 3.4. *Seien $m \leq n$, $z \in \mathbb{H}_m$ und $f \in \mathcal{M}_n^k$ gegeben.*
Für eine Folge
$$Z^{(\nu)} := \begin{pmatrix} z & z_2^\nu \\ {}^t z_2^\nu & z_4^\nu \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_n,$$
bei der z_2^ν beschränkt ist und die Eigenwerte von $\mathrm{Im}(z_4^\nu)$ gegen ∞ laufen, existiert der Grenzwert
$$f \mid \Phi^{n-m}(z) := \lim_{\nu \to \infty} f\left(Z^{(\nu)}\right)$$
und definiert eine Siegelsche Modulform vom Grad m und Gewicht k. Der Operator definiert eine lineare Abbildung:
$$\Phi : \mathcal{M}_n^k \to \mathcal{M}_m^k.$$

Beweis. [Kli90], Kapitel 5, Proposition 1 □

Lemma 3.5. *Eine Modulform $f \in \mathcal{M}_n^k$ ist genau dann eine Spitzenform, wenn f unter dem Operator Φ auf* 0 *abgebildet wird.*

Beweis. [Kli90], Kapitel 5, Proposition 2 □

Definition/Satz 3.6. *Sei $k > n+m+1$ gerade. Für eine Siegelsche Spitzenform $f \in \mathcal{S}_m^k$ ist die Klingen-Eisensteinreihe*

$$E_{n,m}^k(f) : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$$
$$Z \mapsto \sum_{\gamma \in C_{n,m} \setminus \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

eine Siegelsche Modulform vom Grad n. Dabei ist, wie in den Notationen erklärt, $\gamma < Z >^* \in \mathbb{H}_m$ der linke obere $m \times m$-Block von $\gamma < Z > \in \mathbb{H}_n$.

Hierdurch wird eine injektive Abbildung $\mathcal{S}_m^k \to \mathcal{M}_n^k$ definiert. Wir bezeichen mit $\mathcal{M}_{n,m}^k$ das Bild dieser linearen Abbildung.

Dann gilt:

$$E_{n,m}^k(f) \mid \Phi^{n-m} = f \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{S}_m^k \tag{3.1}$$

und

$$E_{n,m}^k(f \mid \Phi^{n-m}) = f \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{M}_{m,n}^k. \tag{3.2}$$

Dies induziert eine Zerlegung in direkte Summanden

$$\mathcal{M}_n^k = \bigoplus_{m=0}^{n} \mathcal{M}_{n,m}^k$$

mit $\mathcal{M}_{n,m}^k \cong \mathcal{S}_m^k$. Dabei definieren wir $\mathcal{S}_0^k := \mathbb{C}$.
Wir setzen die Abbildung

$$E_{n,m}^k : \mathcal{S}_m^k \to \mathcal{M}_n^k$$

fort zu einer Abbildung

$$[*]_m^n : \mathcal{M}_m^k \to \mathcal{M}_n^k$$

indem wir für $f \in M_{m,i}^k$

$$[f]_m^n := E_{n,i}^k(\Phi^{m-i}(f))$$

definieren.

Beweis. [Kli90], Kapitel 5, Theorem 2 □

Definition 3.7. *Seien $f, g \in \mathcal{M}_n^k$ Siegelsche Modulformen und mindestens eine von ihnen eine Spitzenform. Das Petersson-Skalarprodukt ist das Integral*

$$\int_{\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}_n} f(Z)\overline{g(Z)} \det(\mathrm{Im}(Z)^k) dV_n.$$

Proposition 3.8. *Die Klingen-Eisensteinreihen stehen bezüglich des Petersson-Skalarprodukts senkrecht auf Spitzenformen.*

Beweis. [Kli90] Kapitel 5,Proposition 8 □

4 Jacobiformen

In diesem Kapitel behandeln wir die Theorie der Jacobiformen. Zunächst werden wir an einige bekannte Sachverhalte erinnern. Im zweiten Teil werden wir uns näher mit Fourier-Jacobizerlegungen beschäftigen. Insbesondere werden wir dort primitive Fourier-Jacobikoeffizienten definieren. Im letzten Abschnitt betrachten wir den Vektorraum $\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T)$, der von Dulinski in [Dul93] eingeführt wurde, und leiten eine alternative Definition her.
Im gesamten Kapitel seien $r \leq n$ und k natürliche Zahlen.

4.1 Grundlagen

Wir benutzen nun die Operationen der symplektischen Gruppe auf der verallgemeinerten oberen Halbebene, um daraus eine Operation der Untergruppe $J_{n,r}$ abzuleiten. Diese werden wir zur Definition von Jacobiformen benutzen.

Definition/Satz 4.1. *a) Die Gruppe $J_{n,r}$ operiert auf dem Raum*

$$\mathbb{H}_{r,n-r} := \mathbb{H}_r \times \mathbb{C}^{r \times n-r}$$

als Gruppe biholomorpher Abbildungen, indem wir für $(z_1, z_2) \in \mathbb{H}_{r,n-r}$ eine Ergänzung zu einem Element $Z := \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_n$ wählen und $M < (z_1, z_2) >$ als die ersten r Zeilen von $M < Z >$ setzen. Dies ist von der Wahl der Ergänzung z_4 unabhängig.

b) Für $k \in \mathbb{Z}$ und $T \in \mathcal{A}_{n-r}$ erhalten wir eine Operation der Gruppe $J_{n,r}$ auf den Funktionen $\varphi : \mathbb{H}_{r,n-r} \to \mathbb{C}$, indem wir

$$(\varphi\mid_{k,T} M)(z_1, z_2) := ((\varphi(z_1, z_2)e(Tz_4)) \mid_k M)\, e(-Tz_4)$$

setzen. Dabei ist z_4 wieder eine Ergänzung von $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ zu $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_n$. Für $M \in J_{n,r}$ ist die Operation unabhängig von der Wahl von z_4.

Beweis. [Dul93], Satz 1 □

Mit Hilfe dieser Vorarbeit können wir nun Jacobiformen definieren:

Definition 4.2. *Es seien $n \geq r$ und k natürliche Zahlen sowie $T \in \mathcal{A}_{n-r}$ gegeben. Wir nennen eine Funktion $\varphi : \mathbb{H}_{r,n-r} \to \mathbb{C}$ Jacobiform vom Grad $(r, n-r)$, Gewicht k und Index T, falls*

1. *f holomorph ist,*
2. *für alle $M \in J_{n,r}$ die Identität $\varphi \mid_{k,T} M = f$ gilt und*
3. *$r = 1$ gilt, φ eine Fourierzerlegung*

$$\sum_{R_1, R_2} c(R_1, R_2) e(R_1 Z_1 + 2R_2{}^t Z_2)$$

besitzt, wobei $R_1 \in \mathcal{A}_r$ und $R_2 \in \mathbb{Z}^{r \times n-r}$ alle Matrizen durchlaufen für die $\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & T \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n$ gilt.

Wir setzen für $T \in \mathcal{A}_{n-r}$

$$\mathcal{A}_n(T) := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ * & T \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n \right\}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$ den Vektorraum der Jacobiformen vom Grad $(r, n-r)$, Gewicht k und Index T.

Bemerkung 4.3. *Wir können die Darstellung 2.4 von $J_{n,r}$ als semidirektes Produkt benutzen um 2. in*

$$\varphi(z_1, z_2) := j(M, z_1)^{-k} e(T(-{}^tz_2(Cz_1 + D)^{-1}Cz_2)) f(M < z_1 >, {}^t(Cz_1 + D)^{-1} z_2)$$

für alle $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})$ und

$$\varphi(z_1, z_2) := e(T({}^t\lambda z_1 \lambda + {}^t\lambda z_2 + {}^tz_2\lambda)) f(z_1, z_2 + z_1\lambda + \mu)$$

für alle $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Z}^{r \times n-r})^2$ aufzuspalten.

So werden in [EZ85] Jacobiformen vom Grad $(1,1)$ und in [Zie89] Jacobiformen von beliebigem Grad definiert.

Wir werden unsere Definition benutzen, da im Verlauf dieser Arbeit Funktionen der Form $\varphi(z_1, z_2)e(Tz_4)$ wiederholt auftreten werden. Daher ist es für uns nützlicher, unsere Definition der Operation der Gruppe $J_{n,r} \subseteq \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ auf den Funktionen $f : \mathbb{H}_{r,n-r} \to \mathbb{C}$ zu betrachten.
Weiter motiviert dies folgende Definition.

Definition 4.4. *Außerdem definieren wir zu einer Jacobiform $\varphi \in \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$ die Funktion*

$$\varphi^{(T)}(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix}) := \varphi(z_1, z_2) e(T z_4).$$

Hat φ die Fourierzerlegung

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{R_1, R_2} c(R_1, R_2) e(R_1 Z_1 + 2 R_2 {}^t Z_2),$$

so hat $\varphi^{(T)}$ die Fourierzerlegung

$$\varphi^{(T)}(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix}) = \sum_{R_1, R_2} c(R_1, R_2) e\left(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^t R_2 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix}\right).$$

Ähnlich wie bei Siegelschen Modulformen benötigen wir Bedingung *3.* nur für $r = 1$, da diese für $r > 1$ aus *1.* und *2.* folgt:

Satz 4.5. *(Köcherprinzip für Jacobiformen)*
Es seien $1 < r \leq n$ natürliche Zahlen, k ganz und $T \in \mathcal{A}_{n-r}$. Ist φ eine Jacobiform vom Grad $(r, n-r)$, Gewicht k und Index T, so besitzt φ eine Fourier-Zerlegung der Gestalt

$$\varphi(z_1, z_2) = \sum_{R_1, R_2} c(R_1, R_2) e(R_1 z_1 + 2 R_2^t z_2),$$

wobei die Summation über alle R_1, R_2 zu erstrecken ist, für die

$$\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^t R_2 & T \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n(T)$$

symmetrisch, halbganz und positiv definit ist. Äquivalent hierzu ist die Beschränktheit von $\varphi(z_1, z_2) \exp(-2\pi \operatorname{tr}(T y_1^{-1}[y_2]))$ (mit $z_1 = x_1 + i y_1$ und $z_2 = x_2 + i y_2$) auf jedem Bereich $y_1 \geq \delta 1_n$ mit beliebigem, positivem δ.

Insbesondere sieht man, dass es keine nichttrivialen Jacobiformen zu nicht semipositivem Index geben kann.

Beweis. Dies ist in dieser Form in [Dul93] (Kapitel 1, Köcherprinzip für Jacobiformen) zu finden, in der ursprünglichen Fassung in Lemma 1.6 von [Zie89]. ☐

In den Arbeiten von Dulinksi ([Dul93],[Dul95]) werden n, r und s in einem anderem Zusammenhang als hier benutzt. Dulinski betrachtet Jacobiformen vom Grad (n, s). Da Jacobiformen in dieser Arbeit vor allem als Fourier-Jacobikoeffizienten von Funktionen $\mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ vorkommen, werden sie hier in der Regel mit dem Grad $(r, n-r)$ auftreten. Hier eine kurze Übersicht der verwendeten Notation:

Dulinksi	hier	Verwendung
n	r	erste Komponente des Grades
s	$n-r$	zweite Komponente des Grades
r	s	natürliche Zahl mit $r \leq n$ (bzw. hier $s \leq r$), die insbesondere bei Eisensteinreihen auftritt.
$\hat{r} := n-r$	$r-s$	

Lemma 4.6. *Sei $V \in \mathbb{Z}^{n-r\times n-r}$ und $\varphi \in \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$, so ist durch*

$$\varphi \mid U_V : (z_1, z_2) \mapsto \varphi(z_1, z_2{}^tV)$$

eine Jacobiform vom Index $T[V]$ gegeben.
Wir nennen die zugehörige Abbildung

$$U_V : \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) \to \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T[V]).$$

Für die Funktion $\varphi^{(T)}$ entspricht dies dem Übergang von $\varphi^{(T)}$ zu $\varphi^{(T)} \mid_k L({}^tV^{-1})^{\downarrow_n}$, auch dies werden wir mit U_V bezeichnen.

Beweis. Um den zweiten Teil zu zeigen, rechnet man nach, dass

$$L({}^tV^{-1})^{\downarrow_n} < \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^tz_2 & z_4 \end{pmatrix} >= \begin{pmatrix} z_1 & z_2^tV \\ V^tz_2 & Vz_4^tV \end{pmatrix}$$

gilt. Der erste Teil folgt daraus mit

$$e(TVz_4^tV) = \exp(2\pi i\,\mathrm{tr}(TVz_4{}^tV)) = e({}^tVTVz_4) = e(T[V]z_4).$$

□

Lemma 4.7. *Das vorherige Lemma liefert uns einen Homomorphimus*

$$\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) \to \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T[V]).$$

Ist $V \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$ invertierbar, so ist dieser ein Isomorphismus. Ist t der Rang von T, so ist $\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$ also isomorph zu $\mathcal{J}^k_{r,n-r}(\begin{pmatrix} T' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ mit einem $T' \in \mathcal{A}^+_t$. Dies ist isomorph zu $\mathcal{J}^k_{r,t}(T')$.

Beweis. [Zie89], Rechnung nach Lemma 1.4 □

Wir werden Spitzenformen und Eisensteinreihen nur für Jacobiformen definieren, deren Index maximalen Rang hat. Auf beliebige Jacobiformen können wir dies mit Hilfe dieser Isomorphismen übertragen. Die Wahl des Isomorphismus spielt dabei keine Rolle.

Definition 4.8. *Eine Jacobiform $\varphi \in \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$ mit $T \in \mathcal{A}^+_{n-r}$ heißt Spitzenform, falls für Fourierkoeffizienten $c(R_1, R_2)$ von $\varphi^{(T)}$ nur $c(R_1, R_2) \neq 0$ für solche (R_1, R_2) gilt, für die $\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & T \end{pmatrix}$ positiv definit ist.*

Dass eine Jacobiform $\varphi \in \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$ Spitzenform ist, ist äquivalent dazu, dass die Funktion $\varphi^{(T)}$ eine Fourierzerlegung der Form

$$\sum_{R=\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & T \end{pmatrix} \in \mathcal{A}^+_n} c(R)e(RZ)$$

hat.

Falls der Index T nicht positiv definit ist, heißt eine Jacobiform Spitzenform, falls sie unter einem Isomorphismus aus Lemma 4.7 auf eine Spitzenform abgebildet wird. Dies ist offensichtlich unabhängig von der Wahl des Isomorphismus.

Ähnlich wie im Fall von Siegelschen Modulformen ist es möglich, eine alternative Definition von Spitzenformen anzugeben. Hier reicht es allerdings nicht, einen einzelnen Siegeloperator zu betrachten, stattdessen muss hier eine endliche Menge von Siegeloperatoren betrachtet werden.

Definition 4.9. *Sei $s \leq r$ gegeben. Zu $U \in \mathrm{GL}_{n-s}(\mathbb{Z})$ und $\varphi \in \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$ definieren wir eine Abbildung*

$$\varphi^{(T)} \mid \mathcal{S}_U : \mathbb{H}_{s+n-r} \to \mathbb{C}, \quad \varphi^{(T)} \mid \mathcal{S}_U(z) = \lim_{\nu \to \infty} \varphi^{(T)} \mid_k L(U)^{\downarrow_n}\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_2 \\ 0 & \nu i 1_{r-s} & 0 \\ {}^tz_2 & 0 & z_4 \end{pmatrix}\right),$$

wobei $z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^tz_2 & z_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_{s+n-r}$ in $z_1 \in \mathbb{H}_s$, $z_2 \in \mathbb{C}^{s,n-r}$ und $z_4 \in \mathbb{H}_{n-r}$ zerlegt ist.

Ist $U = \begin{pmatrix} * & * \\ * & u_4 \end{pmatrix}$, so ist nach den Rechnungen in Kapitel 2 von [Dul93] die Funktion $(\varphi^{(T)} \mid \mathcal{S}_U)e(-T[{}^tu_4^{-1}]) \in \mathcal{J}_{s,n-r}(T[{}^tu_4^{-1}])$ eine Jacobiform vom Index $T[{}^tu_4^{-1}]$, wir können also eine Abbildung $\mathcal{S}_U : \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) \to \mathcal{J}^k_{s,n-r}(T[{}^tu_4^{-1}])$ definieren. Da der Vektorraum $\mathcal{J}^k_{s,n-r}(T[{}^tu_4^{-1}])$ nulldimensional ist, falls $T[{}^tu_4^{-1}]$ nicht halbganz ist, können wir uns auf solche U aus der Menge

$$\mathcal{U}(n-s, r-s, T)_* := \{U = \begin{pmatrix} * & * \\ * & u_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{r-s}(\mathbb{Z}) \mid u_4 \in \mathbb{Z}_*^{n-r \times n-r} T[{}^tu_4^{-1}] \in \mathcal{A}_{n-r}\}$$

beschränken.

Wir werden einige Mengen und Gruppen definieren, die dabei helfen, den Raum der Eisensteinreihen zu beschreiben.

Definition 4.10. *Seien die Gruppen*

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} := \{V = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{r-s}(\mathbb{Z})\}$$

und

$$\mathcal{U}(n-s)^{r-s} := \{W = \begin{pmatrix} w_1 & 0_{r-s,s} \\ * & w_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{r-s}(\mathbb{Z})\},$$

sowie die Mengen

$$P(n-s, n-r, T)_* := \{u = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} \mid u \text{ primitiv, } u_4 \in \mathbb{Z}_*^{n-r \times n-r}, T[u_4^{-1}] \in \mathcal{A}_{n-r}\}$$

und

$$P(n-s, n-r)_* := \{u = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_4 \end{pmatrix} \mid u \text{ primitiv, } u_4 \in \mathbb{Z}_*^{n-r \times n-r}\}$$

definiert.

Lemma 4.11. *Für $\varphi \in \mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$, $U \in \mathcal{U}(n-s, r-s, T)_*$,$V \in \mathcal{U}(n-s)_{r-s,1}$ und $W \in \mathcal{U}(n-s)^{r-s}$ gilt die Gleichung*

$$\varphi^{(T)} \mid \mathcal{S}_{VUW} = \det(w_1)^{-k} \varphi(T) \mid \mathcal{S}_U \mid_k L(w_4)^{\downarrow_n}.$$

Beweis. [Dul93], Kapitel 2 □

Satz 4.12. *Es seien $n \geq r \geq s$ natürliche Zahlen. Ferner sei k rational und $T \in \mathcal{A}^+_{n-r}$. Ist φ eine Jacobiform vom Grad $(r, n-r)$, Gewicht k und Index T mit Fourier-Entwicklung*

$$\varphi^{(T)}(Z) = \sum_{R \in A_n(T)} c(R) e(RZ), \quad Z \in \mathbb{H}_n,$$

so sind äquivalent

a) $c(R) = 0$ für alle $R \in \mathcal{A}_n(T)$ mit $rg(R) \leq s + n - r$

b) $\varphi \mid \mathcal{S}_U = 0$ für alle U aus einem Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash \mathcal{U}(n-s, r-s, T)_* / \mathcal{U}(n-s)^{r-s}.$$

Beweis. [Dul93], Satz 4 □

Satz 4.13. *Die Voraussetzungen seien wie im Satz zuvor. Dann sind äquivalent*

a) $c(R) = 0$ *für alle* $R \in \mathcal{A}_n(T)$ *mit* $rg(R) < s + n - r$

b) $\varphi \mid \mathcal{S}_U = 0$ *ist für alle* U *aus einem Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen*

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash \mathcal{U}(n-s, r-s, T)_* / \mathcal{U}(n-s)^{r-s}$$

eine Spitzenform.

Beweis. [Dul93], Satz 5 □

In der Theorie der Siegelschen Modulformen haben wir Klingen-Eisensteinreihen betrachtet. Für eine Spitzenform $f \in \mathcal{S}_m^k$ gilt:

$$E_{n,m}^k(f) \mid \Phi^{n-m} = f.$$

Wir werden nun die bei Dulinski definierten Eisensteinreihen einführen, um eine entsprechende Aussage für Jacobiformen zu erhalten.

Definition 4.14. *Sei* $n \geq r$ *und* $s \leq r$ *gegeben. Sei weiter* φ *eine Jacobi-Spitzenform vom Gewicht* $k > n+s+1$, *Grad* $(s, n-r)$ *und Index* T. *Für* $U = \begin{pmatrix} * & * \\ * & u_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n-s}(\mathbb{Z})$ *mit* $u_4 \in \mathbb{Z}_*^{n-r,n-r}$ *definieren wir die Funktion*

$$E_{r,n-r,s}^{k,(T[{}^t u_4])}(z, \varphi, U) := \sum_{\gamma \in Q_s^{r,n-r} \backslash L(U^{-1})^{\downarrow n} J_{n,r}} \varphi^{(T)}(\gamma < z >^{\alpha}) j(\gamma, z)^{-k}$$

Dabei ist die Abbildung $*^{\alpha} := \mathbb{H}_n \to \mathbb{H}_{n-r+s}$ *definiert durch*

$$\begin{pmatrix} z_1 & * & z_2 \\ * & * & * \\ {}^t z_2 & * & z_4 \end{pmatrix}^{\alpha} := \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix}$$

mit $z_1 \in \mathbb{H}_s$ *und* $z_4 \in \mathbb{H}_{n-r}$.

Die so definierten Funktionen

$$E_{r,n-r,s}^k(z, \varphi, U) := E_{r,n-r,s}^{k,(T[{}^t u_4])} e(-T[{}^t u_4]) z_4)$$

sind Jacobiformen vom Grad $(r, n-r)$ und Index $T[{}^t u_4]$. Folgender Satz beschreibt die Wirkung der Siegeloperatoren auf die Eisensteinreihen:

Satz 4.15. *Seien $n \geq r$ natürliche Zahlen, $0 \leq s < r$ und $k > n+s+1$ gerade. Ferner sei $T \in \mathcal{A}_{n-r}^{+}$, $u \in P(n-s,n-r)_*$ und $v \in P(n-s,n-r;T[{}^t u_4])_*$. Für jede Jacobi-Spitzenform vom Grad $(s,n-r)$, Gewicht k und Index T gilt*

$$E_{r,n-r,s}(*,\varphi,u) \mid \mathcal{S}_v = \varphi \mid_{k,T} L(u_4^{-1}v_4),$$

falls

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1}u\,\mathcal{U}(n-r) = \mathcal{U}(n-s)_{r-s,1}v\,\mathcal{U}(n-r)$$

erfüllt ist, sonst

$$E_{r,n-r,s}(*,\varphi,u) \mid \mathcal{S}_v = 0.$$

Beweis. [Dul93], Satz 6 □

Diese Funktionen sind nach Lemma 4.11 nur von den letzten $n-r$ Spalten von U abhängig. Wir ersetzen daher teilweise auch in der Definition U durch seine letzten $n-r$ Spalten.
Bei Dulinski ist auch genauer der Fall unterschiedlicher Dimensionen der Eisensteinreihe und des Siegeloperators beschrieben, der hier nicht benötigt wird. Außerdem stellt uns Dulinski den Darstellungssatz für Jacobiformen zur Verfügung:

Satz 4.16. *Für natürliche Zahlen $n \geq r$, gerade $k \geq n+r$ und $T \in \mathcal{A}_{n-r}^{+}$ gilt*

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^{k}(T) = \bigoplus_{s=0}^{r} \bigoplus_{U \in \mathcal{R}_s^{r,n-r}} \mathcal{J}_{r,n-r,s}^{k}(T,U)$$

Dabei ist $\mathcal{R}_s^{r,n-r}$ ein vollständiges Repräsentantensystem von

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1}\backslash P(n-s,n-r,T)_*/\operatorname{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$$

und

$$\mathcal{J}_{r,n-r,s}^{k}(T,U) := \{E_{r,n-r,s}(*,\varphi,U) \mid \varphi \in \mathcal{S}_{s,n-r}^{k}(T[{}^t u_4^{-1}])\}.$$

Beweis. [Dul95], Theorem 2 □

In diesem Zusammenhang definieren wir noch

$$\mathcal{J}_{r,n-r,s}^{k}(T) := \bigoplus_{U \in \mathcal{R}_s^{r,n-r}} \mathcal{J}_{r,n-r,s}^{k}(T,U) \tag{4.1}$$

und erhalten

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^{k}(T) = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{J}_{r,n-r,s}^{k}(T).$$

4.2 Fourier-Jacobizerlegung

Beispiele von Jacobiformen kommen in natürlicher Weise als Fourier-Jacobikoeffizienten von Siegelschen Modulformen vor.
Wir werden in dieser Arbeit auch Fourier-Jacobikoeffizienten von anderen Funktionen $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ betrachten. Dazu werden wir hier einige Eigenschaften von Fourier-Jacobikoeffizienten festhalten und Notationen festlegen.

Lemma 4.17. *Sei eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ gegeben. Gilt*

$$f \mid_k M = f$$

für alle $M \in J_{n,r}$ und hat f im Fall $r = 1$ zusätzlich eine Fourierzerlegung

$$f(Z) = \sum_{R \in \mathcal{A}_n} a(R) e(RZ),$$

so hat f eine Zerlegung

$$f(\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix}) = \sum_{T \in \mathcal{A}_{n-r}} \varphi_T(z_1, z_2) e(T z_4).$$

Dabei ist $Z \in \mathbb{H}_n$ zerlegt in $z_1 \in \mathbb{H}_r, z_2 \in \mathbb{C}^{r \times n-r}$ und $z_4 \in \mathbb{H}_{n-r}$.
Die hierbei auftretenden Funktionen φ_T sind Jacobiformen vom Grad $(r, n-r)$, Gewicht k und Index T.

Beweis. Da f unter der Gruppe $J_{n,r}$ invariant ist, gilt insbesondere $f(Z) = f(Z + S)$ für symmetrische Matrizen $S \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Daher hat f eine Fourierzerlegung

$$f(Z) = \sum_R a(R) e(RZ)$$

mit symmetrischen, halbganzen Matrizen R. Im Fall $r = 1$ sind diese nach Voraussetzung zusätzlich semipositiv definit.
Wir spalten die Matrizen R auf in

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^t R_2 & T \end{pmatrix}$$

mit $R_1 \in \mathbb{Z}^{r \times r}, R_2 \in \mathbb{Z}^{r \times n-r}$ und $T \in \mathbb{Z}^{n-r \times n-r}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(Z) &= \sum_T \sum_{R_1, R_2} a(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^t R_2 & T \end{pmatrix}) e(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^t R_2 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ {}^t z_2 & z_4 \end{pmatrix}) \\ &= \sum_T \sum_{R_1, R_2} a(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^t R_2 & T \end{pmatrix}) e(R_1 z_1) e(2 {}^t R_2 z_2) e(T z_4). \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\varphi_T(z_1,z_2) = \sum_{R_1,R_2} a(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & T \end{pmatrix}) e(R_1 z_1) e(2{}^tR_2 z_2)$$

und erhalten die gesuchte Zerlegung. Da f unter der Operation von $J_{n,r}$ invariant ist, gilt

$$\sum_T \varphi_T(z_1,z_2)e(Tz_4) \mid_k M = \sum_T \varphi_T(z_1,z_2)e(Tz_4)$$

für alle $M \in J_{n,r}$. Da z_4 unter der Operation von $J_{n,r}$ fest bleibt, gilt nach Koeffizientenvergleich auch

$$\varphi_T(z_1,z_2)e(Tz_4) \mid_k M = \varphi_T(z_1,z_2)e(Tz_4)$$

für alle T. Somit ist φ_T eine Jacobiform vom Index T. Da Jacobiformen mit nicht semipositiv definitem Index verschwinden, ist die Aussage gezeigt. □

In Anlehnung an die Notation $\varphi^{(T)}(Z) := \varphi(z_1,z_2)e(Tz_4)$ für eine Jacobiform vom Index T definieren wir hier

$$f(Z) = \sum_{T \in \mathcal{A}_{n-r}} \varphi^{(T)}(Z)$$

mit $\varphi^{(T)}(Z) := \varphi_T(z_1,z_2)e(Tz_4)$.

Lemma 4.18. *Ist f wie im vorherigen Lemma zusätzlich unter der Gruppe $C_{n,r} \supseteq J_{n,r}$ invariant, so gilt*

$$\varphi^{(T)} \mid U_V = \varphi^{(T[V])}$$

für alle $V \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem vorherigen Lemma, indem wir

$$f \mid_k L({}^tV^{-1})^{\downarrow_n} = f$$

betrachten. □

Für Funktionen aus Lemma 4.18 können wir auch primitive Fourier-Jacobikoeffizienten definieren:

Definition 4.19. *Für eine Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$, die unter $C_{n,r}$ invariant ist, definieren wir die primitiven Fourier-Jacobikoeffizienten φ_T^* (für $T \in \mathcal{A}_{n-r}^+$) durch*

$$\varphi_T = \sum_W \varphi^*_{T[W^{-1}]} \mid U_W.$$

Dabei läuft W über alle Matrizen $\mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^{n-r\times n-r}$ mit $T[W^{-1}] \in \mathcal{A}_{n-r}^+$.

Diese Definition ergibt für $r = 0$ die primitiven Fourierkoeffizienten. Die Wohldefiniertheit folgt mit demselben Argument, wegen dem auch die primitiven Fourierkoeffizienten wohldefiniert sind. Dies ergibt sich aus den Gleichungen (29a) und (29b) in [Böc86]. Offensichtlich sind diese Funktionen wieder Jacobiformen vom Index T.

4.3 Der Vektorraum $\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T)$

Im vorherigen Kapitel haben wir Fourier-Jacobikoeffizienten definiert.

Nun werden wir uns damit beschäftigen welche Jacobiformen als Fourier-Jacobikoeffizienten von Siegelschen Modulformen auftreten können.

Dulinski beschreibt in Kapitel 6 von [Dul93] einen Unterraum $\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T)$ des Raumes $\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T)$, und zeigt dass dieser die Fourier-Jacobikoeffizienten Siegelscher Modulformen enthält ([Dul93], Satz 7). Um diesen Unterraum zu definieren, benötigen wir folgende bei Dulinski vorkommende Mengen:

Definition 4.20. *Wir definieren die Mengen*

$$M^{n-s}_{n-r}(T) := \left\{ \begin{matrix} u_4 \in \mathbb{Z}_*^{n-r\times n-r} \mid \text{ es gibt eine Ergänzung } \begin{pmatrix} * \\ u_4 \end{pmatrix} \in P(n-s, n-r)_*, \\ T[{}^t u_4^{-1}] \in \mathcal{A}_{n-r} \end{matrix} \right\}$$

und

$$PE(n-s, u_4) := \{u \in P(n-s, n-r)_* \mid u = \begin{pmatrix} * \\ u_4 \end{pmatrix}\}.$$

Für die zweite Menge sei $u_4 \in \mathbb{Z}_*^{n-r\times n-r}$.

Damit lassen sich Summen gewisser Eisensteinreihen betrachten:

$$\widehat{E}^{k,(T)}_{r,n-r,s}(z, \varphi, u_4) := \sum_{u \in \mathcal{U}(n-s)_{n-r,1} \backslash PE(n-s,u_4)} E^{k,(T)}_{(r,n-r),s}(z, \varphi, u).$$

Damit definieren wir die Vektorräume

$$\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T, u_4) := \{\widehat{E}^{k,(T)}_{r,n-r,s}(z, \varphi, u_4) \mid \varphi \in \mathcal{S}^k_{s,n-r}(T[{}^t u_4^{-1}])\},$$

$$\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r,s}(T) := \bigoplus_{u_4 \in M^{n-s}_{n-r}(T)/\operatorname{GL}_r(\mathbb{Z})} \widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T, u_4)$$

und schließlich

$$\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T) := \bigoplus_{s=0}^{r} \widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r,s}(T).$$

Ziel dieses Kapitels ist es, eine alternative Beschreibung dieses Raums mittels der Hecke-Operatoren U_V und der schon bei Ziegler [Zie89] vorkommenden Eisensteinreihen $E^{k,(T)}_{r,n-r,s}(*, *, 1_{n-s})$ anzugeben.

Lemma 4.21. *Für eine Matrix $X \in \mathbb{Z}^{n-r\times n-r}$ gilt:*

a)

$$J_{n,r} L(X^{-1})^{\downarrow_n} = J_{n,r} L(X^{-1})^{\downarrow_n} J_{n,r},$$

b)

$$Q_s^{r,n-r} J_{n,r} L(X^{-1})^{\downarrow_n} = \dot{\bigcup_y} Q_s^{r,n-r} L(Y_y^{-1})^{\downarrow_n} J_{n,r}.$$

wobei $Y_y = \begin{pmatrix} 1_{r-s} & y \\ 0 & X \end{pmatrix}$ *ist, und* $\begin{pmatrix} y \\ X \end{pmatrix}$ *ein Repräsentantensystem von*

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash \{ \begin{pmatrix} * \\ X \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-s \times n-r} \}$$

durchläuft.

Beweis. a) Es gilt nach Satz 2.9

$$J_{n,r} = \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n} \ltimes H_{n,r}.$$

Da die Gruppe $\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})$ mit $L(X^{-1})^{\downarrow_n}$ kommutiert, reicht es

$$H_{n,r} L(X^{-1})^{\downarrow_n} H_{n,r} = H_{n,r} L(X^{-1})^{\downarrow_n}$$

zu zeigen. Für ein Element $M = \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & \mu \\ {}^t\lambda & 1_{n-r} & {}^t\mu & \kappa \\ 0 & 0 & 1_r & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \in H_{n,r}$ gilt:

$$\begin{aligned} L(X^{-1})^{\downarrow_n} M &= \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tX & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & 1_{n-r} & \mu' & \kappa \\ 0 & 0 & 1_r & -{}^t\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & \mu \\ {}^tX\lambda & {}^tX & {}^tX\mu' & {}^tX\kappa \\ 0 & 0 & 1_r & -{}^t\lambda \\ 0 & 0 & 0 & X^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & \mu X \\ {}^tX\lambda & 1_{n-r} & {}^tX\mu' & {}^tX\kappa X \\ 0 & 0 & 1_r & -{}^t\lambda X \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tX & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & \mu X \\ {}^tX\lambda & 1_{n-r} & {}^tX\mu' & {}^tX\kappa X \\ 0 & 0 & 1_r & -{}^t\lambda X \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \in H_{n,r}$$

ist die Aussage gezeigt.

b) Nach a) und wegen $L(Y_y^{-1})^{\downarrow_n} J_{n,r} = L(X)^{\downarrow_n} J_{n,r}$ ist die Inklusion „$\supset$“ gezeigt. Für die umgekehrte Inklusion „$\subset$“ zeigen wir, dass ein beliebiges Element der Doppelnebenklasse $Q_s^{r,n-r} J_{n,r} L(X^{-1})^{\downarrow_n}$ in einer der Doppelnebenklassen der rechten Seite liegt. Dazu werden wir ein solches Element $xL(X^{-1})^{\uparrow_n}$ mit $x \in J_{n,r}$ durch Multiplikation mit Elementen aus $J_{n,r}$ von rechts und mit Elementen aus $Q_s^{r,n-r}$ von links multiplizieren, bis wir ein $L(Y_y^{-1})$ erhalten.

1. Es reicht $x \in H_{n,r}$ zu betrachten:
   Die Jacobigruppe zerlegt sich wie oben in
   $$J_{n,r} = \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n} \ltimes H_{n,r}$$
   und der Faktor $\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$ kommutiert mit $L(X^{-1})^{\downarrow_n}$.
2. Man kann x wählen als $L(V)$ mit $V \in L^{-1}(H_{n,r})$:

   Da der linke untere $n \times n$-Block eines Elements von $H_{n,r}$ nach Definition 0 ist, kann es in der Form $L(V,S) = L(1,S)L(V)$ mit $V \in L^{-1}(H_{n,r})$ geschrieben werden. Wegen $L(1,S) \in Q_s^{r,n-r}$ ist die Aussage gezeigt.
3. Da alle Matrizen von der Form $L(U) = \begin{pmatrix} {}^tU^{-1} & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ sind, reicht es, die oberen linken $n \times n$ Blöcke zu betrachten, also
   $$\begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 \\ x_1 & x_2 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & {}^tX \end{pmatrix}.$$
   Der Block unseres Elements kann auf die Gestalt
   $$\begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 \\ 0 & x_2 & {}^tX \end{pmatrix}$$
   gebracht werden:
   Das erreichen wir durch Multiplikation von links mit $U' := \begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 \\ -x_1 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$,
   wobei $L({}^tU'^{-1}) \in Q_s^{r,n-r}$ gilt.
4. Der Repräsentant kann als ein $L(Y_y^{-1})^{\downarrow_n}$ gewählt werden:
   Wir können den linken oberen Block von rechts mit Elementen der Form $\begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & * & 1_{n-r} \end{pmatrix}$ und von links mit Elementen der Form $\begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$ multiplizieren. Durch Transponieren kommt man auf das angegebene Repräsentantensystem.

Es bleibt zu zeigen, dass die Nebenklassen auf der rechten Seite disjunkt sind. Sei also

$$xL(Y_y^{-1})^{\downarrow_n} v = L(Y_{y'}^{-1})^{\downarrow_n}$$

mit $x \in Q_s^{r,n-r}$ und $v \in J_{n,r}$ gegeben.

Man kann $x \in Q_s^{r,n-r}$ aufspalten in x_1x_2 mit $x_2 \in \mathrm{Sp}_s(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$ und mit $x_1 = L(U_1, S_1)$. Analog kann man $v \in J_{n,r}$ aufspalten in v_1v_2 mit $v_1 \in \mathrm{Sp}_s(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$ und mit $v_2 = L(U_2, S_2)$. Wir erhalten

$$L(U_1, S_1)x_2L(Y_y^{-1})^{\downarrow_n} v_1L(U_2, S_2) = L(Y_{y'}^{-1})^{\downarrow_n}.$$

Wir können nun $L(Y_y^{-1})$ mit x_2 vertauschen und bekommen die Gleichung

$$L(U_1, S_1)L(Y_y^{-1})^{\downarrow_n} x_2v_1L(U_2, S_2) = L(Y_{y'}^{-1})^{\downarrow_n}. \tag{4.2}$$

Da nun alle Elemente bis auf x_2v_1 von der Art $L(*, *)$ sind, muss das auch für (x_2v_1) gelten, und wir erhalten, indem wir den oberen linken $n \times n$-Block von (4.2) betrachten,

$$\begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & {}^t y & {}^t X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & v_2 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & {}^t y' & {}^t X \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Hiermit folgern wir $uv_2 = 0$ und, da u invertierbar ist, auch $v_2 = 0$. Dann ergibt aber der rechte untere Block von (4.3)

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^t y & {}^t X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ {}^t y' & {}^t X \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\begin{pmatrix} {}^t y & {}^t X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t y' & {}^t X \end{pmatrix},$$

und somit

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ X \end{pmatrix}.$$

Da also $\begin{pmatrix} y \\ X \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y' \\ X \end{pmatrix}$ in der selben Nebenklasse unter $\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1}$ sind, haben wir die Aussage bewiesen.

□

Wir brauchen noch einige Vorbereitungen:

Definition/Lemma 4.22. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{l_2 \times l_1}$ und eine Matrix $R \in \mathbb{Z}^{l_1 \times l_1}$ mit maximalem Rang schreiben wir $R \mid A$, falls es eine Matrix $A' \in \mathbb{Z}^{l_2 \times l_1}$ gibt mit $A'R = A$.*

Mit $\sum_{R|A}$ bezeichnen wir die Summe über ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $\mathrm{GL}_{l_1}(\mathbb{Z})R$ mit $R \mid A$.

Seien zwei Matrizen $A \in \mathbb{Z}^{l_2\times l_1}, B \in \mathbb{Z}^{l_3\times l_1}$ mit $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} = l_1$ gegeben. Wir definieren den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(A,B)$ als die Nebenklasse $\mathrm{GL}_{l_1}(\mathbb{Z})G$, für die $G \mid A$ und $G \mid B$ gilt, und die für jede weitere Matrix G' mit $G' \mid A$ und $G' \mid B$ die Bedingung $G' \mid G$ erfüllt.
Es gilt genau dann $\mathrm{ggT}(A,B) = \mathrm{GL}_{l_1}(\mathbb{Z})$, wenn $\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}$ primitiv ist.

Beweis. Sei

$$\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D \\ 0\end{pmatrix} X$$

die Elementarteilerdarstellung von $(\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix})$. Dann ist $G := DX$ ein Teiler von $A = U_1DX$ und $B = U_3DX$. Sei G' ein weiterer Teiler von $A = A'G'$ und $B = B'G'$. Dann ist einerseits

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A' \\ B'\end{pmatrix}$$

eine ganze Matrix und andererseits

$$\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A' \\ B'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix} G'^{-1} = \begin{pmatrix} DXG'^{-1} \\ 0\end{pmatrix}.$$

Also ist DXG'^{-1} ganz und somit G' ein Teiler von $G = DX$. Damit ist die Existenz des größten gemeinsamen Teilers bewiesen.

Die letzte Aussage folgt, da eine Matrix $\begin{pmatrix} A \\ B\end{pmatrix}$ genau dann primitiv ist, wenn ihre Elementarteilergestalt $\begin{pmatrix} 1_{l_1} \\ 0\end{pmatrix}$ ist. □

Jetzt können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz 4.23. *Es gilt:*

$$E^{k,(T)}_{r,n-r,s}(z, \varphi^{(T)}, 1_{n-s}) \mid U_X = \sum_{{}^tV|{}^tX} \widehat{E}^{k,(T)}_{r,n-r,s}(z, (\varphi^{(T)} \mid U_V), {}^tX{}^tV^{-1}).$$

Beweis. Die linke Seite ist nach Definition

$$E^{k,(T)}_{r,n-r,s}(z, \varphi, 1_{n-s}) \mid U_X := \sum_{\gamma\in Q^{r,n-r}_s\backslash J_{n,r}L({}^tX^{-1})^{\downarrow n}} \varphi^{(T)}(\gamma < z >^{\alpha}) j(\gamma, z)^{-k}.$$

Nach Lemma 4.21 können wir dies umformen zu

$$\sum_{y} \sum_{\gamma\in Q^{r,n-r}_s\backslash L(Y_y^{-1})^{\downarrow n} J_{n,r}} \varphi^{(T)}(\gamma < z >^{\alpha}) j(\gamma, z)^{-k}$$

mit $Y_y := \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & {}^tX \end{pmatrix}$ und y wie in Lemma 4.21. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & {}^tX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y\,\mathrm{ggT}(y, {}^tX)^{-1} \\ 0 & {}^tX\,\mathrm{ggT}(y, {}^tX)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{ggT}(y, {}^tX) \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun nur solche y, für die $\mathrm{ggT}(y, {}^tX) = {}^tV$ für ein festes ${}^tV \mid {}^tX$ gilt. Hier durchläuft $\begin{pmatrix} y \\ {}^tX{}^tV^{-1} \end{pmatrix}$ ein Repräsentantensystem von

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash \{ \begin{pmatrix} * \\ {}^tX{}^tV^{-1} \end{pmatrix} \}$$

mit der Zusatzbedingung, dass $\begin{pmatrix} y \\ {}^tX{}^tV^{-1} \end{pmatrix}$ primitiv ist. Also durchläuft $\begin{pmatrix} y \\ {}^tX{}^tV^{-1} \end{pmatrix}$ die Nebenklassen

$$\mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash PE(n-s, {}^tX{}^tV^{-1}).$$

Wir erhalten

$$\sum_{{}^tV \mid {}^tX} \sum_{\begin{pmatrix} y \\ {}^tX{}^tV^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash PE(n-s, {}^tX{}^tV^{-1})} \sum_{\gamma \in Q_s^{r,n-r} \backslash L({}^tV^{-1})^{\downarrow n} L({}^tVY_y^{-1})^{\downarrow n} J_{n,r}}$$

$$\varphi^{(T)}(\gamma < z >^{\alpha}) j(\gamma, z)^{-k}.$$

Da $\gamma \in Q_s^{r,n-r}$ genau dann gilt, wenn $L({}^tV)^{\downarrow n}\gamma \in Q_s^{r,n-r}$ gilt, erhalten wir

$$\sum_{{}^tV \mid {}^tX} \sum_{\begin{pmatrix} y \\ {}^tX{}^tV^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash PE(n-s, XV^{-1})} \sum_{\gamma \in Q_s^{r,n-r} \backslash L(VY_y^{-1})^{\downarrow n} J_{n,r}}$$

$$(\varphi^{(T)} \mid U_V)(\gamma < z >^{\alpha}) j(\gamma, z)^{-k}$$

$$= \sum_{{}^tV \mid {}^tX} \sum_{u \in \mathcal{U}(n-s)_{r-s,1} \backslash PE(n-s, XV^{-1})} E^k_{r,n-r,s}(\varphi^{(T)} \mid U_V, u)$$

$$= \sum_{{}^tV \mid {}^tX} \widehat{E}^{k,(T)}_{r,n-r,s}(z, (\varphi^{(T)} \mid U_V), {}^tX{}^tV^{-1}).$$

□

Damit bekommen wir die angekündigte Darstellung:

Satz 4.24. *Es gilt:*

$$\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T) = \{ (E^{k,(T[V^{-1}])}_{r,n-r,s}(z, \varphi, 1_{n-r}) \mid U_V) \mid \varphi \in \mathcal{S}^k_{s,n-r}(T[V^{-1}]), T[V^{-1}] \in \mathcal{A}_{n-r}] \}.$$

Beweis. Die Inklusion „$\supseteq$“ folgt aus Satz 4.23. Nach [Böc86], Formel 29a),29b) kann man dann auch die $\widehat{E}$ als Linearkombinationen der $(E^{k,(T[V^{-1}])}_{r,n-r,s}(z, \varphi, 1_{n-r}) \mid U_V)$ darstellen, und die Aussage ist gezeigt. □

5 Eine Aufspaltung der Nebenklassen $C_{n,m} \backslash \operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z})$

Wir wollen die Fourier-Jacobikoeffizienten der Klingen-Eisensteinreihe

$$E_{n,m}(f,Z) := \sum_{\gamma \in C_{n,m} \backslash \operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z})} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

und insbesondere deren Aufspaltung gemäß der Zerlegung

$$\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T)$$

untersuchen. Zu diesem Zweck werden wir die Summation über die Nebenklassen $C_{n,m} \backslash \operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z})$ aufspalten in

$$E_{n,m}(f,Z) = \sum_{t=0}^{\min\{n-r, n-m\}} H^t_{n,m,r}(f,Z)$$

mit

$$H^t_{n,m,r} := \sum_{\gamma \in C_{n,m} \backslash M^t_{n,m,r}} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

und Mengen $M^t_{n,m,r} \subseteq \operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z})$. In diesem Kapitel werden wir zunächst die Mengen $M^t_{n,m,r}$ definieren. Der Parameter r wird dabei den Grad $(r, n-r)$ der Jacobi-Fourierkoeffizienten festlegen, der Parameter t wird bestimmen, zu welcher Komponente der Zerlegung

$$\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) = \bigoplus_{s=0}^{r} \mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T)$$

die Jacobi-Fourierkoeffizienten der Funktion $H^t_{n,m,r}(f)$ gehören. Diesen Zusammenhang wird Satz 6.2 des folgenden Kapitels herstellen. Um den Satz zu beweisen, benötigen wir ein passendes Repräsentantensystem der Nebenklassen $C_{n,m} \backslash M^t_{n,m,r}$. Dieses werden wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels in Satz 5.21 finden, der das erste Ergebnis dieses Kapitels darstellt.

Für die Rechnungen in Kapitel 9 benötigen wir noch ein weiteres Repräsentantensystem der Nebenklassen $C_{n+m,0} \backslash M^t_{n+m,0,n}$. Dieses werden wir im zweiten Abschnitt dieses Kapitels in Satz 5.23 mit Hilfe der Rechnungen des ersten Abschnitts erhalten.

Das letzte Ergebnis dieses Kapitels ist Satz 5.24. Dieser liefert eine alternative Definition der Mengen $M^t_{n,m,r}$. Diese wird uns helfen, in Kapitel 8 die Identität

$$\left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle = \lambda(f) H^{v-r-m}_{n,m,r}(f, Z_1)$$

(mit später definierten Funktionen $G^v_{n,m,r}$) aus Satz 7.7 für Eigenformen $f \in \mathcal{S}^k_m$ zu beweisen. Mit dieser Formel und den Ergebnissen des zweiten Abschnitts können wir dann in Kapitel 9 die Fourierkoeffizienten der Funktionen $H^t_{n,m,r}$ berechnen.

Im gesamten Kapitel seien $n, m, r, t \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, für die $n \geq m, r$ und $t \leq \min\{n-m, n-r\}$ gilt.

5.1 Ein Repräsentantensystem von $C_{n,m}\backslash M^t_{n,m,r}$

Für Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ in den schon bekannten Gruppen $C_{n,m}$ und $J_{n,r}$ zerlegen wir, wie in Kapitel 2, die vier $n \times n$-Blöcke A, B, C, D jeweils in vier Teilmatrizen $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ (für B, C, D entsprechend) der folgenden Formate:

$C_{n,m}$:

$$\begin{pmatrix} m \times m & m \times n-m \\ n-m \times m & n-m \times n-m \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

$J_{n,r}$:

$$\begin{pmatrix} r \times r & r \times n-r \\ n-r \times r & n-r \times n-r \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Um die Mengen $M^t_{n,m,r}$ zu definieren, teilen wir die vier Blöcke A, B, C, D jeweils weiter in Blöcke der Größen

$$\begin{pmatrix} m \times r & m \times n-r \\ n-m \times r & n-m \times n-r \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

ein. Mit dieser Zerlegung können wir nun die Mengen $M^t_{n,m,r}$ definieren:

Definition 5.1. *Für n, m, r, t und die Zerlegung von Matrizen wie in (5.3) definieren wir*

$$M^t_{n,m,r} := \{M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid \mathrm{rg}(C_{22}) = t\},$$

sowie die in einigen Rechnungen auftretenden Mengen

$$\begin{aligned} M^{t,0}_{n,m,r} :=& \left\{ M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid, C_{22} = \begin{pmatrix} c_{22} \\ 0_{n-m-t,n-r} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-m,n-r}, \mathrm{rg}(c_{22}) = t \right\} \\ =& M^t_{n,m,r} \cap M^0_{n,m+t,r}. \end{aligned}$$

Weiter definieren wir als Untergruppe der $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ *die Gruppe*

$$C_{n,(m,m+t)} := C_{n,m} \cap C_{n,m+t}.$$

Diese Mengen $M^t_{n,m,r}$ haben folgende Eigenschaften:

Proposition 5.2. *Es gilt:*

a) $$C_{n,m}M^t_{n,m,r} = M^t_{n,m,r}$$

b) $$\dot{\bigcup}_{t=0}^{\min\{n-m,n-r\}} M^t_{n,m,r} = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$$

c) $$M^t_{n,m,r}C_{n,r} = M^t_{n,m,r}.$$

Beweis. Sind (mit den Zerlegungen (5.1), (5.2) und (5.3)) $N_1 \in C_{n,m}, M \in M^t_{n,m,r}$ und $N_2 \in C_{n,r}$, gegeben, so gilt:

$$N_1MN_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & D(N_1)_{22}C(M)_{22}A(N_2)_{22} & * & * \end{pmatrix}.$$

Da die Matrizen N_1 und N_2 invertierbar sind und daher auch $D(N_1)_{22} \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{Z})$ und $A(N_2)_{22} \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$ gilt, hat mit $C(M)_{22}$ auch $D(N_1)_{22}C(M)_{22}A(N_2)_{22}$ Rang t. Dies zeigt die erste und letzte Aussage. Die zweite folgt direkt aus der Defin-intion, da t alle möglichen Ränge von C_{22} durchläuft. □

Bemerkung 5.3. *a) Die Gleichung aus Teil a) von Proposition 5.2 besagt, dass sich für eine Siegelsche Spitzenform* $f \in \mathcal{S}^k_m$ *vom Grad m Funktionen*

$$H^t_{n,m,r}(f,Z) := \sum_{\gamma \in C_{n,m}\backslash M^t_{n,m,r}} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

als Teilreihe der Klingen-Eisensteinreihe

$$E^k_{n,m}(f,Z) := \sum_{\gamma \in C_{n,m}\backslash \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

definieren lassen. Diese werden im nächsten Kapitel genauer betrachtet.

b) Gleichung b) aus Proposition 5.2 liefert eine Zerlegung der Klingen-Eisensteinreihe in die Teilreihen:

$$E^k_{n,m}(f) = \sum_{t=0}^{\min\{n-m,n-r\}} H^t_{n,m,r}(f).$$

c) Die Gleichung aus Teil c) dieser Proposition zeigt (unter Berücksichtigung der Konvergenz der Klingen-Eisensteinreihe), dass diese Funktionen invariant unter der Gruppe $J_{n,r} \subseteq C_{n,r}$ *sind, also eine Jacobi-Fourierzerlegung besitzen. Auch mit dieser werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen.*

Im Folgenden wollen wir ein geeignetes Repräsentantensystem der Nebenklassen $C_{n,m}\backslash M^t_{n,m,r}$ finden, das uns die Berechnungen des folgenden Kapitels ermöglicht. Dazu werden wir die nächsten Rechnungen durchführen.

Lemma 5.4. *Die Menge $M^t_{n,m,r}$ besteht nach Teil a) von Proposition 5.2 aus $C_{n,m}$-Rechtsnebenklassen. Zusätzlich gilt: Die Menge $M^{t,0}_{n,m,r}$ besteht aus $C_{n,(m,m+t)}$-Rechtsnebenklassen und die Einbettung $M^{t,0}_{n,m,r} \to M^t_{n,m,r}$ induziert eine Bijektion der Nebenklassen:*

$$C_{n,(m,m+t)}\backslash M^{t,0}_{n,m,r} \to C_{n,m}\backslash M^t_{n,m,r}.$$

Beweis. Es gilt $M^{t,0}_{n,m,r} = M^t_{n,m,r} \cap M^0_{n,(m+t,r)}$. Nach Teil *a)* von Proposition 5.2 ist $M^0_{n,(m+t,r)}$ invariant unter $C_{n,m+t}$ und $M^t_{n,m,r}$ invariant unter $C_{n,m}$. Also ist auch $M^{t,0}_{n,m,r}$ invariant unter $C_{n,(m,m+t)} = C_{n,m} \cap C_{n,m+t}$. Aus $C_{n,(m,m+t)} \subseteq C_{n,m}$ und $M^{t,0}_{n,m,r} \subseteq M^t_{n,m,r}$ folgt, dass die angegebene Abbildung wohldefiniert ist.

Surjektivität:
Sei $M \in M^t_{n,m,r}$ gegeben. Dann gibt es ein $U \in \mathrm{GL}_{n-m}$, sodass die unteren $n-m-t$ Zeilen von $UC(M)_{22}$ Nullzeilen sind. Mit

$$N := L(U)^{\downarrow_n} = \begin{pmatrix} 1_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{pmatrix} \in C_{n,m}$$

gilt dann $NM \in M^{t,0}_{n,m,r}$.

Injektivität:
Seien $M_1, M_2 \in M^{t,0}_{n,m,r}$ und $N \in C_{n,m}$ mit $M_1 = NM_2$ gegeben. Dann gilt $C(M_1)_{22} = D(N)_{22}C(M_2)_{22}$. Da die oberen t Zeilen von $C(M_1)_{22}$ und $C(M_2)_{22}$ jeweils Rang t haben und die unteren $n-m-t$ Zeilen jeweils Nullzeilen sind, muss $D(N)_{22}$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * \\ 0_{n-m-t,t} & * \end{pmatrix}$$

sein. Deshalb gilt

$$N = \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & {}^tD(N)_{22}^{-1} & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & D(N)_{22} \end{pmatrix} \in C_{n,(m,m+t)},$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Lemma 5.5. *Es gilt:*

$$M^0_{n,m+t,r} = \bigcup_{U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})} C_{n,m+t} L(U)\, \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$$

Beweis. „$\supseteq$“:
Die Menge $M^0_{n,m+t,r}$ besteht nach Teil *a)* von Proposition (5.2) aus $C_{n,m+t}$-Rechtsnebenklassen und nach Teil *c)* aus $J_{n,r}$-Linksnebenklassen. Da $L(U)$ für alle $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ immer in der Menge $M^0_{n,m+t,r}$ liegt, haben wir die Inklusion bewiesen.

„$\subseteq$“:
Sei eine beliebige Matrix

$$M := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & 0_{n-m-t,n-r} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \in M^0_{n,m+t,r},$$

gegeben. Wir wollen statt M schrittweise andere Repräsentanten der Doppelnebenklasse $C_{n,m+t}M\,\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$ finden, bis wir ein Element der Form $L(U)$ in dieser Doppelnebenklasse gefunden haben.

1. Es kann $C_{21} = 0$ gewählt werden:
   Da M eine symplektische Matrix ist, ist nach (2.2)
   $$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tD_{11} & {}^tD_{21} \\ {}^tD_{12} & {}^tD_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & C^t_{21}D_{21} \end{pmatrix}$$
   symmetrisch, also ist auch $C^t_{21}D_{21}$ symmetrisch. Nach Lemma 2.5 gibt es eine Matrix $\gamma \in \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})$ mit
   $$\begin{pmatrix} C_{21} & D_{21} \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 & * \end{pmatrix}.$$
   Für diese Matrix gilt dann
   $$M\gamma^{\uparrow_n} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$
   und die Aussage ist gezeigt.

2. Zusätzlich kann $C_{11} = 0$ und $C_{12} = 0$ gewählt werden. Da M eine symplektische Matrix ist, ist nach (2.1)
   $$\begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_{11}C_{11} & {}^tA_{11}C_{12} \\ {}^tA_{12}C_{11} & {}^tA_{12}C_{12} \end{pmatrix}$$
   symmetrisch. Da nun
   $$\begin{pmatrix} {}^tA_{11} \\ {}^tA_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tA_{11}C_{11} & {}^tA_{11}C_{12} \\ {}^tA_{12}C_{11} & {}^tA_{12}C_{12} \end{pmatrix}$$
   symmetrisch ist, gibt es nach Lemma 2.5 eine symplektische Matrix $\gamma \in \mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z})$ mit
   $$\gamma \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ C_{11} & C_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann erfüllt $\gamma^{\uparrow_n} M = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ die Anforderungen.

3. Es gibt in der Doppelnebenklasse von M ein Element der Form $L(U)$:
   Nach (2.5) lässt sich $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ schreiben als $L(U,S) = L(1_n, S)L(U)$. Wegen $L(1_n, S) \in C_{n,m+t}$ ist die Aussage gezeigt.

□

Bemerkung 5.6. *Für den Fall $m + t = n - r$ erhält man das vorherige Lemma aus Proposition 4 von [Böc83] durch Anwenden einer Permutationsmatrix.*

Das folgende Lemma wird an verschiedenen Stellen benötigt:

Lemma 5.7. *Sei R ein beliebiger nullteilerfreier Ring. Seien l, k_1, k_2 natürliche Zahlen mit $l \geq k_1, k_2$. Sei eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_l(R)$ gegeben, die in Blöcke*

$$U := \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$$

der Größen

$$\begin{pmatrix} k_1 \times k_2 & k_1 \times l - k_2 \\ l - k_1 \times k_2 & l - k_1 \times l - k_2 \end{pmatrix}$$

zerlegt ist.

a) *Ihr Inverses U^{-1} sei zerlegt in Blöcke*

$$U^{-1} := \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix}$$

der Größen

$$\begin{pmatrix} k_2 \times k_1 & k_2 \times l - k_1 \\ l - k_2 \times k_1 & l - k_2 \times l - k_1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$rg(V_3) = rg(U_3) + k_1 - k_2.$$

b) *Es gilt:*

$$\max\{0, k_2 - k_1\} \leq \mathrm{rg}(U_3) \leq \min\{l - k_1, k_2\}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussagen über dem Quotientenkörper Q von R.

a) Es reicht zu zeigen, dass $\dim(\operatorname{Ker} U_3) = \dim(\operatorname{Ker} V_3)$ gilt:
Aus den Dimensionsformeln für U_3 und V_3 folgt dann mit

$$k_2 - \mathrm{rg}(U_3) = \dim(\operatorname{Ker} U_3) = \dim(\operatorname{Ker} V_3) = k_1 - \mathrm{rg}(V_3)$$

die Aussage.

Um zu zeigen, dass die Kerne gleiche Dimension haben, werden wir einen Isomorphismus von $\operatorname{Ker} U_3$ nach $\operatorname{Ker} V_3$ konstruieren.

Zur Konstruktion des Homomorphismus:

Sei $x \in \operatorname{Ker}(U_3)$ gegeben. Nach Definition der U_i und V_i als Blöcke inverser Matrizen gilt $V_3U_1 + V_4U_3 = 0$ und nach Definition von x folgt daraus $V_3U_1x = 0$. Also ist U_1x im Kern von V_3 und dies definiert den gewünschten Homomorphismus.

Zur Bijektivität des Homomorphismus:

Wegen $x \in \operatorname{Ker}(U_3)$ gilt

$$V_1U_1x = (V_1U_1 + V_2U_3)x = 1_{k_2}x,$$

andererseits gilt für $y \in \operatorname{Ker}(V_3)$

$$U_1V_1y = (U_1V_1 + U_2V_3)y = 1_{k_1}y.$$

Damit hat der Homomorphismus eine Umkehrabbildung und ist bijektiv.

b) Die rechte Ungleichung folgt sofort aus den Dimensionen der Matrix U_3.

Für die linke Ungleichung betrachten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} U_3 & U_4 \end{pmatrix}.$$

Da U invertierbar ist, hat diese den Rang $l - k_1$. Da U_4 aber $l - k_2$ Spalten hat, gilt $\mathrm{rg}(U_3) \geq (l - k_1) - (l - k_2) = k_2 - k_1$.

□

Bemerkung 5.8. *Analog kann man*

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(V_1) &= \mathrm{rg}(U_4) + k_1 + k_2 - l, \\ \mathrm{rg}(V_2) &= \mathrm{rg}(U_2) + k_2 - k_1 \end{aligned}$$

und

$$\mathrm{rg}(V_4) = \mathrm{rg}(U_1) + l - k_1 - k_2$$

zeigen.

Definition 5.9. *Seien n, m, r, t wie oben gegeben. Für die Zerlegung einer Matrix in Blöcke $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$ der Größen*

$$\begin{pmatrix} m+t \times r & m+t \times n-r \\ n-m-t \times r & n-m-t \times n-r \end{pmatrix}$$

definieren wir die Menge

$$\operatorname{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z}) := \{U \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid \operatorname{rg}(U_3) = r-s\}.$$

Nach dem zweiten Teil von Lemma 5.7 gilt

$$\max\{r-m-t, 0\} \leq \operatorname{rg}(U_3) \leq \min\{n-m-t, r\}.$$

Also gilt $\operatorname{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ nur für

$$\max\{r+m+t-n, 0\} \leq s \leq \min\{r, m+t\}. \tag{5.4}$$

Im Folgenden betrachten wir für die Urbilder der Gruppen $J_{n,r}$ und $C_{n,m+t}$ unter der Abbildung $L : \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z})$:

$$L^{-1}(C_{n,m+t}) = \{U \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid L(U) \in C_{n,m+t}\} = \left\{ \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0_{n-m-t,m+t} & T_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

und

$$L^{-1}(J_{n,r}) = \{U \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid L(U) \in J_{n,r}\} = \left\{ \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0_{n-r,r} & 1_{n-r} \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Lemma 5.10. *Es gibt in jeder Doppelnebenklasse*

$$L^{-1}(C_{n,m+t})\backslash \operatorname{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z})/L^{-1}(J_{n,r})$$

einen Repräsentanten der Form

$$\begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-m-t+s-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

mit

$$u \in \operatorname{GL}_{m+t+r-2s}^{r-s,*}(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z}) \mid u_3 \in \mathbb{Z}^{r-s \times r-s}, \operatorname{rg}(u_3) = r-s \right\}$$

und $u' \in \operatorname{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$. Weiter gilt $u^{-1} \in \operatorname{GL}_{m+t+r-2s}^{m+t-s,*}(\mathbb{Z})$.

Zum Beweis brauchen wir folgendes Lemma:

Lemma 5.11. *Es gibt in jeder Doppelnebenklasse*

$$\left\{\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0_{n-m-t,m+t} & T_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\right\} \backslash \, \mathrm{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z}) / \left\{\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0_{n-r,r} & S_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\right\}$$

einen Repräsentanten der Form

$$\begin{pmatrix} 1_s & 0_{s,r-s} & 0_{s,m+t-s} & 0_{s,n-m-t+s-r} \\ 0_{m+t-s,s} & u_1 & u_2 & 0_{m+t-s,n-m-t+s-r} \\ 0_{r-s,s} & u_3 & u_4 & 0_{r-s,n-m-t+s-r} \\ 0_{n-m-t+s-r,s} & 0_{n-m-t+s-r,r-s} & 0_{n-m-t+s-r,m+t-s} & 1_{n-m-t+s-r} \end{pmatrix},$$

wobei u_3 Rang $r-s$ hat.

Beweis. Wir werden $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z})$ durch Multiplikation von links und rechts mit Elementen aus den entsprechenden Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ auf die gewünschte Form bringen. Dies werden wir in mehreren Schritten durchführen:

1. Wir können $U_3 = \begin{pmatrix} 0_{r-s,s} & u_3 \\ 0_{n-m-t+s-r,s} & 0_{n-m-t+s-r,r-s} \end{pmatrix}$ mit $\mathrm{rg}(u_3) = r-s$ wählen.
   Wir multiplizieren U von links mit $\begin{pmatrix} 1_{m+t} & 0 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$ und von rechts mit $\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$, um U_3 in Elementarteilerform zu bringen. Da U_3 nach Voraussetzung Rang $r-s$ hat, liefert das die Behauptung, wenn wir die Elementarteiler in die rechte obere Ecke bringen.

2. Zusätzlich können wir $U_1 = \begin{pmatrix} 1_s & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ erreichen:
   Durch Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1_{n-m-t} \end{pmatrix}$ und durch Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$ können wir die ersten s Spalten von U_1 auf Elementarteilerform bringen. Dies beeinflusst U_3 nicht. Da U invertierbar ist und die ersten s Spalten von U_3 Nullspalten sind, hat diese die angegebene Form.

3. Wir können U_4 auf die Form $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1_{n-m-t+s-r} \end{pmatrix}$ bringen:
   Analog zum Vorgehen beim vorherigen Schritt multiplizieren wir U von links mit $\begin{pmatrix} 1_{m+t} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{pmatrix}$ und von rechts mit $\begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix}$.

4. Wir können die Aussage des Lemmas erreichen:
   Durch Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1_{m+t} & 0 & * \\ 0 & 1_{r-s} & * \\ 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix}$ und von rechts

mit $\begin{pmatrix} 1_s & * & * \\ 0 & 1r-s & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$ können wir die verbleibenden Einträge eliminieren. Dies verändert nicht die anderen Einträge.

□

Beweis. Von Lemma 5.10:
Die erste Aussage folgt mit

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0_{n-r,r} & S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & S_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ 0_{n-r,r} & 1_{n-r} \end{pmatrix}$$

direkt aus Lemma 5.11. Die Aussage über das Inverse folgt aus Lemma 5.7 mit $l = m+t+r-2s$, $k_1 = m+t-s$ und $k_2 = r-s$. □

Bemerkung 5.12. *Der Beweis zeigt sogar, dass man* $u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$ *mit* u_3 *in Elementarteilerform wählen kann.*

Nach Lemma 5.5 gibt es wegen $\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n} \subseteq J_{n,r}$ in jeder Doppelnebenklasse

$$C_{n,m+t}\backslash M^0_{n,m+t,r}/J_{n,r}$$

ein Element der Form $L(U)$. In Lemma 5.10 haben wir gezeigt, dass man ein Repräsentantensystem dieser Doppelnebenklassen wählen kann, das aus Matrizen der Form (5.5) besteht. Daher werden wir nun folgende Notation einführen:

Notation 5.13. *Wir schreiben für* $u \in \mathrm{GL}^{r-s,*}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z})$

$$\widehat{u} := \begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-m-t+s-r} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$$

und für $u' \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$

$$\widetilde{u'} := \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}).$$

Weiter geben wir für $u \in \mathrm{GL}^{r-s,*}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z})$ *die Zerlegungen*

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}$$

sowie

$$^t u^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

an. Nach Definition hat u_3 *Rang* $r-s$ *und nach Lemma 5.7 hat* v_2 *Rang* $m+t-s$.

Wir werden diese Repräsentanten jetzt genauer angeben:

Korollar 5.14. *Ist* $\mathcal{R}^s_1$ *ein Repräsentantensystem von*

$$L^{-1}(C_{m+t+r-2s,r-s})\backslash \mathrm{GL}^{r-s,*}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z})/L^{-1}(J_{m+t+r-2s,r-s})$$

und $\mathcal{R}^s_2$ *ein Repräsentantensystem von*

$$\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0_{n-m-t+s-r,m+t-s} & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})\right\} \backslash \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z}),$$

so ist durch

$$\{\widehat{u}\widetilde{u'} \mid u \in \mathcal{R}^s_1, u' \in \mathcal{R}^s_2\}$$

ein Repräsentantensystem von

$$L^{-1}(C_{n,m})\backslash \mathrm{GL}^{m+t,r,s}_n(\mathbb{Z})/L^{-1}(J_{n,r})$$

gegeben.

Beweis. Nach Lemma 5.10 ist in jeder Doppelnebenklasse

$$L^{-1}(C_{n,m})\backslash \mathrm{GL}^{m+t,r,s}_n(\mathbb{Z})/L^{-1}(J_{n,r})$$

ein Element der Form $\widehat{u}\widetilde{u'}$ mit $u \in \mathrm{GL}^{r-s,*}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z})$ und $u' \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & u_2 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \widetilde{u'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u_2x_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_4x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & u_2x_1 & 0 \\ 0 & u_3 & u_4x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \widetilde{u'},$$

zeigt, dass sich $\widetilde{u'}$ von links um Faktoren aus $\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0_{n-m-t+s-r,m+t-s} & * \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})\right\}$ abändern lässt. Also kann $u' \in \mathcal{R}^s_2$ gewählt werden.

Seien jetzt also $u := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^{r-s,*}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z})$, $u' := \begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 \\ u'_3 & u'_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^s_2$ und $w := \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}^{r-s,*}_{m+t+r-2s}(\mathbb{Z})$, $w' := \begin{pmatrix} w'_1 & w'_2 \\ w'_3 & w'_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^s_2$ gegeben, sodass $\widehat{u}\widetilde{u'}$ und $\widehat{w}\widetilde{w'}$ in derselben Doppelnebenklasse liegen. Also gibt es $X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & 0 & x_9 & x_{10} \\ 0 & 0 & x_{11} & x_{12} \end{pmatrix}$

und $Y := \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $X\widehat{u}\widetilde{u'} = \widehat{w}\widetilde{w'}Y$.

Es gilt

$$X\widehat{u}\widetilde{u'} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ x_5 & x_6u_1 + x_7u_3 & * & * \\ 0 & x_9u_3 & * & * \\ 0 & x_{11}u_3 & * & * \end{pmatrix}$$

und

$$\widetilde{\widehat{w}w'}Y = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ w_1y_5 & w_1y_6 & * & * \\ w_3y_5 & w_3y_6 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Aus den obigen Gleichungen folgt $x_{11}u_3 = 0$ und $w_3y_5 = 0$. Da u_3 und w_3 quadratische Matrizen mit vollem Rang sind, gilt also $x_{11} = 0$ und $y_5 = 0$. Aus $w_1y_5 = x_5$ folgt dann auch $x_5 = 0$.

Insbesondere sind nun alle auftretenden Matrizen von der Form $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}$. Wir können uns also auf den rechten unteren 3×3-Block beschränken und bekommen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & x_9 & x_{10} \\ 0 & 0 & x_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_1' & u_2' \\ 0 & u_3' & u_4' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & 0 \\ w_3 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_1' & w_2' \\ 0 & w_3' & w_4' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_6 & y_7 & y_8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $x_{12}\begin{pmatrix} u_3' & u_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_3' & w_4' \end{pmatrix}$ und, da u' und w' in $\mathcal{R}_2^s$ liegen, auch $u' = w'$. Wir schreiben noch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_1' & w_2' \\ 0 & w_3' & w_4' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_6 & y_7 & y_8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_6 & y_7' & y_8' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w_1' & w_2' \\ 0 & w_3' & w_4' \end{pmatrix}$$

mit $\begin{pmatrix} y_7 & y_8 \end{pmatrix} w'^{-1} =: \begin{pmatrix} y_7' & y_8' \end{pmatrix}$. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & x_9 & x_{10} \\ 0 & 0 & x_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 0 \\ u_3 & u_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & 0 \\ w_3 & w_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_6 & y_7' & y_8' \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und durch Betrachten des oberen linken 2×2-Blocks

$$\begin{pmatrix} x_6 & x_7 \\ 0 & x_9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_6 & y_7' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Rechnung zeigt, dass $u' \in \mathcal{R}_1^s$ gewählt werden kann und für $u, w \in \mathcal{R}_1^s$ und $u', w' \in \mathcal{R}_2^s$ die Matrizen $\widetilde{\widehat{u}u'}$ und $\widetilde{\widehat{w}w'}$ genau dann in der gleichen Doppelnebenklasse liegen, wenn $u = w$ und $u' = w'$ gilt. □

Notation 5.15. *Ab jetzt werden wir mit* $\mathcal{R}_1^s$ *und* $\mathcal{R}_2^s$ *feste Repräsentantensysteme wie im vorherigen Korollar bezeichnen. Die Abhängigkeiten von* n, m, r *und* t *werden in der Notation nicht berücksichtigt.*

Mit diesen Vorarbeiten kann für jedes Element von $M^0_{n,m+t,r}$ folgende Zerlegung gefunden werden:

Lemma 5.16. *Es gilt:*

$$M^0_{n,m+t,r} = \bigcup_{s=\max\{r+m+t-n,0\}}^{\min\{r,m+t\}} \bigcup_{u\in\mathcal{R}_1^s} \bigcup_{u'\in\mathcal{R}_2^s} C_{n,m+t} L(\hat{u}) J_{n,r} L(\widetilde{u'}).$$

Beweis. Nach Lemma 5.5 gilt

$$M^0_{n,m+t,r} = \bigcup_{U\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})} C_{n,m+t} L(U)\,\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}.$$

Nach (5.4) gilt

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \bigcup_{s=\max\{r+m+t-n,0\}}^{\min\{r,m+t\}} \mathrm{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z}),$$

weswegen wir zum Beweis des Lemmas nur noch

$$\bigcup_{u\in\mathcal{R}_1^s} \bigcup_{u'\in\mathcal{R}_2^s} C_{n,m+t} L(\widehat{u}) J_{n,r} L(\widetilde{u'}) = \bigcup_{U\in \mathrm{GL}_n^{m+t,r,s}(\mathbb{Z})} C_{n,m+t} L(U)\,\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$$

betrachten müssen. Mit $\mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n} \subseteq J_{n,r}$ und nach den Definitionen aus 5.13 können wir uns dabei auf $u \in \mathcal{R}_1^s$ und $u' \in \mathcal{R}_2^s$ beschränken und erhalten

$$M^0_{n,m+t,r} = \bigcup_{s=\max\{r+m+t-n,0\}}^{\min\{r,m+t\}} \bigcup_{u\in\mathcal{R}_1^s} \bigcup_{u'\in\mathcal{R}_2^s} C_{n,m+t} L(\widehat{u}) L(\widetilde{u'}) J_{n,r}.$$

Mit $L(\widetilde{u'}) J_{n,r} = J_{n,r} L(\widetilde{u'})$ haben wir die Aussage bewiesen. □

Dies werden wir im Folgenden soweit eingeschränken, dass in der Vereinigung keine Elemente doppelt auftreten.

Lemma 5.17. *a) Seien $u \in \mathcal{R}_1^s, u' \in \mathcal{R}_2^s$ und $w \in \mathcal{R}_1^{s'}, w' \in \mathcal{R}_2^{s'}$ gegeben. Gibt es Matrizen $\gamma_1 \in C_{n,m+t}$ und $\gamma_2 \in J_{n,r}$ mit*

$$\gamma_1 L(\widehat{u}\widetilde{u'})\gamma_2 = L(\widehat{w}\widetilde{w'}),$$

so gilt $s = s'$, $u = w$ und $w = w'$.

b) Für $u \in \mathcal{R}_1^s$ gilt:

$$C_{n,m+t} L(\widehat{u}) J_{n,r} = C_{n,m+t} L(\widehat{u}) J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}.$$

c) Für $u \in \mathcal{R}_1^s$ *gilt:*

$$(L(\widehat{u})J_{m+t+r-s,r}^{\uparrow_n}L(\widehat{u}^{-1})) \cap C_{n,m+t} = (\widetilde{Q}_s^{r,m+t-s})^{\uparrow_n} \cap (L(\widehat{u})J_{m+t+r-s,r}^{\uparrow_n}L(\widehat{u}^{-1})).$$

Dabei ist $\widetilde{Q}_s^{r,m+t-s}$ *definiert wie in 2.10.*

Beweis. a) Nach Voraussetzung gilt $\gamma_1 L(\widehat{u}\widetilde{u}')\gamma_2 = L(\widehat{w}\widetilde{w}')$.

Da $L(\widetilde{u}')J_{m+t+r-s,r}^{\uparrow_n} = J_{m+t+r-s,r}^{\uparrow_n}L(\widetilde{u}')$ gilt, gibt es ein $\gamma_2' \in J_{m+t+r-s,r}$ mit $L(\widetilde{u}')\gamma_2'^{\uparrow_n} = \gamma_2^{\uparrow_n}L(\widetilde{u}')$. Wir erhalten

$$\gamma_1 L(\widehat{u})\gamma_2' = L(\widehat{w}\widetilde{w}'\widetilde{u}'^{-1}). \tag{5.6}$$

Die rechte Seite hat die Form

$$\begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

Mit

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & * & * \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & b_{21} & b_{22} & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & d_{11} & d_{12} & * & * \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & d_{21} & d_{22} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & * \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \; {}^t u^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_2' = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 1_{m+t-s} & 0 & * & * & * & * \\ * & * & 0 & 1_{n-m-t-r+s} & * & * & * & * \\ C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & * & * \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m+t-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix},$$

ergibt sich für die linke Seite:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ x_1u_3C_{21} & x_1u_3C_{22} & 0 & 0 & x_1u_3D_{21} & * & * & * \\ x_2u_3C_{21} & x_2u_3C_{22} & 0 & 0 & x_2u_3D_{21} & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man beide Seiten, so muss

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} u_3C_{21} = 0$$

gelten. Da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ die ersten Spalten einer invertierbaren Matrix bilden, gilt dann schon $u_3C_{21} = 0$. Weil der Rang der quadratischen Matrix u_3 aber maximal ist, folgt damit $C_{21} = 0$.

Analog folgt $C_{22} = 0$ und $D_{21} = 0$. Also ist γ_2' schon in der Gruppe $C_{n,s}$ und lässt sich zerlegen in $\gamma_2''L(U_{\gamma_2}, S_{\gamma_2})$ mit $\gamma_2'' \in \mathrm{Sp}_s(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$. Für γ_2'' gilt aber $L(\widehat{u}^{-1})\gamma_2''L(\widehat{u}) \in C_{n,m+t}$. Also gelte oBdA $\gamma_2 = L(U_{\gamma_2}, S_{\gamma_2})$. Da nun in Gleichung (5.6) alle auftretenden Größen außer γ_1 in $C_{n,0}$ liegen, muss auch $\gamma_1 \in C_{n,0}$ gelten. Damit kann man $\gamma_1 = L(U_{\gamma_1}, S_{\gamma_1})$ schreiben. Aus (5.6) folgt nun durch Betrachten des rechten unteren $n \times n$ Blocks:

$$U_{\gamma_1}\widehat{u}\widetilde{u}'U_{\gamma_2} = \widehat{w}\widetilde{w}'$$

und wegen $L(U_{\gamma_1}) \in C_{n,m+t}$ und $L(U_{\gamma_2}) \in J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$ folgt aus Korollar 5.14 auch die Aussage.

b) Nach 2.9 zerlegt sich die Gruppe $J_{n,r}$ in das semidirekte Produkt

$$H_{n,r} \rtimes \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$$

und entsprechend $J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$ in

$$H^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r} \rtimes \mathrm{Sp}_r(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}.$$

Wir müssen also nur zeigen, dass wir ein Element aus $H_{n,r}$ aufspalten können in einen Teil in $L(\hat{u}^{-1})C_{n,m+t}L(\widehat{u})$ und einen Teil in $H^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$.

Sei also

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ {}^t\lambda_1 & 1_{m+t-s} & 0 & {}^t\mu_1 & \kappa_1 & \kappa_2 \\ {}^t\lambda_2 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} & {}^t\mu_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1_r & -\lambda_1 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m+t-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix} \in H_{n,r}$$

gegeben. Diese Matrix lässt sich zerlegen in das Produkt von

$$\gamma' := \begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 \\ 0 & 1_{m+t-s} & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 \\ {}^t\lambda_2 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} & {}^t\mu_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1_r & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m+t-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{pmatrix} 1_r & 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 \\ {}^t\lambda_1 & 1_{m+t-s} & 0 & {}^t\mu_1 & \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_r & -\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m+t-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix},$$

wobei der zweite Faktor in $H^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$ liegt. Dass $L(\hat{u})\gamma' L(\hat{u}^{-1}) \in C_{n,m+t}$ gilt, rechnet man direkt nach.

c) „$\subseteq$“:
Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(\widehat{u}) J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r} L(\widehat{u}^{-1}) \cap C_{n,m+t}$ gegeben. Mit

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix},$$

und

$${}^t u^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix},$$

gilt dann

$$\widehat{u}^{-1}\, C\, {}^t\widehat{u}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * & c_{12}v_2 & * \\ * & * & * & * \\ {}^t v_2 c_{21} & * & {}^t v_2 c_{22} v_2 & 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Da dies der linke untere $n \times n$-Block von $L(\hat{u}^{-1})ML(\hat{u})$ ist und $L(\hat{u}^{-1})ML(\hat{u}) \in J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$ gilt, folgt daraus $c_{12}v_2 = 0$, ${}^t v_2 c_{21} = 0$ und ${}^t v_2 c_{22} v_2 = 0$. Da die quadratische Matrix v_2 maximalen Rang hat, gilt schon $c_{12} = 0, c_{21} = 0$ und $c_{22} = 0$. Damit ist die Bedingung an C aus der Definition 2.10 der Gruppe $\widetilde{Q}^{r,m+t-s}_s$ erfüllt.

Weiter ist $\widehat{u}^{-1} D \widehat{u}$, der rechte untere $n \times n$-Block von $L(\hat{u}^{-1}) M L(\hat{u}) \in J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$, gegeben durch

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & x_1 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{m+t-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$D = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ u_1 d_{21} & u_1 d_{22}{}^t v_1 + u_1 x_2 {}^t v_2 + u_2 {}^t v_2 & * & 0 \\ u_3 d_{21} & u_3 d_{22}{}^t v_1 + u_3 x_2 {}^t v_2 + u_4 {}^t v_2 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix}.$$

Dies ist nach Vorausetzung der rechte untere $n \times n$-Block einer Matrix aus $C_{n,m+t}$.

Aus $u_3 d_{21} = 0$ folgt $d_{21} = 0$. Mit $u_3 d_{22}{}^t v_1 + u_3 x_2 {}^t v_2 + u_4 {}^t v_2 = 0$ gilt wegen $u_3 {}^t v_1 + u_4 {}^t v_2 = 0$ auch $u_3 d_{22}{}^t v_1 + u_3 x_2 {}^t v_2 - u_3 {}^t v_1 = 0$.

Da u_3 vollen Rang hat folgt daraus $d_{22}{}^t v_1 + x_2 {}^t v_2 - {}^t v_1 = 0$.

Damit gilt

$$u_1 d_{22}{}^t v_1 + u_1 x_2 {}^t v_2 + u_2 {}^t v_2 = u_1 (d_{22}{}^t v_1 + x_2 {}^t v_2 - {}^t v_1) + u_1 {}^t v_1 + u_2 {}^t v_2 = u_1 {}^t v_1 + u_2 {}^t v_2 = 1.$$

Zusammen ergibt dies

$$D = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ 0 & 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t-r+s} \end{pmatrix}.$$

Damit ist auch die Anforderung an D erfüllt.
Die umgekehrte Inklusion rechnet man nach.

□

Proposition 5.18. *Läuft*
s von $\max\{r+m+t-n, 0\}$ bis $\min\{r, 2r-m-t\}$,
u durch $\mathcal{R}^s_1$,
u' durch $\mathcal{R}^s_2$,
γ_1 durch $C_{n,m+t}$
und γ_2 durch ein Repräsentantensystem von

$$(L(\widehat{u}^{-1})(\widetilde{Q}^{r,m+t-s}_s)^{\uparrow_n} L(\widehat{u})) \cap J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}) \backslash J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r},$$

so durchläuft

$$\gamma_1 L(\widehat{u}) \gamma_2 L(\widetilde{u}')$$

die Menge

$$M^0_{n,m+t,r}$$

genau einmal.

Beweis. Nach Lemma 5.16 hat jedes Element in $M^0_{n,m+t,r}$ eine solche Zerlegung mit $\gamma_2 \in J_{n,r}$ und nach Teil b) und c) von Lemma 5.17 kann γ_2 auch in $J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$ und der oben angegebenen Nebenklasse gewählt werden.

Wir müssen noch die Eindeutigkeit zeigen:
Seien $\gamma_1, u, u', \gamma_2$ und $\delta_1, w, w', \delta_2$ gegeben mit

$$\gamma_1 L(\widehat{u})\gamma_2 L(\widetilde{u}') = \delta_1 L(\widehat{w})\delta_2 L(\widetilde{w}').$$

Wegen $L(\tilde{u}')J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r} = J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}L(\tilde{u}')$ und $L(\tilde{w}')J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r} = J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}L(\tilde{w}')$ gilt $C_{n,m+t}L(\hat{u})L(\tilde{u}')J_{n,r} = C_{n,m+t}L(\hat{w})L(\tilde{w}')J_{n,r}$ und mit Teil a) von Lemma 5.17 damit $(u,u') = (w,w')$. Wir bekommen

$$\delta_1 L(\hat{u})\delta_2 = \gamma_1 L(\hat{u})\gamma_2 \Leftrightarrow L(\hat{u}^{-1})\gamma_1^{-1}\delta_1 L(\hat{u})\delta_2 = \gamma_2.$$

Nach Teil c) von Lemma 5.17 sind γ_2 und δ_2 in der selben Nebenklasse von

$$(L(\hat{u}^{-1})(\tilde{Q}_s^{r,m+t-s})^{\uparrow_n} L(\hat{u})) \cap J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r})\backslash J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r},$$

also gilt $\gamma_2 = \delta_2$ und damit auch $\gamma_1 = \delta_1$. □

Lemma 5.19. *Die Einbettung*

$$\mathrm{Sp}_{m+t} \to C_{n,m+t} \tag{5.7}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\uparrow_n} = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & 1_{n-m-t} & 0 & 0 \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-m-t} \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

induziert eine Bijektion auf den Nebenklassen

$$C_{m+t,m}\backslash \mathrm{Sp}_{m+t} \to C_{n,(m,m+t)}\backslash C_{n,m+t}.$$

Beweis. Das Bild von $\mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z})$ ist in $C_{n,m+t}$ enthalten. Das Bild von $C_{m+t,m}$ ist in $C_{n,m}$ enthalten. Wegen der Definition $C_{n,(m,m+t)} := C_{n,m} \cap C_{n,m+t}$ ist die Abbildung der Nebenklassen damit wohldefiniert.

Injektivität:
Seien $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z}), N \in C_{n,(m,m+t)}$ mit $NM_1^{\uparrow_n} = M_2^{\uparrow_n}$ gegeben. Dann gilt schon $N \in \mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$, also $N \in C_{n,m} \cap \mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z})^{\uparrow_n} = C^{\uparrow_n}_{m+t,m}$ und wir haben die Aussage gezeigt.

Surjektivität:
Ein allgemeines Element von $C_{n,m+t}$ hat die Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ C_{11} & C_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ C_{21} & C_{22} & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix},$$

wobei A, B, C und D jeweils in Blöcke der Größen

$$\begin{pmatrix} m \times m & m \times t & m \times n-m-t \\ t \times m & t \times t & t \times n-m-t \\ n-m-t \times m & n-m-t \times t & n-m-t \times n-m-t \end{pmatrix}$$

unterteilt sind.

Wir zerlegen ein beliebiges Element $\gamma \in C_{n,m+t}$ gemäss Satz 2.9 in $L(U)^{\downarrow_n}\gamma_1\gamma_2$ mit $U \in \mathrm{GL}_{n-m-t}(\mathbb{Z})$, $\gamma_1 \in H_{n,m+t}$ und $\gamma_2 \in \mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z})^{\uparrow_n}$. Dann gilt $L(U)^{\downarrow_n} \in C_{n,(m,m+t)}$ und $\gamma_1 \in H_{n,m+t} \subseteq C_{n,(m,m+t)}$. Damit ist γ in der selben Nebenklasse wie γ_2 und somit haben wir die Surjektivität bewiesen. □

Lemma 5.20. *Läuft*
s *von* $\max\{r+m+t-n, 0\}$ *bis* $\min\{r, m+t\}$,
u *durch* $\mathcal{R}_1^s$,
u' *durch* $\mathcal{R}_2^s$,
γ_1 *durch* $C_{m+t,m}\backslash\,\mathrm{Sp}_{m+t}(\mathbb{Z})$,
und γ_2 *durch ein Repräsentantensystem von*

$$(L(\hat{u}^{-1})(\tilde{Q}_s^{r,m+t-s})^{\uparrow_n} L(\hat{u})) \cap J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r})\backslash J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$$

so durchläuft

$$\gamma_1^{\uparrow_n} L(\hat{u})\gamma_2 L(\tilde{u}')$$

ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $C_{n,(m,m+t)}\backslash M^0_{n,m+t,r}$.

Beweis. Das ist eine Folgerung aus Proposition 5.18 und Lemma 5.19. □

Wir kommen zum ersten Ergebnis dieses Kapitels:

Satz 5.21. *Läuft* s
von $\max\{r+m+t-n, 0\}$ *bis* $\min\{r, m\}$,
u *durch* $\mathcal{R}_1^s$,
u' *durch* $\mathcal{R}_2^s$,
γ_1 *durch* $C_{m+t,m}\backslash M^t_{m+t,m,s}$,
und γ_2 *durch ein Repräsentantensystem von*

$$(L(\hat{u}^{-1})(\tilde{Q}_s^{r,m+t-s})^{\uparrow_n} L(\hat{u})) \cap J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r})\backslash J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r},$$

so durchläuft

$$\gamma_1^{\uparrow_n} L(\hat{u})\gamma_2 L(\tilde{u}')$$

ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $C_{n,m}\backslash M^t_{n,m,r}$.

Beweis. Wir haben in Lemma 5.4 bewiesen, dass es ausreicht, ein Repräsentantensystem von $C_{n,(m,m+t)}\backslash M^{t,0}_{n,m,r}$ zu finden. Da wir schon ein Repräsentantensystem von $C_{n,(m,m+t)}\backslash M^0_{n,m+t,r}$ kennen und $M^0_{n,m+t,r} \supseteq M^{t,0}_{n,m,r}$ gilt, müssen wir nur untersuchen, welche Repräsentanten aus Lemma 5.20 schon in $M^{t,0}_{n,m,r}$ liegen.

Da die Menge $M^t_{n,m,r}$ invariant unter Multiplikation von rechts mit Elementen $L(\tilde{u}')$ und γ_2 ist (siehe Teil *c)* von Proposition 5.2), reicht es, dieses für

$$\gamma_1^{\uparrow n} L(\hat{u})$$

zu überprüfen. Mit

$$^t u^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

und einer Zerlegung

$$C(\gamma_1^{\uparrow n}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in Blöcke der Größen

$$\begin{pmatrix} m \times s & m \times m+t-s & m \times r-s & m \times n-m-t-r+s \\ t \times s & t \times m+t-s & t \times r-s & t \times n-m-t-r+s \\ n-m-t \times s & n-m-t \times m+t-s & n-m-t \times r-s & n-m-t \times n-m-t-r+s \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$C(\gamma_1^{\uparrow n} L(\hat{u})) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12}v_1 & C_{12}v_2 & 0 \\ C_{21} & C_{22}v_1 & C_{22}v_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Blöcken der Größen

$$\begin{pmatrix} m \times s & m \times r-s & m \times m+t-s & m \times n-m-t-r+s \\ t \times s & t \times r-s & t \times m+t-s & t \times n-m-t-r+s \\ n-m-t \times s & n-m-t \times r-s & n-m-t \times m+t-s & n-m-t \times n-m-t-r+s \end{pmatrix}.$$

Also ist $\gamma_1^{\uparrow n} L(\hat{u})$ genau dann in $M^{t,0}_{n,m,r}$, wenn $\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} C_{22}v_2 & 0 \end{pmatrix}) = t$ gilt. Da v_2 maximalen Rang hat, ist dies gleichbedeutend mit $\mathrm{rg}(C_{22}) = t$ oder $\gamma_1 \in M^t_{m+t,m,s}$. Dies kann nur erfüllt sein, wenn die Ungleichung $t \le m+t-s$ bzw. $s \le m$ gilt. □

5.2 Ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash M^t_{n+m,0,n}$

Wir werden später ein alternatives Repräsentatensystem von $C_{n+m,0}\backslash \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$ benötigen. Daher werden wir jetzt Repräsentantensysteme von $C_{n+m,0}\backslash M^t_{n+m,0,n}$ angeben, was wegen der Zerlegung $\mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z}) = \bigcup_{t=0}^m M^t_{n+m,0,n}$ ausreicht.

Lemma 5.22. *Seien Paare teilerfremder Matrizen* $\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C' & D' \end{pmatrix}$ *und* $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ *mit*

$$\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C' & D' \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann gilt schon $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Matrizen A, B, A', B', sodass

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}$ invertierbar sind. Schreibe

$$\begin{pmatrix} W & X \\ Y & Z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}^{-1},$$

dann gilt

$$C'W + D'Y = 0 \quad \text{und} \quad C'X + D'Z = 1. \tag{5.9}$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ CW + DY & CX + DZ \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} * & * \\ Q(C'W + D'Y) & Q(C'X + D'Z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & Q \end{pmatrix},$$

wobei wir die Vorausetzung $\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} C' & D' \end{pmatrix}$ und Gleichung (5.9) benutzt haben. Dann ist Q als Block dieser über $\mathbb{Z}$ invertierbaren Matrix über $\mathbb{Z}$ invertierbar. □

Satz 5.23. *Ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash M^t_{n+m,0,m}$ wird durch*

$$x^{\uparrow_{n+m}} L(U) y^{\uparrow_{n+m}}$$

gegeben, wobei x, U und y Repräsentantensysteme von

$$C_{t,0}\backslash M^t_{t,0,0},$$

$$\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\} \backslash \left\{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Z}) \mid u_3 \in \mathbb{Z}^{t\times n+m-t}, \mathrm{rg}(u_3) = t\right\} \tag{5.10}$$

bzw.

$$C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$$

durchlaufen.

Beweis. Zur Existenz der Darstellung:
Nach Lemma 5.4 stehen die Nebenklassen $C_{n+m,0}\backslash M^t_{n+m,0,m}$ in Bijektion zu den Nebenklassen $C_{n+m,(0,t)}\backslash M^{t,0}_{n+m,0,m}$.
Nach Lemma 5.5 hat jedes Element $M \in M^0_{n+m,t,m} \supseteq M^{t,0}_{n+m,0,m}$ eine Darstellung $M = xL(U)y^{\uparrow_n}$ mit $x \in C_{n+m,t}$, $U \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Z})$ und $y \in \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$.
Wir zerlegen y in $y_0 y_1$ mit $y_0 \in C_{m,0}$ und $y_1 \in C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$. Dann können wir $y_0 \in C_{m,0}$ schreiben als $L(1, S_{y_0})L(U_{y_0})$. Da es S' gibt, sodass

$$L(U)L(1, S_{y_0})^{\uparrow_n} L(U_{y_0})^{\uparrow_n} = L(1, S')L(U)L(U_{y_0})^{\uparrow_n}$$

erfüllt ist, können wir M schreiben als

$$M = xL(1,S')L(U)L(U_{y_0})y_1.$$

Weiter können wir UU_{y_0} zerlegen in U_0U_1 mit $U_0 = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ und U_1 als Repräsentanten einer in (5.10) definierten Nebenklasse. Dann können wir $x_1 := xL(1,S')L(U_0) \in C_{n+m,m}$ setzen. Nach Lemma 5.19 können wir $x_1 \in (C_{t,0}\backslash \operatorname{Sp}_t(\mathbb{Z}))^{\uparrow_{n+m}}$ wählen, indem wir zu einem anderen Repräsentanten von $C_{n+m,(0,t)}\backslash C_{n+m,t}$ wechseln.

Mit

$$x_1 := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, y_1 := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, U_1 := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, {}^t U_1^{-1} := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

ergibt die untere Hälfte der Matrix $x_1^{\uparrow_{n+m}} L(U_1) y_1^{\uparrow_{n+m}}$

$$\begin{pmatrix} * & cv_2 & * & du_2 \\ u_3C & 0 & u_3D & u_4 \end{pmatrix}.$$

Damit dies in $M^t_{n+m,0,m}$ liegt, muss sowohl c als auch v_2 und nach Lemma 5.7 dann auch u_3 den maximalen Rang haben. Daher gibt es die behauptete Zerlegung.

Zur Eindeutigkeit der Repräsentanten:
Seien zwei solche Darstellungen

$$\begin{pmatrix} * & cv_2 & * & du_2 \\ u_3C & 0 & u_3D & u_4 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} * & c'v_2' & * & d'u_2' \\ u_3'C' & 0 & u_3'D' & u_4' \end{pmatrix}$$

gegeben. Diese liegen genau dann in der selben $C_{n+m,0}$-Nebenklasse, wenn es eine Matrix $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_{n+m}(\mathbb{Z})$ mit

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & cv_2 & * & du_2 \\ u_3C & 0 & u_3D & u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & c'v_2' & * & d'u_2' \\ u_3'C' & 0 & u_3'D' & u_4' \end{pmatrix}$$

gibt. Aus

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cv_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c'v_2' \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt dann $x_3 = 0$, da cv_2 vollen Zeilenrang hat. Also gilt

$$x_4 \begin{pmatrix} u_3C & 0 & u_3D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_3'C' & 0 & u_3'D' \end{pmatrix}$$

und nach Lemma 5.22 gehören die Paare $\begin{pmatrix} C' & D' \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix}$ dann zu Matrizen in derselben $C_{m,0}$-Nebenklasse. Nach Voraussetzung stimmen diese Matrizen dann überein. Weiter gilt

$$x_4 \begin{pmatrix} u_3 & u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'_3 & u'_4 \end{pmatrix}$$

und damit nach Vorausetzung $U = U'$. Da ausserdem $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ genau dann in der selben $C_{t,0}$-Nebenklasse liegen, wenn $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\uparrow n+m}$ und $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^{\uparrow n+m}$ in der selben $C_{n+m,0}$-Nebenklasse sind, ist die Aussage gezeigt. $\square$

5.3 Eine andere Beschreibung der Mengen $M^t_{n,m,r}$

Nun werden wir eine alternative Charakterisierung der Mengen $M^t_{n,m,r}$ vorstellen, die sich in Kapitel 8 als wichtig erweisen wird.

Satz 5.24. *Sei eine symplektische Matrix mit der Zerlegung* (5.3) *vom Anfang des Kapitels*

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$$

gegeben.

Wir definieren zu M die Matrix

$$M' := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n+m \times n+r},$$

die durch Streichen von $n-r$ Zeilen und $n-m$ Spalten entsteht.

Aus den Größen der Matrizen, und da M' Teil der invertierbaren Matrix M ist, folgt sofort die Ungleichung

$$m + r \le \mathrm{rg}(M') \le n + \min\{r, m\}.$$

Weiter kann man den Rang der Matrix M' aus dem der Teilmatrix C_{22} herleiten:

$$\mathrm{rg}(M') = m + r + \mathrm{rg}(C_{22}).$$

Insbesondere gilt:

$$M^t_{n,m,r} = \{M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z}) \mid \mathrm{rg}(M') = m + r + t\}.$$

Beweis. Wir betrachten die symplektische Matrix

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} L(\begin{pmatrix} 0 & 1_r \\ 1_{n-r} & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} A_{12} & A_{11} & B_{12} & B_{11} \\ A_{22} & A_{21} & B_{22} & B_{21} \\ C_{12} & C_{11} & D_{12} & D_{11} \\ C_{22} & C_{21} & D_{22} & D_{21} \end{pmatrix}.$$

Das Inverse dieser Matrix ist nach (2.3) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} {}^tD_{12} & {}^tD_{22} & -{}^tB_{12} & -{}^tB_{22} \\ {}^tD_{11} & {}^tD_{21} & -{}^tB_{11} & -{}^tB_{21} \\ -{}^tC_{12} & -{}^tC_{22} & {}^tA_{12} & {}^tA_{22} \\ -{}^tC_{11} & -{}^tC_{21} & {}^tA_{11} & {}^tA_{21} \end{pmatrix}.$$

Anwenden von Lemma 5.7 liefert

$$\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} {}^tD_{11} & {}^tD_{21} & -{}^tB_{11} \\ -{}^tC_{12} & -{}^tC_{22} & {}^tA_{12} \\ -{}^tC_{11} & -{}^tC_{21} & {}^tA_{11} \end{pmatrix}) = \mathrm{rg}(C_{22}) + (2n-(n-m)) - (n-r) = \mathrm{rg}(C_{22}) + m + r.$$

Multipliziert man die erste Zeile aus Blöcken und die beiden ersten Spalten aus Blöcken mit -1, so ändert dies den Rang nicht. Durch Transponieren erhält man den Rang der Matrix

$$\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} D_{11} & C_{12} & C_{11} \\ D_{21} & C_{22} & C_{21} \\ B_{11} & A_{12} & A_{11} \end{pmatrix}) = \mathrm{rg}(C_{22}) + m + r.$$

Durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält man die gesuchte Aussage

$$\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} \end{pmatrix}) = \mathrm{rg}(C_{22}) + m + r.$$

□

6 Eine Aufspaltung der Summation der Klingen-Eisensteinreihen

In diesem Kapitel seien $k, n, m, r, t \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen, für die $n \geq m, r$, $2 \mid k > 2n$ und $t \leq \min\{n-m, n-r\}$ gilt.

Dabei steht n für den Grad einer Siegelschen Modulform, genauer für den Grad einer Klingen-Eisensteinreihe zu einer Siegelschen Spitzenform $f \in \mathcal{S}_m^k$ vom Grad m. Zu dieser Klingen-Eisensteinreihe betrachten wir die Fourier-Jacobizerlegung vom Grad $(r, n-r)$.

6.1 Die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H_{n,m,r}^t$

Nachdem wir im letzten Kapitel die Mengen $M_{n,m,r}^t$ definiert haben und ein geeignetes Repräsentantensystem von $C_{n,m} \backslash M_{n,m,r}^t$ berechnet haben, werden wir diese nun benutzen, um Teilreihen der Klingen-Eisensteinreihen zu definieren:

Definition 6.1. *Für eine Siegelsche Spitzenform $f \in \mathcal{S}_m^k$ vom Grad m wird eine Funktion $H_{n,m,r}^t : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ durch*

$$H_{n,m,r}^t(f, Z) := \sum_{\gamma \in C_{n,m} \backslash M_{n,m,r}^t} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

definiert. Nach Teil a) von Proposition 5.2 besteht $M_{n,m,r}^t$ aus $C_{n,m}$-Rechtsnebenklassen, womit dies wohldefiniert ist. Wie für Klingen-Eisensteinreihen definieren wir $\mathcal{S}_0^k := \mathbb{C}$.

Ziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, dass die Funktion $H_{n,m,r}^t(f, Z)$ eine Fourier-Jacobizerlegung

$$H_{n,m,r}^t(f, Z) = \sum_{T \in \mathcal{A}_{n-r}} \Psi^{(T)}(f, Z)$$

vom Grad $(r, n-r)$ besitzt, und dass die Fourier-Jacobikoeffizienten $\Psi^{(T)}(f, Z)$ im Raum $\mathcal{J}_{r,n-r,m+t-\mathrm{rg}(T)}^k(T)$ bezüglich der Zerlegung (4.1) liegen. Ist dies gezeigt, so folgt daraus sofort:

Satz 6.2. *Sei $f \in S_m^k$ eine Siegelsche Spitzenform und*

$$E_{n,m}(f,Z) = \sum_T \Phi^{(T)}(f,Z)$$

die zugehörige Klingen-Eisensteinreihe mit ihrer Fourier-Jacobizerlegung vom Grad $(r, n-r)$. Sei weiter $\Phi^{(T)} = \sum_{i=0}^r \Phi_i^{(T)}$ die Zerlegung von $\Phi^{(T)}$ gemäß der Zerlegung

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T) = \bigoplus_{i=0}^r \mathcal{J}_{r,n-r,i}^k(T)$$

in direkte Summanden. Mit der Fourier-Jacobizerlegung

$$H_{n,m,r}^t(f,Z) = \sum_{T \geq 0} \Psi^{(T)}(f,Z)$$

gilt dann:

$$\Phi_{m+t-\mathrm{rg}(T)}^{(T)} = \Psi^{(T)}.$$

Beweis. Das folgt mit der obigen Behauptung $\Psi^{(T)} \in \mathcal{J}_{r,n-r,m+t-\mathrm{rg}(T)}^k(T)$ direkt aus

$$E_{n,m}^k(f,Z) = \sum_{t=0}^{\min\{n-m,n-r\}} H_{n,m,r}^t(f,Z)$$

und der Eindeutigkeit der Zerlegung

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T) = \bigoplus_{s=0}^r \mathcal{J}_{r,n-r,s}^k(T).$$

□

Anstatt einen Fourierkoeffizienten von $\Phi_i^{(T)}$ zu bestimmen, kann man also auch den Fourierkoeffizienten von $H_{n,m,r}^{i-m+\mathrm{rg}(T)}$ berechnen. Die Berechnung der Fourierkoeffizienten der Funktionen $H_{n,m,r}^t$ erfolgt in den nächsten Kapiteln.

Um $\Psi^{(T)} \in J_{r,n-r,m+t-\mathrm{rg}(T)}^k(T)$ zu beweisen, benutzen wir das Repräsentantensystem von $C_{n,m} \backslash M_{n,m,r}^t$ aus Satz 5.21:
Läuft

$$\begin{gathered} s \quad \text{von } \max\{r+m+t-n,0\} \text{ bis } \min\{r,m\}, \\ u \text{ durch } \mathcal{R}_1^s, \\ u' \text{ durch } \mathcal{R}_2^s, \\ \gamma_1 \text{ durch } C_{m+t,m} \backslash M_{m+t,m,s}^t, \end{gathered}$$

und γ_2 durch ein Repräsentantensystem von

$$(L(\hat{u}^{-1})(\tilde{Q}_s^{r,m+t-s})^{\uparrow_n} L(\hat{u})) \cap J_{m+t+r-s,r}^{\uparrow_n}) \backslash J_{m+t+r-s,r}^{\uparrow_n},$$

so durchläuft

$$\gamma_1^{\uparrow_n} L(\widehat{u})\gamma_2 L(\widetilde{u}')$$

die Rechtsnebenklassen $C_{n,m}\backslash M^t_{n,m,r}$. Die Notationen $\widetilde{*}$, $\widehat{*}$, $\mathcal{R}_1^s$ und $\mathcal{R}_2^s$ wurden dabei in den Notationen 5.13 und 5.15 festgelegt.

Wir benutzen nun dieses Repräsentantensystem, um die Summation aus der Definition der Funktionen $H^t_{n,m,r}$ aufzuspalten. Die Summation über γ_1 liefert dabei die Werte auf Spitzen der Form $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $T \in \mathcal{A}^+_{m+t}$. Die Summe über u und u' überträgt diese Werte auf beliebige Matrizen vom Rang $m+t$ und die Summation über γ_2 liefert die von Dulinksi definierten Eisensteinreihen zu diesen Werten. Dabei kommutieren u' und γ_2. Wir setzen die Summe über u' aus technischen Gründen an das Ende, da Dulinski die entsprechenden Eisensteinreihen nur für Indizes von maximalem Rang definiert. Für andere Indizes werden die Eisensteinreihen über die in Lemma 4.7 gegebenen Isomorphismen definiert. Diese Isomorphismen entsprechen den u'.

Statt $\Psi^{(T)} \in J^k_{(r,n-r),m+t-\mathrm{rg}(T)}(T)$ werden wir genauer zeigen, dass für feste $u \in \mathcal{R}_1^s$, $u' \in \mathcal{R}_2^s$ die Funktion

$$\sum_{\gamma_1}\sum_{\gamma_2} f(\gamma_1 L(\hat{u})\gamma_2 L(\tilde{u}') < Z >^*) j(\gamma_1 L(\hat{u})\gamma_2 L(\tilde{u}'), Z)^{-k}$$

mit der Summation über γ_1 und γ_2 wie im obigen Repräsentantensystem, eine Fourier-Jacobizerlegung mit Koeffizienten in $\mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(*)$ hat, deren Indizes den Rang $m+t-s$ besitzen.
Für den Beweis dieser Aussage brauchen wir folgende Lemmata:

Lemma 6.3. *Für $M \in M^t_{m+t,m,s}$, $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ gilt:*

$$C_{m+t,m} M L(U) \cap C_{m+t,m+t-1} = \emptyset$$

Beweis. Da die Menge $M^t_{m+t,m,s}$ invariant unter $C_{m+t,m}$ ist, müssen wir nur zeigen, dass $ML(U) \notin C_{m+t,m+t-1}$ für alle Matrizen $M \in M^t_{m+t,m,s}$ gilt. Wäre dies falsch, so gäbe es eine Matrix

$$X := \begin{pmatrix} * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_{m+t,m+t-1}$$

mit

$$M = XL(U^{-1}).$$

Dabei ist aber die unterste Zeile des linken unteren $m+t \times m+t$-Blocks von $XL(U^{-1})$ gleich 0. Dies ist ein Widerspruch, da in der Aufteilung

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & B_{11} & B_{12} \\ A_{21} & A_{22} & B_{21} & B_{22} \\ C_{11} & C_{12} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

die Teilmatrix $C_{22} \in \mathbb{Z}^{t \times m+t-s}$ Rang t hat, also keine Nullzeile haben kann. Damit haben wir die Behauptung gezeigt. $\square$

Lemma 6.4. *Sei $G : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit Fourierentwicklung*

$$G(Z) = \sum_{R \in \mathcal{A}_n} a(R)e(RZ)$$

und

$$\lim_{\beta\to\infty} (G \mid_k L(U))(\begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix}) = 0.$$

für alle $Z' \in \mathbb{H}_{n-1}$ und $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
Dann gilt $a(R) = 0$ für nicht positiv definite Matrizen.

Beweis. Mit der Zerlegung $R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & R_4 \end{pmatrix}$ in $R_4 \in \mathbb{Z}$ und $R_1 \in \mathcal{A}_{n-1}$ sowie mit $Z_\beta := \begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix}$ gilt

$$\lim_{\beta\to\infty} G(Z_\beta) = \lim_{\beta\to\infty} \sum_{R \in \mathcal{A}_n} a(R)e(RZ_\beta)$$

$$= \lim_{\beta\to\infty} \sum_{R \in \mathcal{A}_n} a(\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & R_4 \end{pmatrix})e(R_1Z')e(R_4 i\beta).$$

Da $e(R_4 i\beta) = \exp(-2\pi R_4\beta)$ gilt, müssen Summanden mit $R_4 \neq 0$ verschwinden. Da R positiv semidefinit ist, muss für alle R mit $R_4 = 0$ auch $R_2 = 0$ gelten. Somit erhalten wir

$$\lim_{\beta\to\infty} G(\begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix}) = \lim_{\beta\to\infty} \sum_{R_1 \in \mathcal{A}_{n-1}} a(\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})e(R_1Z')$$

und $a(\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ sind die Fourierkoeffizienten der Funktion $\lim_{\beta\to\infty} G(\begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix})$. Da diese Funktion nach Voraussetzung identisch verschwindet, muss auch $a(\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$ gelten.

Sei nun $R \in \mathcal{A}_n$ eine nicht positiv definite Matrix. Dann gibt es eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ mit

$$UR{}^tU = \begin{pmatrix} R' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R' \in \mathcal{A}_{n-1}.$$

Da $a(UR{}^tU)$ aber der Fourierkoeffizient von $G \mid_k L(U)$ ist, folgt analog zum Fall $\begin{pmatrix} R' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ auch $a(R) = 0$. $\square$

Bemerkung 6.5. *Ähnliche Aussagen kommen bei Klingen in [Kli90] und bei Dulinski in [Dul95] bei der Charakterisierung von Spitzenformen vor.*

Lemma 6.6. *Sei $f \in \mathcal{S}^k_m$ eine Spitzenform vom Gewicht k und Grad m. Dann besitzt die Funktion*

$$F_s(Z) := \sum_{\gamma \in C_{m+t,m} \backslash M^t_{m+t,m,s}} f(\gamma < Z >^*) j(\gamma, Z)^{-k}$$

eine Fourier-Jacobizerlegung aus Jacobi-Spitzenformen mit Grad $(s, m+t-s)$, deren Indizes vollen Rang $m+t-s$ haben.

Beweis. Die Summe ist als Teilreihe der Klingen-Eisensteinreihe invariant unter Umordnung. Da $M^t_{m+t,m,s} J_{m+t,s} = M^t_{m+t,m,s}$ gilt, ist sie invariant unter der Jacobigruppe $J_{m+t,s}$. Daher hat F_s nach Lemma 4.17 eine Fourier-Jacobizerlegung vom Grad $(s, m+t-s)$. Die im Fall $s = 1$ benötigte Wachstumsbedingung gilt wegen der folgenden Berechnungen.

Wir müssen noch zeigen, dass nur Fourierkoeffizienten zu positiv definiten Matrizen vorkommen. Nach Lemma 6.4 müssen wir zeigen, dass für alle $U \in \mathrm{GL}_{m+t}(\mathbb{Z})$ und $Z' \in H_{m+t-1}$ gilt:

$$\lim_{\beta \to \infty} (F_s \mid L(U))(\begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix}) = 0.$$

Wir schreiben zur Abkürzung $Z_\beta := \begin{pmatrix} Z' & 0 \\ 0 & i\beta \end{pmatrix}$. Wegen der absoluten Konvergenz von F_s können wir uns darauf beschränken, die einzelnen Summanden zu betrachten. Nach dem Lemma aus S. 488 von [Dul95] mit $s = 0, n = m+t, \nu = m+t-1$ und Lemma 6.3 gilt für $\gamma \in M^t_{m+t,m,s}$

$$\lim_{\beta \to \infty} \det(\mathrm{Im}(\gamma L(U) < Z_\beta >^*)) \mid j(\gamma L(U), Z_\beta) \mid^2 = \infty. \tag{6.1}$$

Nach ([Kli90], Kapitel 5, Proposition 4, mit $n = m+t$) gibt es Konstanten $a_1, a_2 > 0$ mit

$$\mid f(\gamma L(U) < Z >^*) \mid \leq a_1 e^{-a_2 \det(\mathrm{Im}\, \gamma L(U) < Z >^*)^{\frac{1}{m+t}}} \frac{1}{(\det \mathrm{Im}\, \gamma L(U) < Z >^*)^{\frac{k}{2}}}.$$

Für alle Summanden von $F_s \mid L(U)$ gilt:

$$\mid f(\gamma L(U) < Z_\beta >^*) j(\gamma L(U), Z_\beta)^{-k} \mid \leq \frac{a_1 e^{-a_2 \det(\mathrm{Im}\, \gamma L(U) < Z_\beta >^*)^{\frac{1}{m+t}}}}{(\det \mathrm{Im}\, \gamma L(U) < Z_\beta >^*)^{\frac{k}{2}} \mid j(\gamma L(U), Z_\beta)^k \mid}.$$

Da der Zähler beschränkt ist, können wir Gleichung (6.1) benutzen, um

$$\lim_{\beta \to \infty} \mid f(\gamma L(U) < Z_\beta >^*) j(\gamma L(U), Z_\beta)^{-k} \mid = 0$$

zu erhalten. Damit haben wir das Lemma bewiesen. □

Nach diesem Lemma besitzt die Funktion $F_s(Z)$ eine Fourier-Jacobizerlegung

$$F_s(Z) = \sum_{T\in\mathcal{A}^+_{m+t}} \varphi^{(T)}$$

mit Spitzenformen φ_T vom Grad $(s, m+t-s)$.
Wir benutzen nun das Repräsentantensystem von oben, d.h. es laufen

$$u \text{ durch } \mathcal{R}^s_1,$$

$$u' \text{ durch } \mathcal{R}^s_2,$$

$$\gamma_1 \text{ durch } C_{m+t,m}\backslash M^t_{m+t,m,s},$$

und γ_2 durch ein Repräsentantensystem von

$$(L(\hat{u}^{-1})(\tilde{Q}^{r,m+t-s}_s)^{\uparrow_n} L(\hat{u})) \cap J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r})\backslash J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}.$$

Dann gilt:

$$H^t_{n,m,r}(Z) = \sum_s \sum_{\gamma_1} \sum_{u\in\mathcal{R}^s_1} \sum_{u'\in\mathcal{R}^s_2} \sum_{\gamma_2} (f(< Z >^*) \mid_k \gamma_1) \mid_k L(\hat{u}) \mid_k \gamma_2 \mid_k L(\tilde{u}') \tag{6.2}$$

$$= \sum_s \sum_{T\in\mathcal{A}^+_{m+t}} \sum_{u\in\mathcal{R}^s_1} \sum_{u'\in\mathcal{R}^s_2} \sum_{\gamma_2} \varphi^{(T)}_T \mid_k L(\hat{u}) \mid_k \gamma_2 \mid_k L(\tilde{u}').$$

Für festes s, u, u' und T betrachten wir

$$\sum_{\gamma_2} \varphi^{(T)}_T \mid_k L(\hat{u}) \mid_k \gamma_2 \mid_k L(\tilde{u}').$$

Wir definieren

$$P := \begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{m+t-s} & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n+s-m-t-r} \end{pmatrix}$$

und erhalten aus einem Repräsentantensystem von

$$(L(\hat{u}^{-1})(\tilde{Q}^{r,m+t-s}_s)^{\uparrow_n} L(\hat{u})) \cap J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r})\backslash J^{\uparrow_n}_{m+t+r-s,r}$$

durch Substitution von γ_2 mit $L(P)L(\hat{u})\gamma$ ein neues Repräsentantensystem von

$$(L(P)\tilde{Q}^{r,m+t-s}_s)^{\uparrow_n} L(P^{-1}) \cap L(P)L(\hat{u})J_{m+t+r-s,r}L(\hat{u}^{-1})L(P^{-1}))\backslash L(P)L(\hat{u})J_{m+t+r-s,r}$$

für γ. Mit

$$L(P)(\tilde{Q}^{r,m+t-s}_s)^{\uparrow_n} L(P^{-1}) = Q^{r,m+t-s}_s$$

(vgl. Definition 2.10) erhalten wir das Repräsentantensystem von

$$(Q^{r,m+t-s}_s)^{\uparrow_n} \cap L(P)L(\hat{u})J_{m+t+r-s,r}L(\hat{u}^{-1})L(P^{-1}))\backslash L(P)L(\hat{u})J_{m+t+r-s,r}.$$

Da u_3 maximalen Rang hat, hat wegen Bemerkung 5.8 auch der rechte untere $m+t-s \times m+t-s$ Block von $(P\hat{u})^{-1} = \begin{pmatrix} {}^t v_3 & {}^t v_1 \\ {}^t v_4 & {}^t v_2 \end{pmatrix}$ maximalen Rang. Also ergibt die Summation genau die Eisensteinreihe nach Dulinski

$$E^k_{r,m+t-s,s}(*,*,\varphi,(P\hat{u})^{-1}) \in \mathcal{J}^k_{r,m+t-s,s}(T[v_2])$$

aus Definition 4.14. Ihr Index hat maximalen Rang.
Wenden wir darauf noch $L(\tilde{u}')^{\downarrow_n}$ an, so erhalten wir eine Eisensteinreihe in $\mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T[v_2][{}^t u'^{-1}])$, deren Index immer noch den Rang $m+t-s$ hat.

Für festes s erhalten wir also eine Funktion, deren Fourier-Jacobikoeffizienten in $\mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(*)$ liegen und deren Index Rang $m+t-s$ hat. Insgesamt hat die Funktion

$$H^t_{n,m,r}(f,Z) = \sum_{T\geq 0} \Psi^{(T)}(f,Z),$$

wie behauptet, Fourier-Jacobikoeffizienten $\Psi_T \in \mathcal{J}^k_{(r,n-r),m+t-\mathrm{rg}(T)}(T)$.

6.2 Die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^t_{n,m,r}$ als Elemente von $\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(*)$

Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden nicht für die weiteren Rechnungen benötigt. Allerdings können wir mit den Vorbereitungen des letzten Kapitels ohne großen Aufwand die genaue Form der Eisensteinreihen nach Dulinski angeben. Genauer werden wir die Werte dieser Eisensteinreihen an den Spitzen berechnen. Insbesondere werden wir konkret berechnen, dass diese Elemente schon in den Vektorräumen $\widehat{J}_{r,n-r,s}(*)$ (siehe Abschnitt 5.3) liegen. Dies wurde schon von Dulinski bewiesen, allerdings ohne die Werte an den Spitzen konkret anzugeben.
Wir haben gesehen, dass der Fourier-Jacobikoeffizient zum Index T der Funktion $H^t_{n,m,r}$ in $\mathcal{J}^k_{r,n-r,m+t-\mathrm{rg}(T)}(T)$ liegt. Einerseits gilt

$$E^k_{n,m}(f,Z) = \sum_{t=0}^{\min\{n-m,n-r\}} H^t_{n,(m,r)}(f,Z),$$

andererseits sind die Fourierkoeffizienten von $E^k_{n,m}(f,Z)$ in

$$\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r}(T) := \bigoplus_{s=0}^{r} \widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r,s}(T)$$

mit $\widehat{\mathcal{J}}^k_{r,n-r,s}(T) \subseteq \mathcal{J}^k_{r,n-r,s}(T)$. Daraus folgt, dass die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^t_{n,m,r}$ in $\widehat{J}^k_{r,n-r,m+t-\mathrm{rg}(T)}(T)$ liegen. Dies werden wir hier genauer untersuchen.

Wir haben in Gleichung (6.2) gesehen, dass

$$H^t_{n,m,r}(Z) = \sum_s \sum_{T\in\mathcal{A}^+_{m+t}} \sum_{u\in\mathcal{R}^s_1} \sum_{u'\in\mathcal{R}^s_2} \sum_{\gamma_2} \varphi^{(T)}_T \mid_k L(\hat{u}) \mid_k \gamma_2 \mid_k L(\tilde{u}')$$

gilt und anschließend gezeigt, dass dies für festes s, u, u' und T eine Jacobiform vom Index $T[v_2][{}^t u'^{-1}]$ definiert.

Wir werden jetzt untersuchen, welche Tupel (T_1, s_1, u, u') und (T_2, s_2, w, w') zum gleichen Index führen.

Da s den Rang des Index festlegt, muss $s_1 = s_2 =: s$ gelten. Sind also wie üblich

$$u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix}, \quad {}^t u^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$$

und zusätzlich

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_3 & w_4 \end{pmatrix}, \quad {}^t w^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

gegeben, so führt dies genau dann zum gleichen Index, wenn

$$\begin{pmatrix} T_1[v_2] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [{}^t u'^{-1}] = \begin{pmatrix} T_2[y_2] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [{}^t w'^{-1}]$$

gilt. Wir schreiben $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} := {}^t u'^{-1} {}^t w'$ und erhalten

$$\begin{pmatrix} {}^t x_1 & {}^t x_3 \\ {}^t x_2 & {}^t x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei beide Einträge $*$ vollen Rang haben. Daraus folgt $x_2 = 0$, also

$${}^t u'^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} {}^t w'^{-1},$$

d.h.

$$u' = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} w',$$

und da $u', w' \in \mathcal{R}_2^s$ gilt, folgt $u' = w'$.

Wir werden uns auf $u' = w' = 1_{n-r}$ beschränken. Für andere u' folgen die Ergebnisse daraus direkt.

Zwei Paare (T_1, u) und (T_2, w) führen also genau dann zum gleichen Index, wenn $T_1[v_2] = T_2[y_2]$ gilt. Zu einem festen Index $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei T maximalen Rang hat, erhalten wir also für den zugehörigen Fourier-Jacobikoeffizienten von $H_{n,m,r}^t$:

$$\sum_x \sum_u E_{r,m+t-s,s}^k(*, *, \varphi_{T[x^{-1}]}, (\widehat{Pu})^{-1}),$$

wobei die erste Summe über $x \in GL_{m+t-s}(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{Z}_*^{m+t-s \times m+t-s}$ mit $T[x^{-1}] \in \mathcal{A}_{m+t-s}^+$ und die zweite Summe über $u \in \mathcal{R}_1^s$ mit $v_2(u) = x$ läuft. Hierbei ist $\mathbb{Z}_*^{m+t-s \times m+t-s}$ die Menge der $m+t-s \times m+t-s$-Matrizen mit maximalem Rang. Man kann die zweite Summe also auch auffassen als Summe über

$$L^{-1}(C_{m+t+r-2s,r-s}) \backslash \{u \mid^t u^{-1} = \begin{pmatrix} * & v_2 \\ * & * \end{pmatrix}\} / L^{-1}(J_{m+t+r-2s,r-s}).$$

Läuft u durch diese Menge, so läuft $(Pu)^{-1}$ durch die Menge

$$L^{-1}(J_{m+t+r-2s,r-s})\backslash\{\begin{pmatrix} * & * \\ * & {}^t v_2 \end{pmatrix}\}/\{\begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}\}.$$

Dies entspricht $L^{-1}(J_{m+t+r-2s,r-s})\backslash PE(m+t-s, {}^t v_2)$ und wir bekommen nach der Definition der $\widehat{E}$ für die Fourierkoeffizienten

$$\sum_x \widehat{E}^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi_{T[x^{-1}]}, {}^t x).$$

Dies ist eine erste Version für die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^t_{n,m,r}$, für eine weitere erinnern wir an die Definition der primitiven Fourier-Jacobikoeffizienten.

Definition 6.7. *Für eine Funktion $f : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$, die unter $C_{n,r}$ invariant ist, definieren wir die primitiven Fourier-Jacobikoeffizienten φ^*_T (für $T \in \mathcal{A}^+_{n-r}$) durch*

$$\varphi_T = \sum_W \varphi^*_{T[W^{-1}]} \mid U_W.$$

Dabei läuft W über alle Matrizen $\mathrm{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^{n-r\times n-r}$ mit $T[W^{-1}] \in \mathcal{A}^+_{n-r}$.

Offensichtlich ist $\varphi^*_{T[W^{-1}]}$ wieder eine Jacobiform vom Index T und, falls alle $\varphi^{(T)}$ Spitzenformen sind, auch wieder eine Spitzenform.

Satz 6.8. *Der Fourier-Jacobikoeffizient der Funktion $H^t_{n,m,r}$ zum Index T ist gegeben durch*

$$\sum_x \widehat{E}^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi_{T[x^{-1}]}, {}^t x) = \sum_x E^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi^*_{T[x^{-1}]}, 1_{m+t+r-2s}) \mid U_x.$$

Dabei laufen beide Summen über $x \in GL_{m+t-s}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^{m+t-s\times m+t-s}_*$.

Beweis. Dass die linke Seite der Fourier-Jacobikoeffizient der Funktionen $H^t_{n,m,r}$ zum Index T ist, haben wir bereits gezeigt. Es bleibt die Gleichheit zu zeigen.

Für die linke Seite gilt:

$$\sum_x \widehat{E}^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi_{T[x^{-1}]}, {}^t x)$$

$$= \sum_x \sum_y \widehat{E}^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi^*_{T[x^{-1}y^{-1}]} \mid U_y, {}^t x),$$

wobei x, y über $x, y \in GL_{m+t-s}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}^{m+t-s\times m+t-s}_*$ mit $T[x^{-1}], T[x^{-1}y^{-1}] \in \mathcal{A}^+_{m+t-s}$ laufen.

Für die rechte Seite erhalten wir mit Satz 4.23

$$\sum_x E^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi^*_{T[x^{-1}]}, 1_{m+t+r-2s}) \mid U_{{}^t x}$$

$$= \sum_{x} \sum_{{}^t y | {}^t x} \widehat{E}^k_{r,m+t-s,s}(*, *, \varphi^*_{T[x^{-1}]} \mid U_y, {}^t x {}^t y^{-1}).$$

Hier läuft x über $\mathrm{GL}_{m+t-s}(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{Z}_*^{m+t-s\times m+t-s}$ mit $T[x^{-1}] \in \mathcal{A}^+_{n,r}$ und y über solche mit ${}^t x {}^t y^{-1} \in \mathbb{Z}^{m+t-s\times m+t-s}$. Unter der Transformation $x \mapsto yx$ entsprechen sich beide Ausdrücke. $\square$

7 Gewisse Teilreihen der Siegelschen Eisensteinreihe

Seien $n, m, k, r, v \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen und $f \in \mathcal{S}_m^k$ eine Siegelsche Spitzenform vom Gewicht k und Grad m. Wie wir wissen, besitzt die Klingen-Eisensteinreihe $E_{n,m}^k(f)$ eine Fourier-Jacobizerlegung

$$E_{n,m}^k(f) = \sum_{T \geq 0} \Phi^{(T)}$$

in Jacobiformen vom Grad $(r, n-r)$. Die Fourier-Jacobikoeffizienten $\Phi^{(T)}$ können wir gemäss der Zerlegung

$$\mathcal{J}_{r,n-r}^k(T) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{J}_{r,n-r,i}^k(T)$$

eindeutig weiter zerlegen in

$$\Phi^{(T)} = \sum_{i=0}^{r} \Phi_i^{(T)}.$$

Nachdem wir im letzten Kapitel gesehen haben, dass $\Phi_i^{(T)}$ mit dem Fourier-Jacobikoeffizienten zu T von $H_{n,m,r}^{i-m+\mathrm{rg}(T)}(f, Z)$ übereinstimmt, werden wir nun die Fourierkoeffizienten der Funktionen $H_{n,m,r}^t(f, Z)$ und somit die der Funktionen $\Phi_i^{(T)}$ berechnen.

Dabei werden wir analog zur Berechnung der Fourierkoeffizienten der Klingen-Eisensteinreihe vorgehen:

Die Fourierkoeffizienten der Klingen-Eisensteinreihe kann man berechnen, indem man den Pullback einer Siegelschen Eisensteinreihe

$$(Z_1, Z_2) \mapsto E_{n+m,0}^k(1, \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix})$$

betrachtet. Diese ist bezüglich Z_1 eine Siegelsche Modulform vom Grad n und bezüglich Z_2 eine Siegelsche Modulform vom Grad m. Weiter weist Garrett in [Gar84] nach, dass

$$E_{n+m,0}(1, \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) = \sum_{r=1}^{m} (c_k^{(s)})^{-1} \sum_{j=1}^{d(r)} S_{r,j} E_m^r(f_{r,j})(Z_2) E_n^r(f_{r,j}^\theta)(Z_1) \tag{7.1}$$

gilt. Dabei ist $d(r)$ die Dimension von $\mathcal{S}_r^k$ und $f_{r,j}$ durchläuft eine Basis aus Hecke-Eigenformen mit Eigenwerten $S_{r,j}$ zu einem bestimmten Hecke-Operator. Ist nun f

eine Eigenform bezüglich der Hecke-Operatoren, so folgt daraus

$$\left\langle f(Z_2), E_{n+m,0}(1, \begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle = \lambda(f) E^k_{n,m}(f, Z_1). \tag{7.2}$$

Statt die Fourierkoeffizienten von $E^k_{n,m}(f)$ zu berechnen, können wir also auch die von $\left\langle E_{n+m,0}(1, \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}), f(Z_2) \right\rangle$ bestimmen. Der Faktor $\lambda(f)$ ist aus Rechnungen von S. Böcherer bekannt.

Wir werden nun analog vorgehen, um die Fourierkoeffizienten der Funktionen $H^t_{n,m,r}$ zu berechnen.

Dafür benötigen wir Mengen $X^v_{n,m,r} \subseteq \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$, die wir in diesem Kapitel definieren werden. Mittels dieser definieren wir Funktionen

$$G^v_{n,m,r}(Z) := \sum_{\gamma \in C_{n+m,0} \backslash X^v_{n,m,r}} j(\gamma, Z)^{-k}$$

als Teilreihen der Siegelschen Eisensteinreihe $E^k_{n+m,0}$. Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, dass wir analog zu (7.2) die Gleichung

$$\left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle = \lambda(f) H^{v-r-m}_{n,m,r}(f, Z_1)$$

erhalten. Dies werden wir in Satz 7.7 beweisen. Im nächsten Kapitel werden wir dann die Fourierkoeffizienten von $\left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$ und damit auch die von $H^t_{n,m,r}$ berechnen.

Zur Definition der Mengen $X^v_{n,m,r}$ benötigen wir die folgende Einteilung von Matrizen $X \in \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$ in Blockmatrizen

$$X = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$$

der Größen

$$\begin{pmatrix} m \times r & m \times n-r & m \times m & m \times r & m \times n-r & m \times m \\ n-m \times r & n-m \times n-r & n-m \times m & n-m \times r & n-m \times n-r & n-m \times m \\ m \times r & m \times n-r & m \times m & m \times r & m \times n-r & m \times m \\ m \times r & m \times n-r & m \times m & m \times r & m \times n-r & m \times m \\ n-m \times r & n-m \times n-r & n-m \times m & n-m \times r & n-m \times n-r & n-m \times m \\ m \times r & m \times n-r & m \times m & m \times r & m \times n-r & m \times m \end{pmatrix}.$$

Nun werden wir die Mengen $X^v_{n,m,r}$ definieren:

Definition 7.1. *a) Für eine Matrix $X \in \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$ mit obiger Zerlegung definieren wir die Teilmatrix*

$$\widehat{X} := \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & D_{11} \\ C_{21} & C_{22} & D_{21} \\ C_{31} & C_{32} & D_{31} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n+m \times n+r}.$$

b) Mit diesen Bezeichnungen definieren wir für $v \in \mathbb{N}$ die Menge

$$X^v_{n,m,r} := \left\{ X \in \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z}) \mid \mathrm{rg}(\widehat{X}) = v \right\}.$$

c) Damit können wir die Funktionen

$$G^v_{n,m,r}(Z) := \sum_{\gamma \in C_{n+m,0} \backslash X^v_{n,m,r}} j(\gamma, Z)^{-k} \tag{7.3}$$

mit $Z \in \mathbb{H}_{n+m}$ als Teilreihe der Siegelschen Eisensteinreihe definieren.

Proposition 7.2. *Es gilt:*

a) $$X^v_{n,m,r} = \emptyset \qquad \text{für } v < m + r \text{ und } v > \min\{n+m, n+r\}$$

b) $$C_{n+m,0} X^v_{n,m,r} = X^v_{n,m,r}$$

c) $$X^v_{n,m,r} \, \mathrm{Sp}_m^{\downarrow n+m}(\mathbb{Z}) = X^v_{n,m,r}$$

d) $$\bigcup_{v=m+r}^{\min\{n+m,n+r\}} X^v_{n,m,r} = \mathrm{Sp}_{m+n}(\mathbb{Z}).$$

Beweis. Für $v > \min\{n+m, n+r\}$ folgt Teil *a)* sofort aus der Größe der Matrix $\widehat{X}$. Da $\widehat{X}$ aus der Matrix X durch Streichen von $n - r$ Spalten und $n - m$ Zeilen entsteht und X Rang $2(n+m)$ hat, folgt auch der zweite Teil von *a)*.
Teil *b)* gilt, da für eine Matrix $X \in \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$, $U \in \mathrm{GL}_{n+m}$ und eine symmetrische Matrix S schon $\widehat{L(U,S)X} = U\widehat{X}$ gilt und dies den Rang nicht verändert.
Teil *c)* folgt aus der Beobachtung, dass für eine beliebige Matrix

$$X' := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 & 0 & B_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_m^{\downarrow n+m}(\mathbb{Z})$$

schon $\widehat{XX'} = \widehat{X}$ gilt. Die letzte Aussage folgt sofort aus der Definition und Teil *a*). □

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass wir die oben definierten Funktionen, ähnlich wie Garrett die Siegelschen Eisensteinreihen in Gleichung 7.1, als Summe schreiben können:

$$G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) = \sum_{s=0}^{m} (c_k^{(s)})^{-1} \sum_{j=1}^{d(s)} S_{s,j} E^s_m(f^\theta_{s,i}(z_2)) H^{v-r-s}_{n,s,r}(f_{s,i}, z_1). \tag{7.4}$$

Gilt dies, so folgt daraus

$$\left\langle G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}), f(Z_2) \right\rangle = \lambda(f) H^{v-r-m}_{n,m,r}(f, Z_1).$$

Gleichung *b)* aus Proposition 7.2 besagt, dass die Summe über $C_{n+m,0}\backslash X^v_{n,m,r}$ wohldefiniert ist; Gleichung *d)* aus Proposition 7.2 bzw. die Darstellung aus (7.4) besagt, dass das Skalarprodukt wohldefiniert ist. Als Nächstes werden wir diese Summation weiter aufspalten, und dazu die Nebenklassen $C_{n+m,0}\backslash X^v_{n,m,r}$ näher betrachten. Dabei werden wir auf ein Ergebnis von Garrett zurückgreifen:

Satz 7.3. *(Garrett) Ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash \operatorname{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})$ wird gegeben durch*

$$\bigcup_{s=0}^{m} \bigcup_{U} g_M (g_0')^{\uparrow_{n+m}} g'^{\uparrow_{n+m}} ((g_1'')^{\uparrow_m})^{\downarrow_{n+m}} g''^{\downarrow_{n+m}},$$

mit

$$g_M := \begin{pmatrix} 1_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_m & 0 & 0 \\ 0 & M & 1_n & 0 \\ M & 0 & 0 & 1_m \end{pmatrix},$$

wobei M die $m \times n$-Matrizen in Elementarteilerform mit Rang s durchläuft, deren Elementarteiler links oben stehen. Weiter durchlaufen die Matrizen g_0', g', g_1'' und g'' Repräsentantensysteme von

$$\operatorname{Sp}_s(\mathbb{Z}),$$

$$C_{n,s}\backslash \operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_s(M)\backslash \operatorname{Sp}_s(\mathbb{Z}),$$

bzw. von

$$C_{m,s}\backslash \operatorname{Sp}_m(\mathbb{Z}).$$

Hier ist $\Gamma_s(M)$ die Kongruenzuntergruppe von $\operatorname{Sp}_s(\mathbb{Z})$ aller Elemente g mit

$$\begin{pmatrix} 0 & M'^{-1} \\ M & 0 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 0 & M'^{-1} \\ M & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}_s(\mathbb{Z}).$$

Dabei ist M' der Elementarteiler von M. Das heißt es gilt,

$$M = \begin{pmatrix} M' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Der Satz folgt aus den Sätzen aus §2 und §3 von Garrett, wobei die Elementarteiler von M hier im Gegensatz zu Garrett links oben stehen. Deswegen muss auch $((g_0')^{\downarrow_n})^{\uparrow_{n+m}}$ durch $((g_0')^{\uparrow_n})^{\uparrow_{n+m}} = (g_0')^{\uparrow_{n+m}}$ ersetzt werden und $(g_1'')^{\downarrow_{n+m}}$ durch $((g_1'')^{\uparrow_m})^{\downarrow_{n+m}}$. Diese Veränderungen kann man leicht einsehen, indem man an den passenden Stellen Permutationsmatrizen einfügt. $\square$

Damit ist es uns möglich, ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash X^v_{n,m,r}$ zu bestimmen:

Satz 7.4. *Ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash X^v_{n,m,r}$ wird gegeben durch*

$$\bigcup_{s=0}^{m}\bigcup_{U} g_M (g_0')^{\uparrow_{n+m}} g'^{\uparrow_{n+m}} ((g_1'')^{\uparrow_m})^{\downarrow_{n+m}} g''^{\downarrow_{n+m}},$$

wobei g_M, g_0', g_1'' und g'' die selben Mengen wie in Satz 7.3 durchlaufen und g' ein Repräsentantensystem von $C_{n,s}\backslash M^{v-r-s}_{n,(s,r)}$ durchläuft.

Beweis. Zum Beweis muss man nur untersuchen, welche Elemente des Repräsentantensystems aus Satz 7.3 schon in der Menge $X^v_{n,m,r}$ liegen. Da $((g_1'')^{\uparrow_m})^{\downarrow_{n+m}}$ und $g''^{\downarrow_{n+m}}$ in $\mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})^{\downarrow_{n+m}}$ liegen und $X^v_{n,m,r}$ nach Gleichung c aus Proposition 7.2 unter Multiplikation von rechts mit dieser Gruppe invariant ist, reicht es, $g_M(g_0')^{\uparrow_{n+m}} g'^{\uparrow_{n+m}}$ zu untersuchen.
Sei $x := (g_0')^{\uparrow_n} g'$. Schreibe

$$g_M = \begin{pmatrix} 1_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{r-s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{n-r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m-s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M' & 0 & 1_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{r-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{n-r} & 0 & 0 \\ M' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m-s} \end{pmatrix},$$

wobei M' hier der Elementarteiler von M ist und maximalen Rang hat und schreibe

$$x = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$g_M x^{\uparrow n+m} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & B_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m-s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & M' & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 \\ M'A_{11} & M'A_{12} & M'A_{13} & 0 & 0 & M'B_{11} & M'B_{12} & M'B_{13} & 1_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_{m-s} \end{pmatrix}.$$

Also gilt

$$g_M x^{\uparrow n+m} \in X^v_{n,m,r} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & D_{21} & D_{22} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & D_{31} & D_{32} \\ M'A_{11} & M'A_{12} & M'A_{13} & M'B_{11} & M'B_{12} \end{pmatrix} = v$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & D_{11} & D_{12} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & D_{21} & D_{22} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & D_{31} & D_{32} \end{pmatrix} = v \Leftrightarrow x \in M^{v-r-s}_{n,(s,r)},$$

wobei für die letzte Äquivalenz die Darstellung von $M^{v-r-s}_{n,s,r}$ aus Satz 5.24 benutzt wurde.
Weiter ist $g_0' \in \mathrm{Sp}_s(\mathbb{Z})$ und daher $(g_0')^{\uparrow_n} \in C_{n,s}$. Da $M^{v-r-s}_{n,s,r}$ unter Multiplikation von links mit Elementen aus $C_{n,s}$ invariant ist, ist $x = (g_0')^{\uparrow_n} g' \in M^{v-r-s}_{n,s,r}$ äquivalent zu $g' \in M^{v-r-s}_{n,s,r}$. Damit ist die Aussage bewiesen. □

Mit Hilfe dieser Vorarbeit können wir Gleichung (7.4) beweisen:

Satz 7.5. *Es gilt:*

$$G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) = \sum_{s=0}^{m} (c_k^{(s)})^{-1} \sum_{j=1}^{d(s)} S_{s,j} E^s_m(f_{s,j}(Z_2)) H^{v-r-s}_{n,s,r}(f^\theta_{s,j}, Z_1).$$

Dabei ist $c_k^{(s)}$ eine (explizit berechenbare) Konstante, $d(s)$ die Dimension von $\mathcal{S}^k_s$, $\{f_{s,j} \mid 1 \leq j \leq d(s)\}$ eine Basis von $\mathcal{S}^k_s$ aus orthonormalen Eigenformen zu dem von Garrett in [Gar84] benutzten “symmetric square operator” und $S_{s,j}$ der dazugehörende Eigenwert. Der θ-Operator ordnet einer Funktion f eine Funktion f^θ zu, die aus f durch komplexe Konjugation der Fourierkoeffizienten hervorgeht.

Beweis. Man benutzt das Repräsentantensystem aus Satz 7.4. Nach dem Beweis des Satzes aus §5 von [Gar84] liefert die Summation über g'_M, g'_0 und g''_1 für festes s:

$$\sum_{g'_M, g'_0, g''_1} j(g'_M g'_0 g''_1, \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) = c_k^{(s)-1} \sum_{j=1}^{d(s)} S_{s,j} f_{s,j}(Z_1^*) f^\theta_{s,j}(Z_2^*).$$

Berücksichtigen wir die Definition der Klingen-Eisensteinreihe

$$E_m^s(f_{s,j}^\theta(Z_2)) := \sum_{g'' \in C_{m,s} \backslash \operatorname{Sp}_m(\mathbb{Z})} f_{s,j}^\theta((g'' < Z_2 >)^*) j(g'', Z_2)^{-k}$$

und die der Funktionen

$$H_{n,s,r}^{v-r-s}(f_{s,j}, Z_1) := \sum_{g' \in C_{m,s} \backslash M_{n,s,r}^{v-r-s}} f_{s,j}((g' < Z_1 >)^*) j(g', Z_1)^{-k},$$

so ergibt die Summation über g', g'' und s die Aussage

$$G_{n,m,r}^v(\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) = \sum_{s=0}^{m} c_k^{(s)-1} \sum_{j=1}^{d(s)} S_{s,j} E_m^s(f_{s,j}^\theta, Z_2) H_{n,s,r}^{v-r-s}(f_{s,j}, Z_1).$$

Wenn wir von der orthonormalen Basis $\{f_{s,j}\}$ zu der orthonormalen Basis $\{f_{s,j}^\theta\}$ wechseln, ist der Satz bewiesen. □

Das nächste Lemma brauchen wir für den Beweis des letzten Satzes dieses Kapitels:

Lemma 7.6. *Sei $f \in \mathcal{S}_s^k$ eine Spitzenform und der θ-Operator wie oben. Dann gilt:*

a)

$$f^\theta(-\overline{z}) = \overline{f(z)},$$

b)

$$\overline{H_{n,s,r}^{v-r-s}(f, z)} = H_{n,s,r}^{v-r-s}(f^\theta, -\overline{z}).$$

Beweis. a) Ist $f(z) = \sum_{t>0} b(t)e(tz)$ die Fourierzerlegung von f, so gilt:

$$\overline{f(z)} = \overline{\sum_{t>0} b(t)e(tz)} = \sum_{t>0} \overline{b}(t)\overline{\exp(2\pi i t z)} = \sum_{t>0} \overline{b}(t)\exp(2\pi \overline{i} t \overline{z}) = f^\theta(-\overline{z}).$$

b) Weiter gilt nach Definition der Funktion $H_{n,s,r}^{v-r-s}$

$$H_{n,s,r}^{v-r-s}(f^\theta, -\overline{z}) = \sum_{M \in C_{n,s} \backslash M_{n,s,r}^{v-r-s}} f^\theta(((-A\overline{z}+B)(-C\overline{z}+D)^{-1})^*) \det(-C\overline{z}+D)^{-k}.$$

Die Abbildung

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & -B \\ -C & D \end{pmatrix}$$

ist nach (2.1) eine Bijektion von $\operatorname{Sp}_n(\mathbb{Z})$ auf sich selbst und insbesondere auch eine von $M_{n,s,r}^{v-r-s}$. Benutzen wir diese Umsortierung, so erhalten wir

$$\sum_{M \in C_{n,s} \backslash M_{n,s,r}^{v-r-s}} f^\theta(((-A\overline{z} - B)(C\overline{z} + D)^{-1})^*) \det(C\overline{z} + D)^{-k}$$

$$= \sum_{M \in C_{n,s} \backslash M_{n,s,r}^{v-r-s}} f^{\theta}(-\overline{((Az+B)(Cz+D)^{-1})^*})\overline{\det(Cz+D)^{-k}}$$

Benutzen wir den ersten Teil, so bekommen wir

$$= \sum_{M \in C_{n,s} \backslash M_{n,s,r}^{v-r-s}} \overline{f(((Az+B)(Cz+D)^{-1})^*)\det(Cz+D)^{-k}},$$

also nach Definition

$$\overline{H_{n,s,r}^{v-r-s}(f,z)}.$$

□

Satz 7.7. *Sei $f \in \mathcal{S}_m^k$ eine Eigenform. Dann gilt*

$$\left\langle f(Z_2), G_{n,m,r}^v(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle = \lambda(f) H_{n,m,r}^{v-r-m}(f, Z_1),$$

mit $\lambda(f) := \epsilon(m) A_m^k \beta^*(n,k) D_f^*(k-m)$ und dem Skalarprodukt bezüglich der Variable Z_2.
Dabei ist

$$\epsilon(m) := 1 \quad \textit{für } m = 0 \quad \textit{und} \quad \epsilon(m) := 2 \quad \textit{sonst,}$$

$$A_m^k := \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{m(m+1)}{2} - mk} \prod_{\nu=1}^{m} \Gamma(k - \frac{m+\nu}{2}),$$

$$D_f^*(s) := \prod_p \{\prod_{i=1}^m (1 - \alpha_{i,p}^{-1} p^{-s})(1 - \alpha_{i,p} p^{-s})\}^{-1},$$

wobei $\alpha_{i,p}$ die p-Parameter von f sind (vgl. [And79]) und

$$\beta^*(m,k) := (-1)^{\frac{mk}{2}} 2^{m(k - \frac{m-1}{2})} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\pi^{k-\frac{i}{2}}}{\Gamma(k-\frac{i}{2})} \zeta(k-m)\zeta(k)^{-1} \prod_{j=1}^{m} \zeta(2k-2j)^{-1}.$$

Beweis. Zum Beweis dieser Aussage benutzen wir die Gleichung

$$G_{n,m,r}^v(\begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) = \sum_{s=0}^{m} (c_k^{(s)})^{-1} \sum_{j=1}^{d(s)} S_{s,j} E_m^s(f_{s,j}(Z_2)) H_{n,s,r}^{v-r-s}(f_{s,j}^{\theta}, Z_1).$$

Da f eine Spitzenform ist, steht es auf alle Klingen-Eisensteinreihen $E_m^s(f_{s,i}, z_2)$ mit $s < m$ senkrecht (vgl. Proposition 3.8). Weiter kann $f_{m,1} = f$ gewählt werden, sodass f auf alle $f_{m,j}$ mit $j > 1$ senkrecht steht. Wir erhalten also

$$\left\langle f(Z_2), G_{n,m,r}^v(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle = \left\langle f(Z_2), (c_k^{(m)})^{-1} S_{m,1} f(Z_2) H_{n,m,r}^{v-r-m}(f^{\theta}, -\overline{Z_1}) \right\rangle.$$

Nach Lemma 7.6 gilt $\overline{H^{v-r-m}_{n,m,r}(f,Z_1)} = H^{v-r-m}_{n,m,r}(f^\theta,-\overline{Z_1})$. Da f normiert ist, gilt $\langle f(Z_2), f(Z_2)\rangle = 1$ und wir erhalten

$$\left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix})\right\rangle = \overline{(c_k^{(m)})^{-1} S_{m,1}} H^{v-r-m}_{n,m,r}(f,Z_1). \tag{7.5}$$

Wir müssen nun nur noch den Wert von $\lambda(f)$ bestimmen.

Summieren wir über v, so ergibt sich mittels

$$\dot{\bigcup_v} X^v_{n,m,r} = \mathrm{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \dot{\bigcup_v} M^{v-m-r}_{n,m,r} = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$$

die Gleichung

$$\left\langle f(Z_2), E^k_{n+m}(1,\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix})\right\rangle = \overline{(c_k^{(m)})^{-1} S_{m,1}} E^k_n(f,Z_1). \tag{7.6}$$

Laut Satz 13 und den Formeln (25), (29) aus [Böc83] sowie Kapitel 6 aus [Böc84] gilt

$$\left\langle f(Z_2), E^k_{n+m}(1,\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix})\right\rangle = \lambda(f) E^k_n(f,Z_1) \tag{7.7}$$

mit $\lambda(f)$ aus dem Satz (wegen eines Rechenfehlers mit dem Faktor $\epsilon(m)$ statt $\frac{1}{2}$, siehe [Böc85], Erratum). Aus den Gleichungen (7.6) und (7.7) folgt dann $\lambda(f) = \overline{(c_k^{(m)})^{-1} S_{m,1}}$ und aus (7.5) der Satz. $\square$

8 Berechnung der Fourierkoeffizienten

In diesem Kapitel soll die Funktion

$$G^v_{n,m,r}(Z) := \sum_{\gamma \in C_{n+m,0} \backslash X^v_{n,m,r}} j(\gamma, Z)^{-k}$$

als Teilreihe der Siegelschen Eisensteinreihe

$$E^k_{n+m}(Z) := \sum_{\gamma \in C_{n+m,0} \backslash \operatorname{Sp}_{n+m}(\mathbb{Z})} j(\gamma, Z)^{-k}$$

näher betrachtet werden. Als Teilreihe der Siegelschen Eisensteinreihe E^k_{n+m} konvergiert sie für $k > n+m+1$. Die Menge $X^v_{n,m,r}$ ist dabei wie in Definition 7.1 gegeben. Insbesondere soll für eine Siegelsche Spitzenform $f(w) = \sum_{t \in \mathcal{A}^+_m} b(t)e(tw) \in \mathcal{S}^k_m$ die Fourierzerlegung der Funktion

$$Z_1 \mapsto \left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$$

berechnet werden. Nach den Überlegungen der vorherigen Kapitel reicht dies, um die Fourierkoeffizienten der Zerlegung der Fourier-Jacobikoeffizienten einer Klingen-Eisensteinreihe $E^k_{n,m}$ in den Teilräumen $\mathcal{J}^k_{(r,n-r),s}$ zu bestimmen.

Um diese Fourierkoeffizienten zu errechnen, zerlegen wir zunächst die Funktion $G^v_{n,m,r}$ weiter in die Funktionen

$$G^{v,l}_{n,m,r}(Z) := \sum_{\gamma \in C_{n+m,0} \backslash (M^l_{n+m,0,n} L(P_{n,m}) \cap X^v_{n,m,r})} j(\gamma, Z)^{-k} \tag{8.1}$$

mit der Matrix

$$P_{n,m} := \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann:

$$\sum_{l=0}^{n} G^{v,l}_{n,m,r}(Z) = G^v_{n,m,r}(Z).$$

Anstelle des Integrals $\left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$ berechnen wir die Integrale $\left\langle f(Z_2), G^{v,l}_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$. Dabei wird sich herausstellen, dass die Funktionen $Z_1 \mapsto \left\langle f(Z_2), G^{v,l}_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$ nur Fourierkoeffizienten zu Matrizen mit Rang l haben. Dazu benötigen wir folgendes Repräsentantensystem:

Satz 8.1. *Sei die Matrix*

$$P_{n,m} := \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash(M^l_{n+m,0,n}L(P_{n,m}) \cap X^v_{n,m,r})$ *wird gegeben durch*

$$x^{\uparrow_{n+m}}L(U)y^{\downarrow_{n+m}},$$

wobei x *ein Repräsentantensystem der Nebenklassen* $C_{l,0}\backslash M^l_{l,0,0}$ *durchläuft,* U *ein solches von*

$$\left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0_{n-l,l} & * & * \\ 0_{m,l} & * & * \end{pmatrix}\right\} \Big\backslash \left\{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Z}) \mid \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} u_4 \\ u_7 \end{pmatrix}) = v - l, \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} u_6 \\ u_9 \end{pmatrix}) = m\right\}$$

mit einer Zerlegung in Blockmatrizen der Größen

$$\begin{pmatrix} l \times r & l \times n-r & l \times m \\ n-l \times r & n-l \times n-r & n-l \times m \\ m \times r & m \times n-r & m \times m \end{pmatrix}$$

und y *ein Repräsentantensystem von* $C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$*.*

Beweis. Nach Satz 5.23 wird ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash M^l_{n+m,0,n}L(P_{n,m})$ gegeben durch

$$x^{\uparrow_{n+m}}L(U')y^{\uparrow_{n+m}}L(P_{n,m}) = x^{\uparrow_{n+m}}L(U')L(P_{n,m})L(P_{n,m})^{-1}y^{\uparrow_{n+m}}L(P_{n,m}),$$

wobei x, U' und y Repräsentantensysteme von $C_{l,0}\backslash M^l_{l,0,0}$,

$$\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\} \Big\backslash \left\{\begin{pmatrix} u_1' & u_2' \\ u_3' & u_4' \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Z}) \mid u_3' \in \mathbb{Z}^{n+m-l\times m}, \mathrm{rg}(u_3') = m\right\}$$

bzw. $C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$ durchlaufen. Aus $L(P_{n,m})^{-1}y^{\uparrow_{n+m}}L(P_{n,m}) = y^{\downarrow_{n+m}}$ und

$$\begin{pmatrix} u_1' & u_2' \\ u_3' & u_4' \end{pmatrix} P_{n,m} = \begin{pmatrix} u_2' & u_1' \\ u_4' & u_3' \end{pmatrix}$$

folgt, dass mit der Substitution $U' \mapsto UP_{n,m}$ ein Repräsentantensystem von $C_{n+m,0}\backslash M^l_{n+m,0,n}L(P_{n,m})$ gegeben ist durch

$$x^{\uparrow_{n+m}}L(U)y^{\downarrow_{n+m}},$$

mit $x \in C_{l,0}\backslash M^l_{l,0,0}$,

$$U \in \left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}\right\} \Big\backslash \left\{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathbb{Z}) \mid \mathrm{rg}(\begin{pmatrix} u_6 \\ u_9 \end{pmatrix}) = m\right\}$$

mit einer Zerlegung wie im Satz und $y \in C_{m,0} \backslash \operatorname{Sp}_m(\mathbb{Z})$.

Nun müssen wir nur noch untersuchen, welche dieser Repräsentanten in der Menge $X^v_{n,m,r}$ sind. Die Matrix y spielt dabei keine Rolle, da $X^v_{n,m,r} \operatorname{Sp}_m(\mathbb{Z})^{\downarrow_{n+m}} = X^v_{n,m,r}$ gilt. Mit

$$x := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$U := \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_4 & u_5 & u_6 \\ u_7 & u_8 & u_9 \end{pmatrix}, {}^tU^{-1} := \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_4 & v_5 & v_6 \\ v_7 & v_8 & v_9 \end{pmatrix}$$

gilt dann:

$$x^{\uparrow_{n+m}} L(U) y^{\downarrow_{n+m}} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ cv_1 & cv_2 & * & du_1 & * & * \\ 0 & 0 & * & u_4 & * & * \\ 0 & 0 & * & u_7 & * & * \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} cv_1 & cv_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nach Voraussetzung Rang l hat, hat die Matrix $\begin{pmatrix} cv_1 & cv_2 & du_1 \\ 0 & 0 & u_4 \\ 0 & 0 & u_7 \end{pmatrix}$ genau dann Rang v, wenn $\begin{pmatrix} u_4 \\ u_7 \end{pmatrix}$ den Rang $v-l$ hat. Also ist die Behauptung bewiesen.

□

Definition 8.2. *Es seien die Mengen*

$$\mathbb{Z}^{m\times l}_{s'} := \{w_3 \in \mathbb{Z}^{m\times l} \mid \operatorname{rg}(w_3) = s'\}$$

und

$$\mathbb{Z}^{m\times l}_{s',0} := \{w'_3 \in \mathbb{Z}^{m\times l}_{s'} \mid w'_3 = \begin{pmatrix} * \\ 0_{m-s',l} \end{pmatrix}\},$$

sowie die Gruppen

$$\operatorname{GL}_m(\mathbb{Z})_{s'} := \{U \in \operatorname{GL}_m(\mathbb{Z}) \mid U = \begin{pmatrix} * & * \\ 0_{m-s',s'} & * \end{pmatrix}\}$$

und

$$\operatorname{GL}_m(\mathbb{Z})^1_{s'} := \{U \in \operatorname{GL}_m(\mathbb{Z}) \mid U = \begin{pmatrix} 1_{s'} & * \\ 0_{m-s',s'} & * \end{pmatrix}\}$$

definiert.

Um die Funktion $G^{v,l}_{n,m,r}$ genauer zu beschreiben, werden noch die folgenden Lemmata benötigt:

Lemma 8.3. *Sind $a_l(T)$ die Koeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihe $E^k_{l,0}$, so gilt für $z \in \mathbb{H}_l$*

$$\sum_{\gamma \in C_{l,0} \backslash M^l_{l,0,0}} j(\gamma, z)^{-k} = \sum_{T \in \mathcal{A}^+_l} a_l(T) e(Tz).$$

Beweis. Dies folgt mit $r = n$ aus Lemma 3 von [Böc83].

Außerdem ist dies ein Spezialfall aus Kapitel 6 mit $n = l$, $r = m = 0$. Nach Satz 6.2 erhält man für die Summe über die $C_{l,0}$-Nebenklassen der Menge $M^l_{l,0,0}$ die Fourier-Jacobikoeffizienten vom Grad $(0, l)$ mit maximalem Index, also die Fourierkoeffizienten $a_l(T)$ zu den Matrizen T mit maximalem Rang l. □

Lemma 8.4. *a) Durchläuft U das Repräsentantensystem aus Satz 8.1, so durchlaufen die ersten l Spalten von U^{-1} ein Repräsentantensystem von*

$$\left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \textit{ primitiv}, \operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) = l, \operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}) = v - r \right\} / \operatorname{GL}_l(\mathbb{Z}),$$

wobei $w_1 \in \mathbb{Z}^{r \times l}$, $w_2 \in \mathbb{Z}^{n-r \times l}$ und $w_3 \in \mathbb{Z}^{m \times l}$ gelten soll.

b) Durchläuft w_3' ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $\operatorname{GL}_m(\mathbb{Z})_{s'} \backslash \mathbb{Z}^{m \times l}_{s',0}$ und w_3'' ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $\operatorname{GL}_m(\mathbb{Z}) / \operatorname{GL}_m(\mathbb{Z})^1_{s'}$, so durchläuft $w_3'' w_3'$ die Menge $\mathbb{Z}^{m \times l}_{s'}$. Dabei ist für feste w_1, w_2 die Matrix $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3'' w_3' \end{pmatrix}$ genau dann primitiv, wenn $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ primitiv ist, und $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3'' w_3' \end{pmatrix}$ hat genau dann Rang $v - r$, wenn $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ den Rang $v - r$ hat.

Beweis. a) Ist U gegeben, so ist seine Nebenklasse in

$$\left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0_{n-l,l} & * & * \\ 0_{m,l} & * & * \end{pmatrix} \right\} \backslash \operatorname{GL}_{n+m}(\mathbb{Z})$$

durch die Nebenklasse von U^{-1} in

$$\operatorname{GL}_{n+m}(\mathbb{Z}) / \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0_{n-l,l} & * & * \\ 0_{m,l} & * & * \end{pmatrix} \right\} \backslash \operatorname{GL}_{n+m}(\mathbb{Z})$$

gegeben. Diese ist durch die ersten l Spalten $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ von U^{-1} bis auf Multiplikation von rechts mit Elementen aus $\operatorname{GL}_l(\mathbb{Z})$ eindeutig bestimmt. Diese l Spalten sind nach Definition primitiv (d.h. zu einer invertierbaren Matrix erweiterbar). Nach Lemma 5.7 ist die Bedingung $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} u_4 \\ u_7 \end{pmatrix}) = v - l$ gleichbedeutend mit

$\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}) = v-r$. Ebenso entsprechen sich nach Bemerkung 5.8 die Bedingungen $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} u_6 \\ u_9 \end{pmatrix}) = m$ und $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) = l$.

b) Eine Matrix aus $\mathbb{Z}_{s'}^{m\times l}$ lässt sich durch Multiplikation von links mit einer Matrix $w_3'' \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})$ in eine Matrix w_3' aus $\mathbb{Z}_{s',0}^{m\times l}$ transformieren. Alle anderen Matrizen, die dies erfüllen unterscheiden sich von w_3'' nur um einen Faktor von rechts aus $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})_{s'}$. Die Matrizen, die w_3' festlassen, sind genau die in $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})_{s'}^1$. Das ergibt den ersten Teil der Behauptung. Der zweite Teil ergibt sich, weil die Rangbedingung bzw. die Primitivität durch Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1_{n-r} & 0 \\ 0 & w_3'' \end{pmatrix}$ bzw. mit $\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & w_3'' \end{pmatrix}$ nicht beeinflusst wird.

□

Die nachfolgenden Rechnungen wurden schon in Kapitel 5 von [Böc83] durchgeführt, dort allerdings ohne die zusätzliche Bedingung an den Rang von $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. Trotzdem können fast alle Rechenschritte von dort übernommen werden. Sie werden aber auch hier wieder, teils ausführlicher, durchgeführt. Wir können Gleichung (8.1) mit Hilfe von Satz 8.1 umschreiben:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma\in C_{n+m,0}\backslash(M^l_{n+m,0,n}L(P_{n,m})\cap X^v_{n,m,r})} j(\gamma,Z)^{-k}\\
=&\sum_{x\in C_{t,0}\backslash M^l_{l,0,0}}\sum_{U}\sum_{y\in C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})} j(x^{\uparrow_{n+m}}L(U)y^{\downarrow_{n+m}},Z)^{-k}\\
=&\sum_{x\in C_{l,0}\backslash M^l_{l,0,0}}\sum_{U}\sum_{y\in C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})}\\
&\quad j(x^{\uparrow_{n+m}},L(U)y^{\downarrow_{n+m}}<Z>)^{-k} j(L(U),y^{\downarrow_{n+m}}<Z>)^{-k} j(y^{\downarrow_{n+m}},Z)^{-k}\\
=&\sum_{x\in C_{l,0}\backslash M^l_{l,0,0}}\sum_{U}\sum_{y\in C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})} j(x^{\uparrow_{n+m}},L(U)y^{\downarrow_{n+m}}<Z>)^{-k} j(y,Z_*)^{-k}, \quad (8.2)
\end{aligned}$$

wobei $Z = \begin{pmatrix} * & * \\ * & Z_* \end{pmatrix}$ mit $Z_* \in \mathbb{H}_m$ gilt. Hierbei haben wir die Multiplikativität von j und die Formel $j(L(U),*) = 1$ ausgenutzt. Mit Hilfe von Lemma 8.3 erhalten wir dann

$$\sum_{T\in\mathcal{A}_l^+}\sum_{U}\sum_{y\in C_{m,0}\backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})} a_l(T)e(T(L(U)y^{\downarrow_{n+m}}<Z>)^*)j(y,Z_*)^{-k},$$

wobei $(L(U)y^{\downarrow_{n+m}}<Z>)^*$ der linke obere $l\times l$-Block von $L(U)y^{\downarrow_{n+m}}<Z>$ ist und T über die Menge $\mathcal{A}_l^+$ läuft. Weiter gilt

$$L(U)y^{\downarrow_{n+m}}<Z> = y^{\downarrow_{n+m}}<Z>[U^{-1}]$$

mit $*[*]$ wie in den Notationen. Der linke obere $l \times l$-Block der linken Seite hängt nur von den ersten l Spalten von U^{-1} ab. Mit dem ersten Teil von Lemma 8.4 und den dortigen Bedingungen an w_1, w_2 und w_3 erhalten wir

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_l^+} \sum_{w_1, w_2} \sum_{w_3} \sum_{y \in C_{m,0} \setminus \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})} a_l(T) e(T(y^{\downarrow_{n+m}} < Z >)^* [\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}])) j(y, Z^{*\downarrow})^{-k}.$$

Nun kann man die Summe über w_3 nach dem zweiten Teil von Lemma 8.4 weiter in s', w_3' und w_3'' aufteilen:

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_l^+} \sum_{w_1, w_2} \sum_{s'} \sum_{w_3'} \sum_{w_3''} \sum_{y \in C_{m,0} \setminus \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})}$$

$$a_l(T) e(T((y^{\downarrow_{n+m}} < Z >)^* [\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3'' w_3' \end{pmatrix}])) j(y, Z^{*\downarrow})^{-k}$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{A}_l^+} \sum_{w_1, w_2} \sum_{s'} \sum_{w_3'} \sum_{w_3''} \sum_{y \in C_{m,0} \setminus \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})}$$

$$a_l(T) e(T((L(w_3'')^{\downarrow_{n+m}} y^{\downarrow_{n+m}} < Z >)^* [\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}])) j(y, Z^{*\downarrow})^{-k}.$$

Im Folgenden soll $Z = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}$ mit $Z_1 \in \mathbb{H}_n$ und $Z_2 \in \mathbb{H}_m$ Block-Diagonalgestalt haben.

Definition 8.5. *Sei $k > 2m$ und km gerade, t eine symmetrische, positiv definite, halbganze $s' \times s'$-Matrix. Für $T := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0_{m-s',m-s'} \end{pmatrix}$ und $z \in \mathbb{H}_m$ seien folgende Poincaré-Reihen vom Exponentialtyp vom Gewicht k definiert:*

$$g_{m,s'}^k(z, T) := \sum_{M \in U_{m,s'} \setminus \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})} e(T(M < z >)) j(M, z)^{-k},$$

mit

$$U_{m,s'} := \{M \in C_{m,s'} \mid C_{11} = 0, D_{11} = A_{11} = \pm 1_{s'}\}.$$

Folgendes ist für diese Reihen bekannt:

Satz 8.6. *Für $k > 2m$ und km gerade konvergieren diese Poincaréreihen. Außerdem gelten folgende Sachverhalte:*

a) Für $T := \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0_{m-s',m-s'} \end{pmatrix}$ gilt:

$$[g_{s',s'}^k(*, T)]_{s'}^m = g_{m,s'}^k(*, t).$$

Dabei ist $[*]_{s'}^m$ wie in Definition/Satz 3.6 definiert.

b) Für alle Spitzenformen $f \in \mathcal{S}_m^k$ mit Fourierkoeffizienten $f(z) = \sum_{t>0} b(t)e(tz)$ gilt

$$\left\langle f(*), g_{m,m}^k(*,t) \right\rangle = A_m^k b(t) \det(t)^{\frac{m+1}{2}-k}$$

mit der Konstanten

$$A_m^k := \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{m(m+1)}{2}-mk} \prod_{\nu=1}^{m} \Gamma(k - \frac{m+\nu}{2}).$$

Beweis. [Kli90] S.90, S.94 □

Sei nun die Gruppe

$$U_{m,s'}^+ := \{M \in C_{m,s'} \mid C_{11} = 0, D_{11} = A_{11} = 1_{s'}\}$$

definiert. Da nun

$$U_{m,s'}^+ = \{L(U,B) \mid U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})_{s'}^1, B \text{ symmetrisch}\}$$

und

$$C_{m,0} = \{L(U,B) \mid U \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}), B \text{ symmetrisch}\}$$

gilt, durchläuft $L(w_3'')$ ein Repräsentantensystem von $U_{m,s'}^+ \backslash C_{m,0}$, wenn w_3'' ein Repräsentantensystem von $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}) / \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z})_{s'}^1$ durchläuft. Da y ein Repräsentantensystem von $C_{m,0} \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$ durchläuft, durchläuft $L({w_3''}^{-1})y$ ein Repräsentantensystem von $U_{m,s'}^+ \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$. Für $s' = 0$ stimmen die Nebenklassen von $U_{m,s'} \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$ und $U_{m,s'}^+ \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$ überein, sonst zerfällt jede Nebenklasse von $U_{m,s'}^+ \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$ in zwei Nebenklassen von $U_{m,s'} \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})$. Mit der Gleichung $j(y, Z_2) = j(L({w_3''}^{-1})y, Z_2)$ erhalten wir

$$\sum_{T \in \mathcal{A}_l^+} \sum_{w_1, w_2} \sum_{s'} \epsilon(s') \sum_{w_3'} \sum_{x \in U_{m,s'} \backslash \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})}$$

$$a_l(T) e(T(x^{\downarrow_{n+m}} < \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} > [\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}])) j(x, Z_2)^{-k},$$

wobei $\epsilon(0) = 1$ und $\epsilon(s') = 2$ für $s' \neq 0$ gilt. Mit

$$x^{\downarrow_{n+m}} < \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix} > [\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & x < Z_2 > \end{pmatrix} [\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}] = Z_1[\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}] + x < Z_2 > [w_3'],$$

$$\mathrm{tr}(T(Z_1[\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}])) = \mathrm{tr}(T[^t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}] Z_1)$$

sowie

$$\mathrm{tr}(T(x < Z_2 > [w_3'])) = \mathrm{tr}(T[^t w_3'] x < Z_2 >)$$

erhalten wir

$$\sum_{T\in\mathcal{A}_l^+} a_l(T) \sum_{w_1,w_2} e(T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]Z_1) \sum_{s'} \epsilon(s') \sum_{w_3'} \sum_{x\in U_{m,s'}\setminus \mathrm{Sp}_m(\mathbb{Z})}$$
$$e(T[{}^t w_3']x < Z_2 >) j(x,Z_2)^{-k}.$$

Da $T[{}^t w_3']$ von der Gestalt $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0_{m-s',m-s'} \end{pmatrix}$ aus Definition 8.5 ist, ergibt die Summe über x die Poincaréreihen aus dieser Definition:

$$\sum_{T\in\mathcal{A}_l^+} a_l(T) \sum_{w_1,w_2} e(T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]Z_1) \sum_{s'} \epsilon(s') \sum_{w_3'} g^k_{m,s'}(Z_2, T[{}^t w_3']).$$

Sei eine Spitzenform $f \in \mathcal{S}^k_m$ mit Fourierzerlegung $f(Z_2) = \sum_{t>0} b(t)e(tZ_2)$ gegeben, dann gilt:

$$\left\langle f(Z_2), G_l(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$$
$$= \sum_{T\in\mathcal{A}_l^+} a_l(T) \sum_{w_1,w_2} \sum_{s'} \epsilon(s') \sum_{w_3'} \left\langle f, e(T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}] - \overline{Z_1}) g^k_{m,s'}(Z_2, T[{}^t w_3']) \right\rangle.$$

Wegen $\overline{e(T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}] - \overline{Z_1})} = \overline{\exp(2\pi i \operatorname{tr}(T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}] - \overline{Z_1}))} = e(T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]Z_1)$ ist der Fourierkoeffizient der Funktion $Z_1 \mapsto \left\langle f(Z_2), G_l(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$ zu einer halbganzen, symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix R gegeben durch

$$\sum_{T\in\mathcal{A}_l^+} a_l(T) \sum_{w_1,w_2} \sum_{s'} \epsilon(s') \sum_{w_3'} \left\langle f(Z_2), g^k_{m,s'}(Z_2, T[{}^t w_3']) \right\rangle,$$

wobei T und $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ noch die Bedingung $R = T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]$ erfüllen. Da nach Satz 8.6

$$[g^k_{s',s'}(*,T)]^m_{s'} = g^k_{m,s'}(*,t)$$

gilt, liefert das Skalarprodukt nach Proposition 3.8 nur für $s' = m$ einen Wert ungleich 0. Im Fall $s' = m$ liefert der zweite Teil von Satz 8.6 für die Fourierkoeffizienten nun den Wert

$$\epsilon(m) \sum_{T\in\mathcal{A}_l^+} a_l(T) \sum_{w_1,w_2} \sum_{w_3'} A^k_m b(T[{}^t w_3']) \det(T[{}^t w_3'])^{\frac{m+1}{2}-k}.$$

Dabei durchläuft T alle halbganzen, symmetrischen, positiv definiten Matrizen vom Rang l und $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ durchläuft $\mathbb{Z}^{n\times l}/\operatorname{GL}_l(\mathbb{Z})$ mit maximalem Rang l und der Bedingung $R = T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]$. Insbesondere hat die Funktion aus (8.1) - wie behauptet - nur Fourierkoeffizienten $a(R) \neq 0$, falls $\operatorname{rg}(R) = l$ gilt.

Zusammen erhalten wir:

Satz 8.7. *Der Fourierkoeffizient der Funktion*

$$Z_1 \mapsto \left\langle f(Z_2), G^v_{n,m,r}(\begin{pmatrix} -\overline{Z_1} & 0 \\ 0 & Z_2 \end{pmatrix}) \right\rangle$$

zur Matrix $R \in \mathcal{A}_n$ ist gegeben durch

$$\epsilon(m) \sum_{T \in \mathcal{A}_l^+} a_l(T) \sum_{w_1, w_2} \sum_{w_3'} A^k_m b(T[{}^t w_3']) \det(T[{}^t w_3'])^{\frac{m+1}{2} - k}.$$

Hierbei ist l der Rang der Matrix R und $a_l(T)$ bezeichnet die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihe vom Grad l.

Die Summation über die Matrizen $w_1 \in \mathbb{Z}^{r \times l}$, $w_2 \in \mathbb{Z}^{n-r \times l}$ und $w_3' \in \mathbb{Z}^{m \times l}$ ist so beschaffen, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ für ein beliebiges Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}^{n+m \times l} / \operatorname{GL}_l(\mathbb{Z})$ all jene Repräsentanten durchlaufen, die die Bedingungen

- $R = T[{}^t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]$,
- $\operatorname{rg}(w_3') = m$,
- $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}) = v - r$ *und*
- $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ *primitiv*

erfüllen.

Aus diesen Bedingungen folgt sowohl, dass die Summen über T und w_1, w_2 endlich sind als auch, dass $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}) = l$ gilt.

Die Konstanten A^k_m und $\epsilon(m)$ sind gegeben durch

$$A^k_m := \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} (4\pi)^{\frac{m(m+1)}{2} - mk} \prod_{\nu=1}^{m} \Gamma(k - \frac{m+\nu}{2})$$

und

$$\epsilon(m) := 1 \quad \text{für } m = 0 \quad \text{und} \quad \epsilon(m) := 2 \quad \text{sonst.}$$

Weiter sind $b(t)$ die Fourierkoeffizienten der Spitzenform $f(z) = \sum_{t \in \mathcal{A}_m^+} b(t) e(tz) \in S^k_m$.

Satz 8.8. *Der Fourierkoeffizient der Funktion* $H^t_{n,m,r}$ *zu* $R = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ {}^tR_2 & R_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n$ *und damit auch der Fourierkoeffizient zu* (R_1, R_2) *von* $\Phi^{(R_4)}_{m+t-\mathrm{rg}(R_4)}$ *mit den Bezeichnungen aus Satz 6.2 sind gegeben durch*

$$\beta^*(m,k)^{-1} D^*_f(k-m)^{-1} \sum_{T \in \mathcal{A}^+_l} a_l(T) \sum_{w_1, w_2} \sum_{w'_3} b(T[{}^tw'_3]) \det(T[{}^tw'_3])^{\frac{m+1}{2}-k}$$

mit

$$D^*_f(s) := \prod_p \{\prod_{i=1}^m (1-\alpha^{-1}_{i,p} p^{-s})(1-\alpha_{i,p} p^{-s})\}^{-1},$$

wobei α_i, p *die p-Parameter von* f *sind, und*

$$\beta^*(m,k) := (-1)^{\frac{mk}{2}} 2^{m(k-\frac{m-1}{2})} \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\pi^{k-\frac{i}{2}}}{\Gamma(k-\frac{i}{2})} \zeta(k-m)\zeta(k)^{-1} \prod_{j=1}^{m} \zeta(2k-2j)^{-1}.$$

Die Summationen laufen über dieselben Mengen wie in Satz 8.7 mit $v = t + r + m$.

Beweis. Das folgt aus den Sätzen 6.2, 7.7 und 8.7. □

9 Spezialfälle

In diesem Kapitel werden wir die bisherigen Ergebnisse auf Spezialfälle anwenden und teilweise schon bekannte Ergebnisse erhalten, teilweise bekannte Ergebnisse verallgemeinern.

9.1 Spezielle Werte für r

Der Parameter r bestimmt den Grad $(r, n-r)$ der Fourier-Jacobikoeffizienten, die wir untersuchen. Wir werden die Ergebnisse für $r = 0$ und $r = n$ genauer betrachten.

Der Fall $r = 0$

Hier betrachten wir die Fourier-Jacobikoeffizienten vom Grad $(0, n)$, d.h. die Fourierkoeffizienten. Die Zerlegung

$$\mathcal{J}^k_{r,n-r}(T) = \bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{J}^k_{r,n-r,i}(T)$$

hat hier nur einen Summanden und es gilt $\mathcal{J}^k_{0,n}(T) = \mathbb{C}$. Der Parameter t erfüllt die Gleichung

$$0 \leq t \leq \min\{n-r, n-m\} = n-m.$$

Die Fourierzerlegung der Funktion $H^t_{n,m,0}$ besteht nach Satz 6.2 aus Fourierkoeffizienten zu Matrizen vom Rang $m+t$.

Wir können Satz 8.8 anwenden, um den Wert eines Fourierkoeffizienten der Funktion $H^t_{n,m,0}$ zu einer Matrix R vom Rang l zu berechnen.

Wir betrachten nun die Summation über T, w_1, w_2 und w_3' aus diesem Satz in der dortigen Notation für den Spezialfall $r = 0$. Dann ist die Summation bezüglich w_1 eine Summe über $0 \times l$-Matrizen, d.h. es gibt nur einen Summanden. Die Matrix w_2 durchläuft Repräsentanten der Nebenklassen $\mathbb{Z}^{n\times l}/\operatorname{GL}_l(\mathbb{Z})$. Die Matrix w_3 durchläuft $m \times l$-Matrizen und T die Menge $\mathcal{A}_l^+$.

Die weiteren Bedingungen der Summation sind, dass $R = T[{}^t w_2]$, $\operatorname{rg}(w_2) = l$, $\operatorname{rg}(w_3') = m$ und $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}) = t+m$ gilt und $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ primitiv ist. Aus den letzten beiden Bedingungen folgt, dass der Fourierkoeffizient nur ungleich 0 sein kann, wenn $m + t = l$ gilt. Wir sehen, dass die Funktion $H^t_{n,m,0}$ tatsächlich nur Fourierkoeffizieten zu Matrizen vom Rang $m+t$ hat.

Für $t = n - m$ erhalten wir die Fourierkoeffizienten zu positiv definiten Matrizen und Satz 8.8 entspricht Theorem II aus [Böc83].

Der Fall $r = n$

Hier betrachten wir die Fourier-Jacobikoeffizienten vom Grad $(n, 0)$, d.h. die komplette Siegelsche Modulform. Für den Parameter t ist hier nur der Wert $t = 0$ zulässig und es gilt $E^k_{n,m} = H^0_{n,m,n}$.

Bei w_2 in Satz 8.8 handelt es sich um $0 \times l$-Matrizen und die Aussage für positiv definite Matrizen entspricht wieder der von Theorem II aus [Böc83].

9.2 Spezielle Werte für m

Hier werden wir spezielle Werte für den Grad der Spitzenform $f \in \mathcal{S}^k_m$ betrachten.

Der Fall $m = 0$

Es gilt $\mathcal{S}^k_0 = \mathbb{C}$. Wir werden $f = 1$ setzen und erhalten die Siegelsche Eisensteinreihe.

Der Parameter t durchläuft hier die Werte 0 bis $n - r$.

Wir wollen Satz 8.8 benutzen, um den Fourierkoeffizienten der Funktionen $H^t_{n,0,r}$ zu einer Matrix R vom Rang l zu berechnen.

Mit der dortigen Notation gilt, dass w_3' eine $0 \times l$-Matrix ist. Weiter ist $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ primitiv und $\mathrm{rg}(w_2) = t$. Also kann der Fourierkoeffizient nur für $\mathrm{rg}(R) = l \geq t$ von 0 verschieden sein. Wegen

$$R = T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} w_1 T {}^t w_1 & w_1 T {}^t w_2 \\ w_2 T {}^t w_1 & w_2 T {}^t w_2 \end{pmatrix}$$

folgt nun, dass der rechte untere $n - r \times n - r$ Block von R Rang t hat, falls der Fourierkoeffizient zu R nicht verschwindet. Also sind die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^t_{n,0,r}$ die der Siegelschen Eisensteinreihe $E^k_{n,0}$, deren Index Rang t haben. Da die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^t_{n,0,r}$ nach Satz 6.2 in $\mathcal{J}^k_{r,n-r,t-\mathrm{rg}(T)}(T)$ liegen, folgt, dass diese hier in $\mathcal{J}^k_{r,n-r,0}(T)$ sind und somit selbst Eisensteinreihen zu Spitzenformen vom Grad $(0, n - r)$ sind. Dies ist die Entsprechung von Siegelschen Eisensteinreihen für Jacobiformen.

Dies folgt auch aus [Böc83] von Böcherer.

Der Fall $m = n$

Wir betrachten hier eine Spitzenform $f \in \mathcal{S}^k_n$. Hier gilt $0 \leq t \leq 0$ und damit $H^0_{n,n,r} = E^k_{n,n}(f) = f$. Insbesondere ist die Funktion $H^0_{n,n,r}$ von r unabhängig. Aus Satz 8.8 erhalten wir:

$$b(R) = \beta^*(n,k)^{-1} D^*_f(k-n)^{-1} \sum_{T \in \mathcal{A}^+_n} a_n(T) \sum_{w_1, w_2} \sum_{w_3'} b(T[{}^t w_3']) \det(T[{}^t w_3'])^{\frac{n+1}{2}-k},$$

wobei $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ ein Repräsentantensystem der Nebenklassen $\mathbb{Z}^{n\times n}/\operatorname{GL}_n(\mathbb{Z})$ mit der Bedingung $R = T[{}^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]$ durchläuft und w_3' alle $n \times n$-Matrizen mit maximalem Rang $\operatorname{rg}(w_3) = n$.

Diese Formel entspricht einer bekannten Identität von Andrianov. Da diese Identität im Beweis benutzt wurde, ergibt sich kein neuer Beweis für sie.

9.3 Der Fall $n = 2$

Betrachten wir nun den Spezialfall $n = 2$.

Als einziger noch nicht betrachteter Fall bleibt $n = 2$, $m = 1$ und $r = 1$.

Hier untersuchen wir die Fourier-Jacobikoeffizienten von Klingen-Eisensteinreihen zu einer Spitzenform $f \in \mathcal{S}_1^k$. Die Fourierkoeffizienten dieser Spitzenform bezeichnen wir mit b_f.

Als erstes werden wir die Konstante

$$\beta^*(1,k) = (-1)^{\frac{k}{2}} 2^k \frac{\pi^k}{\Gamma(k)} \zeta(k-1)\zeta(k)^{-1}\zeta(2k-2)^{-1}$$

betrachten. Dank der Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion können wir dies zu

$$\beta^*(1,k) = 2\zeta(1-k)^{-1}\zeta(k-1)\zeta(2k-2)^{-1} \tag{9.1}$$

umformen.

Weiter betrachten wir die Funktion $D_f^*(s-k+1)$. Diese erfüllt die Gleichung

$$L_2(f,s) = \zeta(s-k+1)D_f^*(s-k+1) \tag{9.2}$$

mit

$$L_2(f,s) := \prod_p \frac{1}{(1-\alpha_p^2 p^{-s})(1-\beta_p^2 p^{-s})(1-p^{k-1-s})},$$

wobei α_p und β_p durch $\alpha_p + \beta_p = b_f(p)$ und $\alpha_p\beta_p = p^{k-1}$ definiert sind.

Gleichung (9.2) folgt aus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_f(m^2)}{m^s} = \prod_p (1 + p^{-s+k-1}) D_f^*(s-k+1), \tag{9.3}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_f(m^2)}{m^s} = L_2(f,s)\zeta(2s-2k+2)^{-1} \tag{9.4}$$

und

$$\zeta(2s-2k+2)\prod_p (1+p^{-s+k-1}) = \zeta(s-k+1). \tag{9.5}$$

Gleichung (9.3) ist dabei Gleichung (3.3) aus [And77]. Gleichung (9.4) ist die erste Formel aus [Zag77] §5. Die dort zum Beweis angegebenen multiplikativen Eigenschaften sind in Lemma 4.5.12 Aussage (3) von [Miy06] mit $m = n$ und $d(l) = l^{k-2}$ zu finden und beweisen die Aussage in Verbindung mit Formel (3) aus [Zag77]. Gleichung (9.5) folgt direkt aus einem Vergleich der Eulerfaktoren.

Aus (9.1) und (9.2) folgt dann

$$\beta^*(1,k)^{-1} D_f^*(k-1)^{-1} = \frac{1}{2}\zeta(1-k)\zeta(2k-2)L_2(f,2k-2)^{-1}.$$

Damit schließen wir die Betrachtung der Konstanten ab.

Wir untersuchen jetzt die Funktionen $H_{2,1,1}^t$. Der Parameter t erfüllt

$$0 \leq t \leq \min\{n-r, n-m\},$$

hier gilt also $t = 0$ oder $t = 1$.

Die Fourier-Jacobikoeffizienten von $H_{2,1,1}^t$ zu einem festen Index T liegen nach Satz 6.2 im Vektorraum $\mathcal{J}_{1,1,1+t-\mathrm{rg}(T)}^k(T) \subseteq \mathcal{J}_{1,1}^k(T)$. In der Notation von [EZ85] ist dabei $\mathcal{J}_{1,1,1}^k(T) = \mathcal{J}_{k,T}^{\mathrm{cusp}}$ der Raum der Spitzenformen und $\mathcal{J}_{1,1,0}^k(T) = \mathcal{J}_{k,T}^{\mathrm{Eis}}$ der Raum der Eisensteinreihen. Gilt nicht $0 \leq 1+t-\mathrm{rg}(T) \leq 1$, sind die entsprechenden Fourier-Jacobikoeffizienten 0.

Wir betrachten zunächst den Fall $t = 1$. Ist der Rang des Index 1, so erhalten wir also Spitzenformen vom Grad $(1,1)$. Daher verschwinden die Fourierkoeffizienten von $H_{2,1,1}^1$ zu Matrizen vom Rang 1.

Ist der Rang 0, so ist die Bedingung $0 \leq 1+t-\mathrm{rg}(T) \leq 1$ nicht erfüllt, weswegen diese Fourier-Jacobikoeffizienten 0 sind. Beides zusammen zeigt, dass es in der Fourierzerlegung von $H_{2,1,1}^1$ keine Koeffizienten zu Matrizen vom Rang 1 gibt.

Dies folgt auch aus Satz 8.8, da dort bei der Berechnung dieser Fourierkoeffizienten über die leere Summe von 2×1-Matritzen $\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ vom Rang 2 summiert wird.

Um Fourierkoeffizienten für Matrizen $R = \begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2} \\ \frac{r_2}{2} & r_4 \end{pmatrix}$ vom Rang 2 zu berechnen, betrachten wir zunächst die Nebenklassen

$$(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z}^{2\times 2}) / \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Diese stehen in Bijektion zu den Nebenklassen

$$\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}) \cap \mathbb{Z}^{2\times 2})\right\} / \left\{\begin{pmatrix} \pm 1 & * \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in (\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}))\right\}.$$

Daher können wir in der Notation von Satz 8.8 die Matrix $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $a, d > 0$ und $0 \leq b < a$ wählen.

Wir schreiben $w_3' = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} 0 & d \\ u & v \end{pmatrix}) = m + t = 2$$

und damit $u \neq 0$. Da $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ als primitiv vorausgesetzt ist, folgt $(u,a) = 1$ und $(av - ub, d) = 1$. Wir erhalten für die Fourierkoeffizienten

$$\frac{1}{2}\zeta(1-k)\zeta(2k-2)L_2(f,2k-2)^{-1}\sum_{a,b,d} a_2(T)$$

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\(u,a)=1\\(av-ub,d)=1\\u\neq 0}} b_f(u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)(u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)^{1-k}, \tag{9.6}$$

wobei

$$T := \begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} R \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}$$

gilt mit $a, d > 0$ und $0 \leq b < a$, sodass T eine halbganze Matrix ist. Falls $-\det(2R)$ eine Fundamentaldiskriminante ist, gilt $a = d = 1$ und $b = 0$. Wir erhalten

$$\frac{1}{2}\zeta(1-k)\zeta(2k-2)L_2(f,2k-2)^{-1}a_2(R)$$

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\u\neq 0}} b_f(u^2r_1+uvr_2+v^2r_4)(u^2r_1+uvr_2+v^2r_4)^{1-k}, \tag{9.7}$$

was dem Ergebnis von Böcherer aus [Böc11] entspricht (wobei wir die dortige Bedingung, dass r_4 quadratfrei ist, nicht benötigen).

Wir betrachten nun die Funktion $H^0_{2,1,1}$. Bei den Fourierkoeffizienten zu Matrizen vom Rang 1 beschränken wir uns dabei auf Matrizen der Form $R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Fourierkoeffizienten von anderen Matrizen R mit Rang 1 sind gleich dem Fourierkoeffizienten zu $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei g der größte gemeinsame Teiler der Einträge ist. Indem wir den Φ-Operator auf die Klingen-Eisensteinreihe $E^k_{2,1}(f)$ anwenden, erhalten wir für den entsprechenden Fourierkoefizieten von $E^k_{2,1}(f)$ den Wert $b_f(r_1)$ (vgl. (3.1)). Da der Fourierkoeffizient zu $\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ von $H^1_{2,1,1}$ verschwindet und wegen

$$E^k_{2,1}(f) = H^0_{2,1,1} + H^1_{2,1,1}$$

ist dies auch der Fourierkoeffizient von $H^0_{2,1,1}$.

Andererseits können wir Satz 8.8 benutzen, um diese Fourierkoeffizienten zu berechnen. Wir identifizieren die 1×1-Matrizen T, w_1, w_2, w_3 mit ganzen Zahlen. Weiter können wir in unserem Repräsentantensystem $w_1 > 0$ wählen.

Aus $R = T[^t\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}]$ folgt $w_1^2 | r_1$, $w_2 = 0$ und $T = \frac{r_1}{w_1^2}$. Wir erhalten für den Fourierkoeffizienten von $R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}\zeta(1-k)\zeta(2k-2)L_2(f,2k-2)^{-1} \sum_{\substack{w_1>0 \\ w_1^2|r_1}} a_1(\frac{r_1}{w_1^2}) \sum_{\substack{w_3\neq 0 \\ (w_1,w_3)=1}} b_f(\frac{r_1 w_3^2}{w_1^2})(\frac{r_1 w_3^2}{w_1^2})^{1-k}.$$

Da $a_1(\frac{r_1}{w_1^2})$ die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe vom Grad 1 sind, erfüllen sie die Gleichung $\frac{1}{2}\zeta(1-k)a_1(\frac{r_1}{w_1^2}) = \sigma_{k-1}(\frac{r_1}{w_1^2})$. Wir nutzen dies aus und erhalten

$$b_f(r_1) = \zeta(2k-2)L_2(f,2k-2)^{-1} \sum_{\substack{w_1>0 \\ w_1^2|r_1}} \sigma_{k-1}(\frac{r_1}{w_1^2}) \sum_{\substack{w_3\neq 0 \\ (w_1,w_3)=1}} b_f(\frac{r_1 w_3^2}{w_1^2})(\frac{r_1 w_3^2}{w_1^2})^{1-k}.$$

Diese Gleichung können wir alternativ beweisen, indem wir (9.4) benutzen und die multiplikativen Eigenschaften der $b_f(*)$ aus Lemma 4.5.12 Aussage (3) von [Miy06] anwenden, um

$$b_f(r_1)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_f(m^2)}{m^{2k-2}} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l|(m^2,r_1)} l^{k-1}\frac{b_f(\frac{r_1 m^2}{l^2})}{m^{2k-2}}$$

zu erhalten. Die Aussage folgt, indem man

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{l|(m^2,r_1)} l^{k-1}\frac{b_f(\frac{r_1 m^2}{l^2})}{m^{2k-2}} = \sum_{\substack{w_1>0 \\ w_1^2|r_1}} \sigma_{k-1}(\frac{r_1}{w_1^2}) \sum_{\substack{w_3\neq 0 \\ (w_1,w_3)=1}} b_f(\frac{r_1 w_3^2}{w_1^2})(\frac{r_1 w_3^2}{w_1^2})^{1-k}$$

zeigt.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass die Matrix R vollen Rang 2 hat.

Wie im Fall $t = 1$ wählen wir die Matrix $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ als $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $a, d > 0$ und $0 \leq b < a$. Wir schreiben $w_3' = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}$ und erhalten

$$\mathrm{rg}(\begin{pmatrix} 0 & d \\ u & v \end{pmatrix}) = m + t = 1$$

und damit $u = 0$ (und wegen $\mathrm{rg}(w_3') = 1$ auch $v \neq 0$). Da $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3' \end{pmatrix}$ primitiv ist, folgt dann schon $(d, v) = 1$, $a = 1$ und deswegen $b = 0$. Setzen wir $R := \begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2} \\ \frac{r_2}{2} & r_4 \end{pmatrix}$, so läuft die Summe über w_1, w_2 über alle Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ mit $d \mid r_2$ und $d^2 \mid r_4$.

(Ist $-\det(2R)$ eine Fundamentaldiskriminante, folgt aus diesen Bedingungen schon $d = 1$.)

Wir erhalten für die Fourierkoeffizienten den Wert

$$\frac{1}{2}\zeta(1-k)\zeta(2k-2)L_2(f,2k-2)^{-1}\sum_{\substack{d|r_2\\ d^2|r_4}} a_2\begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2d}\\ \frac{r_2}{2d} & \frac{r_4}{d^2}\end{pmatrix}\sum_{\substack{v\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\\ (v,d)=1}} b_f(\frac{r_4}{d^2}v^2)(\frac{r_4}{d^2}v^2)^{1-k}. \quad (9.8)$$

Andererseits können wir auch Satz 6.8 auf diesen Fall anwenden. Wir erhalten den Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^0_{2,1,1}$

$$\sum_{x^2|r_4} E^k_{r,m+t-s,s}(*,*,\varphi^*_{T[x^{-1}]},1_{m+t+r-2s})\ |_k\ U_x, \quad (9.9)$$

wobei φ^* die primitiven Fourierkoeffizienten der Funktion $f(Z^*)$ sind. Die Funktionen $E^k_{r,m+t-s,s}(*,*,1,1_2)$ werden bei [EZ85] mit E_{k,r_4} oder $E_{k,r_4,0}$ bezeichnet. Weiter identifizieren wir hier $1\times 1-$Matrizen mit ganzen Zahlen und unsere Operatoren U_x entsprechen in diesem Fall den Operatoren U_x aus Kapitel 4 von [EZ85]. Die Operatoren U_x erfüllen dabei $U_{x_1}\circ U_{x_2} = U_{x_1x_2}$. Ist weiter $\varphi(\tau,z) = \sum_{n,r} c(n,r)e(n\tau+rz)$ eine Jacobiform vom Grad $(1,1)$ mit ihrer Fourierentwicklung, so sind die Fourierkoeffizienten von $\varphi\mid U_x$ durch $c(n,\frac{r}{x})$ gegeben (vgl Kapitel 4 [EZ85]).

Gleichung 9.9 übersetzt sich mit diesen Bezeichnungen zu

$$\sum_{x^2|r_4} b^*_f(\frac{r_4}{x^2})E_{k,\frac{r_4}{x^2}}\ |_k\ U_x. \quad (9.10)$$

Wir können eine ähnliche Betrachtung anstellen, um für den Fall von Siegel-Eisensteinreihen, also $m = 0$, den Eisensteinreihenanteil der Fourier-Jacobikoeffizienten von $H^1_{2,0,1}$ zu bestimmen. Dies ist

$$\sum_{x^2|r_4} a^*_1(\frac{r_4}{x^2})E_{k,\frac{r_4}{x^2}}\ |_k\ U_x, \quad (9.11)$$

wobei $a^*_1(n) = 2\zeta(1-k)^{-1}\sigma^*_{k-1}(n)$ hier die primitiven Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe vom Grad 1 sind und $\sigma^*_{k-1}(n)$ für $n = \prod_i p_i^{e_i}$ somit die Gleichung

$$\sigma^*_{k-1}(n) = \prod_i(p_i^{e_i(k-1)} + p_i^{(e_i-1)(k-1)})$$

erfüllt. Die Fourierkoeffizienten $a_2(*)$ von $E^k_{2,0}$ sind auch die von $H^1_{2,0,1}$ der Funktion (9.11), da diese für positiven Index dieselbe Jacobi-Fourierentwicklung haben (siehe $m = 0$).

Da die Fourierkoeffizienten von $E_{k,*}\ |_k\ U_x$ zu $(*,y)$ nur einen von Null verschiedenen Wert liefern, wenn $x|y$ gilt, erhalten wir unter der Voraussetzung, dass es kein $d > 0$ mit $d^2|r_4$ und $d|r_2$ gibt, für den Wert des Fourierkoeffizienten der Funktion $H^1_{2,1,1}$ zur Matrix $\begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2}\\ \frac{r_2}{2} & r_4\end{pmatrix}$

$$\frac{b^*_f(r_4)\zeta(1-k)}{2\sigma^*_{k-1}(r_4)}a_2\begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2}\\ \frac{r_2}{2} & r_4\end{pmatrix}. \quad (9.12)$$

Wir werden nun eine ähnliche Rechnung durchführen, um eine entsprechende Formel für allgemeine r_2, r_4 zu bekommen.

Dazu betrachten wir zunächst für $\begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_n^+$ den Fourierkoeffizient der Funktion

$$\sum_{l^2|t_4} a_1^*(\frac{t_4}{l^2}) E_{k,\frac{t_4}{l^2}} |_k U_l$$

zu (t_1, t_2). Dieser ist gegeben durch

$$a_2 \begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix}.$$

Da der Fourierkoeffizient zu (t_1, t_2) von $E_{k,\frac{u_4}{l^2}} |_k U_l$ für $l \nmid t_2$ verschwindet, ist auch der Fourierkoeffizient zu (t_1, t_2) der Funktion

$$\sum_{\substack{l^2|t_4 \\ l|t_2}} a_1^*(\frac{t_4}{l^2}) E_{k,\frac{t_4}{l^2}} |_k U_l$$

gegeben durch

$$a_2 \begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix}.$$

Seien ganze Zahlen s_1, s_2, s_4 und l gegeben, sodass es keinen Teiler von s_2 gibt, der s_4 quadratisch teilt.

Wir werden jetzt die vorherige Berechnung benutzen, um die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$\sum_{x|l} \mu(\frac{l}{x}) \left(\sum_{y|x} a_1^*(s_4 y^2) E_{k,s_4 y^2} \mid_k U_{\frac{x}{y}} \right) \Big|_k U_{\frac{l}{x}},$$

zu $(s_1, s_2 l)$ zu berechnen. Der Fourierkoeffizient zu $(s_1, s_2 l)$ von

$$\left(\sum_{y|x} a_1^*(s_4 y^2) E_{k,s_4 y^2} \mid_k U_{\frac{x}{y}} \right) \Big|_k U_{\frac{l}{x}}$$

ist gleich dem Fourierkoeffizienten zu $(s_1, s_2 x)$ von

$$\sum_{y|x} a_1^*(s_4 y^2) E_{k,s_4 y^2} \mid_k U_{\frac{x}{y}},$$

welcher gegeben ist durch

$$a_2 \begin{pmatrix} s_1 & \frac{s_2 x}{2} \\ \frac{s_2 x}{2} & s_4 x^2. \end{pmatrix}.$$

Für den Fourierkoeffizienten von

$$\sum_{x|l} \mu(\frac{l}{x}) \left(\sum_{y|x} a_1^*(s_4 y^2) E_{k,s_4 y^2} \,|_k\, U_{\frac{x}{y}} \right) \Bigg|_k U_{\frac{l}{x}},$$

erhalten wir somit

$$\sum_{x|l} \mu(\frac{l}{x}) a_2 \begin{pmatrix} s_1 & \frac{s_2 x}{2} \\ \frac{s_2 x}{2} & s_4 x^2 \end{pmatrix}.$$

Außerdem können wir

$$\sum_{x|l} \mu(\frac{l}{x}) \left(\sum_{y|x} a_1^*(s_4 y^2) E_{k,s_4 y^2} \,|_k\, U_{\frac{x}{y}} \right) \Bigg|_k U_{\frac{l}{x}}$$

umformen, indem wir die Summation umordnen und $U_{\frac{x}{y}} \circ U_{\frac{t_2}{x}} = U_{\frac{t_2}{y}}$ benutzen. So bekommen wir

$$\sum_{y|l} \left(\sum_{y|x|l} \mu(\frac{l}{x}) \right) a_1^*(s_4 y^2) E_{k,s_4 y^2} \,|_k\, U_{\frac{l}{y}}.$$

Mit der Substitution $x' = \frac{x}{y}$ gilt

$$\sum_{y|x|l} \mu(\frac{l}{x}) = \sum_{x' | \frac{t_2}{y}} \mu(\frac{l}{yx'}) = \begin{cases} 1 & \text{für } y = l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit folgt

$$a_1^*(t_1 t_2^2) E_{k,t_1 t_2^2} = \sum_{x|t_2} \mu(\frac{t_2}{x}) \left(\sum_{y|x} a_1^*(t_1 y^2) E_{k,t_1 y^2} \,|_k\, U_{\frac{x}{y}} \right) \Bigg|_k U_{\frac{t_2}{x}}$$

und der Fourierkoeffizient von $(s_1, s_2 l)$ von

$$a_1^*(s_4 l^2) E_{k,s_4 l^2}$$

ist

$$\sum_{x|l} \mu(\frac{l}{x}) a_2 \begin{pmatrix} s_1 & \frac{s_2 x}{2} \\ \frac{s_2 x}{2} & s_4 x^2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für die Fourierkoeffizienten zu (r_1, r_2) von (9.10) die Werte

$$\sum_{\substack{x^2 | r_4 \\ x | r_2}} \frac{b_f^*\left(\frac{r_4}{x^2}\right)}{a_1^*\left(\frac{r_4}{x^2}\right)} \sum_{\substack{y^2 | \frac{r_4}{x^2} \\ y | \frac{r_2}{x}}} \mu(y) a_2 \begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2yx} \\ \frac{r_2}{2yx} & \frac{r_4}{x^2 y^2} \end{pmatrix}. \tag{9.13}$$

Wir werden nun diese Ergebnisse benutzen, um Abschätzungen für den Eisensteinreihenanteil und den Spitzenformenanteil der Fourier-Jacobizerlegung einer Klingen-Eisensteinreihe zu erhalten.

Satz 9.1. *Sei $k \geq 4$ und gerade und $f \in \mathcal{S}_1^k$ eine normierte Eigenform und $E_{2,1}^k(f)$ die zugehörige Klingen-Eisensteinreihe. Wir bezeichnen die Fourierkoeffizienten des Eisensteinanteils des Fourier-Jacobikoeffizienten von $E_{2,1}^k(f)$ zum Index r_4 mit $e_{r_4}(r_1, r_2)$, und die des Spitzenformanteils mit $c_{r_4}(r_1, r_2)$.*

Sei

$$R := \begin{pmatrix} r_1 & \frac{r_2}{2} \\ \frac{r}{2} & r_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_2^+$$

eine positiv definite, halbganze symmetrische Matrix.

Es gelten folgende Abschätzungen:

a) Ist die Bedingung

$$d \mid r_2 \quad \text{und} \quad d^2 \mid r_4 \Rightarrow d = 1$$

erfüllt, so gibt es Konstanten $c, C > 0$ mit

$$c \frac{\mid b_f^*(r_4) \mid}{r_4^{k-1}} \det(R)^{k-\frac{3}{2}} \leq |e_{r_4}(r_1, r_2)| \leq C \frac{\mid b_f^*(r_4) \mid}{r_4^{k-1}} \det(R)^{k-\frac{3}{2}}.$$

b) Gilt $r_1 \geq r_4 \geq |r_2|$, so lässt sich der Spitzenformenanteil durch

$$c_{r_4}(r_1, r_2) = \mathrm{O}(\det(R)^{\frac{3k}{4} - \frac{5}{4} + \epsilon})$$

abschätzen.

Beweis. a) Wir haben $e_{r_4}(r_1, r_2)$ in Formel (9.12) berechnet und werden dies nun abschätzen.

Für $n = \prod_i p_i^{s_i}$ gilt

$$1 \leq \frac{\sigma_{k-1}^*(n)}{n^{k-1}} \leq \prod_{p \in \mathbb{P}} \big(1 + \frac{1}{p^{k-1}}\big).$$

Mit der Abschätzung $c_1 \det(R)^{k-\frac{3}{2}} \leq a_2(R) \leq c_2 \det(R)^{k-\frac{3}{2}}$ (Theorem in §3 von [Kit79]) folgt die Behauptung.

b) Wir werden (9.6) abschätzen.

Dazu betrachten wir für feste a, b, d die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} t_1 & \frac{t_2}{2} \\ \frac{t_2}{2} & t_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} R \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{r_1 - br_2 + r_4 b^2}{a^2} & \frac{r_2}{2ad} - \frac{br_4}{ad} \\ \frac{r_2}{2ad} - \frac{br_4}{ad} & \frac{r_4}{d^2} \end{pmatrix}.$$

Für eine solche Matrix werden wir jetzt

$$\sum_{\substack{u,v \in \mathbb{Z} \\ (u,a)=1 \\ (av-ub,d)=1 \\ u \neq 0}} b_f(u^2 t_1 + uvt_2 + v^2 t_4)(u^2 t_1 + uvt_2 + v^2 t_4)^{1-k}$$

betrachten. Da wieder $b_f(x) = \mathrm{O}(x^{\frac{k-1}{2}+\epsilon})$ gilt, reicht es

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\(u,a)=1\\(av-ub,d)=1\\u\neq 0}} (u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)^{\frac{1-k}{2}+\epsilon} \leq \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\u\neq 0}} (u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)^{\frac{1-k}{2}+\epsilon}$$

abzuschätzen.

Nach der Bemerkung auf Seite 9 von [Böc11] gilt

$$\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\u\neq 0}} (u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)^{\frac{1-k}{2}+\epsilon} = \mathrm{O}\left(\det(T)^{1-\frac{k}{2}+\epsilon}\min\{t_1,t_4\}^{\frac{k-3}{2}} + t_1^{\frac{1-k}{2}+\epsilon}\right).$$

Wir schätzen das Minimum gegen t_4 ab und setzen die Einträge von T ein:

$$= \mathrm{O}\left(\det(R)^{1-\frac{k}{2}+\epsilon}a^{k-2-2\epsilon}d^{k-2-2\epsilon}\big(\frac{r_4}{d^2}\big)^{\frac{k-3}{2}-\epsilon} + \big(\frac{r_1-br_2+r_4b^2}{a^2}\big)^{\frac{1-k}{2}+\epsilon}\right)$$

Wir benutzen nun $r_4^2 \leq r_1r_4 \leq \det(R)$ und $r_1 - br_2 + r_4b^2 \geq r_1 \geq \det(R)^{\frac{1}{2}}$ und erhalten

$$\mathrm{O}\left(\det(R)^{\frac{1-k}{4}+\frac{\epsilon}{2}}a^{k-2-2\epsilon}d + \det(R)^{\frac{1-k}{4}+\frac{\epsilon}{2}}a^{k-1-2\epsilon}\right).$$

Mit $a_2(T) = \mathrm{O}(\det(T)^{k-\frac{3}{2}})$ (Theorem in §3 von [Kit79]) erhalten wir für

$$a_2(T)\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\(u,a)=1\\(av-ub,d)=1\\u\neq 0}} b_f(u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)(u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)^{1-k}$$

die Abschätzung

$$\mathrm{O}\left(\det(R)^{\frac{3k-5}{4}+\frac{\epsilon}{2}}a^{-k+1-2\epsilon}d^{-2k+4} + \det(R)^{\frac{3k-5}{4}+\frac{\epsilon}{2}}a^{-k+2-2\epsilon}d^{-2k+3}\right).$$

Da b durch a beschränkt ist, folgt, dass

$$\sum_b a_2(T)\sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}\\(u,a)=1\\(av-ub,d)=1\\u\neq 0}} b_f(u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)(u^2t_1+uvt_2+v^2t_4)^{1-k}$$

der Abschätzung

$$\mathrm{O}\left(\det(R)^{\frac{3k-5}{4}+\frac{\epsilon}{2}}a^{-k+2-2\epsilon}d^{-2k+7} + \det(R)^{\frac{3k-5}{4}+\frac{\epsilon}{2}}a^{-k+3-2\epsilon}d^{-2k+3}\right).$$

genügt. Da

$$\sum_{l^2|\det(R)} l^{-x} \leq \sum_{l>0} l^{-x}$$

für $x > 1$ beschränkt ist, gilt die Behauptung.

□

Man kann in Fall *a)* des verherigen Satzes eine Abschätzung für allgemeine R ohne die Bedingung

$$d \mid r_2 \quad \text{und} \quad d^2 \mid r_4 \Rightarrow d = 1$$

erreichen indem man Gleichung 9.13 abschätzt.

Index

Literaturverzeichnis

[And77] ANDRIANOV, A. N.: On zeta-functions of Rankin type associated with Siegel modular forms. In: *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*. Springer, Berlin, 1977, S. 325–338. Lecture Notes in Math., Vol. 627

[And79] ANDRIANOV, A. N.: Multiplicative arithmetic of Siegel's modular forms. In: *Uspekhi Mat. Nauk* 34 (1979), Nr. 1(205), S. 67–135. – ISSN 0042–1316

[Böc83] BÖCHERER, Siegfried: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. In: *Math. Z.* 183 (1983), Nr. 1, S. 21–46. – ISSN 0025–5874

[Böc84] BÖCHERER, Siegfried: Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen. In: *Manuscripta Math.* 45 (1984), Nr. 3, S. 273–288. – ISSN 0025–2611

[Böc85] BÖCHERER, Siegfried: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen. II. In: *Math. Z.* 189 (1985), Nr. 1, S. 81–110. – ISSN 0025–5874

[Böc86] BÖCHERER, S.: Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe. In: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 56 (1986), S. 35–47. – ISSN 0025–5858

[Böc11] BÖCHERER, Siegfried: On the Fourier-Jacobi-coefficients of Eisenstein series of Klingen type. In: *Number theory* Bd. 15. Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2011, S. 7–16

[Chr75] CHRISTIAN, Ulrich: *Vorlesung über Siegelsche Modulfunktionen.* Universität Göttingen, 1975

[Dul93] DULINSKI, Joachim: *Der Darstellungssatz für Jacobiformen und Anwendungen*, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, Diss., 1993

[Dul95] DULINSKI, Joachim: A decomposition theorem for Jacobi forms. In: *Math. Ann.* 303 (1995), Nr. 3, S. 473–498. `http://dx.doi.org/10.1007/BF01461001`. – DOI 10.1007/BF01461001. – ISSN 0025–5831

[EZ85] EICHLER, Martin ; ZAGIER, Don: *Progress in Mathematics.* Bd. 55: *The theory of Jacobi forms.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. – v+148 S. – ISBN 0–8176–3180–1

[Gar84] GARRETT, Paul B.: Pullbacks of Eisenstein series; applications. In: *Automorphic forms of several variables (Katata, 1983)* Bd. 46. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1984, S. 114–137

[Kit79] KITAOKA, Yoshiyuki: Modular forms of degree n and representation by quadratic forms. In: *Nagoya Math. J.* 74 (1979), 95–122. `http://projecteuclid.org/euclid.nmj/1118785799`. – ISSN 0027–7630

[Kli90] KLINGEN, Helmut: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 20: *Introductory lectures on Siegel modular forms*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. – x+162 S. – ISBN 0–521–35052–2

[Miy06] MIYAKE, Toshitsune: *Modular forms*. English. Springer-Verlag, Berlin, 2006 (Springer Monographs in Mathematics). – x+335 S. – ISBN 978–3–540–29592–1; 3–540–29592–5. – Translated from the 1976 Japanese original by Yoshitaka Maeda

[Zag77] ZAGIER, D.: Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields. In: *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*. Springer, Berlin, 1977, S. 105–169. Lecture Notes in Math., Vol. 627

[Zie89] ZIEGLER, C.: Jacobi forms of higher degree. In: *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 59 (1989), S. 191–224. – ISSN 0025–5858