Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht

Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen

Verena Rembowski

Dissertation

zur Erlangung des Grades
der Doktorin der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

November 2015

Tag des Kolloquiums: 19.02.2016

Dekan: Univ.-Prof. Dr. Markus Bläser

Prüfungsausschuss: Vorsitzender

Prof. Dr. Jörg Eschmeier

Berichterstatter

Univ-Prof. Dr. Anselm Lambert

Prof. Dr. Andreas Filler

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

Akademischer Mitarbeiter:

Apl.-Prof. Dr. Michael Bildhauer

KURZÜBERBLICK

Ausgehend von einem semiotischen Dreieck sowie den darin vorzufindenden Relationen werden Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck dargelegt. Diese konstituieren das Modell des Begriffsfeldes, das in Form eines semiotischen Dreiecksprismas dargestellt werden kann. Das Modell des Begriffsfeldes wird für den Begriff des Würfels exemplifiziert, und die Möglichkeit der Übertragung des Begriffsfeldes auf andere Begriffe wird begründet. Vor dem Hintergrund des Begriffsfeldes werden mit Rückgriff auf Concept Image und Concept Definition von TALL und VINNER sowie auf Arbeiten aus Philosophie, Psychologie und von aus der Fachmathematik stammenden Autoren die Begriffe Begriffsbild und Begriffskonvention erarbeitet. Schließlich wird, wiederum exemplarisch für den Begriff Würfel, mittels einer Umfrage erhoben, welche Aspekte eines allgemeinen, theoretischen Begriffsfeldes Teil des Begriffsbildes von Schülerinnen und Schülern sind.

Darüber hinaus werden Grundvorstellungen, welche die Rolle eines Verbindungsgliedes von Begriffsbild und Begriffskonvention einnehmen, thematisiert. Nachdem auf die Grundvorstellungsdiskussion in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik eingegangen wurde, wird ein Modell entwickelt, das als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht dienen kann. Letztlich wird ein Blick in Schulbücher geworfen und damit gezeigt, wie die entwickelte Theorie praxisrelevant angewendet werden kann.

ABSTRACT

Starting from a semiotic triangle as well as the relations it comprises, several possible violations of the triangulation in said triangle are being presented. These constitute the model of the conceptual field, which may be depicted in the form of a semiotic triangular prism. The model of the conceptual field is being exemplified for the concept of cube, and the transfer of the conceptual field to other concepts is being substantiated. Against the background of the conceptual field and going back to Concept Image and Concept Definition by TALL and VINNER as well as works from philosophy, psychology and by authors from mathematics the concepts of Concept Image and Concept Convention are being established. Finally, the concept of cube serves as an example for a survey which is being conducted to find out which aspects of a general, theoretical conceptual field are part of the Concept Image of pupils.

Furthermore, “Grundvorstellungen”, which take the role of a connecting link between Concept Image and Concept Convention, are being discussed. After the discourse on “Grundvorstellungen” in German mathematics education has been related, a model which may serve as an instrument to compose lessons aiming for “Grundvorstellungen” is being developed. Eventually, some schoolbooks are being viewed to demonstrate how the theory, which has been developed, may be applied in practice.

DANKE

Zuallererst bedanke ich mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Anselm Lambert. Danke dafür, dass Du mich eine Mathematikdidaktik kennenlernen lassen hast, die Traditionen berücksichtigt und durch ihre Vernetzung mit der Schule lebt. Vielen Dank außerdem für das angenehme Forschungsumfeld, das Du mir geboten hast, sowie dafür, dass Du mich meinen eigenen Weg finden lassen hast und mich dabei durch zahlreiche Diskussionen unterstützt hast.

Weiterhin bedanke ich mich bei den Teilnehmenden des Oberseminars Südwest sowie der Doktorandenkooperation „Mathematik historisch, philosophisch und bildungstheoretisch betrachtet“ für die Möglichkeit, meine Arbeit regelmäßig wieder vorzustellen und zu diskutieren. Bedanken möchte ich mich auch bei allen Anderen, die mich durch längere und kürzere Diskussionen nach Vorträgen oder auch unabhängig von diesen unterstützt haben, insbesondere bei Prof. Dr. Filler, Prof. Dr. Führer und Herrn Wolff. Vielen Dank für die vielen konstruktiven Rückmeldungen, die mich immer weiter voran gebracht haben.

Ich bedanke mich zudem ganz herzlich bei Claudia Homberg-Halter und Dieter Eichhorn für ihre Unterstützung bei meiner Umfrage.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei meinen Kolleginnen und Kollegen, insbesondere bei Matthias Römer, Katharina Gaab und Karin Mißler, für das angenehme Arbeitsumfeld in Saarbrücken und die mentale Unterstützung bedanken. Vielen Dank, Karin, auch für die zahlreichen Kopier-, Scan- und anderen Arbeiten, die Du mir abgenommen hast.

Schließlich bedanke ich mich bei meiner Familie und meinem Freund Jonas für die Unterstützung während der Zeit meiner Promotion. Ein ganz besonderer Dank geht dabei an meine Mutter Helga und an Jonas für das letzte Korrekturlesen – Danke, für Eure Zeit und Mühe, die zum Abschluss meiner Arbeit beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

An dieser Stelle bedanke ich mich herzlich bei Klett für die Abdruckgenehmigungen der enthaltenen Auszüge aus Lambacher Schweizer und Das Mathematikbuch.

Außerdem weise ich darauf hin, dass einige der (jeweils gekennzeichneten) Abbildungen von Fotolia (www.fotolia.de) stammen.

Tabellenverzeichnis

0. Einleitung

0.1. Inhaltliche Einordnung & Motivation

Dem Überblick über die vorliegende Arbeit wird eine inhaltliche Einordnung und Motivation vorangestellt, die das Vorgehen begründet. Dazu wird zunächst zurückgegangen auf die Forschungsgebiete der Didaktik der Mathematik, die GRIESEL bereits 1971 aufgelistet hat (vgl. Griesel 1971a) und die, auch wenn sie von der Mathematikdidaktik heute unterschiedlich stark bedient werden, unverändert aktuell sind. GRIESELs Schlagworten nach können die Forschungsgebiete folgendermaßen formuliert werden:

1. Analyse des mathematischen Gegenstandes, der mathematischen Tätigkeit und Anwendungssituationen der Mathematik.
2. Entwicklung und Ausgestaltung didaktischer Ideen und Erfindungen.
3. Formulierung und Analyse von Zielen und Wertvorstellungen für die Stoffauswahl.
4. Fragen der Lernorganisation.
5. Die allgemeine, statistisch nicht abgesicherte Unterrichtserfahrung und Lernkontrolle.
6. Die statistisch abgesicherte Lern- und Unterrichtskontrolle.
7. Einsicht in den mathematischen Lernprozeß und den Erwerb von Qualifikationen, die der Umgang mit der Mathematik und die Anwendung der Mathematik vom einzelnen Menschen verlangen.
8. Untersuchung der Abhängigkeit des Mathematiklernens und der Vermittlung der Mathematik von personalen, entwicklungspsychologischen und soziologischen Bedingungen.
9. Untersuchung des prägenden Einflusses, den die Beschäftigung mit Mathematik auf den Menschen ausübt.
10. Historische, philosophische, pädagogische, psychologische und mathematische Einordnung von Entwicklungen, Wertvorstellungen, Grundkonzeptionen und Ideen im Bereich der Didaktik der Mathematik.

Die vorliegende Arbeit soll nun explizit in GRIESELs Forschungsgebiete eingeordnet werden. Sie lässt sich dabei hauptsächlich unter dem letztgenannten Punkt lokalisieren, es kommen aber auch die unter 7., 6. und 5. aufgeführten Punkte zum Tragen. Die Arbeit beschäftigt sich demnach mit der Einordnung von Grundkonzeptionen und Ideen im Bereich der Didaktik der Mathematik, genauer in einem Bereich der Begriffsbildung für das Gebiet Geometrie, und integriert zu diesem Zweck verschiedene Bezugswissenschaften (Punkt 10). Somit stellt sie eine Theorie auf, die Einsicht bietet in die geometrische Begriffsbildung und den Erwerb von Qualifikationen, die der Umgang mit geometrischen Begriffen sowie die Verwendung dieser Begriffe von insbesondere Schülerinnen und Schülern verlangen (Punkt 7). Um exemplarisch die Konstitution eines geometrischen Begriffs bei Schülerinnen und Schülern zu betrachten, wird sowohl eine Umfrage in ganzer Breite ausgewertet als auch, aus einer etwas anderen Perspektive, ein punktuell beispielhafter Blick auf die Umfrage geworfen (dies berührt Punkte 5. und 6.).[1]

Obig genannte Forschungsgebiete GRIESELs beziehen sich unter anderem auf verschiedene Aspekte der Theoriebildung, die auch PREDIGER (2015) in einem Übersichtsbeitrag wieder aufgreift. Dort heißt es zur Theoriebildung:

> Theoriebildung umfasst also nicht nur empirische Arbeiten, sondern bedient sich auch der geisteswissenschaftlichen Methoden der Hermeneutik, Geschichte, Mathematik und der Epistemologie. Dabei wird (trotz der gängigen Bezeichnung didaktische *Analyse*) nicht nur analysiert, denn es werden insbesondere auch neue Gegenstände geschaffen, also restrukturierend *konstruiert* […].
>
> (Prediger 2015, S. 655f)

Diese Aussage PREDIGERs umschreibt gut das Vorgehen der vorliegenden Arbeit. In dieser werden hermeneutisch Arbeiten, auch aus verschiedenen Bezugswissenschaften, zusammengeführt. Somit wird ein neues theoretisches Konstrukt geschaffen, dieses wird restrukturierend konstruiert – und strukturiert darüber hinausgehend auch selbst wieder. Genauer handelt es sich bei der Entwicklung des theoretischen Konstrukts um eine „Vernetzung bestehender Theorien durch Integrieren, Synthetisieren oder Kombinieren von Theorieelementen“ (Prediger 2015, S. 657) – dieses beschreibt nach PREDIGER die höchste Ausdifferenzierungsstufe zur Gewinnung theoretischer Ansätze.

Um die vorliegende Arbeit genauer im Bereich der Begriffsbildung von Begriffsbildung zu lokalisieren, wird Begriffsbildung von Begriffsbildung für den Mathematikunterricht entsprechend HISCHER und LAMBERT (2002) folgendermaßen systematisiert (Abbildung 1).

[1] Unter der von GRIESEL in Punkt 5 genannten „Unterrichtserfahrung und Lernkontrolle“ hatte zu seiner Zeit die Reflexion der Lehrperson noch großes Gewicht. Unter der von GRIESEL in Punkt 6 genannten „statistisch abgesicherten Lern- und Unterrichtskontrolle“ verstand er hingegen vor allem quantitative empirische Untersuchungen, die auf eine Experimental- und eine Kontrollgruppe sowie Pre- und Post-Tests zurückgreifen (vgl. Weis 1970). Bei der Auswertung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Umfrage wird ein qualitativer Ansatz verwendet. Daher fällt die Umfrage weder unter Punkt 5 noch unter Punkt 6 in GRIESELs Sinn, berührt aber beide Punkte.

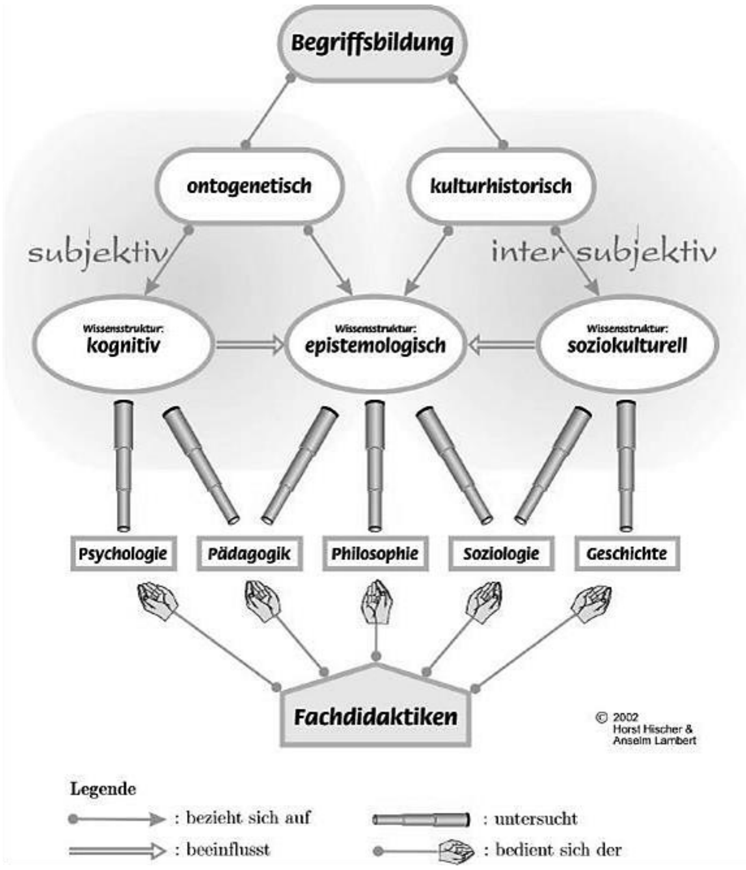


Abbildung 1: Begriffsbildung von Begriffsbildung nach HISCHER und LAMBERT (2002, S. 145)

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich sowohl mit der subjektiven als auch mit der intersubjektiven Begriffsbildung, relevant sind dabei die kognitive und die epistemologische Wissensstruktur. Als Bezugswissenschaften werden Psychologie, Philosophie und außerdem die bei HISCHER und LAMBERT noch nicht explizit enthaltene Semiotik betrachtet, wobei natürlich auch Fachmathematik eine Rolle spielt. Begriffsbildung von Begriffsbildung im Rahmen der vorliegenden Arbeit lässt sich daher, um den Aufbau HISCHER und LAMBERTs Diagramms zu übernehmen, wie folgt strukturieren (Abbildung 2).

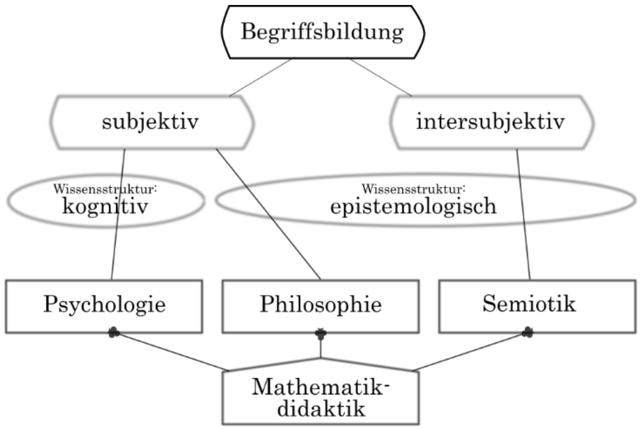


Abbildung 2: Begriffsbildung von Begriffsbildung für die vorliegende Arbeit

Der Strukturierung ist Semiotik als explizite Bezugswissenschaft hinzugefügt. Die Semiotik untersucht, wie auch die Philosophie, die epistemologische Wissensstruktur.[2] Allerdings ist für die vorliegende Arbeit die Semiotik nur insofern relevant, als sie die intersubjektive Begriffsbildung betrifft.[3] Die Philosophie hingegen ist nur insofern relevant, als sie die subjektive Begriffsbildung betrifft.[4] Dies ist in obigem Diagramm (auf Kosten der Symmetrie) entsprechend berücksichtigt.

Die Strukturierung unterscheidet nicht mehr zwischen dem kulturhistorischen und dem ontogenetischen Aspekt der Begriffsbildung. Dies ist unter anderem darin begründet, dass sowohl semiotische als auch philosophische Werke den kulturhistorischen Aspekt der Begriffsbildung berühren, eine auf die Kultur bezogene geschichtliche Betrachtung der Begriffsbildung in der vorliegenden Arbeit aber keine zentrale Rolle spielt. Weiterhin beschäftigen sich die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Werke aus der Philosophie wohl mit der subjektiven Begriffsbildung, beziehen sich allerdings dennoch nur nachrangig auf den ontogenetischen Aspekt der Begriffsbildung, der nur in einigen der in der vorliegenden Arbeit thematisierten psychologischen Werken von Bedeutung ist. Eine Unterscheidung zwischen dem kulturhistorischen und dem ontogenetischen Aspekt der Begriffsbildung vermag Begriffsbildung von Begriffsbildung somit für die vorliegende Arbeit nicht weiter zu strukturieren.

Die vorliegende Arbeit vereint demnach insbesondere die semiotische und die philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung. Die semiotische Perspektive stellt einen theoretischen Rahmen zur Verfügung, mit dessen Hilfe über Begriffsbildung kommuniziert werden kann. Die philosophisch-psychologische Perspektive leistet dann die Anwendung auf Begriffsbildung bei Schülerinnen und Schülern – dies ist darin begründet, dass Begriffsbildung bei Schülerinnen und Schülern nie so eindeutig ablaufen kann, wie eine rein theoretisch semiotische Perspektive impliziert. Die Verknüpfung von einer semiotischen und einer philosophisch-psychologischen Perspektive ist dabei bisher in einigen Arbeiten implizit geschehen (siehe hierzu folgende Beiträge in Publikationen des Arbeitskreises Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik der GDM: Fischer (2010), Müller-Hill (2015), Rosch (2015), oder auch: Akinwunmi (2012)), eine beide Perspektiven integrierende Theorie steht noch aus.

[2] Dies ist stimmig mit LAMBERT (2003), der ein semiotisches Dreieck basierend auf BROMME und STEINBRING (1990) als epistemologisches Dreieck bezeichnet.

[3] Das bedeutet, dass mit Bezug auf Semiotik nur auf einer intersubjektiven Ebene geschlossen wird. Die Betrachtungen auf der intersubjektiven Ebene dienen dann als Grundlage für solche auf der subjektiven Ebene, die mit Rückgriff auf Philosophie und Psychologie durchgeführt werden.

[4] Das meint, dass nur Ausführungen aus den betrachteten philosophischen Werken mit Relevanz für die subjektive Begriffsbildung dargelegt werden, und diese ausschließlich unter dem Blickwinkel der subjektiven Begriffsbildung relevant sind. Allerdings können viele der Ausführungen über die subjektive Ebene hinaus verallgemeinert werden.

Einen ersten, aber nicht konsequent weiter verfolgten, Ansatz zu einer Perspektiven-verknüpfenden Theorie unternimmt MEYER (2010 & 2015), welcher ein auf PEIRCE beruhendes semiotisches Instrument mit den Sprachspielen nach WITTGENSTEIN, die mit den in 4.2.4. beschriebenen Familienähnlichkeiten eng verwandt sind, und der Philosophie BRANDOMS (2000) verknüpft – er befasst sich dabei insgesamt mit einzelnen Begriffen und ganzen Begründungszusammenhängen. Doch über diesen Ansatz geht MEYER nicht, in Richtung einer umfassenden Theorie, hinaus, und die Psychologie als Bezugswissenschaft bleibt bei ihm außen vor.

Sowohl aus semiotischer als auch aus philosophisch-psychologischer Perspektive sollen in der vorliegenden Arbeit jeweils individuelle Begriffe von Interesse sein, und nicht größere Grundeinheiten, wie beispielsweise Urteile, die entsprechend KANT Begriffe umfassen (siehe 4.2.1.), oder von BRANDOM (2000) an KANTs Urteile angelehnte und dementsprechend auch von SCHACHT (2012) übernommene Festlegungen und Berechtigungen.[5] SCHACHT sieht dabei den Begriffsbildungsprozess als einen Prozess des zunehmenden Eingehens tragfähiger Festlegungen – er betrachtet somit eine Begriffsentwicklung von subjektiven bis hin zu stärker intersubjektiven oder konventionalen Begriffen. Während der Begriff zunächst Werkzeugcharakter hat, ist er später theoretisches Objekt. Damit eignet sich SCHACHTs Ansatz mit Sicherheit gut zu (wie von ihm durchgeführten) qualitativen Untersuchungen individueller Begriffsbildungsprozesse, wegen der sehr subjektiven Sicht auf den Begriffsbildungsprozess allerdings weniger gut zur Entwicklung eines umfassenden theoretischen Konstrukts zum Thema der Begriffsbildung. SCHACHT schließt in seiner Zusammenfassung:

> Insofern verlaufen die individuellen Begriffsbildungsprozesse, die sich im vorliegenden Lernkontext vollziehen (können), nicht als zunehmende Aneignung von Eigenschaften des von Beginn an bekannten Begriffs der Variable […].
>
> (Schacht 2012, S. 342)

SCHACHTs Ansatz wäre dabei sicherlich auf Untersuchungen von Begriffsbildungsprozessen auch aus dem Bereich Geometrie anwendbar. Der von SCHACHT betrachtete Begriff der Variable ist allerdings vor allem durch Umgang und Verwendung gegeben, es handelt sich somit um einen impliziten Begriff. Demgegen-

[5] Festlegungen sind (rekonstruierte) Behauptungen in propositionaler Form, die wir für wahr halten. Damit liegen sie unseren Äußerungen und Handlungen zugrunde. Festlegungen können wir explizit machen und sie stellen eine Form praktischen *Tuns* dar.

(Schacht 2012, S. 17)

Berechtigungen sind spezifische Festlegungen. Berechtigt ist man zu einer Festlegung, wenn ihr Eingehen prinzipiell erlaubt bzw. möglich, nicht aber notwendigerweise verpflichtend ist.

(Schacht 2012, S. 21)

über können die meisten geometrischen Begriffe beschrieben oder definiert werden und sind daher explizite Begriffe. Zudem zeichnet sich der Begriff der Variable nicht durch eine solche Alltagsnähe, wie viele geometrische Begriffe, aus. Daher ist es fraglich, ob Untersuchungen von geometrischen Begriffen entsprechend SCHACHTs Ansatz auch zu dem von ihm gezogenen Schluss führen würden.

Das Thema der vorliegenden Arbeit ist die Begriffsbildung in der Geometrie. Die Konzentration auf Geometrie lässt sich zunächst mit Rückgriff auf die bereits erwähnten Bezugswissenschaften begründen. So kann aus semiotischer Perspektive das besondere Verhältnis eines Begriffs zum Bezeichner und Objekt angeführt werden (siehe hierzu: Abschnitt 1.2.). Auf diese besondere Anschaulichkeit geometrischer Begriffe wies sogar KANT schon hin (siehe: 4.2.1.). Auch in der Psychologie genießt Geometrie eine besondere Rolle – so sind geometrische Argumente tragend in entwicklungspsychologischen Versuchen (siehe 4.3.1.), und die Form einzelner Repräsentanten wird als wesentlich für die Identifikation von Begriffen eingestuft (siehe 4.3.2.).

Aus mathematikdidaktischer Perspektive lässt sich die Konzentration der vorliegenden Arbeit auf Geometrie damit begründen, dass Geometrie als Bestandteil des Mathematikunterrichts zur Bildung der Schülerinnen und Schüler, im Sinne der Grunderfahrungen nach WINTER (1996), an sich beiträgt und es dabei insbesondere ermöglicht, an das natürliche Umfeld der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen. Obwohl Geometrie sich der besonderen Anschaulichkeit und Lebensnähe erfreut, wurde sie in der Grundvorstellungsdebatte bisher überwiegend unberücksichtigt gelassen (siehe 6.3.2.). Dabei können im schulischen Bereich Fehler im Begriffsverständnis auch bei den vermeintlich anschaulichen geometrischen Begriffen festgestellt werden – so heißt es in der achten Klassenstufe beispielsweise: „Der Würfel ist ein 6-seitiges Quadrat“, und in Klassenstufe 10 noch: „4-seitige Würfel haben sechs Seiten“ (siehe 5.6.). Sowohl die Besonderheit der Geometrie als auch die bisherige Vernachlässigung in einigen Bereichen machen schließlich eine Arbeit, die sich umfassend der Begriffsbildung in der Geometrie widmet und dabei gerade den semiotischen und den philosophisch-psychologischen Blickwinkel vereinigt, dringend nötig.

In der Arbeit wird dabei weitestgehend hermeneutisch vorgegangen, was bedeutet, dass größtenteils bestehende Arbeiten zum Thema der Begriffsbildung, die auf das Gebiet Geometrie anwendbar sind, reflektierend, diskutierend und integrierend zusammengeführt werden. Dabei wird die Perspektive einer Außenstehenden eingenommen, es wird aus Sicht der Mathematikdidaktik argumentiert. Das entstehende Modell beziehungsweise die entstehende Theorie soll sich dann durch Relevanz, Konsistenz und Kohärenz sowie Evidenz auszeichnen. Aus diesem Grund wird sowohl aus der semiotischen als auch aus der philosophisch-psychologischen Perspektive zunächst die Relevanz aufgezeigt, die durch ein

Auseinandersetzen mit schon bestehenden Theorien und die Beantwortung offener Fragen gegeben ist. Anschließend wird Konsistenz und Kohärenz hergestellt, wozu aus Sicht der Mathematikdidaktik auch Aspekte der hinzugezogenen Werke ausgeblendet oder verworfen werden können. Zudem werden sowohl das semiotische Modell als auch die philosophisch-psychologische Theorie auf Evidenz überprüft. Auch für die anschließend angesprochenen Grundvorstellungen wird erst die Relevanz herausgestellt, dann Konsistenz und Kohärenz hergestellt, bevor gezeigt wird, wie die Theorie praxisrelevant angewendet werden kann.

0.2. Einführender Überblick

Im ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird Begriffsbildung aus einer semiotischen Perspektive betrachtet. Dabei werden in 1.1. die zentralen Begriffe der Arbeit, insbesondere Begriff, Bezeichner und Objekt sowie als Relationen dazwischen Bezeichnung, Bedeutung, Konkretisierung und Abstrahierung, geklärt, und die Beziehung zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt wird im semiotischen Dreieck dargestellt. Anschließend wird in 1.2. der aus semiotischer Sicht besondere Charakter der Geometrie begründet. Weiterhin wird in 1.3. auf verschiedene mögliche Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck eingegangen, die daraus resultieren, dass derselbe Begriff, Bezeichner oder dasselbe Objekt Bestandteil mehr als eines semiotischen Dreiecks sind. Aufbauend auf diesen Triangulationsbrüchen wird schließlich das Modell des Begriffsfeldes (Abbildung 3) herausgebildet.

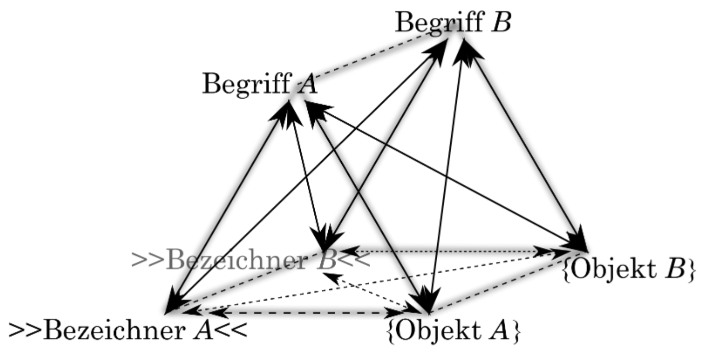


Abbildung 3: Begriffsfeld

Dieses Kapitel dient dazu, die Relevanz der vorliegenden Arbeit aus semiotischer und auch mathematikdidaktischer Perspektive, die vor allem aufgrund des Anknüpfens an das semiotische Dreieck entsteht, aufzuzeigen, und im Weiteren ein aus semiotischer Sicht konsistentes und kohärentes Modell zu entwickeln.

Im zweiten Kapitel werden die in 1.3. thematisierten möglichen Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck anhand des geometrischen Begriffs Würfel verdeutlicht. Für das Modell des Begriffsfeldes wird somit dessen Evidenz theoretisch gezeigt – auf die empirische Evidenz wird dann in Kapitel 5. eingegangen.[6]

Das dritte Kapitel dient dazu, die exemplarischen Betrachtungen aus Kapitel 2. auf weitere geometrische Begriffe zu übertragen. Um eine Grundlage zu schaffen, auf welcher die Übertragung stattfinden kann, wird in 3.1. aus verschiedenen in der Mathematikdidaktik thematisierten Klassifizierungen eine Typologie geometrischer Begriffe (die unterscheidet zwischen Objektbegriffen, Relationsbegriffen, relativen Objektbegriffen, Abbildungsbegriffen und Maßbegriffen) erarbeitet. In 3.2. werden den einzelnen Begriffstypen geometrische Schlüsselbegriffe untergeordnet, um dann klassenspezifisch die Übertragung der Betrachtungen aus Kapitel 2. diskutieren zu können. In 3.3. werden die allgemeinen Betrachtungen aus 3.2. wiederum exemplarisch anhand von Beispielen aus verschiedenen Begriffsklassen entsprechend 3.1. verdeutlicht. In 3.4. wird schließlich mittels einiger Argumente aus der Psychologie und der Mathematikdidaktik zu Vernetzungen einzelner Begriffe allgemein auf die Verallgemeinerung der Betrachtungen aus Kapitel 2. geschlossen. Es wird somit insgesamt, ähnlich wie in Kapitel 2., allerdings mit einem weiteren Bezug, für das Modell des Begriffsfeldes die Evidenz theoretisch gezeigt.

Im vierten Kapitel der Arbeit wird Begriffsbildung dann aus einer philosophisch-psychologischen Perspektive betrachtet. Ausgangspunkt dessen sind, wie in 4.1. ausgeführt, die in der Mathematikdidaktik durch TALL und VINNER geprägten Begriffe Concept Image und Concept Definition. Diese Begriffe werden zunächst beschrieben, und es wird auf Unklarheiten hingewiesen, die eine Ausschärfung der Begriffe notwendig machen. Dazu wird in 4.2. ein Blick auf Parallelen oder potentielle Vorläufer von Concept Image und Concept Definition in der Philosophie, bei KANT, CASSIRER, FREGE und WITTGENSTEIN, geworfen. Es werden zunächst Arbeiten der genannten Philosophen getrennt betrachtet, bevor sie vor dem Hintergrund von Concept Image und Concept Definition gemeinsam diskutiert werden. 4.3. widmet sich dann Parallelen oder potentiellen Vorläufern von Concept Image und Concept Definition in der Psychologie, bei PIAGET, BRUNER und ROSCH, wobei das Vorgehen das gleiche ist wie in 4.2.: Zunächst getrennte Betrachtung von Arbeiten verschiedener Psychologen, schließlich gemeinsame Diskussion. In 4.4. wird mit Hilfe von Arbeiten von aus der Fachmathematik stammenden Autoren, POINCARÉ, HADAMARD, WITTENBERG und FREUDENTHAL, dann eine Position für die Mathematikdidaktik mit Bezug auf noch diskussionswürdige Punkte aus 4.2. und 4.3. herausgearbeitet. In Abschnitt 4.5. fließen die basierend auf Concept Image und Concept Definition durchgeführten Betrach-

[6] Es ist nicht möglich, für das hier vorliegende theoretische Modell, ohne Berücksichtigung einer philosophisch-psychologischen Perspektive, die Evidenz empirisch zu zeigen, weil es bei empirischen Untersuchungen, die sich auf Begriffsbildung beim Menschen beziehen, nicht möglich ist, alles Psychologische auszublenden.

tungen schließlich in den Begriffen Begriffsbild und Begriffskonvention zusammen, die dargelegt und im semiotischen Modell des Begriffsfeldes lokalisiert werden. Dieses Kapitel dient somit dazu, die Relevanz der vorliegenden Arbeit aus mathematikdidaktischer Perspektive, die vor allem aufgrund des Anknüpfens an TALL und VINNER entsteht, aufzuzeigen. Darüber hinaus wird eine an TALL und VINNER anschließende, aus philosophisch-psychologischer Sicht konsistente und kohärente Theorie entwickelt und diese letztlich auch mit dem semiotischen Modell verknüpft.

Im fünften Kapitel wird eine basierend auf den theoretischen Ausführungen aus den Kapiteln 1. bis 4. durchgeführte empirische Untersuchung thematisiert. Genauer wird für den schon in Kapitel 2. theoretisch untersuchten Begriff Würfel betrachtet, welche Aspekte des theoretisch erarbeiteten Begriffsfeldes Teil des Begriffsbildes von Schülerinnen und Schülern sind. Dazu wird in 5.1. auf allgemeine theoretische Grundlagen der Untersuchung (in Form einer Umfrage) und in 5.2. auf Vorüberlegungen zur Erhebung und einige Ergebnisse von Probeumfragen eingegangen. In 5.3. wird dann die Konzeption der Erhebung dargelegt. Abschnitt 5.4. beschäftigt sich mit dem ersten Teil der Auswertung, dabei werden verschiedene Assoziationen mit dem Begriff Würfel entsprechend ihres Kontextes eingeordnet, und die Einordnungen für verschiedene Schulklassen und Klassenstufen werden verglichen. In 5.5. werden einige Schülerantworten exemplarisch den unterschiedlichen möglichen Triangulationsbrüchen im semiotischen Dreieck zugeordnet. 5.6. geht schließlich auf Fehler im Begriffsverständnis des Begriffs Würfel bei Schülerinnen und Schülern ein. Für die philosophisch-psychologische Theorie vor dem Hintergrund des semiotischen Modells wird somit die Evidenz empirisch nachgewiesen – dabei liegt der Schwerpunkt in 5.4. stärker auf philosophisch-psychologischen Aspekten, in 5.5. hingegen stärker auf semiotischen Aspekten. Die Schülerantworten zu der Umfrage, die Thema dieses Kapitels ist, liegen sämtlich eingescannt vor und können bei Interesse angefordert werden.

Im sechsten Kapitel werden Grundvorstellungen, welche die Rolle eines Verbindungsgliedes zwischen Begriffsbild und Begriffskonvention einnehmen, thematisiert – dazu werden sie in 6.1. vor dem Hintergrund der philosophisch-psychologischen Theorie angesprochen. Anschließend werden in 6.2. Grundvorstellungen, wie sie von BENDER und VOM HOFE gefasst werden, umrissen, bevor ein kurzes, rein theoretisch basiertes Zwischenfazit gezogen wird. In 6.3. werden Grundvorstellungen dann exemplarisch betrachtet, wobei die Beispiele insbesondere zum theoretischen Hintergrund in Beziehung gesetzt werden – daraus können wiederum Schlüsse für die Grundvorstellungsdiskussion gezogen werden. Vor dem Hintergrund der Grundvorstellungsdiskussion wird in 6.4. kurz auf die Diskussion um Fundamentale Ideen eingegangen, bevor in 6.5. die Methode des „Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten“ als ein Weg der Begriffsbildung in der sowjetischen Philosophie und Psychologie thematisiert wird. Dieses Kapitel dient somit dazu, wiederum an in der aktuellen mathematikdidaktischen Forschung relevante Themen anzuknüpfen und bezüglich dieser eine Grundlage für die Herstellung einer größeren Konsistenz und Kohärenz zu legen.

Das siebte Kapitel widmet sich schließlich einem Modell, das als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht gesehen werden kann, und damit einen normativ-konstruktiven Maßstab für diesen liefert. Dabei wird in 7.1. dieses Modell im Gesamten entwickelt, bevor die einzelnen Dimensionen thematisiert werden. In 7.2. wird auf die Dimension der Prozesshaftigkeit eingegangen, in 7.3. wird die Dimension der Aktivität-Operativität betrachtet und in 7.4. wird ein Blick auf die Dimension der kognitiven Präferenzen geworfen, bevor in 7.5. das übergeordnete methodische Entscheidungsfeld angesprochen wird. In 7.6. und 7.7. wird vor dem Hintergrund des entwickelten Modells letztlich kurz auf FREUDENTHALs Phänomenologie sowie BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung eingegangen. In diesem Kapitel wird somit ein mit Bezug auf die philosophisch-psychologische Theorie und das semiotische Modell konsistenter und kohärenter Grundvorstellungsbegriff entwickelt.

Im achten Kapitel wird letztlich vor dem Hintergrund des entwickelten theoretischen Konstrukts und insbesondere des Modells als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht ein kurzer Blick in Schulbücher geworfen. Gewählt werden dazu exemplarisch die Schulbuchreihen Lambacher Schweizer und Das Mathematikbuch sowie die Begriffe Würfel und Achsenspiegelung. In 8.1. werden zunächst die Schulbuchreihen kurz vorgestellt, bevor in 8.2. auf die Behandlung der beispielhaft gewählten Begriffe im saarländischen Lehrplan eingegangen wird. 8.3. widmet sich dann der Analyse der Begriffe in den Schulbuchreihen – dazu wird zunächst jeder Begriff in jeder Reihe getrennt betrachtet, bevor die Ergebnisse zusammengefasst und Verbesserungsvorschläge angebracht werden. Es wird somit eine Möglichkeit der praxisrelevanten Anwendung des semiotischen und philosophisch-psychologischen theoretischen Konstrukts und insbesondere auch des für den Grundvorstellungsbegriff entwickelten Modells aufgezeigt.

In der Schlussbetrachtung werden schließlich ein Fazit gezogen und die Übertragung des entwickelten theoretischen Konstrukts auf andere Bereiche als die Geometrie thematisiert. Weiterhin werden einige Möglichkeiten für zukünftige Forschung dargelegt.

Die Arbeit lässt sich schließlich chronologisch durch die unterschiedlichen inhaltlichen Stränge entsprechend dem folgenden Diagramm (Abbildung 4) beschreiben.

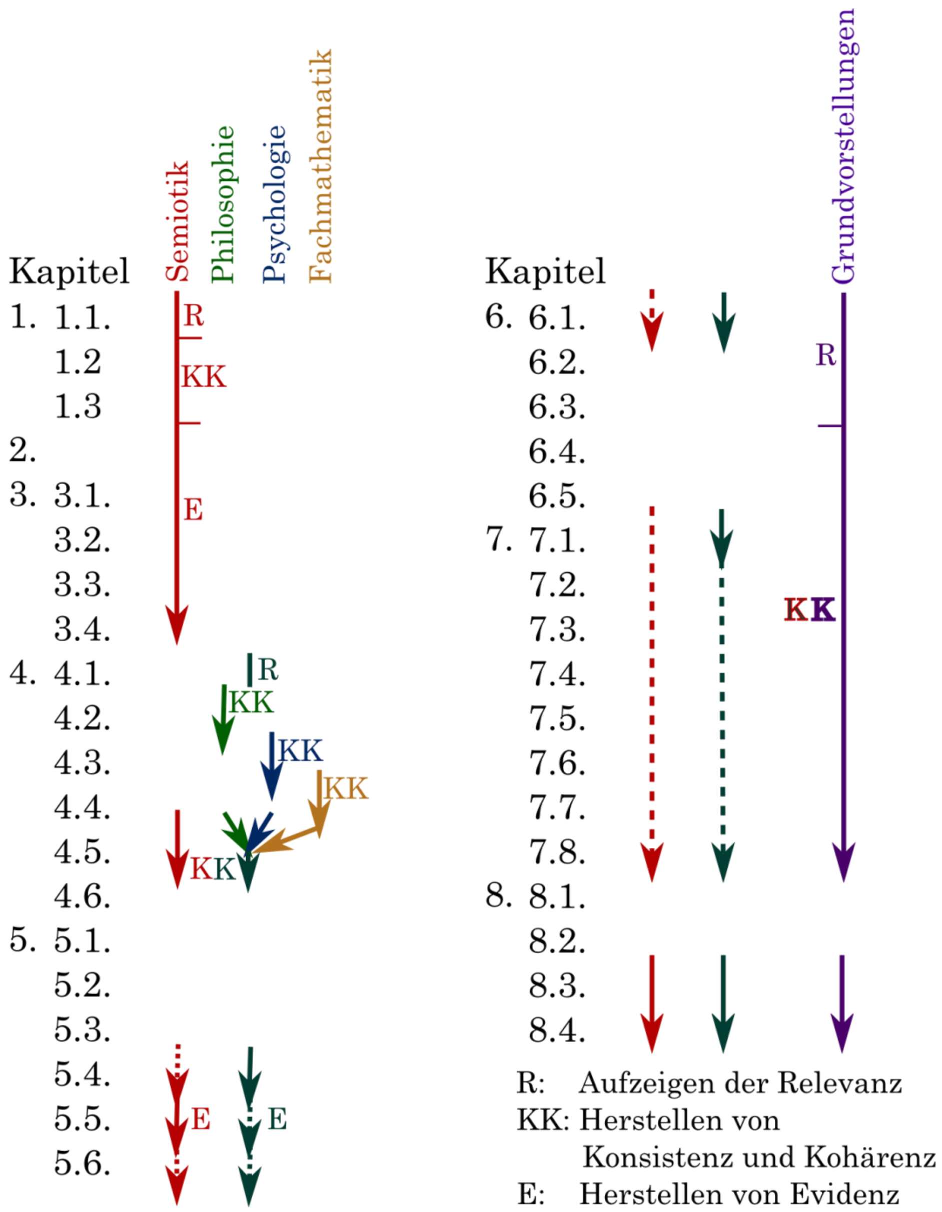


Abbildung 4: Inhaltliche Chronologie der Arbeit

Das Diagramm muss dabei reduzierenden Charakter haben. So können nur die wichtigsten Verknüpfungen zwischen inhaltlichen Strängen verzeichnet sein. Explizit laufen dabei nur Philosophie, Psychologie und Fachmathematik in Kapitel 4.5. zusammen – dies ist darin begründet, dass sie sich zu einer philosophisch-psychologischen Theorie zusammenfügen. Diese läuft im Weiteren immer parallel zur Semiotik – dies ist darin begründet, dass die philosophisch-psychologische Theorie jeweils vor dem Hintergrund des semiotischen Modells betrachtet wird, die philosophisch-psychologischen aber von den semiotischen Begriffen unterscheidbar bleiben. Es werden zudem, neben den verzeichneten inhaltlichen Strängen, an verschiedenen Stellen allgemein mathematikdidaktische Aspekte angesprochen. Letztlich dienen Unterkapitel, die keinem inhaltlichen Strang zugeordnet sind, zur Einführung in oder weiteren Betrachtung der in dem jeweiligen Kapitel angesprochenen Thematik.

1. Die semiotische Perspektive – Entwicklung des Begriffsfeldes

In diesem Kapitel wird Begriffsbildung aus einer semiotischen Perspektive betrachtet. Ein solcher semiotischer Blick dient zunächst dazu, ein Vokabular bereitzustellen, mit Hilfe dessen über das Thema Begriffsbildung kommuniziert werden kann sowie grundlegende Begriffe zur Begriffsbildung zu klären. Wesentliche Relationen der Begriffsbildung finden sich dabei im semiotischen Dreieck wieder. Darauf aufbauend wird der aus semiotischer Sicht besondere Charakter der Geometrie begründet. Ein etwas ausführlicherer semiotischer Blick auf Begriffsbildung dient dann dazu, Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck zu thematisieren sowie den Begriff des Begriffsfeldes zu prägen.

1.1. Begriffe und das semiotische Dreieck

Eine Arbeit über Begriffsbildung erfordert ein Vokabular zum Thema, das es der Schreibenden erlaubt, ihre Überlegungen, Folgerungen und Ergebnisse zu dokumentieren, verständlich darzustellen und zu präsentieren, sie muss eine Fachsprache adressatengerecht entwickeln und verwenden. Das Vokabular muss es zudem den Lesenden möglich machen, die Äußerungen der Schreibenden zu verstehen, nachzuvollziehen und zu überprüfen.[7]

Die Grundpfeiler dieses Vokabulars werden im Folgenden expliziert. Die zentrale Vokabel ist *Begriff*, gegeben durch seinen Begriffsinhalt oder -umfang. Der Begriff steht in vielfältigen Beziehungen zu neben-, über- und untergeordneten Begriffen, die insgesamt das *Begriffsnetz*[8] ausmachen. Dieses lässt sich als Netz vorstellen, dessen Knoten die Begriffe sind und dessen Kanten die Beziehungen zwischen den Begriffen beschreiben.

Der Begriff ist weiterhin, zunächst LAMBERT (2003) folgend, zu unterscheiden von *Bezeichner* und *Objekt*. Bezeichner meint den Begriffsnamen oder das Begriffswort,[9] Objekt repräsentiert den Begriff in (s)einem Anwendungskontext. Das Objekt darf allerdings nicht im Sinne von zwangsläufig konkreten Gegenständen gedacht werden, sondern im Gegenteil dazu als Entitäten möglicherweise auch abstrakter Natur, die unter den Begriff fallen.[10] Das Objekt subsu-

---

[7] Die hier genannten Punkte sind auch unter der Kompetenz „Kommunizieren" in den Bildungsstandards der KMK für das Fach Mathematik aufgeführt (vgl. KMK 2004), und können demnach als Anforderungen an Kommunikation im Mathematikunterricht allgemein gesehen werden.

[8] Der Bezeichner Begriffsnetz wurde aufgrund seines intuitiven Charakters gewählt. Er wird beispielsweise auch von WEIGAND (2009a) verwendet.

[9] Als Bezeichner kann auch ein Zeichen dienen, welches für den Begriff steht. Da über Bezeichner in Form von Begriffsnamen oder -worten aber gesellschaftlicher Konsens herrscht und diese Bezeichner am leichtesten zu kommunizieren sind, sind in der vorliegenden Arbeit mit Bezeichnern ausschließlich Begriffsnamen oder -worte gemeint.

[10] Der Unterschied zwischen konkreten Gegenständen und Entitäten abstrakter Natur, die unter einen Begriff fallen, soll anhand der Begriffe Würfel und Zufall verdeutlicht werden. Der Begriff Würfel wird repräsentiert durch konkrete Repräsentanten des Begriffs beispielsweise aus dem

miert in der Regel mehrere Repräsentanten eines Begriffs aus dem gleichen Anwendungskontext, wobei einzelne Repräsentanten eines Begriffs auch verschiedenen Anwendungskontexten zugeordnet sein können und andererseits erst durch ihre Zusammenstellung den Anwendungskontext und damit auch ein Objekt definieren.

Die Relationen zwischen Begriff und Bezeichner werden durch *Bezeichnung* und *Bedeutung* beschrieben. Ist ein Begriff gegeben und wird diesem ein Bezeichner zugeordnet, so wird dies Bezeichnung genannt. Ist umgekehrt der Bezeichner gegeben und wird diesem ein Begriff zugeordnet, so wird dies Bedeutung genannt (Abbildung 5).

$$\text{Begriff} \underset{\text{Bedeutung}}{\overset{\text{Bezeichnung}}{\rightleftarrows}} \text{Bezeichner}$$

Abbildung 5: Relationen zwischen Begriff und Bezeichner

Analog sollen die Relationen zwischen Begriff und Objekt durch *Konkretisierung* und *Abstrahierung* beschrieben werden. Ist ein Begriff gegeben und wird diesem ein Objekt zugeordnet, so soll dies Konkretisierung genannt werden. Ist umgekehrt ein Objekt gegeben, und wird diesem ein Begriff zugeordnet, so soll dies Abstrahierung genannt werden (Abbildung 6).

$$\text{Begriff} \underset{\text{Abstrahierung}}{\overset{\text{Konkretisierung}}{\rightleftarrows}} \text{Objekt}$$

Abbildung 6: Relationen zwischen Begriff und Objekt

Die Relationen zwischen Begriff und Bezeichner liegen, dadurch dass der Bezeichner rein sprachlich gegeben ist, im sprachlichen Bereich der Begriffsbildung, der stark von der Ungenauigkeit der Umgangssprache beeinflusst ist. Die Relationen zwischen Begriff und Objekt liegen hingegen im „objektlichen" Bereich[11] der Begriffsbildung, der sich sowohl auf konkrete Gegenstände als auch auf abstrakte Entitäten bezieht. Nur der Begriff gehört damit sowohl dem sprachlichen als auch dem objektlichen Bereich an, und er setzt Bezeichner und Objekt in eine mittelbare Relation zueinander, die zudem häufig willkürlich ist, da die Wahl eines bestimmten Bezeichners oft nicht begründet ist (vgl. Eco 1977, S. 29). Der Begriff selbst ergibt sich als Abstraktum im Wechselspiel des sprach-

Kontext der Elementargeometrie (Vollkörper, Hohlkörper, Kantengerüste), die daher konkret sind, dass sie unmittelbar sichtbar, greifbar und fassbar sind. Der Begriff Zufall wird repräsentiert durch Entitäten abstrakter Natur beispielsweise aus dem Kontext der Stochastik (Ereignisse, für die keine kausale Erklärung gegeben werden kann), die daher abstrakt sind, dass sie beschrieben, aber nicht unmittelbar gesehen und damit schon begriffen und gefasst werden können.

[11] Hier wurde der Bezeichner „objektlich" geschaffen, der „auf das (konkrete oder abstrakte) Objekt bezogen" meint. „Gegenständlich" oder ein Synonym dazu wäre unpassend, weil Objekt nicht ausschließlich im Sinne eines konkreten Gegenstandes gedacht werden darf.

lichen und objektlichen Bereichs und ist von beiden Bereichen geprägt. Er kann damit nicht externalisiert werden, es sind lediglich die (sprachliche) Form des Bezeichners beziehungsweise die (objektliche) Form des Objekts (im Sinne mehrerer Repräsentanten, aus denen der Begriff abstrahiert werden kann) externalisierbar.

Das Erschließen des Begriffs durch die Relationen der Bedeutung oder der Abstrahierung erfolgt laut ECO (1977, S. 171ff) mittels *Interpretanten*, die möglicherweise auf weitere Interpretanten verweisen und die dazu dienen, den Bezeichner oder das Objekt zu übersetzen. Die Interpretanten sind kontextgebunden, und können die Form von Umschreibungen, Definitionen beziehungsweise von Darstellungen haben. Das Objekt kann allerdings nur dann übersetzt werden, wenn es in Form mehrerer Repräsentanten vorliegt, da ein einzelner Repräsentant den Begriff einengt. ECO schreibt zu den Interpretanten:

> Ein Zeichen [Bezeichner] steht niemals für einen Gegenstand oder Referenten [Objekt]. Es kann in einem Akt der Bezugnahme nur dann richtig gebraucht werden, wenn der Kode ihm denselben Interpretanten zuweist, den er bestimmten Gegenständen zuweist, die man als ostensive [offensichtliche, veranschaulichende] Zeichen betrachtet und die für die Klasse der Gegenstände stehen, denen sie angehören (eine Klasse, die nicht einen Gegenstand, sondern ein Signifikat [Begriff] konstituiert).
>
> (Eco 1977, S. 172)[12]

Zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt besteht schließlich eine grundsätzliche Beziehung, wie sie durch ein semiotisches Dreieck[13] ausgedrückt wird. Die im semiotischen Dreieck vorzufindende Dreiteilung wurde, wie ECO (1977) dokumentiert, von verschiedenen Philosophen und Sprachwissenschaftlern (erstmals von FREGE) formuliert, die Bezeichner oder auch Begriffe zu den einzelnen Ecken unterscheiden sich dabei allerdings teilweise beträchtlich (siehe Abbildung 7). Das semiotische Dreieck wurde, wie auch LAMBERT (2003) schreibt, als epistemologisches Dreieck von BROMME und STEINBRING (1990) in der Form, die Abbildung 8 zeigt, für die Mathematikdidaktik instrumentalisiert. BROMME und STEINBRING verwenden an Stelle des Bezeichners Bezeichner den in der Mathematik üblichen Bezeichner Symbol. Da es aber aus semiotischer Sicht sinnvoll ist, zwischen Zeichen und Symbol (einem mit Spielregeln aufgeladenen Zeichen) zu unterscheiden, um entsprechend ikonisches und symbolisches Vorgehen zu unterscheiden (vgl. Lambert 2012, und siehe auch: 7.3.1.), wird die Verwendung von Symbol hier nicht übernommen. Das Dreieck von BROMME und STEINBRING

[12] Eckige Klammern in Zitaten kennzeichnen in der vorliegenden Arbeit ausschließlich Einfügungen oder Auslassungen der Autorin.
[13] Bei dem semiotischen Dreieck handelt es sich streng genommen um einen Graph mit Knoten und Kanten. Die vorliegende Arbeit knüpft allerdings an die Tradition an, in der von einem Dreieck gesprochen wird, und spricht damit auch weiterhin von Ecken und Kanten.

weicht weiterhin von der in der Semiotik üblichen Anordnung von Begriff, Bezeichner und Objekt ab, der, wie Abbildung 9 zeigt, hier gefolgt werden soll. Die oben genannten Relationen zwischen Begriff und Bezeichner sowie Begriff und Objekt werden, wie bereits dargelegt, durch Pfeile dargestellt. Eine durch den Begriff vermittelte Relation zwischen Bezeichner und Objekt wird durch den gestrichelten Doppelpfeil angedeutet.

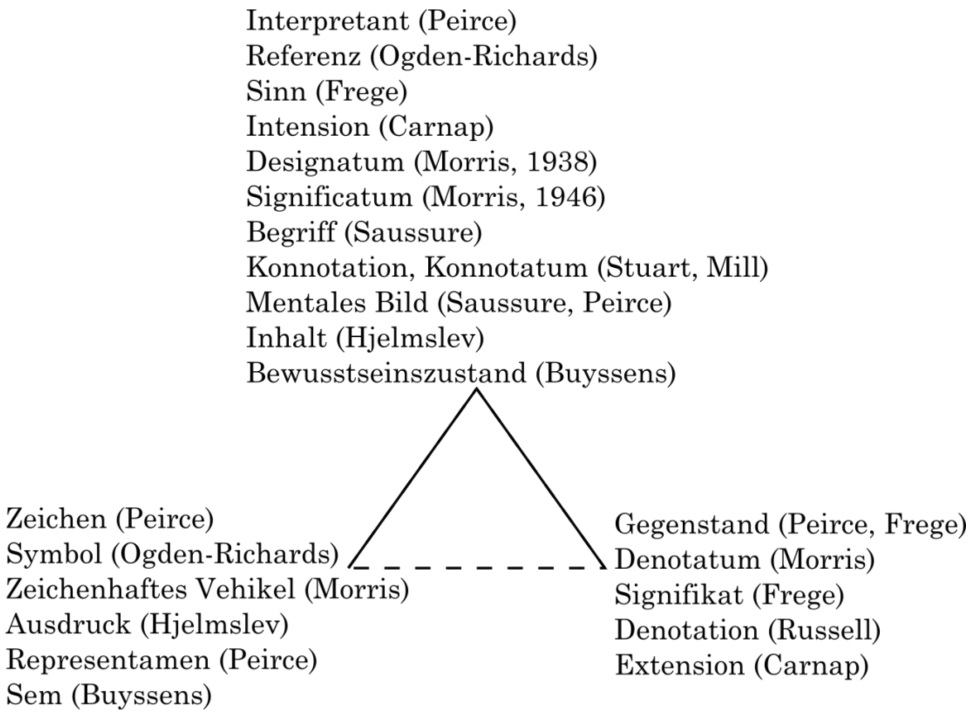


Abbildung 7: Im semiotischen Dreieck vorzufindende Dreiteilungen nach ECO (1977, S. 30)

Abbildung 8: Semiotisches Dreieck nach BROMME und STEINBRING (vgl. Bromme & Steinbring 1990, S. 160)

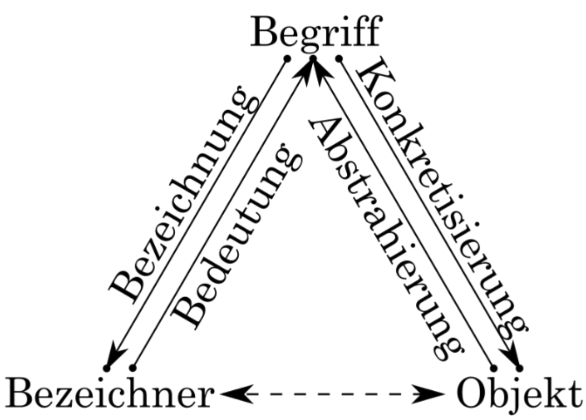


Abbildung 9: Hier verwendetes semiotisches Dreieck

KADUNZ (2011) leitet aus einer Betrachtung verschiedener Zeichen entsprechend PEIRCE Argumente für empirische Untersuchungen bei Lernenden ab. Bei KADUNZ (2012) heißt es:

> In der Mathematikdidaktik kann die Theorie der Zeichen die Aufgabe der theoretischen Reflexion bei der Konzentration auf das Sichtbare – in Fragen der Visualisierung – übernehmen.
>
> (Kadunz 2012, S. 428)

In dem Vortrag, der dem genannten Beitrag zu Grunde liegt, äußerte er, dass ein Verständnis des semiotischen Dreiecks empirischer Forschung vorausgehen müsse. In 1.3. wird allerdings gezeigt, dass das semiotische Dreieck schon aus theoretischer semiotischer Sicht überdacht werden muss. In 4.5. wird dann mittels theoretischer philosophisch-psychologischer Betrachtungen deutlich, dass die im semiotischen Dreieck vorzufindenden Beziehungen im Begriffsverständnis der Lernenden nicht eindeutig widergespiegelt sein können. In 5.5. wird schließlich empirisch gezeigt, dass das Begriffsverständnis tatsächlich nie so eindeutig ist, wie rein theoretisch gewonnene Zusammenhänge.

1.2. Begriffe und das semiotische Dreieck für die Geometrie

Der aus einer semiotischen Sicht besondere Charakter der Geometrie ist vor allem begründet in der Alltagsnähe der Geometrie sowie deren Nähe zum natürlichen Umfeld von Schülerinnen und Schülern. Den Wert des Anknüpfens an den Alltag und das natürliche Umfeld drückt schon WINTER (1996) in insbesondere der ersten seiner drei Grunderfahrungen, die er als Bestandteil von Allgemeinbildung listet, aus:

> Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:
>
> (1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,
>
> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
>
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinausgehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.
>
> (Winter 1996, S. 35)

WINTER weist insbesondere darauf hin, dass geometrische Elemente im natürlichen Umfeld von Schülerinnen und Schülern eine allgemein mathematische Erfahrung der Welt bedingen, und dass die Raumanschauung, welche Bezug hat zu allen drei Grunderfahrungen, wichtiger Bestandteil der Allgemeinbildung ist. Weiterhin drückt HOLLAND (2007) die Bedeutsamkeit des Anknüpfens an den Alltag und das natürliche Umfeld aus, wenn er Geometrie unter anderem als „Lehre vom Anschauungsraum“ betrachtet:

> Die kognitive Struktur Anschauungsraum ermöglicht uns die Orientierung im Raum und die Anwendung geometrischer Begriffe und Verfahren in realen Situationen, z.B. zur Positionsbestimmung eines Schiffes durch Anpeilen von Leuchtfeuern. Sie ist bei verschiedenen Menschen unterschiedlich stark ausgebildet. Der Grad der Ausprägung beim einzelnen Menschen hängt einerseits von der Ausprägung gewisser psychischer Faktoren der Raumanschauung ab und andererseits vom Reichtum der in Lernprozessen erworbenen Begriffe der ebenen und räumlichen Geometrie.
>
> (Holland 2007, S. 20)

Die Alltagsnähe der Geometrie sowie deren Nähe zum natürlichen Umfeld von Schülerinnen und Schülern meinen vor dem Hintergrund des semiotischen Dreiecks genauer die Bezeichnung geometrischer Begriffe durch Bezeichner aus dem Alltag und die Konkretisierung geometrischer Begriffe in alltäglichen, also dem natürlichen Umfeld entstammenden, Objekten. Während die Alltagsnähe vieler Bezeichner und Objekte einerseits den Umgang mit geometrischen Begriffen erleichtert, weil bekanntes Vokabular verwendet werden kann und mit bekannten Eigenschaften von Objekten gearbeitet werden kann, können andererseits auch Schwierigkeiten folgen, wie KADUNZ (der sich durch seine Nähe zur Semiotik auszeichnet) und STRÄßER deutlich machen:

> Eine mögliche Ursache der Schwierigkeiten beim Lernen von Geometrie kann in der Vermischung von alltagsweltlichen Vorstellungen und alltagsweltlicher Sprache mit den Vorstellungen und der Sprache der Geometrie vermutet werden.
>
> (Kadunz & Sträßer 2009, S. 208)

KADUNZ und STRÄßER führen dabei mit Rückgriff auf verschiedene Arbeiten insbesondere aus der Mathematikdidaktik auf, wie die Verwendung von Bezeichnern und das Auftreten von Objekten sowohl in einem alltäglichem als auch in einem geometrischen Kontext zur Vermischung der Vorstellungen über die bezeichneten beziehungsweise abstrahierten Begriffe führt.

Die angesprochene Alltagsnähe geometrischer Objekte begründet deren besondere Anschaulichkeit. Im Gegensatz zu Objekten aus anderen mathematischen Gebieten (die, wie in 1.1. schon erwähnt, nicht zwangsläufig als konkrete Gegenstände gedacht werden dürfen, sondern im Gegensatz dazu möglicherweise auch als abstrakte Entitäten, die unter den Begriff fallen)[14] sind geometrische Objekte

[14] Exemplarisch kann an konkretisierende Objekte zu den üblicherweise in Klassenstufen 5 und 6 zu behandelnden Begriffen Bruchzahl, Dezimalbruchzahl, Teiler oder Vielfaches gedacht werden

in der Lage, viele Eigenschaften eines Begriffs darzustellen. Aus diesem Grund sollen für die Geometrie den Objekten mit sogenannten *Realisaten* (in Anlehnung an BENDER und SCHREIBER (1985)) unter die Objekte fallende konkrete Repräsentanten untergeordnet werden. Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass Realisate dennoch meist Eigenschaften geometrischer Begriffe nicht in ihrer idealen Form repräsentieren – diese müssen erst in die Realisate hineingesehen werden.[15] Zudem ist zu erwähnen, dass insbesondere in der Umwelt auftauchende Realisate von Relationen, Abbildungen oder Maßen ein meist höheres Maß an Ideation und Abstraktion bedürfen, als Realisate von Figuren oder Körpern, es jedoch möglich ist, Darstellungen von Relationen, Abbildungen und Maßen Interpretanten hinzuzufügen, welche die Abstrahierung deutlich vereinfachen (z.B. die Markierung gleicher Abstände für parallel, die Markierung der Spiegelachse oder des Spiegelpunktes und von Hilfslinien für Spiegelung, sowie die Markierung der Strecke und Andeutung der Länge für Streckenlänge).

1.3. Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck und das semiotische Dreiecksprisma

Die Beziehung zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt ist, wie ein etwas ausführlicherer semiotischer Blick auf Begriffsbildung zeigt, (in vielen Fällen) nicht so eineindeutig, wie durch das semiotische Dreieck suggeriert wird (was auch schon durch FREGE festgestellt wurde (vgl. Frege 2002a, S. 27f)[16]).[17] Insgesamt resultieren die Triangulationsbrüche daraus, dass jeweils derselbe Bezeichner, Begriff oder dasselbe Objekt, beziehungsweise zwei dieser Komponenten, Bestandteil zweier oder mehrerer semiotischer Dreiecke sind, die sich überlagern (siehe hierzu auch: Rembowski 2014 & 2015a).

Hier wird (der Übersichtlichkeit wegen) zunächst der Fall zweier semiotischer Dreiecke diskutiert. Für zwei sich überlagernde semiotische Dreiecke folgen kombinatorisch $2^3 = 8$ unterschiedliche Fälle, wie die Dreiecke verknüpft sein können. Zwei der Fälle sollen als trivial angesehen werden, da nur ein Dreieck oder zwei komplett voneinander getrennte Dreiecke vorliegen. Sechs der Fälle sind hingegen nicht trivial (Tabelle 1).

(vgl. u.a. Ministerium für Bildung und Kultur Saarland, 2014a). Beispielsweise kann aus $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{20}$ als einem konkretisierenden Objekt nicht, sofern der Begriff nicht bekannt ist, ohne Erklärungen auf den Bruchzahlbegriff geschlossen werden.

[15] Dementsprechend wäre für die Geometrie auch die Verwendung des Bezeichners Ideaisierung (vgl. Bender & Schreiber 1985) – statt Abstrahierung – denkbar. Der Bezeichner Abstrahierung soll aber wegen des bereichsübergreifenden Charakters und als Umkehrung zu Konkretisierung beibehalten werden.

[16] Für FREGE ist gerade diese Mehrdeutigkeit ein Grund für die von ihm kritisierte Unvollkommenheit der Sprache (vgl. Abschnitt 4.2.3.).

[17] Speziell für mathematische Begriffe werden solche Mehrdeutigkeiten, wenn auch weitestgehend nicht vor dem Hintergrund des semiotischen Dreiecks, von MAIER & SCHWEIGER (1999) angesprochen.

	Anzahl Begriffe	Anzahl Bezeichner	Anzahl Objekte
trivial	1	1	1
trivial[18]	2 (bzw. >1)	2 (bzw. >1)	2 (bzw. >1)
Fall 1 (Abbildung 10)	1	2 (bzw. >1)	1
Fall 2 (Abbildung 11)	1	1	2 (bzw. >1)
Fall 3 (Abbildung 12)	1	2 (bzw. >1)	2 (bzw. >1)
Fall 4 (Abbildung 13)	2 (bzw. >1)	1	1
Fall 5 (Abbildung 14)	2 (bzw. >1)	2 (bzw. >1)	1
Fall 6 (Abbildung 15)	2 (bzw. >1)	1	2 (bzw. >1)

Tabelle 1: Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck

Im Folgenden werden die Fälle jeweils mit Anzahl Begriffe-Anzahl Bezeichner-Anzahl Objekte bezeichnet. Fall 1 heißt damit Fall 1-2-1 – dies soll das Zuordnen der Fälle dort, wo nicht unmittelbar eine Abbildung gegeben ist, erleichtern.

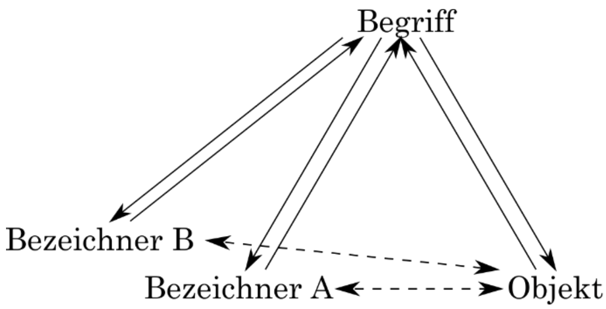


Abbildung 10: Fall 1-2-1

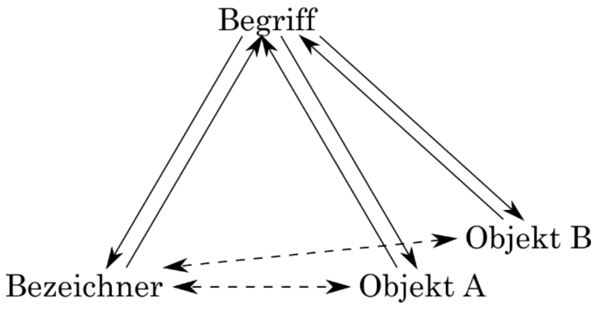


Abbildung 11: Fall 1-1-2

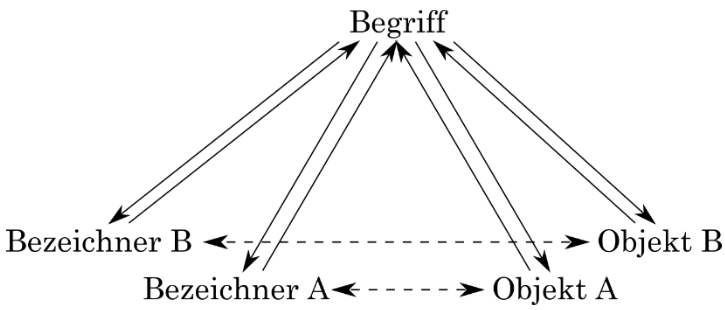


Abbildung 12: Fall 1-2-2

[18] Bei diesem Fall ist es wichtig, dass aus jeweils 2 (oder einer beliebigen anderen Anzahl >1) Begriffen, Bezeichnern und Objekten komplett voneinander getrennte semiotische Dreiecke entstehen.

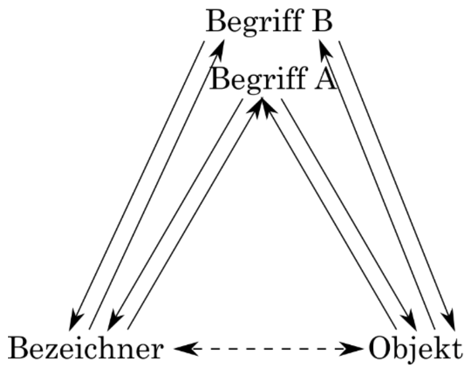


Abbildung 13: Fall 2-1-1

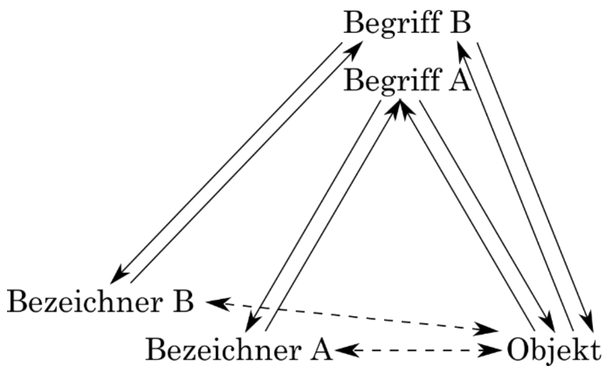


Abbildung 14: Fall 2-2-1

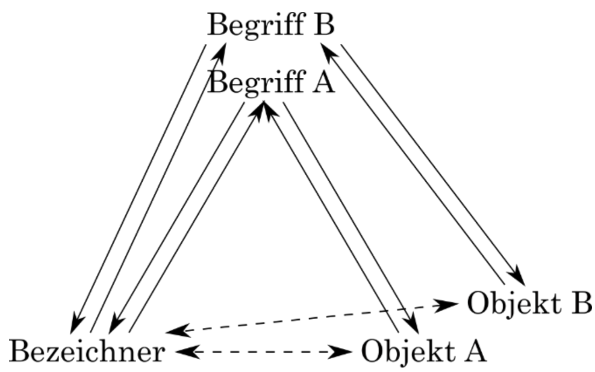


Abbildung 15: Fall 2-1-2

So ist es möglich, dass ein Begriff durch zwei verschiedene Bezeichner bezeichnet wird beziehungsweise dass zwei verschiedene Bezeichner denselben Begriff bedeuten (Fall 1-2-1, Abbildung 10) – analog können entsprechend der Pfeile in beide Richtungen im semiotischen Dreieck auch für die folgenden Fälle jeweils zwei Relationen betrachtet werden, wovon allerdings nur eine beschrieben werden soll. Es besteht außerdem die Möglichkeit, dass ein Begriff in verschiedenen Objekten konkretisiert gesehen wird, was bedeutet, dass Repräsentanten explizit bestimmten voneinander getrennten Anwendungskontexten zugeordnet werden (Fall 1-1-2, Abbildung 11). Ebenso ist es möglich, dass ein Begriff durch verschiedene Bezeichner bezeichnet wird, die sich auf verschiedene Objekte beziehen, dass die entsprechenden Repräsentanten also verschiedenen getrennten Anwendungskontexten zugehören (Fall 1-2-2, Abbildung 12). Außerdem besteht die

Möglichkeit, dass Repräsentanten aus der Schnittmenge verschiedener Anwendungskontexte zu verschiedenen Begriffen abstrahiert werden, die entweder durch denselben Bezeichner bezeichnet werden (Fall 2-1-1, Abbildung 13) oder aber verschiedene Bezeichner haben (Fall 2-2-1, Abbildung 14). Letztlich kann es sein, dass ein Bezeichner schon verschiedene Begriffe bedeutet, die in verschiedenen Objekten konkretisiert gesehen werden, deren Repräsentanten also verschiedenen Anwendungskontexten zugehören (Fall 2-1-2, Abbildung 15). Während Objekte meist kontextspezifisch sind und auch Begriffe auf einem gegebenen Kontext beruhen, ist dies bei Bezeichnern nicht zwangsläufig gegeben. Dementsprechend ist das Vorliegen mehrerer Bezeichner bei jeweils einem gegebenen Begriff und Objekt (Fall 1-2-1) der einzige Triangulationsbruch, der nur einen Kontext umschließt. Bei einem solchen Vorliegen mehrerer Bezeichner spricht man üblicherweise von Synonymität.

Die unterschiedlichen oben thematisierten Fälle stehen wiederum nicht nebeneinander, vielmehr können sich entstandene Triangulationsbrüche überlagern und dabei wechselwirken. So kann beispielsweise (Abbildung 16) ein Begriff durch verschiedene Bezeichner bezeichnet werden (Fall 1-2-1), wovon (mindestens) einer verschiedene Begriffe bedeutet, die dann in Objekten konkretisiert gesehen werden, die sich schon aufgrund der unterschiedlichen Begriffe unterscheiden (Fall 2-1-2) und deren Anwendungskontexte zudem explizit unterschieden werden (Fall 1-1-2). Eine Vielzahl weiterer Überlagerungen und Wechselwirkungen ist möglich.

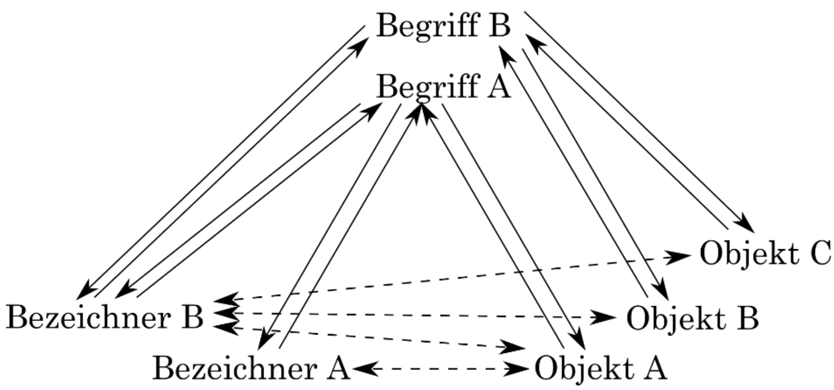


Abbildung 16: Überlagerung verschiedener Triangulationsbrüche
(Fälle 1-2-1, 2-1-2 und 1-1-2)

Die sich gegebenenfalls überlagernden und dabei wechselwirkenden Triangulationsbrüche können in einem semiotischen Dreiecksprisma zusammengefasst werden, das hier als *Begriffsfeld*[19] bezeichnet werden soll. Das Begriffsfeld kann in

[19] Der Bezeichner kann selbstverständlichen von anderen Mathematikdidaktikerinnen oder -didaktikern anders verwendet werden. So bezeichnet FÜHRERs (2002) >>Begriffsfeld<< einen Begriff, der mit dem hier verwendeten Begriffsnetz verwandt ist und nicht mit dem hier verwendeten Begriffsfeld übereinstimmt. Damit konstituiert sich ein Meta-Begriffsfeld: Der Bezeichner >>Begriffsfeld<< bezeichnet einerseits das Begriffsfeld, welches hier in Form des semiotischen

Form des semiotischen Dreiecksprismas, an dessen Kanten mehrere (hier der Übersicht wegen wieder jeweils zwei) Begriffe, Bezeichner oder Objekte stehen, modelliert und visualisiert werden. Dieses Begriffsfeld schließt dann auch die trivialen Fälle ein. Bezeichner sollen dabei von nun an in Chevrons (gespiegelte spitze Doppelklammern) und Objekte in Mengenklammern stehen (Abbildung 17). Zwei entgegengesetzte Pfeile werden schließlich zu einem bidirektionalen Pfeil verschmolzen (Abbildung 18).

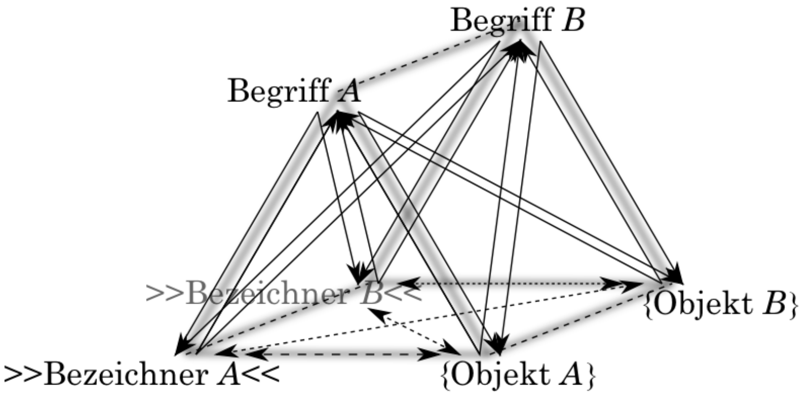


Abbildung 17: Begriffsfeld mit allen Relationen

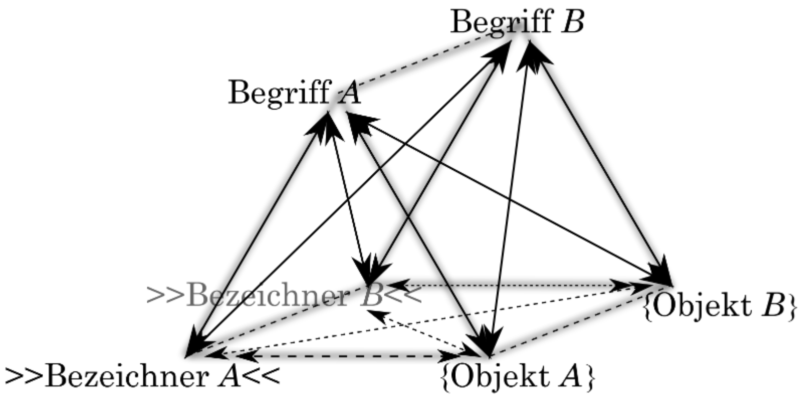


Abbildung 18: Begriffsfeld mit zusammengefassten Relationen

In dem Begriffsfeld können sich verschiedene Bezeichner, im Sinne der Synonymität, überlappen, und trotzdem jeweils eigene Konnotationen haben. Ebenso können sich verschiedene Objekte, schon aufgrund der Zuordnung einzelner Repräsentanten zu verschiedenen Kontexten und der Bestimmung des Kontextes erst durch die Zusammenstellung der Repräsentanten, überlappen. Diese Überschneidung überträgt sich sowohl im sprachlichen als auch im objektlichen Bereich der Begriffsbildung auf die abstrahierten Begriffe. Aus dem semiotischen Dreiecksprisma werden schließlich je nach Kontext unterschiedliche semiotische Dreiecke herausgeschnitten. (Aus dem Kontext ergeben sich somit erst Begriff, Bezeichner und Objekt).

Dreiecksprismas konkretisiert ist, und andererseits ein Begriffsnetz, dessen am nächsten liegende Konkretisierung eine solche mittels Knoten und verbindenden Kanten wäre.

2. Das Begriffsfeld exemplarisch – der Würfelbegriff

Im vorigen Kapitel wurden verschiedene mögliche Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck angesprochen. Dieses Kapitel dient nun zunächst dazu, diese möglichen Triangulationsbrüche anhand des (schulrelevanten) Beispiels des Würfels zu verdeutlichen und damit das Modell zu legitimieren (siehe hierzu auch: Rembowski 2014 & 2015a). Das Beispiel des Würfels eignet sich dabei in besonderem Maße, weil neben dem Bezeichner >>Würfel<< weitere Bezeichner zur Verfügung stehen, der als >>Würfel<< bezeichnete Begriff in verschiedenen Objekten konkretisiert ist und der Bezeichner >>Würfel<< auch weitere Begriffe (mit eventuell weiteren eigenen Bezeichnern und konkretisierenden Objekten) bedeuten kann beziehungsweise entsprechende Objekte zu weiteren Begriffen abstrahiert werden können. So ist der Bezeichner zunächst aus dem Alltag bekannt, wo er beispielsweise die genauer als >>Spielwürfel<< oder >>Sitzwürfel<< bezeichneten Begriffe bedeutet. Außerdem wird er im schulischen Kontext der Elementargeometrie sehr früh verwendet, um einen platonischen Körper mit sechs Seitenflächen, zwölf Kanten und acht Ecken zu bezeichnen. Darüber hinaus spielt er im Kontext der Stochastik als Zufallsgenerator eine wichtige Rolle. Auch im Folgenden können allerdings nicht alle Bedeutungen von Würfel berücksichtigt werden, und es bleibt beispielsweise jene des >>Eiswürfel<< (der nur unter Umständen würfelförmig ist) außen vor.

Der Ausgangspunkt ist der als >>Würfel<< bezeichnete elementargeometrische Begriff im dreidimensionalen Raum und ein eindeutiges semiotisches Dreieck (Abbildung 19).

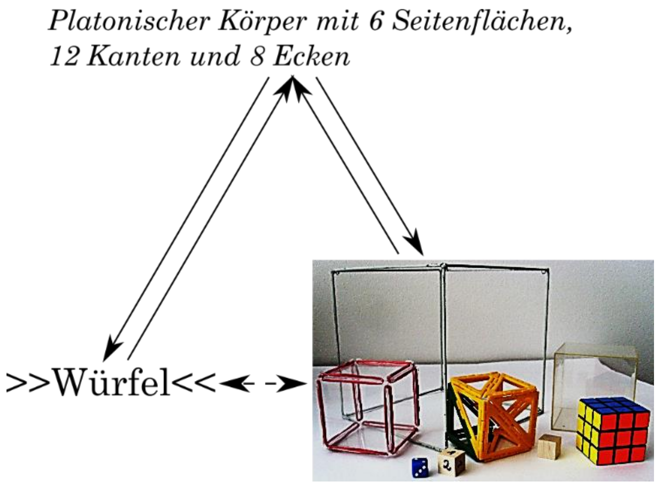


Abbildung 19: Das semiotische Ausgangsdreieck – Würfel

Die Wortformel an der Begriffsecke des Dreiecks – Platonischer Körper mit 6 Seitenflächen, 12 Kanten und 8 Ecken – ist nicht der Begriff, sondern stattdessen ein Interpretant von Bezeichner und Objekt, und dient hier lediglich dazu, der oder dem Lesenden zu verdeutlichen, welcher Begriff gemeint ist. Sie verkörpert somit nicht den Begriff, der als Abstraktum einer solchen Verkörperung nicht zugänglich ist. Der Begriff ist konkretisiert in (dreidimensionalen) Realisaten oder Darstellungen oder sogar Vorstellungen dieser, welche im schulischen Kontext der Elementargeometrie als Repräsentanten des Begriffs dienen, aber auch anderen Kontexten entstammten können.[20] Die Realisate können Vollkörper, Hohlkörper oder Kantengerüste sein oder diese darstellen. Unterschiedliche Realisate konkretisieren dabei die Seiten, Kanten und Ecken des Würfels mit unterschiedlicher Genauigkeit – so dienen bei einigen Kantengerüsten Kugeln als Ecken, weswegen die Ecken nur sehr ungenau konkretisiert sind, und die Seiten ohnehin der Ideation überlassen bleiben, während bei einigen Hohlkörpern umspannende Gummiringe als Kanten fungieren, was diese sehr ungenau konkretisiert. Häufig werden somit nur einige Eigenschaften des Begriffs so gut als möglich konkretisiert und die anderen der Ideation überlassen. Jegliche Eigenschaften des Begriffs können in ihrer idealen Form jedoch nur in ein Realisat hineingesehen werden.

Die verschiedenen möglichen Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck werden nun chronologisch entsprechend 1.3. dargelegt.

Fall 1-2-1 (Abbildung 20)**:**

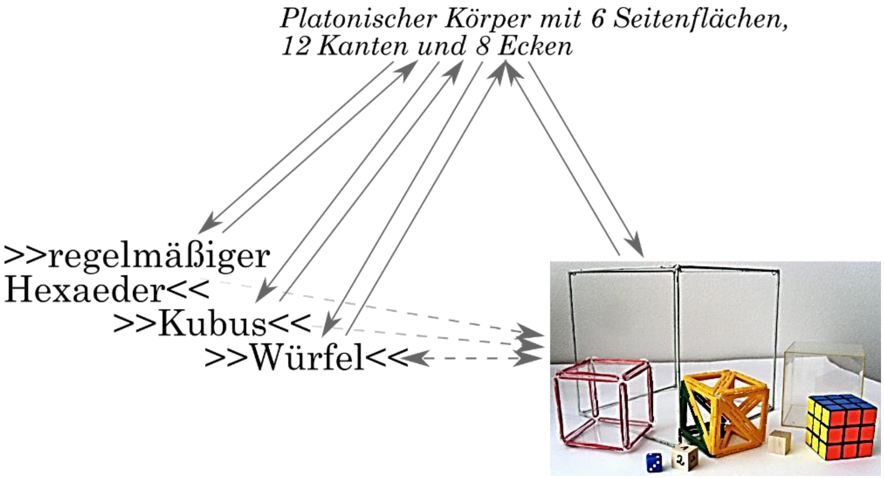


Abbildung 20: Fall 1-2-1 – Würfel[21]

Der elementargeometrische Begriff kann außer als >>Würfel<< auch als >>Kubus<< oder >>regelmäßiger Hexaeder<< bezeichnet werden und dabei noch in Realisaten konkretisiert gesehen werden, die verschiedenen Kontexten ent-

[20] Dass der elementargeometrische Begriff konkretisiert gesehen wird in realen Objekten, die sogar der Lebenswelt entstammen können, und nicht als rein relationaler Begriff ohne Bezug auf reale Objekte betrachtet wird, entspricht einem propädeutischen Ansatz. Dieser wird durch den philosophisch-psychologischen Blickwinkel in 4.5. sowie den Rückgriff auf Grundvorstellungen in 6. und 7. weiterhin legitimiert.

[21] Hier wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit auf eine projektive Darstellung des semiotischen Dreiecksprismas verzichtet. Bei der verwendeten Darstellung handelt es sich topologisch allerdings noch immer um ein Prisma, da Begriffe, Bezeichner und Objekte unterschiedliche Kanten bedingen, die mit verschiedenen Ecken des Prismas inzidieren.

stammen können. Solche unterschiedlichen Bezeichner können sowohl auf verschiedene bezeichnende Personen zurückgehen, als auch von der- oder demselben Bezeichnenden mehr oder weniger willkürlich variiert werden.

Fall 1-1-2 (Abbildung 21)**:**

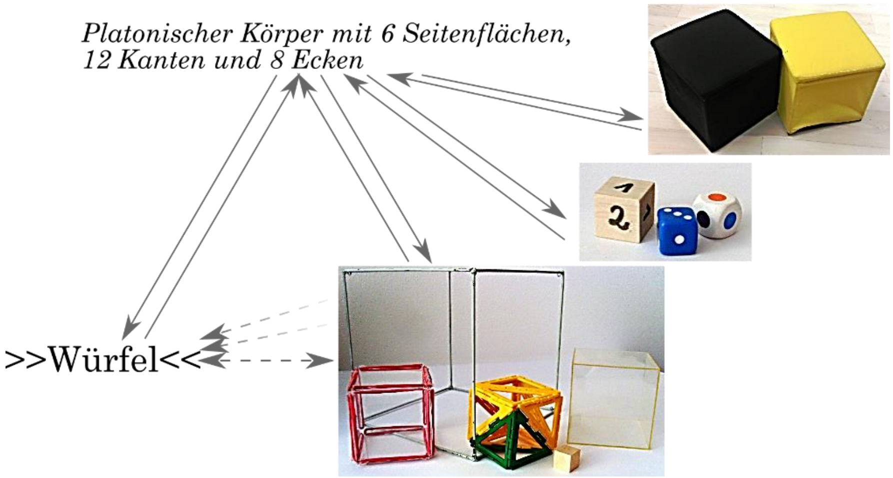


Abbildung 21: Fall 1-1-2 – Würfel

Weiterhin kann der elementargeometrische Begriff konkretisiert gesehen werden in Realisaten, für welche die Elementargeometrie, die Stochastik und der Alltag als Anwendungskontexte deutlich hervorgehoben werden, und zumindest die Elementargeometrie von den anderen Kontexten auch unterschieden wird, während Stochastik und Alltag sich überschneiden können.[22] Der Begriff wird dabei jedoch jeweils als >>Würfel<< bezeichnet. Eine solche Trennung der Anwendungskontexte ist vor allem dann denkbar, wenn Begriff und Objekt nicht deutlich getrennt werden und zusätzlich zu den explizit gemeinten Begriffseigenschaften weitere impliziert werden.

[22] Wenn die Anwendungskontexte von Realisaten explizit unterschieden werden, so konstituiert dies unterschiedliche kontextbezogene Objekte.

Fall 1-2-2 (Abbildung 22)**:**

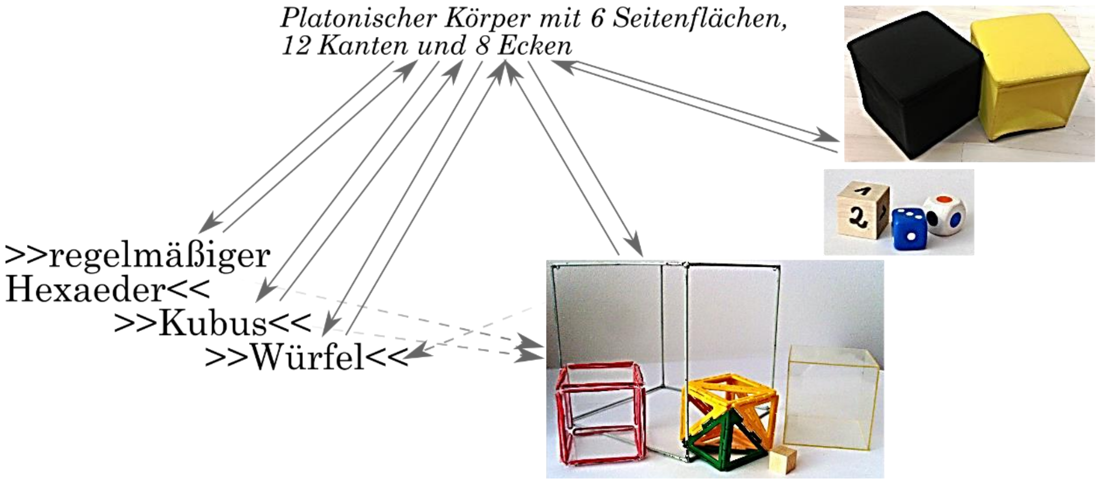


Abbildung 22: Fall 1-2-2 – Würfel

Der elementargeometrische Begriff kann außerdem als >>Würfel<< bezeichnet werden, wenn er in Realisaten, die einem alltäglichen Kontext entstammen, konkretisiert gesehen wird. Demgegenüber kann er als >>Kubus<< oder >>regelmäßiger Hexaeder<< bezeichnet werden, wenn er in Realisaten, die dem rein schulischen Kontext der Elementargeometrie entstammen, konkretisiert gesehen wird. Eine solche Trennung von Bezeichnern nach Anwendungskontexten durch Schülerinnen und Schüler ist vor allem zu Beginn der unterrichtlichen Arbeit mit dem Begriff, wenn auch nicht erwünscht, so doch nicht auszuschließen. Dabei ist es Aufgabe der Lehrperson, sie zu thematisieren und zu reflektieren.

Fall 2-1-1.1 (Abbildung 23)**:**

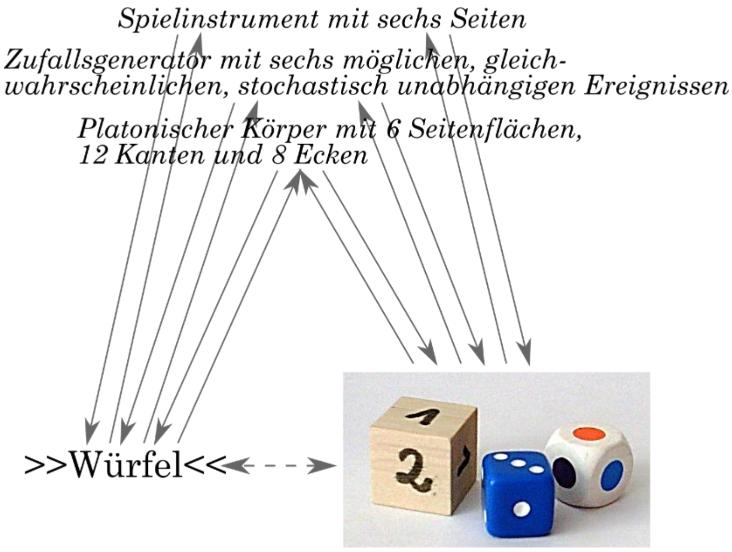


Abbildung 23: Fall 2-1-1.1 – Würfel

Des Weiteren ist es möglich, dass Spielwürfel, die gleichzeitig den Kontexten der Elementargeometrie, der Stochastik und des Alltags zuzuordnen sind, je nach

Verwendungszusammenhang und Blickwinkel, zum elementargeometrischen Begriff und ebenso zu einem stochastischen Begriff – Zufallsgenerator mit sechs möglichen, gleichwahrscheinlichen, stochastisch unabhängigen Ereignissen – und einem alltäglichen Begriff – Spielinstrument mit sechs Seiten – abstrahiert werden, wobei insbesondere der stochastische und der alltägliche Begriff sich überschneiden können. Dabei wird von einigen Eigenschaften der Realisate abgesehen. Im Fall des elementargeometrischen Begriffs werden die Markierungen auf den einzelnen Seiten sowie die Rundungen an Stelle von Kanten und Ecken der rechten beiden Würfel (auf dem in der Objektecke stehenden Bild in Abbildung 23) nicht berücksichtigt. Im Fall des stochastischen sowie alltäglichen Begriffs werden die sehr ausgeprägten Kanten und Ecken des linken Würfels, welche das Rollen beeinträchtigen würden, nicht einbezogen. Andererseits werden andere Eigenschaften in die Realisate hineingesehen, im Fall des elementargeometrischen Begriffs werden Kanten sowie Ecken vorgestellt und im Fall des stochastischen sowie alltäglichen Begriffs eine Gleichwahrscheinlichkeit der Ereignisse. Es ist möglich, dass diese unterschiedlichen Begriffe ausschließlich als Würfel bezeichnet werden.

Fall 2-1-1.2 (Abbildung 24)**:**

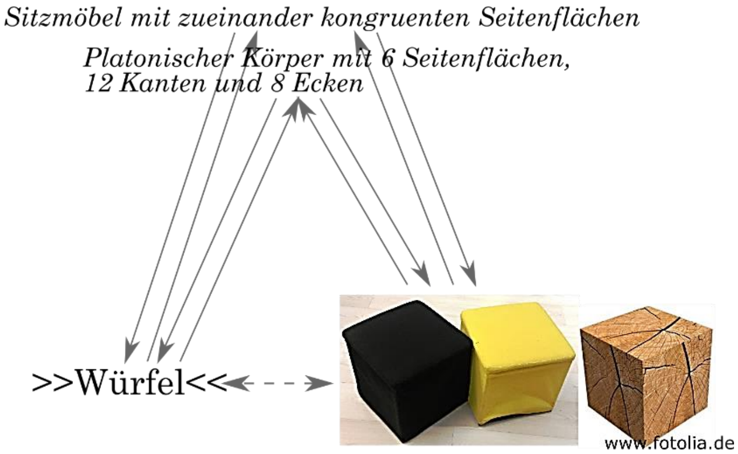


Abbildung 24: Fall 2-1-1.2 – Würfel

Gleichermaßen besteht die Möglichkeit,[23] dass Sitzwürfel, die wiederum gleichzeitig den Kontexten der Elementargeometrie und des Alltags zuzuordnen sind, zum elementargeometrischen Begriff und einem alltäglichen Begriff – hier: Sitzmöbel mit zueinander kongruenten Seitenflächen – abstrahiert werden. Dabei werden im Fall des elementargeometrischen Begriffs die Elastizität und Rundungen an Stelle von Kanten und Ecken der linken Würfel sowie Unebenheiten des rechten Würfels (auf dem Bild in Abbildung 24) nicht berücksichtigt. Im Fall

[23] Neben den beiden hier dargelegten Möglichkeiten für Fall 2-1-1 gibt es viele weitere, die hier nicht aufgeführt werden sollen. Beispielsweise können Eiswürfel (sofern sie echt würfelförmig sind) zu einem elementargeometrischen Begriff und einem alltäglichen Begriff abstrahiert werden.

des alltäglichen Begriffs werden die Kanten, Ecken und Beschaffenheit des rechten Würfels nicht einbezogen, die Begriffsbildung würde in diesem Fall kontextbedingt erfolgen – beispielsweise werden Würfel bestimmter Größe, die um einen Tisch gruppiert sind, als Sitzmöbel aufgefasst. Andererseits werden mit Kanten, Ecken sowie ebenen Flächen im Fall des elementargeometrischen Begriffs und Eignung zum Sitzen im Fall des alltäglichen Begriffs Eigenschaften in die Realisate hineingesehen.

Fall 2-2-1.1 (Abbildung 25)**:**

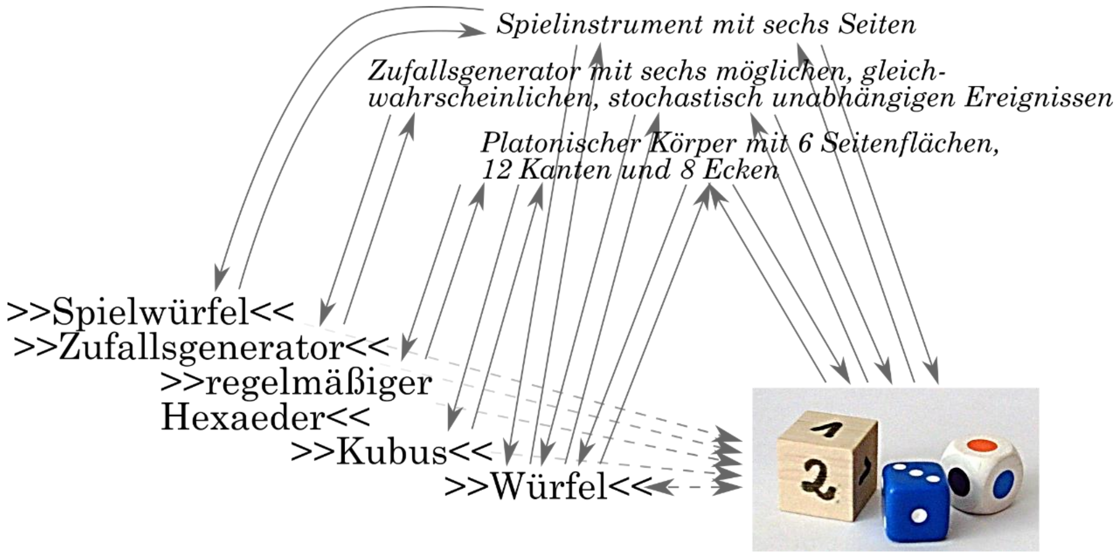


Abbildung 25: Fall 2-2-1.1 – Würfel

Spielwürfel, die gleichzeitig unterschiedlichen Kontexten zuzuordnen sind, und zu verschiedenen Begriffen abstrahiert werden können, können aber auch unterschiedlich bezeichnet werden. So ist es – ausgehend von Fall 2-1-1.1 – möglich, dass der elementargeometrische, der stochastische und der alltägliche Begriff den Bezeichner >>Würfel<< teilen, dass der elementargeometrische Begriff aber zudem als >>Kubus<< oder >>regelmäßiger Hexaeder<< bezeichnet wird, dass der stochastische Begriff auch als >>Zufallsgenerator<< bezeichnet wird, und dass der alltägliche Begriff zumindest als >>Spielwürfel<< bezeichnet wird.

Fall 2-2-1.2 (Abbildung 26)**:**

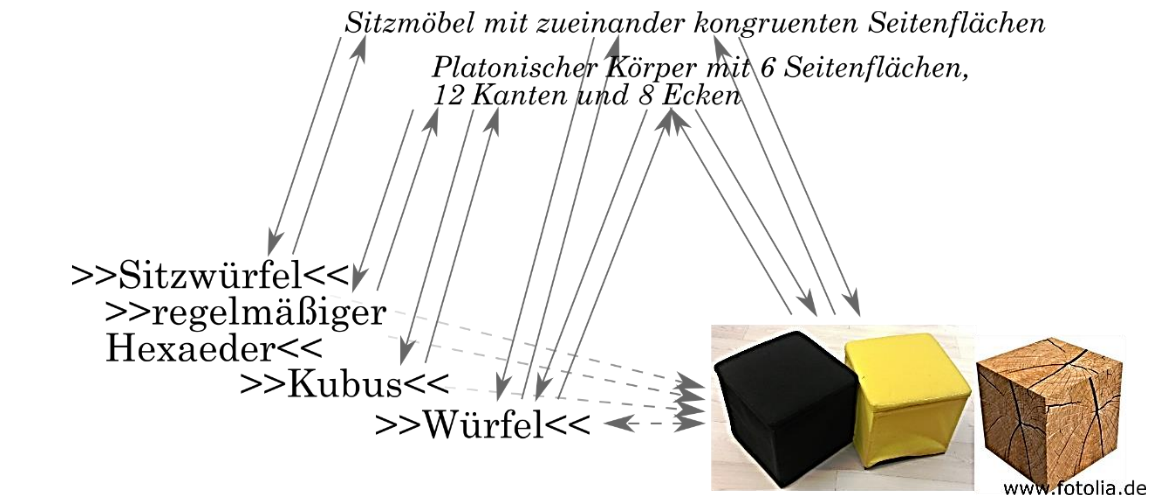


Abbildung 26: Fall 2-2-1.2 – Würfel

Gleichermaßen besteht – ausgehend von Fall 2-1-1.2 – die Möglichkeit, dass der elementargeometrische Begriff, außer als >>Würfel<<, wiederum als >>Kubus<< oder >>regelmäßiger Hexaeder<< bezeichnet wird, und dass der alltägliche Begriff, neben dem Bezeichner >>Würfel<<, auch den Bezeichner >>Sitzwürfel<< trägt.

Fall 2-1-2 (Abbildung 27)**:**

Abbildung 27: Fall 2-1-2 – Würfel

Letztlich ist es möglich, dass der Bezeichner >>Würfel<< neben dem elementargeometrischen Begriff schon einen stochastischen Begriff – Zufallsgenerator mit beliebig vielen möglichen, gleichwahrscheinlichen, stochastisch unabhängigen Ereignissen – und alltägliche Begriffe – Spielinstrument mit beliebig vielen Seiten, Sitzmöbel mit beliebiger Grundfläche – bedeutet und in Realisaten aus den entsprechenden Kontexten konkretisiert gesehen wird.

Die unterschiedlichen Fälle stehen natürlich auch mit Bezug auf den Würfel nicht nebeneinander, sondern entstandene Triangulationsbrüche können sich überlagern und dabei wechselwirken. So kann beispielsweise (Abbildung 28) der elementargeometrische Begriff gleichzeitig als >>Würfel<<, >>Kubus<< und >>regelmäßiger Hexaeder<< bezeichnet werden (Fall 1-2-1). Der Bezeichner >>Würfel<< kann dabei neben dem elementargeometrischen Begriff schon einen allgemeinen stochastischen und allgemeine alltägliche Begriffe bedeuten, die konkretisiert gesehen werden in Realisaten aus den entsprechenden Kontexten (Fall 2-1-2). Gleichzeitig kann der elementargeometrische Begriff konkretisiert gesehen werden in Realisaten, für welche an sich schon die Elementargeometrie, die Stochastik und der Alltag als Anwendungskontexte deutlich hervorgehoben werden (Fall 1-1-2).

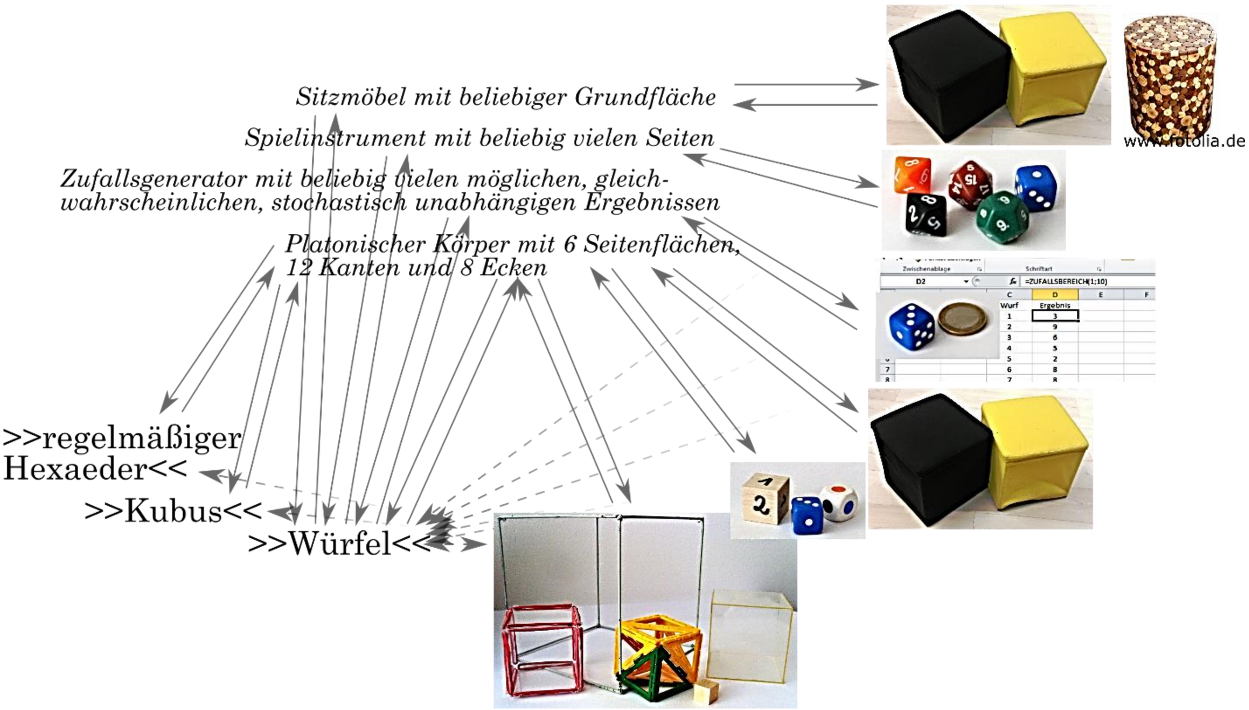


Abbildung 28: Überlagerung Triangulationsbrüche (Fälle 1-2-1, 2-1-2 und 1-1-2)
– Würfel

3. Übertragung des Modells auf weitere Begriffe

Im letzten Kapitel wurden die verschiedenen möglichen Triangulationsbrüche im Begriffsfeld anhand des Würfelbegriffs verdeutlicht. Dieses Kapitel widmet sich der Übertragung des Begriffsfeldes auf weitere Begriffe. Dazu wird eine Typologie für Begriffe ausgearbeitet, und für die einzelnen Begriffstypen wird die Möglichkeit der Übertragung thematisiert. Anschließend werden drei Beispielbegriffe unterschiedlicher Begriffstypen genauer betrachtet. Letztlich wird in einem Exkurs schon ein psychologisch geprägter Blick auf die Übertragung des Modells geworfen, der den Weg in das folgende Kapitel ebnet.

3.1. Typologie von Begriffen

Wie bereits erwähnt, eignet sich das Beispiel des Würfels in besonderem Maße, die verschiedenen möglichen Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck theoretisch darzulegen, weil verschiedene Bezeichner, Begriffe und Objekte eine Vielzahl solcher Triangulationsbrüche bedingen. Daher stellt sich die Frage, inwieweit sich die theoretischen Ausführungen zum Würfel auf andere Begriffe übertragen lassen. Um dies zu beleuchten, werden zunächst mögliche Typologien für im Geometrieunterricht relevante Begriffe thematisiert, basierend auf denen für die vorliegende Arbeit eine Typologie ausgearbeitet wird.

HOLLAND (1988, S. 153ff) unterscheidet in seiner „Geometrie in der Sekundarstufe“ nach inhaltlichen Gesichtspunkten zwischen Figuren-, Abbildungs- und Maßbegriffen, und unterteilt dabei jeweils in ebene und räumliche Begriffe. Er differenziert weiterhin nach logischen Gesichtspunkten zwischen Objekt-, Relations- und Funktionsbegriffen. Objektbegriffe sind dabei auf gemeinsamen Eigenschaften basierende Klassen von Objekten, Relationsbegriffe sind auf Lagebeziehungen zwischen geometrischen Objekten basierende Klassen, und unter Funktionsbegriffe fallen vor allem die Maßbegriffe. Hier nachrangiger sind Funktionsbegriffe aber auch spezielle Relationsbegriffe oder Objektbegriffe, wenn diese in Form einer Funktion repräsentiert sind. HOLLAND unterscheidet außerdem nach axiomatischen Gesichtspunkten zwischen Grundbegriffen und definierten Begriffen sowie nach strukturellen Gesichtspunkten zwischen Begriffen aus der Topologie, der Affingeometrie, der Ähnlichkeitsgeometrie und der Kongruenzgeometrie. In einer späteren Auflage (2007) seiner Geometrie ist die explizite Unterscheidung nach inhaltlichen, logischen und den weiteren genannten Gesichtspunkten (die in einem gemeinsamen Kapitel „Begriffserwerb“ zusammengefasst waren) einer Trennung nach „Figuren und Relationen“, „Messen und Berechnen“ sowie „Abbildungen“ (die jeweils eigene Kapitel konstituieren) gewichen.[24] Ge-

[24] Die Änderung des Kapitels „Begriffserwerb“ aus HOLLAND (1988) in HOLLAND (2007) ist dabei einer gewandelten Schwerpunktsetzung in der Mathematikdidaktik geschuldet. So heißt es im Vorwort zur dritten Auflage, dass die Konzeption des Buches, die sich an den Prozesszielen des Geometrieunterrichts orientiere, heute erst recht aktuell sei. Dies spiegelt sich sowohl in der

wissermaßen nebeneinander gestellt werden somit nur noch Figuren- und Relationsbegriffe, Maßbegriffe sowie Abbildungsbegriffe.

Einige von HOLLANDs Unterscheidungsmerkmalen finden sich auch bei VOLLRATH (1984, S. 64ff) bezogen auf den Mathematikunterricht allgemein. So stimmen für die Geometrie HOLLANDs Objekt- beziehungsweise Relationsbegriffe mit VOLLRATHs Eigenschafts- beziehungsweise Relationsbegriffen – bei ihm wird dies „relationstheoretische Typologie“ genannt – überein. Dabei sind Eigenschaftsbegriffe bei VOLLRATH solche, zu deren Definition eine Variable ausreicht, während Relationsbegriffe jene sind, die sich erst durch In-Beziehung-Setzen zweier Variablen zueinander definieren lassen. Weiterhin findet sich HOLLANDs axiomatische Typologie auch bei VOLLRATH. VOLLRATH differenziert außerdem zwischen durch Negation, Disjunktion, Konjunktion, Generalisation und Partikularisation definierten Begriffen, zwischen Ober-, Unter- und Nachbarbegriffen, sowie zwischen objekt- und metasprachlichen Begriffen (wobei es sich bei ersteren um mathematische Begriffe an sich handelt, während letztere zum Kommunizieren über die Inhalte verwendet werden). Da sich VOLLRATHs Begriffstypologien nicht nur auf Geometrie beziehen, unterscheidet er noch zwischen Begriffen aus verschiedenen mathematischen Bereichen. Bezogen auf ausschließlich Geometrie erscheinen die Typologien jedoch in einigen Aspekten zu grob, die sich bei HOLLAND feiner ausgearbeitet finden.

Aus diesem Grund sollen Begriffe in der vorliegenden Arbeit weitestgehend basierend auf HOLLAND, mit einer Zusammenführung inhaltlicher und logischer Gesichtspunkte nach FILLER (2011, S. 32), klassifiziert werden. Zentral ist zunächst die Unterscheidung zwischen Figuren-, Abbildungs- und Maßbegriffen. Figurenbegriffe sollen allerdings nicht an sich aufgeführt werden, sondern direkt weiter unterteilt werden in Objektbegriffe, Relationsbegriffe und hier als >>relative Objektbegriffe<< bezeichnete Begriffe. Relative Objektbegriffe fassen solche Objekte, die durch Relationen von beziehungsweise zu anderen Objekten bestimmt sind (Abbildung 29). Da die relativen Objektbegriffe sowohl auf Objektbegriffe als auch auf Relationsbegriffe zurückgreifen, werden sie als diesen untergeordnet betrachtet.

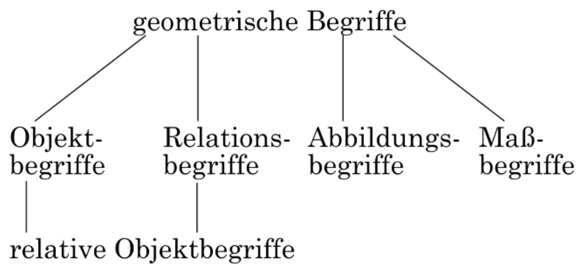


Abbildung 29: Begriffsklassifizierung

Aufgliederung des ursprünglichen Kapitels zu Begriffen und damit in dessen stärkerer Verzahnung mit den weiteren Inhalten als auch in den Kapitelnamen, vor allem in der Überschrift „Messen und Berechnen“ zu den Ausführungen zu Maßbegriffen, wider.

Im Folgenden werden die verschiedenen Begriffstypen kurz beschrieben. Da in 1.2. bereits die Anschaulichkeit geometrischer Objekte angesprochen wurde, soll insbesondere auf die Möglichkeit einer anschaulichen Darstellung der die Begriffe konkretisierenden Objekte eingegangen werden. Objektbegriffe sind nun solche, die sich auf Objekte an sich beziehen und sich durch Realisate direkt darstellen lassen, wie beispielsweise Punkt, Gerade, Ebene, verschiedene Körper und Figuren. Relationsbegriffe sind solche, die sich auf Relationen zwischen Objekten beziehen und sich entsprechend, möglicherweise mit der Unterstützung eines Interpretanten, darstellen lassen, wie beispielsweise parallel, senkrecht, symmetrisch, kongruent, ähnlich. Relative Objektbegriffe sind solche, die sich direkt darstellen lassen, aber erst durch in Beziehung Setzen anderer Realisate beziehungsweise zu anderen Realisaten ihre Bedeutung erhalten. Dazu gehören beispielsweise Schnittpunkt oder Mittelsenkrechte.

Abbildungsbegriffe beziehen sich auf Abbildungen und unterscheiden sich von Figurenbegriffen darin, dass sie sich nur durch eine Kombination der Darstellungen verschiedener Objektbegriffe, Relationsbegriffe und relativer Objektbegriffe, sowie eventuell zusätzlicher Interpretanten, darstellen lassen. Zur Dekodierung der Darstellung ist damit ein bedeutend höheres Maß an Interpretation notwendig, als zur Dekodierung der Darstellungen von Figurenbegriffen. Abbildungsbegriffe sind beispielsweise Spiegelung, Drehung und Verschiebung.

Maßbegriffe wiederum beziehen sich auf Maße und lassen sich nur in Form der Darstellung eines Objektbegriffs und eventuell zusätzlicher Interpretanten darstellen. Sie bedürfen daher auch eines hohen Maßes an Interpretation. Maßbegriffe sind beispielweise Länge, Flächeninhalt und Rauminhalt.

HOLLANDs inhaltliche Unterteilung in ebene und räumliche Begriffe soll hier außen vor bleiben, da sich diese nur auf die Dimension der Realisate auswirken würde. Auch HOLLANDs logische Trennung von Funktionsbegriffen, welche die Maßbegriffe, eine Untermenge der Relationsbegriffe sowie unter Umständen eine Untermenge der Objektbegriffe beinhalten, soll nicht berücksichtigt werden.

Da Begriffe im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht auf ihre Definition reduziert werden sollen, bleibt die Unterscheidung zwischen Grundbegriffen und definierten Begriffen sowie zwischen verschiedenen logischen Formen der Definition ebenfalls außen vor. Andererseits sollen die verschiedenen Bereiche von Geometrie gemeinsam betrachtet werden und Ober-, Unter- und Nachbarbegriffe eines Begriffs stets im Auge behalten werden. Metasprachliche Begriffe sind auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur auf einer Meta-Ebene relevant, und daher nicht Bestandteil der Begriffstypologie.

Neben den bereits genannten Klassifizierungen, die basieren auf begriffsinhärenten Merkmalen oder der Rolle eines Begriffs in einem wissenschaftlichen Aufbau der Mathematik, lassen sich verschiedene didaktische Rollen eines Begriffs unterscheiden, die einem Begriff bei der Unterrichtsplanung durch den Lehrplan, das Schulbuch oder die Lehrperson zugewiesen werden können. Dabei wird nach VOLLRATH (1984, S. 69ff) und basierend darauf auch WEIGAND (2009a, S. 115) zwischen Leitbegriffen, Schlüsselbegriffen, Standardbegriffen und Arbeitsbegriffen unterschieden, die im Folgenden beschrieben werden – der Beschreibung folgt schließlich ein Beispiel. Leitbegriffe erstrecken sich über mehrere Klassenstufen, an ihnen orientieren sich einzelne Unterrichtssequenzen. Schlüsselbegriffe bestimmen den Inhalt der Unterrichtssequenzen, eine Begriffsentwicklung der Schlüsselbegriffe ist aus inhaltlicher Sicht das hauptsächliche Anliegen der Unterrichtssequenzen. Standardbegriffe werden in einzelnen Unterrichtseinheiten verwendet und dienen dazu, das Begriffswissen zu vertiefen und auszubauen. Arbeitsbegriffe werden lediglich angesprochen, ihre Bedeutung ergibt sich dabei meist aus dem Kontext und sie dienen vor allem der Kommunikation über Begriffe. Leitbegriffe und Arbeitsbegriffe lassen sich, da erstgenannte Oberbegriffe sind, die Unterrichtssequenzen in verschiedenen Klassenstufen strukturieren und anschließend genannte undefiniert verwendet und nicht explizit thematisiert werden, gut von Schlüssel- und Standardbegriffen abgrenzen. Die Klassen der Schlüssel- und Standardbegriffe hingegen sind nicht trennscharf, da sie unter anderem auf der Schwerpunktsetzung der Lehrperson beruhen. Es kann aber beispielsweise mit Bezug auf eine Unterrichtssequenz zum Würfel in Klassenstufe 5 Körper ein Leitbegriff und Würfel ein Schlüsselbegriff sein. Würfeldreieck oder Diagonale können dann Standardbegriffe und Ecke, Kante oder Seitenfläche Arbeitsbegriffe sein.

3.2. Typenspezifische Betrachtung von Schlüsselbegriffen

Um die Übertragbarkeit der Ausführungen zum Würfel auf andere Begriffe zu untersuchen, sollen nun für den Geometrieunterricht relevante Schlüsselbegriffe (wovon einige sich wohl im Übergang zu Standardbegriffen befinden) gesammelt und mittels dem im letzten Abschnitt zusammengetragenen Schema klassifiziert werden (Tabelle 2). Die Auflistung der Begriffe beruht auf HOLLAND (2007, S. 25ff), der die Inhalte des Geometrieunterrichts in der Sekundarstufe I, basierend auf den Lehrplänen der Bundesländer, ausgearbeitet hat. Die Reihenfolge der Auflistung orientiert sich an der Reihenfolge der Thematisierung im Unterricht, wie sie laut Lehrplänen vorgesehen ist. Als Werkzeug, mit Hilfe dessen HOLLANDs nicht unmittelbar begriffsbezogenen Themenbereiche auf eine begriffliche Ebene übertragen werden, werden die Lehrpläne für die Gymnasien im Saarland (vgl. Ministerium für Bildung und Kultur Saarland 2014a, 2014b & 2014c; Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft Saarland 2004 & 2005) verwendet, die zudem als zusätzliches Sortierkriterium für nach HOLLAND nebeneinander stehende Begriffe dienen.

Objektbegriffe	Relationsbegriffe	relative Objektbegriffe	Abbildungsbegriffe	Maßbegriffe
Punkt				
Strecke				Streckenlänge
Gerade, Strahl	parallel, senkrecht	Schnittpunkt		Abstand (Punkt-Gerade, Gerade-Gerade)
Kreis				
Winkel				Winkelmaß
Quadrat, Rechteck				Flächeninhalt, Umfang
Körper: Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel				Oberflächeninhalt, Rauminhalt (von Würfel und Quader)
	achsensymmetrisch			
	punktsymmetrisch			
			Achsenspiegelung	
			Punktspiegelung	
			Verschiebung	
			Drehung	
	kongruent		Bewegung	
Dreieck		Mittelsenkrechte, Seitenhalbierende, Höhe, …		
				Flächeninhalt
Vierecke: Quadrat, Rechteck, Raute, Drachen, Parallelogramm, Trapez				Flächeninhalt
	ähnlich		zentrische Streckung	
				Flächeninhalt, Umfang (von Kreis)
				Oberflächeninhalt, Rauminhalt (von Körpern)

Tabelle 2: Geometrische Schlüsselbegriffe

Obige Tabelle stellt den Fundus bereit, auf Grundlage dessen die Möglichkeit der Übertragung des Begriffsfeldes für die einzelnen Begriffstypen thematisiert wird. Damit soll gezeigt werden, dass keiner der in 1.3. genannten Fälle Würfel-spezifisch ist. Es wird genauer ein Blick darauf geworfen, inwieweit für die Begriffe verschiedene Bezeichner und Objekte (möglicherweise aus verschiedenen Kontexten) zur Verfügung stehen und inwieweit die gegebenen Bezeichner unterschiedliche Begriffe bedeuten können (für die dann eventuell weitere Bezeichner und Objekte zur Verfügung stehen). Ebenso kann überlegt werden, inwieweit Realisate die Begriffseigenschaften unterschiedlich konkretisieren oder auch einige davon jeweils der Ideation überlassen. Diese Punkte sind von Bedeutung, da auf ihnen die für den Würfel schon genannten Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck beruhen.

Mit Bezug auf die obig genannten Objektbegriffe, wozu auch der Würfel gehört, fällt auf, dass die jeweiligen Bezeichner mit Ausnahme von >>Gerade<<, >>Quadrat<<, >>Rechteck<< und, unter den Körpern, >>Quader<< auch außermathematische Begriffe bedeuten können, die dann in den jeweiligen Objekten konkretisiert sein können und mit Ausnahme von >>Prisma<<, >>Kegel<<, >>Raute<<, >>Parallelogramm<< und >>Trapez<< auch weitere Bezeichner haben.[25] So kann beispielsweise >>Punkt<< auch einen Ort, an dem man sich aufhalten kann oder eine Stelle in einer zeitlichem Abfolge bedeuten und in den entsprechenden Objekten, die in diesem Fall nicht als konkrete Gegenstände gedacht werden dürfen, konkretisiert sein. Die jeweiligen Begriffe können dann weiterhin beispielsweise als >>Position<<, >>Standort<< beziehungsweise >>Zeitpunkt<< oder allgemeiner als >>Stelle<< bezeichnet werden. Zudem kön-

[25] Um dies nachzuvollziehen, wurden über das Internet zugängliche Thesauri und ein Textkorpus verwendet. Beides vereint findet sich dabei im digitalen Wörterbuch der deutschen Sprache (www.dwds.de), welches auf etablierten Wörterbüchern beruht. Zudem wurde der im Duden integrierte Thesaurus (www.duden.de) und ein weiterer Online-Thesaurus (www.openthesaurus.de) verwendet.
Ein Thesaurus gibt zu einem Bezeichner synonyme Bezeichner an, die jeweiligen Begriffe und Objekte können dann selbst erschlossen werden. Ein Textkorpus gibt häufige Verwendungen eines Bezeichners an, er umreißt somit Begriffe, aus denen dann die konkretisierenden Objekte erschlossen werden können. Sämtliche Ausgaben der Thesauri und des Textkorpus wurden von der Autorin reflektiert, bei den Ausführungen wurden dann im Alltag oder Mathematikunterricht komplett unübliche Bezeichner, Begriffe und Objekte ausgeklammert.
Es können nachstehend erstgenannte Bezeichner beispielsweise dieselbe Bedeutung haben, wie diesen folgende Bezeichner:
>>Strecke<<: >>Weg<<, >>Route<<.
>>Strahl<<: >>Lichtstrahl<<, >>Schein<<.
>>Kreis<<: >>Bereich<<, >>Zone<<, >>Gruppe<<.
>>Winkel<<: >>Formlehre<<, >>Schmiege<<, >>Bodenträger<<, >>Ecke<< (siehe auch 3.3.1.).
>>Würfel<<: >>Zufallsgenerator<<, >>Spielwürfel<<, >>Sitzwürfel<<.
>>Pyramide<<: >>Erdpfeiler<<, >>Lichtergestell<<.
>>Zylinder<<: >>Rolle<<, >>Walze<<, >>Hut<<.
>>Kugel<<: >>Patrone<<, >>dicker Mensch<<.
>>Dreieck<<: >>Autobahnknoten<<.
>>Drachen<<: >>Gleitfluggerät<<, >>Furie<<.

nen die Begriffe, die durch >>Strahl<<, >>Raute<< beziehungsweise >>Parallelogramm<< bezeichnet werden, an sich schon durch weitere Bezeichner bezeichnet werden,[26] und alle genannten Begriffe haben Konkretisierungen aus unterschiedlichen Anwendungskontexten. Gegebenenfalls werden dabei jeweils nur einige Eigenschaften konkretisiert, während die anderen der Ideation überlassen werden. So werden insgesamt alle Fälle aus 1.3.[27] möglich.

Es ist darüber hinaus darauf hinzuweisen, dass zusätzliche Triangulationsbrüche entstehen können, wenn neben den obig aufgeführten Objektbegriffen die diese beschreibenden Adjektive (z.B. >>kreisförmig<<, >>quadratisch<< oder >>rechteckig<<)[28] betrachtet werden. Die Begriffsfelder der Objektbegriffe sowie der zugehörigen Adjektive überlagern sich dann an den Kanten der Begriffe und Objekte, woraus sich ein umso umfangreicheres Begriffsfeld ergibt. Weiterhin können Fehlvorstellungen oder -verständnisse, welche verschiedene Begriffe betreffen (z.B. sowohl die Verwechslung von Strecke und Gerade beziehungsweise Quadrat und Würfel, als auch ein unzureichendes Erfassen der hierarchischen Beziehung von Quadrat zu Rechteck sowie Würfel zu Quader), die jeweiligen Begriffsfelder beeinflussen, was sich wiederum in einer Überlagerung und einem noch umfangreicheren Begriffsfeld zeigt – dies gilt ebenso für die im Folgenden zu betrachtenden Begriffstypen.

Bezüglich der obig genannten Relationsbegriffe können die Bezeichner >>parallel<<, >>senkrecht<<, >>kongruent<< und >>ähnlich<< auch außermathematische Begriffe bedeuten, die dann wiederum in den jeweiligen Objekten konkretisiert sein können und weitere Bezeichner haben können.[29] Gleiches gilt für >>symmetrisch<<, wobei die verschiedenen Begriffe, die dieser Bezeichner bedeuten kann, auch im Sinne von Konnotationen, die Bedeutung der untergeord-

---

[26] >>Halbgerade<<, >>Rhombus<< beziehungsweise >>Rhomboid<<.

[27] Hier handelt es sich um eine Gesamtbetrachtung – nicht für jeden Begriff sind alle Fälle möglich. Wenn beispielsweise im geometrischen Kontext keine Synonyme existieren, so liegen nur Fälle 1-1-2, 2-1-1, 2-2-1 und 2-1-2 vor (siehe hierzu den Begriff Winkel in 3.3.1.).

[28] Es kann >>rechteckig<< den Konventionen widersprechend die Bedeutung von >>quaderförmig<< annehmen. So heißt es bei MAIER et al mit Bezug auf die Bundestagswahl:

> Die von Wahlberechtigten abgegebenen Wahlzettel werden in Wahlurnen gesammelt. Dies sind rechteckige, mit einem Deckel versehene Gefäße, deren innere Höhe mindestens 90 cm und bei denen der Abstand von einer Wand zur gegenüberliegenden Wand mindestens 35 cm betragen soll. Im Deckel hat die Wahlurne einen bis zu 2 cm breiten Spalt.
>
> (MAIER et al 1949)

Obiger Fehler hat sich dabei über einen langen Zeitraum repliziert, wie schon JELLINEK (1926) zeigt. Derselbe Fehler ist allerdings mit Bezug auf >>Rechteck<< als Substantiv nicht naheliegend.

[29] Es können nachstehend erstgenannte Bezeichner beispielsweise dieselbe Bedeutung haben, wie die diesen folgenden Bezeichner:
>>parallel<<: >>gleichartig<<, >>gleichzeitig<<.
>>senkrecht<<: >>lotrecht<<, >>vertikal<<, >>aufrecht<< (siehe auch 3.3.2.).
>>kongruent<<: >>übereinstimmend<<, >>konform<<.
>>ähnlich<<: >>verwandt<<, >>vergleichbar<<.

neten Bezeichner beeinflussen können.[30] Die außermathematischen Begriffe sind dabei teilweise enger oder aber auch weiter als die mathematischen Begriffe.[31] Zudem können die Begriffe, die durch >>parallel<<, >>senkrecht<< beziehungsweise >>kongruent<< bezeichnet werden, an sich schon durch weitere Bezeichner bezeichnet werden,[32] und alle genannten Begriffe haben unterschiedliche Konkretisierungen. Diese Konkretisierungen können sich auch darin unterscheiden, inwieweit eine Relation mittels Interpretanten konkretisiert wird – die Relation an sich bleibt jedoch immer der Ideation überlassen. Insgesamt macht dies wiederum alle Fälle aus 1.3. möglich.

Im Hinblick auf obig genannte relative Objektbegriffe können die Begriffe, die im Dreieck als >>Mittelsenkrechte<< beziehungsweise >>Seitenhalbierende<< bezeichnet werden, auch durch >>Streckensymmetrale<< beziehungsweise >>Schwerlinie<< bezeichnet werden. Diese Bezeichner können dabei andere mathematische Begriffe bedeuten, die dann wiederum in den jeweiligen Objekten konkretisiert sein können. So bedeutet beispielsweise >>Schwerlinie<< allgemein eine Linie, auf welcher der Schwerpunkt eines Vielecks liegt. Auch relative Objektbegriffe haben unterschiedliche Konkretisierungen, die jeweils einige Eigenschaften der Ideation überlassen, wie zurückgeführt werden kann auf die entsprechenden Aussagen für Objekt- sowie Relationsbegriffe. Damit werden die Fälle 1-2-1, 2-1-1 und 2-2-1 aus 1.3. möglich.

Mit Bezug auf die Abbildungsbegriffe können die Bezeichner >>Drehung<< und >>Verschiebung<< auch außermathematische Begriffe bedeuten, die dann wiederum in den jeweiligen Objekten konkretisiert sein können und weitere Bezeichner haben können.[33] Gleiches gilt für >>Spiegelung<< und >>Streckung<<, wovon wieder die untergeordneten Bezeichner beeinflusst sein können.[34] Zudem haben die Abbildungsbegriffe an sich unterschiedliche Konkretisierungen, welche die eine Abbildung charakterisierenden Eigenschaften verschieden, auch mittels Interpretanten, konkretisieren können – die Abbildung an sich bleibt jedoch immer der Ideation überlassen. Das macht insgesamt die Fälle 1-1-2, 2-1-1, 2-2-1 und 2-1-2 aus 1.3. möglich.

Bezüglich der Maßbegriffe können die Bezeichner >>Abstand<< und >>Umfang<< weitere Begriffe bedeuten, dann in entsprechenden Objekten konkreti-

[30] Es kann >>symmetrisch<< dieselbe Bedeutung haben wie >>gleichmäßig<< oder >>ausgeglichen<<.

[31] Für einen außermathematisch häufig enger gefassten Begriff ist hierbei auf die Betrachtung des Begriffs senkrecht in 3.3.2. zu verweisen. Mit Bezug auf einen außermathematisch weiter gefassten Begriff bedeutet >>ähnlich<< mitunter eine beliebige Form von Entsprechung und wird dann auch beispielsweise einfach als >>entsprechend<< bezeichnet.

[32] >>gleich gerichtet<<, >>orthogonal<< oder >>lotrecht<< beziehungsweise >>deckungsgleich<<.

[33] So kann >>Drehung<< dieselbe Bedeutung haben wie >>Rotation<< oder >>Umlauf<< beziehungsweise >>Verschiebung<< wie >>Verlegung<< oder >>Verzögerung<<.

[34] So kann >>Spiegelung<< dieselbe Bedeutung haben wie >>Reflexion<< oder >>Widerschein<< beziehungsweise >>Streckung<< wie >>Dehnung<< oder >>Extension<<.

siert sein und auch durch weitere Bezeichner bezeichnet werden.[35] >>Rauminhalt<< kann darüber hinaus durch >>Volumen<< als weiteren Bezeichner bezeichnet werden. Sämtliche Begriffe haben unterschiedliche Konkretisierungen, da die zu Grunde liegenden Realisate sich insofern unterscheiden können, dass das jeweilige Maß auf unterschiedliche Weise abstrahiert wird. Dabei kann auf den Maßbegriff mittels unterschiedlicher Interpretanten hingewiesen werden – das Maß an sich bleibt aber immer der Ideation überlassen. So werden insgesamt alle Fälle aus 1.3. möglich.

Im Ganzen lässt sich schließen, dass tatsächlich keiner der in 1.3. genannten Fälle Würfel-spezifisch ist, und dass es nur wenige Schlüsselbegriffe gibt, bei denen die Beziehung zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt eineindeutig ist. Selbst bei diesen wenigen Begriffen können unterschiedliche Realisate und der Ideation überlassene Eigenschaften dieser Missverständnisse bei Lernenden auslösen, und solche Fehlvorstellungen und -verständnisse können zur Überlagerung von Begriffsfeldern führen. Zudem können Fehlvorstellungen und -verständnisse zur Überlagerung der zu unterschiedlichen Begriffen gehörenden Begriffsfelder führen. Objektbegriffe eignen sich allerdings aufgrund der stärker gegenständlichen Natur der konkretisierenden Objekte[36] besonders zur Veranschaulichung möglicher Triangulationsbrüche.

3.3. Betrachtung weiterer Beispiele

Im vorigen Abschnitt wurden für alle dort aufgeführten Schlüsselbegriffe Triangulationsbrüche aufgezeigt oder zumindest angedeutet, um den Umfang der Arbeit nicht zu sprengen, wurde das jeweilige Begriffsfeld jedoch nicht umfassend rekonstruiert. Daher sollen die in 1.3. genannten Triangulationsbrüche nun für drei weitere Beispiele – Winkel, senkrecht und Umfang[37] – ausgeführt und damit das Begriffsfeld rekonstruiert werden. Mit Winkel, senkrecht und Umfang werden drei Begriffsklassen, Objektbegriffe, Relationsbegriffe und Maßbegriffe, angesprochen. So kann gezeigt werden, dass die einzelnen betrachteten Triangulationsbrüche nicht nur in unterschiedlichen rein bereichsbezogenen Anwendungskontexten der Begriffe begründet sind.

[35] >>Distanz<<, >>Entfernung<< oder auch >>Zeitintervall<< beziehungsweise >>Umfangslänge<<, >>Umfangslinie<< oder >>Rand<< (siehe auch 3.3.3.).
[36] Dass auch mit Bezug auf Objektbegriffe nicht alle im Begriffsfeld auftretenden konkretisierenden Objekte gegenständlich, und damit Realisate, sind, zeigt das genannte Beispiel Punkt.
[37] Die hier betrachteten Begriffe, allen voran der Begriff Winkel (vgl. u.a. das Themenheft „Praktische Winkelmessung“ der Zeitschrift „Der Mathematikunterricht“ (Vollrath 1999)), wurden in der Mathematikdidaktik oft diskutiert. Da jedoch kein Beitrag die Begriffe aus der hier eingenommenen semiotischen Perspektive betrachtet, können diese Beiträge hier außen vor bleiben.

3.3.1. Winkel

Winkel wurde als Beispiel gewählt, weil es sich dabei um einen Objektbegriff handelt, der, verglichen mit Würfel, weniger anschaulich ist. Ein Winkel kann unter anderem beschrieben werden als Teil der Ebene, der von zwei Halbgeraden mit einem gemeinsamen Ursprung begrenzt wird,[38] und er kann dargestellt werden mittels der Halbgeraden und eventuell eines Kreisbogens, weswegen er eines großen Maßes an Ideation bedarf. Obwohl Winkel in einer Ebene liegen,[39] können sie anhand räumlicher Objekte konkretisiert werden, was das benötigte Maß an Ideation noch erhöht (da die entsprechende Ebene hineingesehen werden muss).

Ausgangspunkt ist, analog zum Beispiel des Würfels, der als >>Winkel<< bezeichnete elementargeometrische Begriff in einer Ebene und ein eindeutiges semiotisches Dreieck (Abbildung 30).

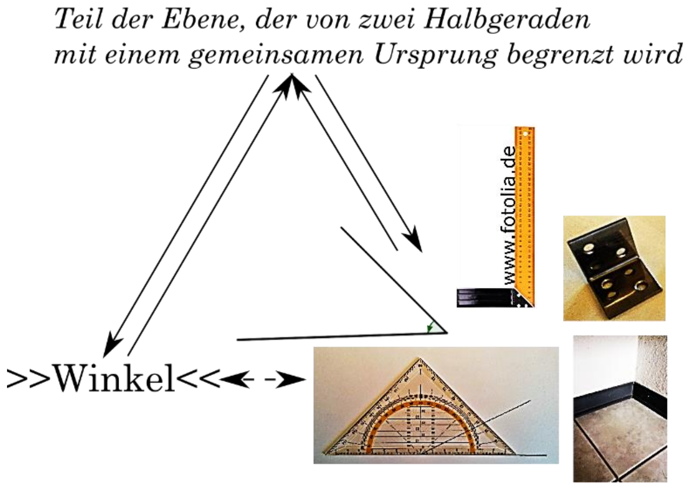


Abbildung 30: Das semiotische Ausgangsdreieck – Winkel

Die Wortformel an der Begriffsecke des Dreiecks – Teil der Ebene, der von zwei Halbgeraden mit einem gemeinsamen Ursprung begrenzt wird – dient wiederum nur als Interpretant und könnte ebenso anders lauten. Beispielsweise könnte ein Winkel ebenso charakterisiert werden als die Fläche, die bei Bewegen einer Halbgeraden mit Fixpunkt in einem Ursprung überstrichen wird. Der Begriff ist konkretisiert in zwei- oder dreidimensionalen Realisaten, in die der Begriff hineingesehen werden kann. Eine ebene Darstellung zweier Halbgeraden konkretisiert den Begriff dabei beschränkt auf Wesentliches und bedarf daher wenig Ideation, während in dreidimensionale Realisate die Halbgeraden, deren Ursprung

[38] Ebenso ist es möglich, einen Winkel als Teil des Raumes, der von zwei Halbebenen begrenzt wird, zu beschreiben. Da im Mathematikunterricht allerdings üblicherweise von dem Winkel in der Ebene ausgegangen wird, wurde hier eine zweidimensionale Beschreibung gewählt. Es ist dabei legitim, keine zusätzliche Unterscheidung zwischen dem ebenen und dem räumlichen Winkel zu machen, weil auch der Winkel zwischen zwei Ebenen eindeutig ist – dies lässt sich damit begründen, dass er sich mittels der eindeutigen Normalenvektoren der Ebenen berechnen lässt. Es würde sich somit nicht der Begriff, sondern lediglich dessen Beschreibung, unterscheiden.

[39] An dieser Stelle soll darauf hingewiesen, dass ein Winkel, auch wenn er in einer Ebene liegt, dimensionslos ist.

sowie die Ebene, in der diese liegen und der von ihnen begrenzte Teil der Ebene erst hineingesehen werden muss – dabei gibt es unter Umständen verschiedene Möglichkeiten für die Lage der Halbgeraden und damit auch verschiedene Winkel.

Für den Begriff Winkel lassen sich die in Abschnitt 1.3. durch die Fälle 1-2-1 und 1-2-2 beschriebenen Triangulationsbrüche nicht finden. Dies ist darin begründet, dass der elementargeometrische Begriff ausschließlich als Winkel bezeichnet wird – Synonyme zu >>Winkel<< gibt es, wie Fall 2-2-1 beispielhaft verdeutlicht, ausschließlich für andere Kontexte. Wie die folgenden Ausführungen zeigen werden, ist der Begriff dennoch keinesfalls eindeutig.

Fall 1-1-2 (Abbildung 31)**:**

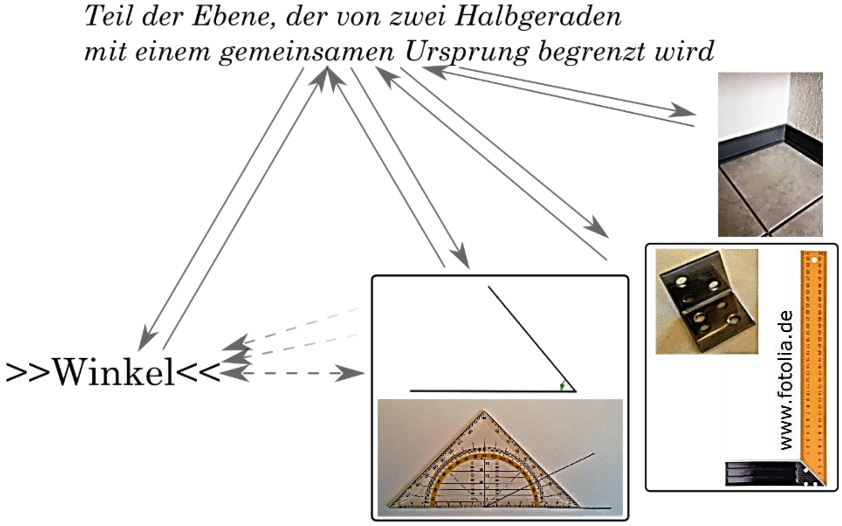


Abbildung 31: Fall 1-1-2 – Winkel

So kann der elementargeometrische Begriff konkretisiert gesehen werden in Realisaten, für welche die Elementargeometrie, das Handwerk und das natürliche Umfeld allgemein als Anwendungskontexte deutlich hervorgehoben und auch unterschieden werden. Der Begriff wird dabei jedoch jeweils als >>Winkel<< bezeichnet. Dies ist, wie schon für das Beispiel des Würfels, vor allem dann denkbar, wenn Begriff und Objekt miteinander identifiziert werden und zusätzlich zu den explizit gemeinten Begriffseigenschaften weitere impliziert werden.

Fall 2-1-1 (Abbildung 32):

Abbildung 32: Fall 2-1-1 – Winkel

Weiterhin ist es möglich, dass Winkel, die dem Kontext des Handwerks zuzuordnen sind, je nach Verwendungszusammenhang und Blickwinkel,[40] zu einem elementargeometrischen Begriff und natürlich auch dem handwerklichen Begriff – Formlehre zum Abtragen von Winkeln – abstrahiert werden. Hier wird im Fall des elementargeometrischen Begriffs wieder von einigen Eigenschaften der Realisate abgesehen, und es werden andererseits andere Eigenschaften in die Realisate hineingesehen. So werden mögliche Markierungen und die spezielle Form insbesondere des linken Winkels (auf dem in der Objektecke stehenden Bild in Abbildung 32) nicht berücksichtigt. Demgegenüber werden zwei Halbgeraden, deren Ursprung sowie der den Winkel beschreibende Ebenenteil hineingesehen. Der handwerkliche Begriff liegt näher, es muss nicht abstrahiert oder ideiert werden. Dabei zeigt sich ein Merkmal zwei- oder eindimensionaler (beziehungsweise in einer Ebene oder auf einer Geraden liegender) Objektbegriffe: werden diese anhand von Realisaten, die nicht dem Kontext der Elementargeometrie entstammen und dann meist räumlicher Natur sind, konkretisiert, folgt eine Abstrahierung des elementargeometrischen Begriffs meist nur kontextbedingt.

Ebenso, wie es für das Beispiel des Würfels ausgehend von unterschiedlichen Objekten verschiedene Möglichkeiten für Fall 2-1-1 gibt, gibt es diese auch für den Winkel. So ist es möglich, von Realisaten aus dem natürlichen Umfeld auszugehen und daraus einen elementargeometrischen und einen lebensweltlichen Begriff – beispielsweise: Nische eines Raumes – zu abstrahieren. Dies soll hier allerdings nicht visualisiert sein.

[40] Wenn >>Winkel<< den Begriff des Blickwinkels bedeutet, so liegt ein weiterer Triangulationsbruch, wie er in Fall 2-1-1 (und unter Berücksichtigung des Bezeichners in Fall 2-2-1) dargestellt werden könnte, vor.

Fall 2-2-1 (Abbildung 33)**:**

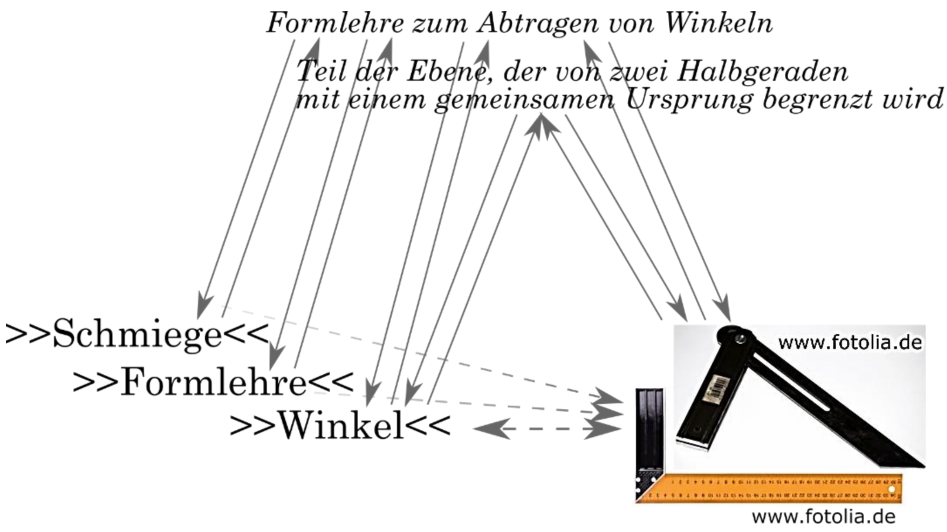


Abbildung 33: Fall 2-2-1 – Winkel

Winkel, die dem handwerklichen Kontext zuzuordnen sind, aber auch zu einem elementargeometrischen Begriff abstrahiert werden können, können erneut unterschiedlich bezeichnet werden. So ist es möglich, dass der elementargeometrische und der handwerkliche Begriff den Bezeichner >>Winkel<< teilen, dass der handwerkliche Begriff aber zudem als >>Formlehre<< oder >>Schmiege<< bezeichnet wird.

Wie schon für Fall 2-1-1, ist es auch hier möglich, ausgehend von Realisaten aus dem natürlichen Umfeld unterschiedliche Begriffe zu abstrahieren, für die unterschiedliche Bezeichner verwendet werden. So kann der genannte lebensweltliche Begriff – Nische eines Raumes – auch als >>Nische<< oder >>Ecke<< bezeichnet werden.

Fall 2-1-2 (Abbildung 34)**:**

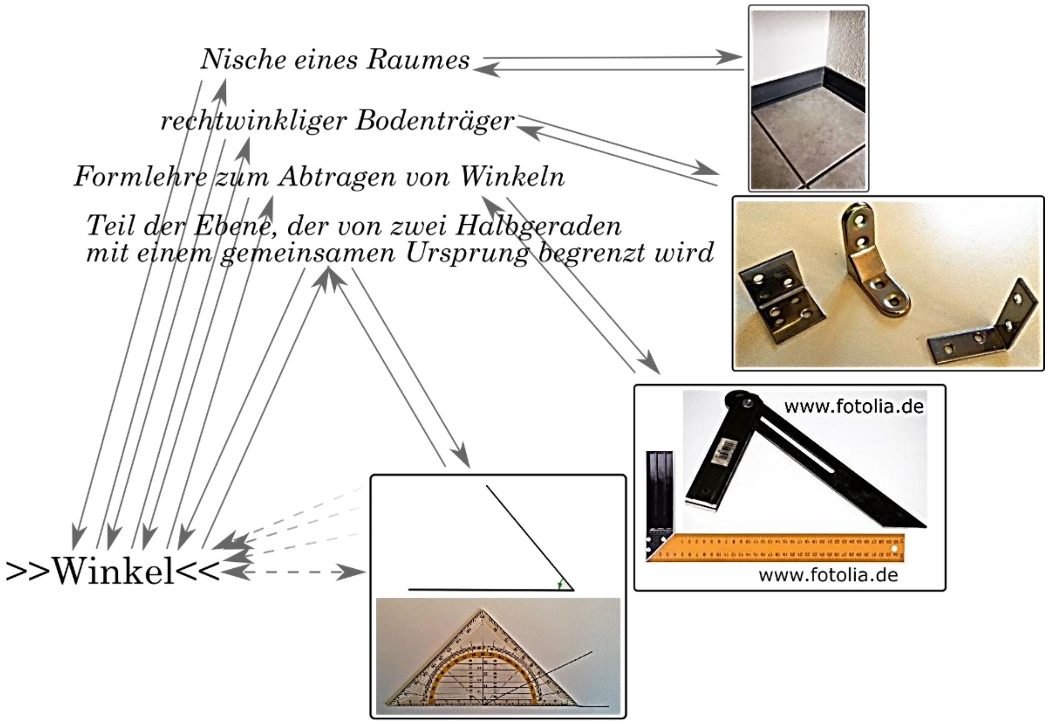


Abbildung 34: Fall 2-1-2 – Winkel

Letztlich ist es wiederum möglich, dass der Bezeichner >>Winkel<< neben dem elementargeometrischen und dem bereits genannten handwerklichen Begriff einen zweiten Begriff aus dem Kontext des Handwerks – rechtwinkliger Bodenträger – sowie erwähnten lebensweltlichen Begriff bedeutet und in Realisaten aus den entsprechenden Kontexten konkretisiert gesehen wird.

3.3.2. senkrecht

Senkrecht wurde als weiteres Beispiel gewählt, weil der Begriff als Relationsbegriff einer anderen Begriffsklasse als Würfel und Winkel zugehört. Relationen können nur mittels Realisaten, die Objektbegriffe konkretisieren, und eventuell mittels Interpretanten in Form von Hilfsobjekten dargestellt werden, weswegen sie eines großen Maßes an Ideation bedürfen. Anhand des Begriffs senkrecht kann außerdem gut verdeutlich werden, dass außermathematische Begriffe sich in ihrem Umfang von elementargeometrischen Begriffen unterscheiden können – so bedeutet >>senkrecht (zu)<<[41] in der Elementargeometrie eine allgemeine Relation, zu welcher ein Bezugsobjekt anzugeben ist, während >>senkrecht<< im Alltag eine Relation zu einem vorgegebenen, offensichtlichen Bezugsobjekt, wie dem Boden oder einer Blattkante, meint, und dementsprechend „von oben nach unten verlaufend“ bedeutet.

Ausgangspunkt ist wieder der als >>senkrecht<< bezeichnete elementargeometrische Begriff sowie ein eindeutiges semiotisches Dreieck (Abbildung 35).

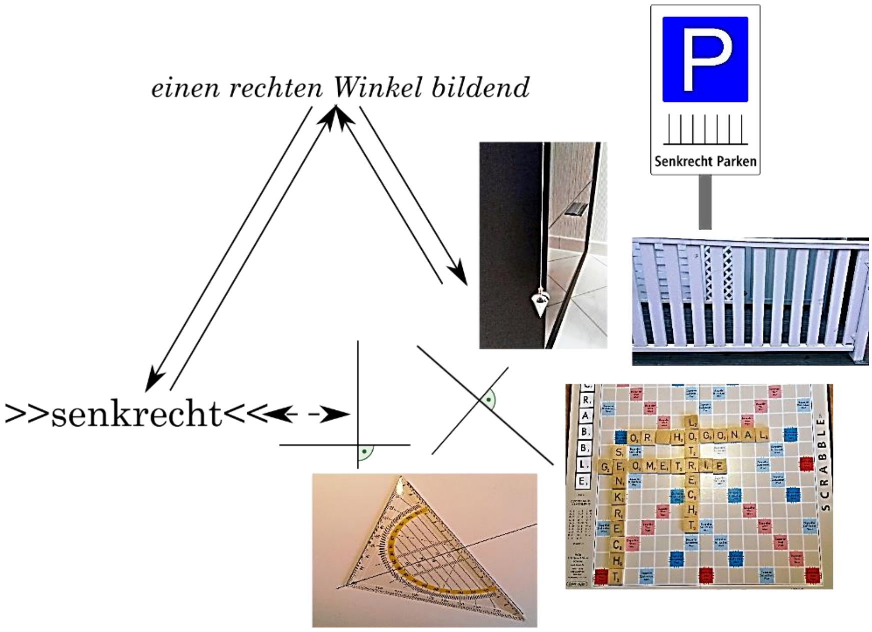


Abbildung 35: Das semiotische Ausgangsdreieck – senkrecht

Die Wortformel an der Begriffsecke – einen rechten Winkel bildend – drückt als Interpretant die gemeinte Relation aus, und der Begriff ist konkretisiert in zwei- oder dreidimensionalen Realisaten, in denen sich die Relation findet. Eine ebene Darstellung der Relation mittels zweier Geradenabschnitte konkretisiert den Begriff dabei wiederum beschränkt auf Wesentliches und verdeutlicht die Relation meist zusätzlich durch einen Interpretanten (einen Kreisbogen mit eingeschlossenem Punkt). In lebensweltlichen, insbesondere dreidimensionalen, Realisaten

[41] Im Folgenden wird der Bezeichner >>senkrecht<< ohne die Präposition >>zu<< verwendet, weil diese oft impliziert wird, statt sie explizit zu nennen.

hingegen muss die Relation erst gefunden und in diese hineingesehen werden, denn Interpretanten sind dort in der Regel nicht vorhanden – dabei kann die Relation unter Umständen häufiger auftreten.

Fall 1-2-1 (Abbildung 36)**:**

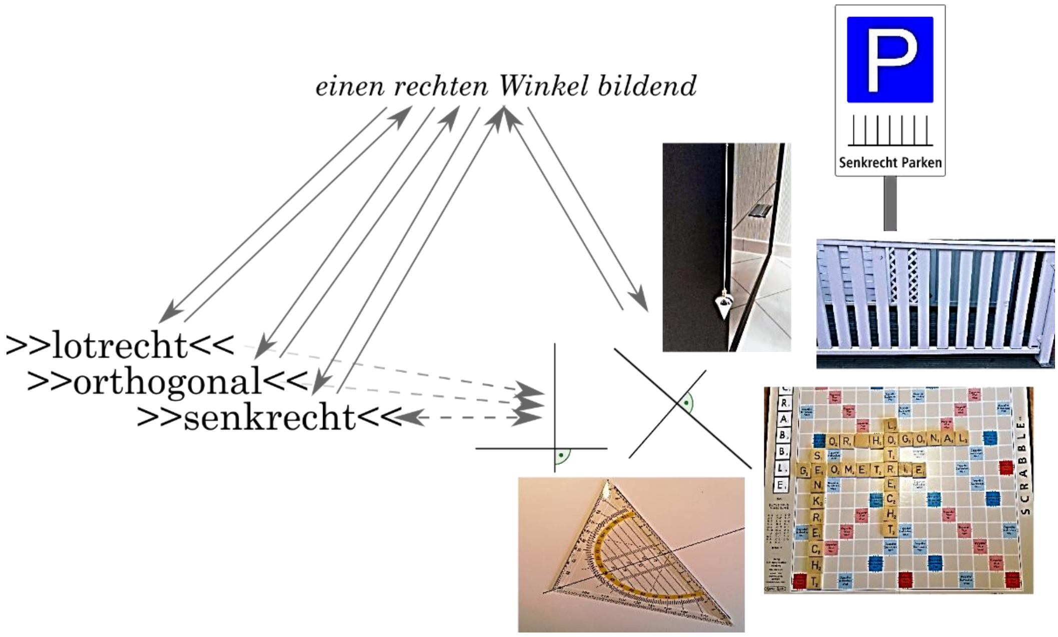


Abbildung 36: Fall 1-2-1 – senkrecht

Der elementargeometrische Begriff kann außer als >>senkrecht<< auch als >>orthogonal<< oder >>lotrecht<< bezeichnet werden und dabei in verschiedenen Realisaten konkretisiert gesehen werden, in denen sich die Relation wiederfindet. Dabei muss darauf hingewiesen werden, dass, wie schon >>senkrecht<<, auch der Bezeichner >>lotrecht<< erst in Verbindung mit einem Bezugsobjekt den hier betrachteten Begriff bedeutet. Ist ein solches Bezugsobjekt auch nicht implizit vorhanden, so ist meist der engere lebensweltliche Begriff gemeint.

Fall 1-1-2 (Abbildung 37)**:**

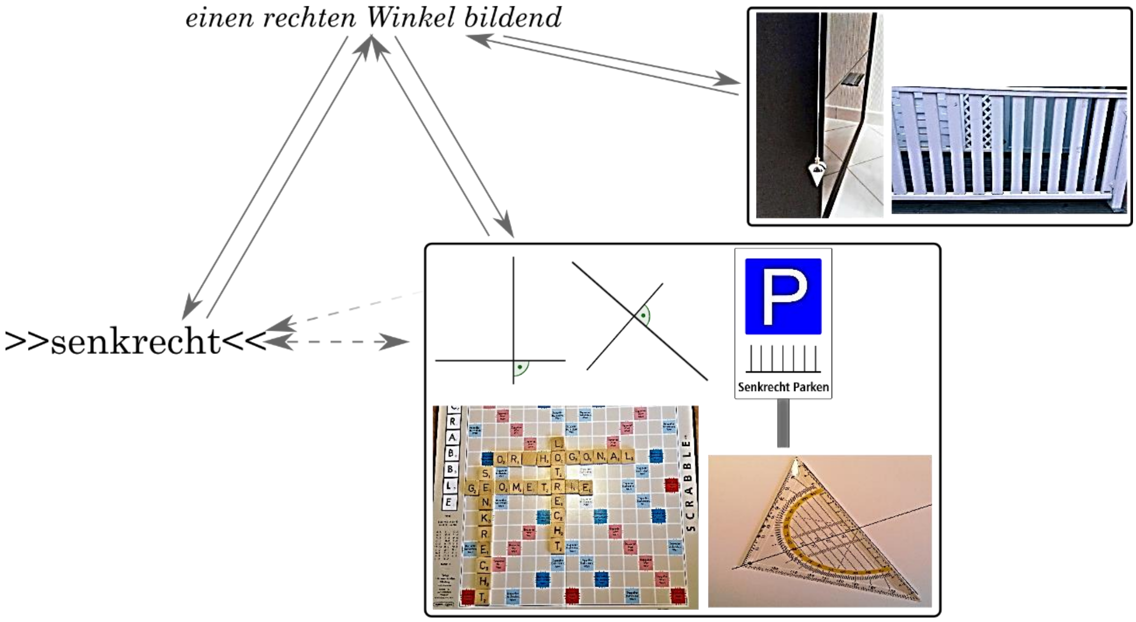


Abbildung 37: Fall 1-1-2 – senkrecht

Im Falle eines Relationsbegriffs wie senkrecht ist es weiterhin möglich, dass insbesondere verschiedene kontextbedingte Arten der Begriffsverwendung deutlich hervorgehoben und auch unterschieden werden, dass der Begriff aber dennoch jeweils als >>senkrecht<< bezeichnet wird. So kann der elementargeometrische Begriff konkretisiert gesehen werden in Realisaten, in welchen die Relation eben und allgemein enthalten ist, und auch in Realisaten, in welchen die Relation räumlich und in ihrer engeren Form enthalten ist.

Andererseits ist auch, wie bei den Objektbegriffen, eine direkte Unterscheidung von bereichsbezogenen Anwendungskontexten, beispielsweise eines elementargeometrischen, eines lebensweltlichen und eines handwerklichen Kontextes, denkbar. Eine solche Unterscheidung ist jedoch bei Relationsbegriffen weniger naheliegend als bei Objektbegriffen, weil sich in unterschiedlichen bereichsbezogenen Anwendungskontexten im Allgemeinen die Realisate, mittels derer die Relation dargestellt wird, unterscheiden, die Relation jedoch dieselbe ist – so kann auch bei dem Spiel Scrabble im lebensweltlichen Umfeld >>orthogonal<< senkrecht zu >>senkrecht<< liegen.

Fall 1-2-2 (Abbildung 38)**:**

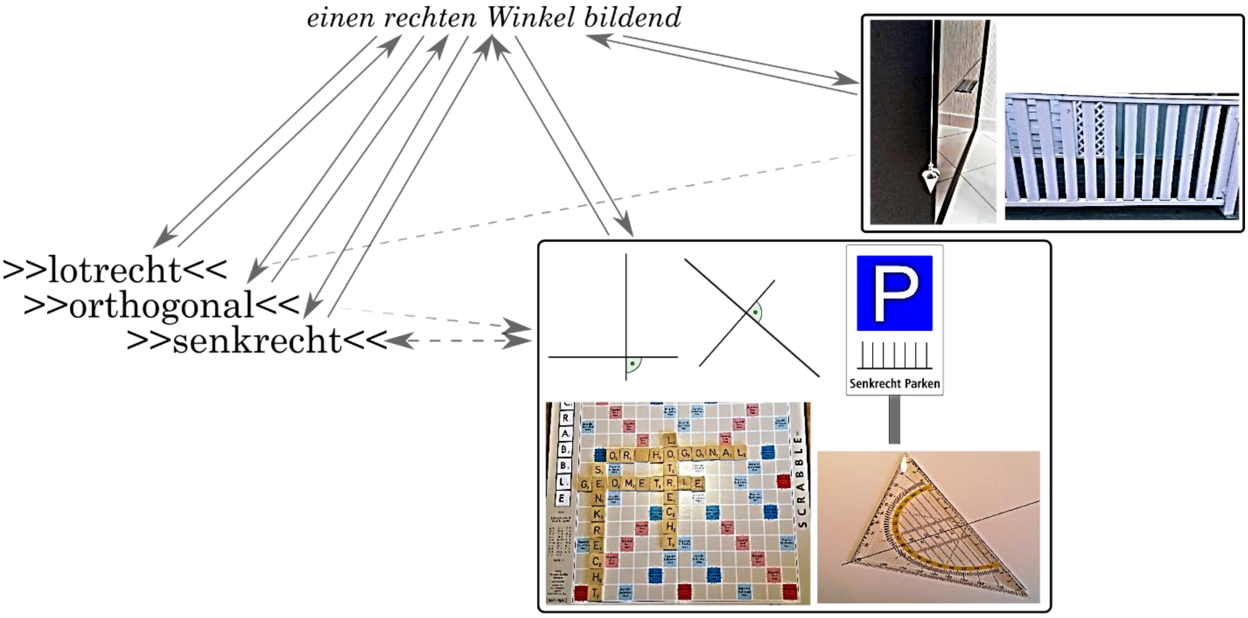


Abbildung 38: Fall 1-2-2 – senkrecht

Der elementargeometrische Begriff kann außerdem beispielsweise dann als >>senkrecht<< und >>orthogonal<< bezeichnet werden, wenn er in ebenen Realisaten in seiner allgemeinen Form konkretisiert gesehen wird, und demgegenüber als >>lotrecht<< bezeichnet werden, wenn er in räumlichen Realisaten in der engeren Form konkretisiert gesehen wird. Eine solche Trennung von Bezeichnern nach Kontext kann wiederum vor allem zu Beginn der unterrichtlichen Arbeit mit dem Begriff auftreten und ist zu thematisieren und zu reflektieren.

Wie schon für Fall 1-1-2 ist allerdings auch die Verwendung unterschiedlicher Bezeichner, je nachdem ob die Relation in einem Realisat aus dem elementargeometrischen, dem lebensweltlichen oder dem handwerklichen Kontext konkretisiert gesehen wird, denkbar.

Fall 2-1-1 (Abbildung 39)**:**

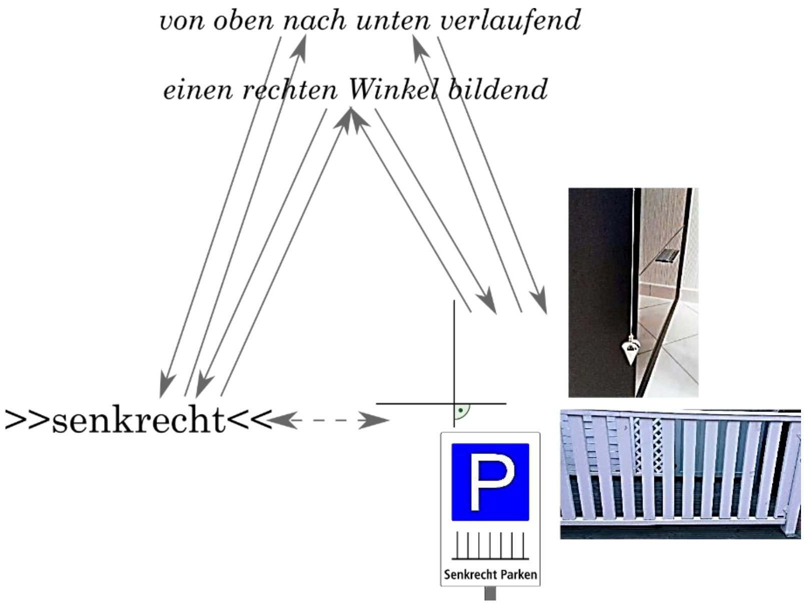


Abbildung 39: Fall 2-1-1 – senkrecht

Weiterhin ist es möglich, dass aus Realisaten, welche die Relation senkrecht in der engeren Form konkretisieren, erneut je nach Verwendungszusammenhang und Blickwinkel, der elementargeometrische allgemeine und der lebensweltliche engere Begriff – von oben nach unten verlaufend – abstrahiert werden.[42] Dabei wird im Fall des elementargeometrischen Begriffs einerseits die nur spezielle Lage der Realisate nicht berücksichtigt, andererseits aber die Relation beim Fehlen von Interpretanten, insbesondere bei dreidimensionalen Realisaten, erst erschlossen. Demgegenüber wird im Fall des alltäglichen Begriffs die Kommutativität der Relation nicht einbezogen, andererseits aber das festgelegte Bezugsobjekt herausgehoben oder sogar vorgestellt.

[42] Dass der Bezeichner >>senkrecht<<, wie in diesem Fall, auch in Schulbüchern sowohl einen elementargeometrischen allgemeinen als auch einen lebensweltlichen engeren Begriff bedeuten kann, zeigt GAAB (2015).

Fall 2-2-1 (Abbildung 40)**:**

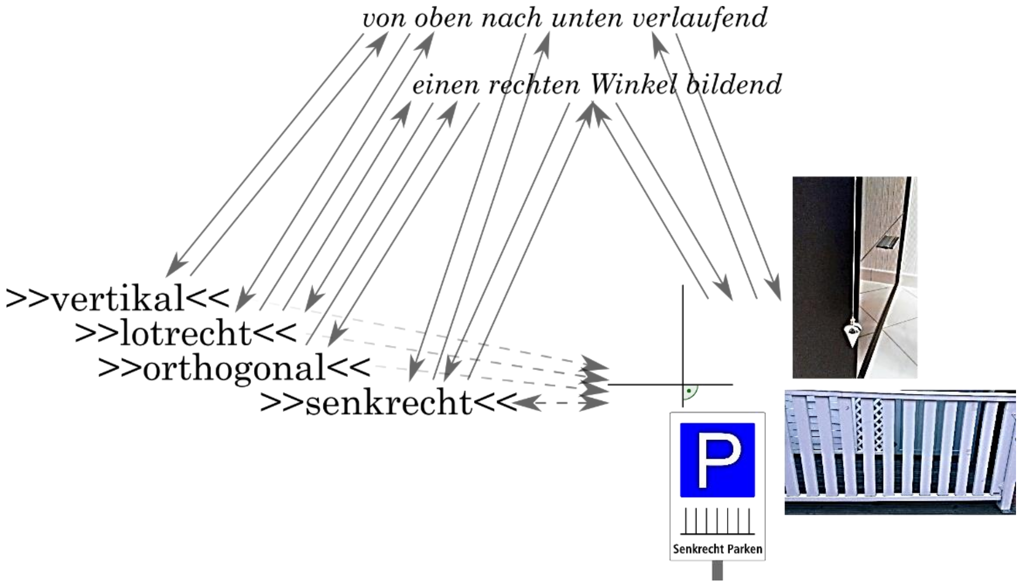


Abbildung 40: Fall 2-2-1 – senkrecht

Wenn für die Relation senkrecht aus Realisaten verschiedene Begriffe abstrahiert werden, können diese auch unterschiedlich bezeichnet werden. So ist es möglich, dass der elementargeometrische und der lebensweltliche Begriff die Bezeichner >>senkrecht<< und >>lotrecht<< teilen, dass der elementargeometrische Begriff aber zusätzlich als >>orthogonal<<, der lebensweltliche Begriff hingegen zusätzlich als >>vertikal<< bezeichnet wird.

Fall 2-1-2 (Abbildung 41)**:**

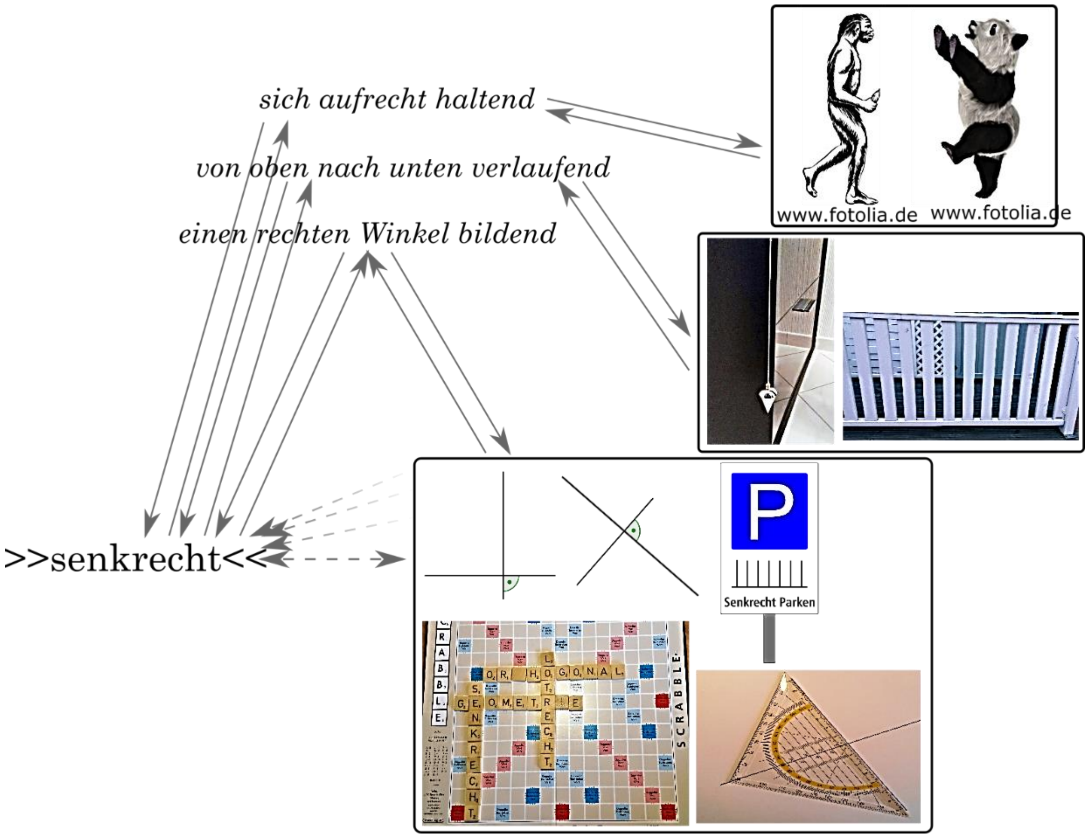


Abbildung 41: Fall 2-1-2 – senkrecht

Letztlich ist es auch für den hier betrachteten Relationsbegriff möglich, dass der Bezeichner >>senkrecht<< neben dem elementargeometrischen allgemeinen und dem bereits genannten lebensweltlichen engeren Begriff einen weiteren lebensweltlichen Begriff – sich aufrecht haltend – bedeutet und in der entsprechenden Form konkretisiert gesehen wird.

3.3.3. Umfang

Abschließend wird auf den Begriff Umfang eingegangen, weil er als Maßbegriff eine dritte Begriffsklasse vertritt. Maße können nur mittels Realisaten, welche die Objektbegriffe konkretisieren, auf die sie sich beziehen, und eventuell mittels Interpretanten in Form von Hilfsobjekten dargestellt werden und bedürfen daher wiederum eines großen Maßes an Ideation. Bei Umfang handelt es sich außerdem um einen interessanten Begriff, weil der Bezeichner einerseits in vielen verschiedenen Schattierungen aus dem Alltag bekannt ist, der Begriff aber andererseits auch im Alltag häufig dieselbe Bedeutung wie der elementargeometrische Begriff, möglicherweise mit Unterschieden bezüglich der Präzision, hat. Zudem kann Umfang außer dem Maßbegriff auch einen Objektbegriff bedeuten. So kann Umfang außer als Länge auch als die eine Fläche begrenzende Linie an sich aufgefasst werden kann. Da Umfang aber sowohl im Alltag (siehe: www.duden.de, www.dwds.de) als auch im Schulunterricht (siehe diverse Schulbücher: Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N; Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8; Mathematik Neue Wege 5, Saarland) üblicherweise den Maßbegriff bedeutet, soll auch hier von dieser Verwendung ausgegangen werden.[43]

Ausgangspunkt ist in diesem Fall der als >>Umfang<< bezeichnete elementargeometrische Maßbegriff sowie ein diesen enthaltendes eindeutiges semiotisches Dreieck (Abbildung 42).

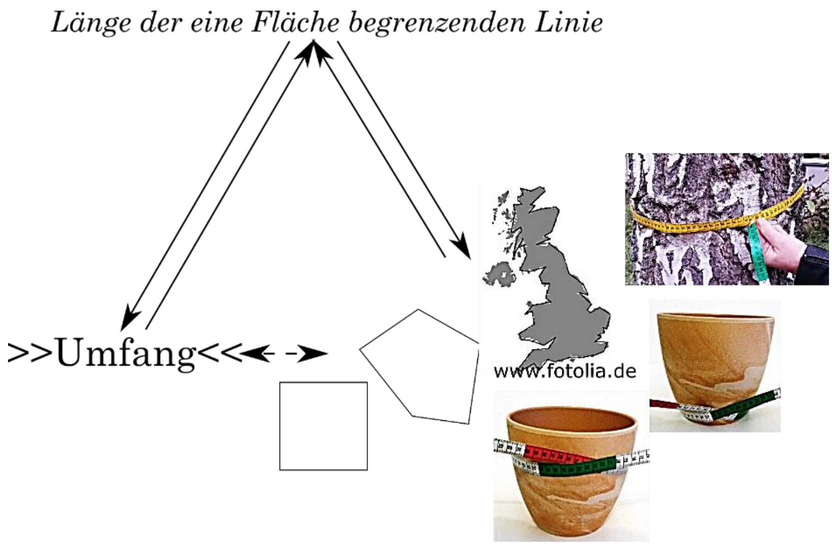


Abbildung 42: Das semiotische Ausgangsdreieck – Umfang

Die Wortformel an der Begriffsecke – Länge der eine Fläche begrenzenden Linie – drückt wiederum als Interpretant das gemeinte Maß aus, und der Begriff ist konkretisiert in zwei- oder dreidimensionalen Realisaten, für die das Maß angegeben werden kann. Das Maß selbst kann dabei nicht geometrisch dargestellt

[43] Die Verwendung als Objektbegriff soll allerdings, insbesondere weil sie sich aufgrund des dominanten Charakters der Linien bei ebenen Figuren häufig aufdrängt, in den Fällen 2-1-1, 2-2-1 und 2-1-2 mitberücksichtigt werden.

werden, sondern es kann höchstens durch Interpretanten (wie beispielsweise ein Maßband, eine zusätzliche Markierung der Begrenzungslinie oder eine Angabe des konkreten Maßes) auf das Gemeinte hingewiesen werden. Dabei ist bei glatten ebenen Figuren der Umfang eindeutig, während bei dreidimensionalen Körpern zunächst eine Schnittfläche festgelegt werden muss, für welche der Umfang angegeben werden kann.[44] Bei Figuren mit nicht glattem Rand oder Körpern mit nicht glatter Oberfläche beruht weiterhin der Umfang auf der zu Grunde gelegten Modellierung – dabei können die Figuren oder Schnittfiguren entweder als glatte geometrische Figuren oder auch als reale Fraktale (im Gegensatz zu idealen Fraktalen) modelliert werden.[45]

Für den Begriff Umfang lassen sich, wie schon für den Begriff Winkel, die in Abschnitt 1.3. durch die Fälle 1-2-1 und 1-2-2 beschriebenen Triangulationsbrüche nicht finden. Dies ist darin begründet, dass der elementargeometrische Maßbegriff wiederum ausschließlich durch den hier genannten Bezeichner >>Umfang<< bezeichnet wird – Synonyme zu >>Umfang<< gibt es, wie Fall 2-2-1 aufzeigt, ausschließlich, wenn der Begriff Objektcharakter hat.

Fall 1-1-2 (Abbildung 43)**:**

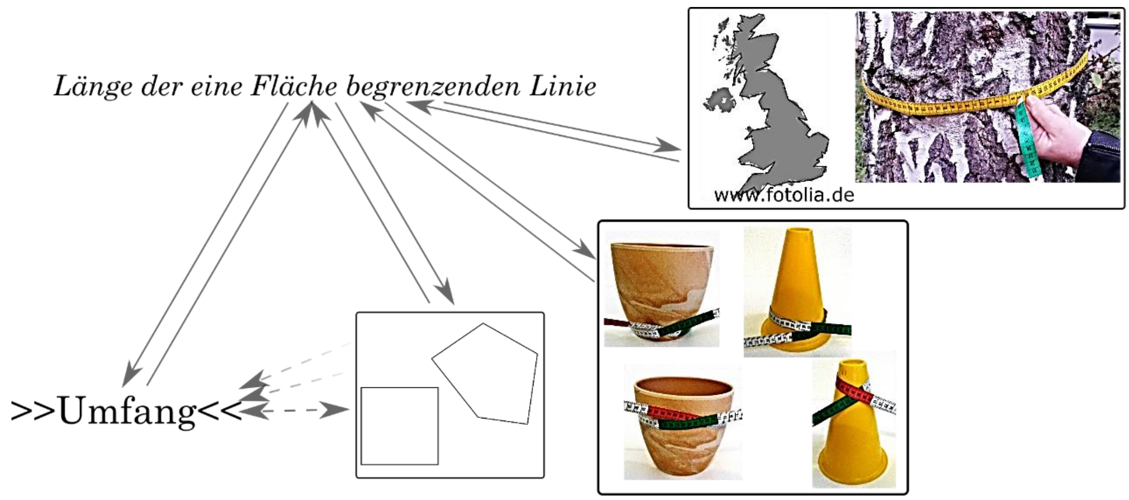


Abbildung 43: Fall 1-1-2 – Umfang

Auch für einen Maßbegriff wie Umfang ist es aber möglich, dass verschiedene kontextbedingte Arten der Begriffsverwendung deutlich hervorgehoben und auch unterschieden werden, dass der Begriff jedoch jeweils als >>Umfang<< bezeich-

[44] Die Frage nach der Schnittfläche stellt sich vor allem bei Kegelstümpfen oder wenn eine vorhandene Schnittfläche nicht senkrecht zur Höhe liegt.
[45] Fraktale lassen sich definieren als „Mengen, die sich durch eines oder mehrere Merkmale wie Ausfransung, Porösität, Komplexität, Selbstähnlichkeit auszeichnen" (Bronstein et al 2000, S. 844). „Sie besitz[en] eine Feinstruktur auf beliebig kleinen Skalen" (Walz et al 2001, S. 180).
Danach können die britische Hauptinsel oder auch die Schnittfläche eines Baumstammes als reale Fraktale aufgefasst werden, weil sie sich bis zu einem gewissen Grad durch Ausfransung, Porösität, Komplexität und eventuell auch Selbstähnlichkeit auszeichnen. Ideale Fraktale mit einer Feinstruktur auf beliebig kleinen Skalen kommen in der Realität naturgemäß nicht vor.

net wird. So kann der Begriff konkretisiert gesehen werden in Realisaten, für welche das Maß eindeutig ist, in Realisaten, für welche die Schnittfläche erst festgelegt werden muss und in Realisaten, für welche der Umfang (zusätzlich) auf der zu Grunde gelegten Modellierung beruht.

Wie für Relationsbegriffe gilt auch für Maßbegriffe, dass eine direkte Unterscheidung von bereichsbezogenen Anwendungskontexten denkbar ist. Eine solche Unterscheidung ist aber wiederum nicht naheliegend, denn für Maßbegriffe unterscheiden sich in unterschiedlichen bereichsbezogenen Anwendungskontexten im Allgemeinen die Realisate, auf die sich ein Maß bezieht, jedoch nicht das Maß an sich.

Fall 2-1-1.1 (Abbildung 44)**:**

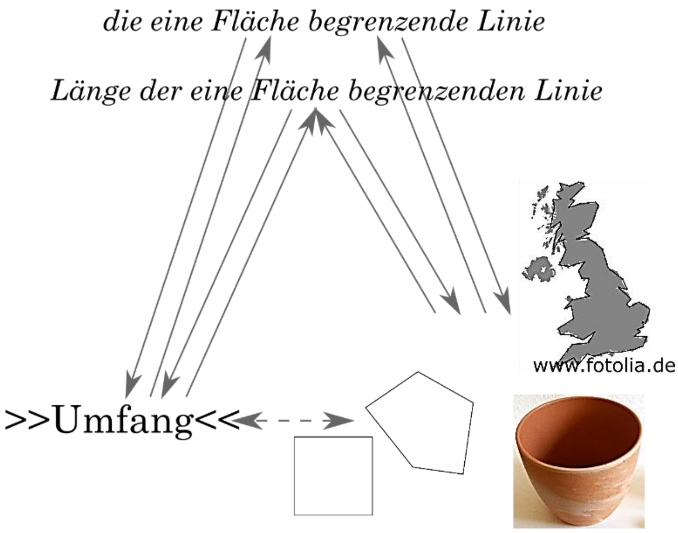


Abbildung 44: Fall 2-1-1.1 – Umfang

Weiterhin ist es möglich, dass aus Realisaten, die keine weiteren Interpretanten mit Bezug auf das Maß enthalten, auch hier je nach Verwendungszusammenhang und Blickwinkel, der Maßbegriff und der bereits erwähnte Objektbegriff – die eine Fläche begrenzende Linie – abstrahiert werden. Dabei wird jeweils Unterschiedliches in den Fokus gestellt, was möglicherweise bedingt ist durch die Gewohnheit einer unterschiedlichen Verwendung des Bezeichners.

Fall 2-1-1.2 (Abbildung 45)**:**

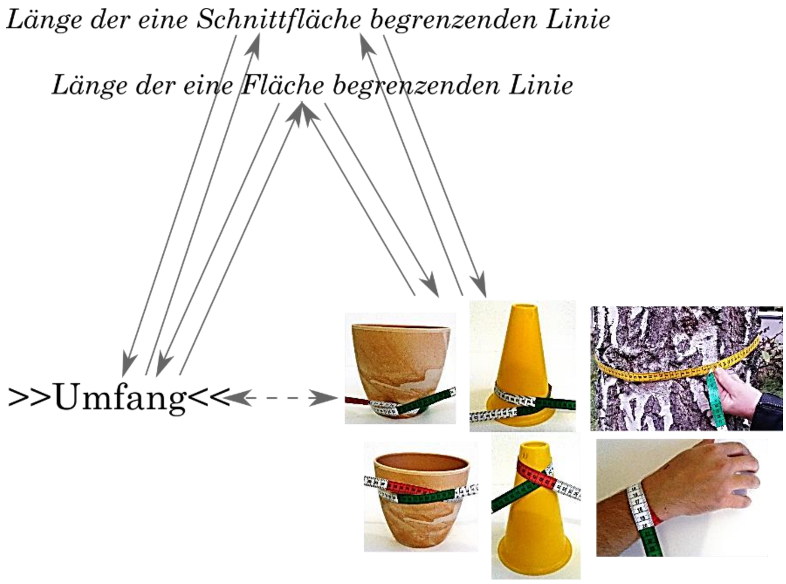


Abbildung 45: Fall 2-1-1.2 – Umfang

Gleichermaßen besteht die Möglichkeit, dass aus Realisaten, die mehrere mögliche Schnittflächen zulassen, das Maß Umfang als ebener eindeutiger und räumlicher unbestimmterer Begriff – Länge der eine Schnittfläche begrenzenden Linie – abstrahiert wird. Dabei wird im Fall des ebenen Begriffs einerseits die jeweils dritte Dimension nicht berücksichtigt, andererseits dadurch aber das Vorliegen einer sich auszeichnenden Schnittfläche impliziert. Demgegenüber wird im Fall des räumlichen Begriffs, wenn vorhanden, gerade eine solche sich aufdrängende Schnittfläche nicht einbezogen.

Es können sich schließlich, ausgehend von Objekten, die mehrere mögliche Schnittfiguren zulassen, auch Fälle 2-1-1.1 und 2-1-1.2 überlagern, so dass sowohl für die Ebene als auch für den Raum jeweils ein Maßbegriff und ein Objektbegriff abstrahiert werden.

Fall 2-2-1 (Abbildung 46)**:**

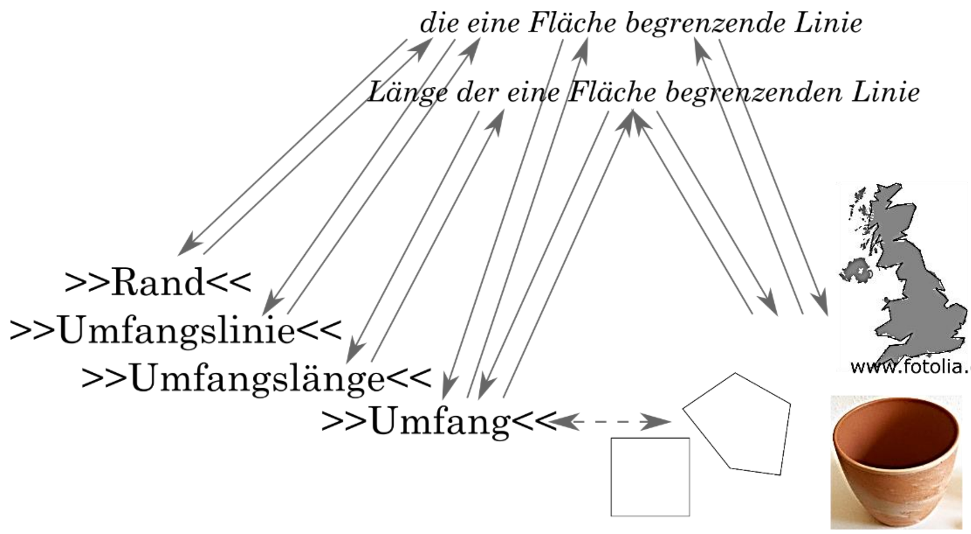


Abbildung 46: Fall 2.2.1 – Umfang

Wenn aus Realisaten Begriffe unterschiedlicher Begriffstypen abstrahiert werden, können diese auch unterschiedlich bezeichnet werden. So ist es möglich, dass der Maßbegriff und der Objektbegriff den Bezeichner >>Umfang<< teilen, dass der Maßbegriff aber zusätzlich als >>Umfangslänge<<, der Objektbegriff hingegen zusätzlich als >>Umfangslinie<< oder >>Rand<< bezeichnet wird.[46]

Allerdings sind ausgehend von Fall 2-1-1.2 keine unterschiedlichen, auf das Maß bezogenen, Bezeichner denkbar. Falls der Begriff ausschließlich in lebensweltlichen Objekten aus einem Kontext konkretisiert ist, so existieren kontextbezogene Bezeichner. Solche heben allerdings höchstens das entsprechende Objekt heraus – es bezeichnet >>Armumfang<< nur den Umfang eines Armes, der Bezeichner des Maßes bleibt aber derselbe.[47]

[46] Dabei bleibt eine eindeutige Unterscheidung, wie sie sich in den Bezeichnern Fläche und Flächeninhalt beziehungsweise Raum und Rauminhalt für zwei- beziehungsweise dreidimensionale Maße findet, mit Bezug auf Umfang zu vermissen (wie auch die unreflektierte Verwendung in NEUBRAND und NEUBRAND (2007) zeigt).

[47] Im Falle des Würfels wurden >>Spielwürfel<< oder >>Sitzwürfel<< als weitere mögliche Bezeichner der entsprechenden lebensweltlichen Begriffe genannt, da diese Bezeichner einen Objektbegriff bezeichnen und jeweils verschiedene Eigenschaften des entsprechenden Objekts betonen. Im Falle des Maßes würde zwar auf ein Objekt hingewiesen, was jedoch keinen Einfluss auf das entsprechende Maß hätte.

Fall 2-1-2 (Abbildung 47)**:**

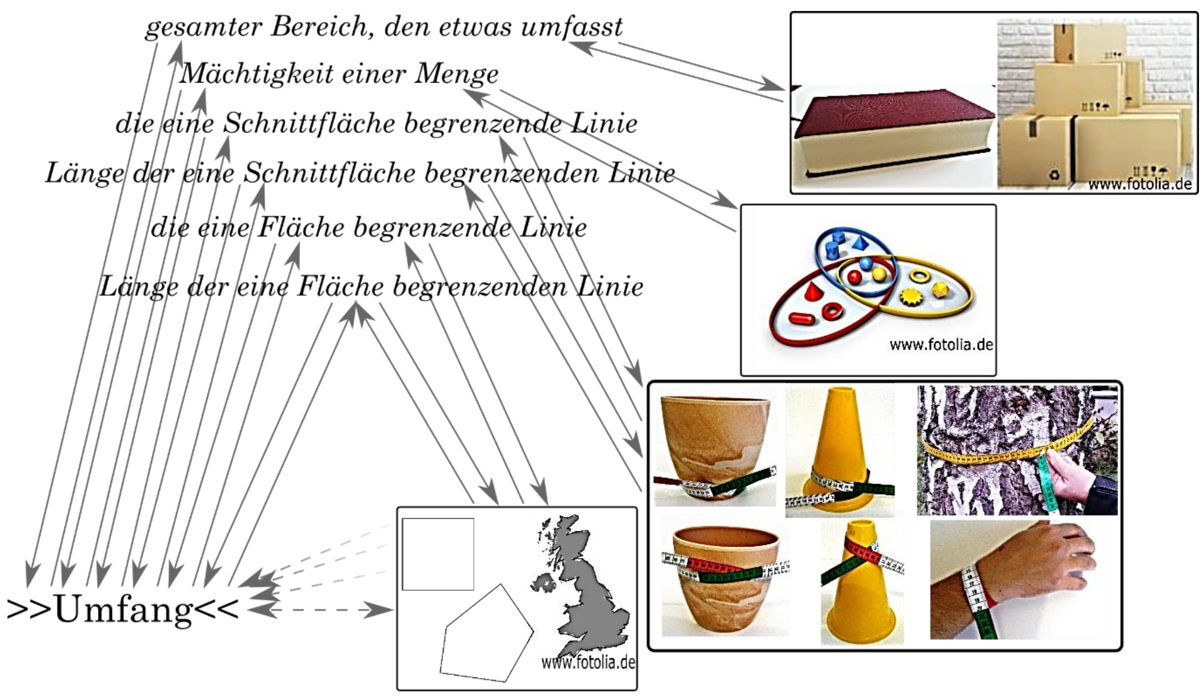


Abbildung 47: Fall 2-1-2 – Umfang

Letztlich ist es wiederum möglich, dass der Bezeichner >>Umfang<< neben für die Ebene und für den Raum jeweils einem Maßbegriff und einem Objektbegriff auch einen mengentheoretischen Begriff – Mächtigkeit einer Menge – sowie einen lebensweltlichen Begriff – gesamter Bereich, den etwas umfasst – bedeutet und in der entsprechenden Form konkretisiert gesehen wird.

3.3.4. Zwischenfazit – Betrachtung weiterer Beispiele

Die Betrachtung der verschiedenen möglichen Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck für die Beispielbegriffe Winkel, senkrecht und Umfang in diesem Abschnitt sowie für den Würfel in Kapitel 2. zeigen zunächst, dass keiner der Begriffe eineindeutig ist und dass Triangulationsbrüche auf verschiedene unterschiedliche Weisen entstehen können. Auch Begriffe, bei denen nicht alle der möglichen Triangulationsbrüche auftreten, sind durch die auftretenden Triangulationsbrüche keineswegs eineindeutig, zumal sich die verschiedenen möglichen Triangulationsbrüche überlagern und dabei wechselwirken können.

Es wird deutlich, dass im Fall von Objektbegriffen, wie Würfel und Winkel, ein Unterschied von bereichsbezogenen Anwendungskontexten, in denen ein Begriff auftritt, unterschiedliche Begriffe bedingen kann, die gegebenenfalls durch unterschiedliche Bezeichner bezeichnet werden können und in unterschiedlichen Objekten konkretisiert sein können. Dabei können Realisate, die ursprünglich einem speziellen Anwendungskontext (z.B. der Lebenswelt) entstammen, in einen anderen Anwendungskontext (z.B. die Elementargeometrie) übertragen werden und damit kontextbedingt einen anderen Begriff konkretisieren. Im Fall von

Relationsbegriffen wie senkrecht hingegen bedingen verschiedene kontextbedingte Arten der Begriffsverwendung unterschiedliche abstrahierte Begriffe. Im Fall von Maßbegriffen, insbesondere Umfang, bedingen wiederum unterschiedliche, möglicherweise auch kontextbedingte, Sprachgewohnheiten unterschiedliche abstrahierte Begriffe. Zudem bedingen Unterschiede von Realisaten, auf die der Maßbegriff angewendet wird, unterschiedliche abstrahierte Maßbegriffe – eine besondere Rolle spielt insbesondere die Dimension des jeweiligen Realisats. Mit Bezug auf Relationsbegriffe und Maßbegriffe konstituieren sich somit nicht zwangsläufig bereichsbezogene Anwendungskontexte.

Bei allen betrachteten Beispielen war jedoch Fall 2-1-2 der gehaltvollste. Dies lässt sich damit begründen, dass ausgegangen wird von einem Bezeichner, der zunächst nicht den Begriff und damit auch nicht den Anwendungskontext, in welchem dieser konkretisiert ist, festlegt. Ist hingegen ein Begriff festgelegt, so engt dies im Allgemeinen die möglichen Anwendungskontexte ein. Ist ein Objekt festgelegt, so lässt sich dies im Allgemeinen nur auf wenige Anwendungskontexte übertragen, was wiederum den Begriff einengt.

3.4. Exkurs: Vernetzungen von Begriffen

Auch ohne einzelne Begriffe vor dem Hintergrund des Begriffsfeldes tiefergehend zu untersuchen, lässt sich aus psychologischen und mathematikdidaktischen Theorien und den diese begründenden Untersuchungen schon schließen, dass Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck und basierend darauf Fehlvorstellungen und -verständnisse möglich sind. In solchen Untersuchungen werden jedoch verschiedene semiotische Dreiecke, insbesondere auch im Fall von Triangulationsbrüchen, nicht so geordnet gefasst, wie der semiotische Blick in Kapiteln 1. bis 3.3. gezeigt hat. (Dabei muss allerdings auch auf die Schwierigkeit hingewiesen werden, Triangulationsbrüche in einer solchen Ordnung zu fassen, wie die Auswertung der Umfrage in 5.5. verdeutlicht.) Stattdessen wird häufig über die Nähe von Begriffen zueinander, die auch kontextuell bedingt sein kann, argumentiert, und Fehlvorstellungen und -verständnisse werden darauf zurückgeführt. Eine isolierte Betrachtung von Begriff, Bezeichner und Objekt bleibt somit meist außen vor. Exemplarisch sollen aus der Psychologie KLIX´ semantische Netze und aus der Mathematikdidaktik BAUERSFELDs subjektive Erfahrungsbereiche angesprochen werden. Damit wird einerseits die Nähe vorhergehender semiotischer Überlegungen zu psychologischen und mathematikdidaktischen Überlegungen verdeutlicht, andererseits wird der Weg in das nächste Kapitel, das sich vollständig einer philosophisch-psychologischen Perspektive auf Begriffsbildung widmet, geebnet.

So kann entsprechend KLIX (vgl. Klix 1984 & 1991) ein Grund für Fehlvorstellungen und -verständnisse, wie sie schon durch Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck angesprochen werden, sein, dass Begriffe im Gedächtnis mittels vielfältiger Vernetzungen zu anderen Begriffen abgespeichert sind. KLIX unterscheidet dabei zwischen innerbegrifflichen Relationen (wozu auch Neben-, Über- und Unterordnungsrelationen gehören), die durch Vergleichen von Begriffen hergeleitet werden können, und zwischenbegrifflichen Relationen, die im Gedächtnis gesammelt sein müssen, weil sie nicht mittels Vergleichen hergeleitet werden können. Solche zwischenbegrifflichen Relationen können typische Tätigkeiten oder Aktivitäten eines Subjekts ausdrücken, Objekte von Tätigkeiten angeben aber ebenso räumliche Beziehungen oder Mittel-Zweck-Beziehungen ausdrücken. Sie sind in sogenannten semantischen Netzen, die auch interindividuell unterschiedlich sein können und stark von früheren Erfahrungen und Interessen abhängen, um einen semantischen Kern als Zentrum gespeichert. Ein ausgereiftes semantisches Netz mit vielen Querverbindungen ist dabei eine Bedingung für ein robustes Begriffsverständnis. Wenn gesammeltes Begriffswissen aktiviert wird und darauf aufbauend mentale Konstruktionen stattfinden, so gehen individuell mit einem Begriff verknüpfte Begriffe in das neu zu konstruierende Wissen ein, die möglicherweise aus anderen Kontexten stammen. KLIX schreibt genauer:

> Wenn wir so die Kristallisationspunkte der zwischenbegrifflichen Relationen bestimmt haben, so bedeutet dies nicht, daß zwischenbegriffliche Wechselwirkungen zu weiter entfernten Begriffseintragungen nicht stattfinden können. Einmal können auch entfernte Begriffe durch früher einmal verwandte Situationskontexte noch ‚alte Beziehungen' unterhalten. Vor allem aber dürften die Abstraktionsprozesse mit ihren neuen Begriffsableitungen unübersehbar verflochtene, wechselseitig anregbare Begriffsbeziehungen nach sich ziehen.
>
> (Klix 1984, S. 68)

Hieraus lässt sich wiederum schließen, dass es bei einem noch unausgereiften semantischen Netz und mangelnder Reflektion durch die Nähe geometrischer Begriffe zu vor allem alltäglichen Begriffen zu fehlerhaften oder unklaren Begriffsbildungen durch Vermischung der Kontexte kommen kann. Diese Situation ließe sich dabei auch mit dem Modell des Begriffsfeldes erklären und würde dementsprechend eine Wechselwirkung der durch diese Kontexte festgelegten semiotischen Dreiecke bedeuten.

In Anschluss an KLIX wird in der psychologischen Lernforschung, unter anderem durch die Theorien der Inferenzschemata oder der mentalen Modelle (vgl. Seel 2000), an Stelle des statischen Charakters der KLIXschen semantischen Netze eine stärkere Dynamik im Begriffsbildungsprozess angenommen. So wird davon ausgegangen, dass basierend auf semantischem Wissen, das entsprechend KLIX in semantischen Netzen abgespeichert ist, situationsgebundene mentale Modelle erstellt werden, mit Hilfe derer dann geschlossen wird. Auch wenn der statischen semantischen Repräsentation dynamische Schlussprozesse auferlegt werden, so lässt sich doch weiterhin folgern, dass ein unausgereiftes semantisches Wissen Schlüsse negativ beeinflussen kann.

Wenn das semantische Netz noch nicht ausgereift und Begriffswissen erst partiell ausgebildet ist, ist das Wissen stärker kontextgebunden, als dies bei KLIX beschrieben wird. Die Kontextgebundenheit von Begriffswissen wird beispielsweise von BAUERSFELD (vgl. Bauersfeld 1983) mit seinen subjektiven Erfahrungsbereichen betont. Laut BAUERSFELD können Bezeichner in mehreren subjektiven Erfahrungsbereichen enthalten sein und dort jeweils unterschiedliche Begriffe bedeuten. Zusammen stellen durch den Kontext verknüpfte Erfahrungsbereiche dann einen geschlossenen Verbund dar, in welchem in einem gegebenen Kontext gearbeitet wird – in anderen Kontexten können andererseits andere Erfahrungsbereiche beansprucht werden. Verallgemeinerung von Begriffswissen geht schließlich mit der Verknüpfung mehrerer subjektiver Erfahrungsbereiche und der Gründung eines neuen subjektiven Erfahrungsbereichs einher (die allerdings im Unterricht explizit unterstützt werden muss). Insgesamt ist, laut BAUERSFELD, die Wahl der jeweils aufgerufenen Erfahrungsbereiche nicht unbedingt wohlüberlegt, und es kommt nicht zwangsläufig der neuste Erfahrungsbereich zum Zug:

> Gerade in den für den Schüler heiklen Situationen, in denen neue Zusammenhänge ausgehandelt werden, aber noch nicht gefestigt erscheinen (also neue SEB entstehen), oder in denen sich der Schüler unter Stress fühlt, z.B. unter Handlungszwängen, Zeitdruck oder in Not, haben jene älteren SEB´e eine Chance, die Aktivierungskonkurrenz zu gewinnen und das Handeln für eine Weile über ihre erprobten und soliden, aber oft nicht (mehr) sachangemessenen Pfade zu lenken.
>
> Im Mathematikunterricht treffen sicher beide Hauptanstösse – die Unsicherheit im Sachlichen und der Handlungszwang – schon systembedingt häufig zusammen und können dann die Regression, als Rückfall in einen früheren SEB, auslösen.
>
> (Bauersfeld 1983, S. 44)

Dies verdeutlicht, dass das Arbeiten mit geometrischen Begriffen auch durch nicht-geometrische oder nicht-ausgereifte geometrische Erfahrungsbereiche geprägt sein kann. So wird wiederum die Möglichkeit fehlerhafter oder unklarer Begriffsbildungen durch Vermischung von Kontexten (und entsprechend des Modells des Begriffsfeldes einer Wechselwirkung von durch diese Kontexte festgelegten semiotischen Dreiecken) begründet.

Obwohl in obiger Ausführung zurückgreifend auf KLIX ausschließlich begriffsbasiert argumentiert wurde und mit Rückgriff auf BAUERSFELD nur Begriffe und Bezeichner unterschieden wurden, kann eine Vermischung von Kontexten jeweils als eine Wechselwirkung der durch diese Kontexte festgelegten semiotischen

Dreiecke gelesen werden. Dies ist darin begründet, dass zur Kommunikation über einen Begriff jeweils ein Bezeichner notwendig ist und Begriffe jeweils in Objekten konkretisiert sind – wobei geometrische Objekte im Rahmen einer phänomenologischen Untersuchung besonders weit reichen (siehe hierzu 4.4.4.). Dennoch scheint das semiotisch geprägte Modell zu streng, um das Begriffswissen insbesondere einzelner Schülerinnen und Schüler psychologisch zu beschreiben – daher wird im nächsten Kapitel eine stärker philosophisch-psychologische Sicht eingenommen. Letztlich soll allerdings darauf hingewiesen werden, dass eine Beschränkung des Kontextes keinesfalls mögliche Missverständnisse verhindern würde:

> Curriculum developers and textbook authors apparently believe they offer teachers and pupils firm ground under their feet as soon as they restrict mathematical activities to a fixed reference set. This, they think, prevents possible surprises that might be disappointing. Fixed reference sets have been a source of confusion […] and have provided rather than firm ground under the feet, a swamp of contradictions.
>
> (Freudenthal 1983, S. 41)

4. Die philosophisch-psychologische Perspektive – Entwicklung von Begriffsbild und Begriffskonvention

Begriffsbildung wurde in der vorliegenden Arbeit bisher aus einer ausschließlich semiotischen Perspektive betrachtet. In diesem Kapitel soll der semiotische Blick durch einen philosophisch-psychologischen Blick ergänzt werden. Dazu wird von den Begriffen Concept Image und Concept Definition nach TALL und VINNER ausgegangen. Die genannten Begriffe werden anschließend durch Rückgriff auf Parallelen oder potentielle Vorläufer in Philosophie und Psychologie und außerdem durch einen Blick auf Arbeiten von aus der Fachmathematik stammenden Autoren ausgeschärft. Schließlich werden für die Mathematikdidaktik die Begriffe Begriffsbild und Begriffskonvention – in denen sich die Seiten Welt und Mathematik wiederfinden und gegenüberstehen – dargelegt und im Begriffsfeld lokalisiert, und es wird in einem Exkurs ein kurzer weiterer Blick auf Bezüge zu Begriffsbild und Begriffskonvention in der deutschen Mathematikdidaktik geworfen.

4.1. Concept Image und Concept Definition nach TALL und VINNER

Dem semiotischen Blick auf Begriffe und Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck, wie er durch das Begriffsfeld gegeben ist, fehlen zu einer umfassenderen fachdidaktischen Theorie die Thematisierung der Dynamik individueller Begriffsvorstellungen und demgegenüber festdefinierter Begriffe der Fachmathematik – Dynamik meint dabei die Wechselwirkung verschiedener Kontexte sowie von Begriff, Bezeichner und Objekt, die durch ihr jeweils eigenes Potential auf das Begriffsfeld wirken und eine ständige Veränderung des Begriffsfeldes sowie das Ausschneiden einzelner Dreiecke bedingen. Sowohl die individuellen Begriffsvorstellungen als auch die festdefinierten Begriffe der Fachmathematik sind Kern einer den semiotischen Blick auf Begriffsbildung ergänzenden philosophisch-psychologischen Perspektive. Der philosophisch-psychologische Charakter beruht vor allem darauf, dass die Dynamik individueller Begriffsvorstellungen auf dem Erleben des Menschen basiert und dessen Verhalten steuert.[48]

Den Ausgangspunkt dieser philosophisch-psychologischen Perspektive stellen TALL und VINNERs Ausführungen zu Concept Image und Concept Definition dar, was in der Relevanz der genannten Begriffe für die auch deutsche mathematikdidaktische Forschung der letzten 30 Jahre begründet ist. Für die deutsche Mathematikdidaktik heißt es diesbezüglich:

[48] Hierbei wird zurückgegriffen auf eine Definition von Psychologie, wie sie im Duden gegeben wird: Psychologie ist „1. Wissenschaft von den bewussten und unbewussten psychischen Vorgängen, vom Erleben und Verhalten des Menschen“. (Bibliographisches Institut GmbH 2013)

> Nun hat die Mathematikdidaktik in den letzten Jahrzehnten zahlreiche neue Erkenntnisse über das Lehren und Lernen von Mathematik gewonnen. Beispielhaft sei nur die Unterscheidung von Begriffsdefinition („concept definition“) und Begriffsbild („concept image“) genannt, die die Orientierungslosigkeit des Lernenden bei einer Reduktion auf den mathematischen Formalismus erklären kann.
>
> (Weigand & Sträßer 2011, S. 53)

Auf internationaler Ebene betonen Harel, Selden und Selden (2006) die Bedeutsamkeit von Tall und Vinners Ausführungen zu Concept Image und Concept Definition.

Im Jahr 1981 veröffentlichten Tall und Vinner ihren Beitrag „Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity“, in welchem sie ihre gemeinsame Verwendung der Bezeichner >>Concept Image<< und >>Concept Definition<<, und damit die von ihnen verwendeten Begriffe, klären (vgl. Tall & Vinner 1981). Laut dem genannten Beitrag bedeutet >>Concept Image<<:

> the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.
>
> (Tall & Vinner 1981, S. 152)

Tall und Vinner weisen darauf hin, dass ein Concept Image im Entstehungsprozess nicht ständig den Charakter eines in sich stimmigen Ganzen haben muss, sondern dass Widersprüche zwischen einzelnen seiner Teile auftauchen können. Sie sprechen daher auch von >>Evoked Concept Image<<, das einen jeweils aufgerufenen, aktiven Teil des gesamten Concept Image bezeichnet, wobei zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Teile des Concept Image verschieden verändert werden können.

Laut dem Beitrag bedeutet >>Concept Definition<<:

> a form of words used to specify [a] concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition.
>
> (Tall & Vinner 1981, S. 152)

Tall und Vinner unterscheiden allerdings zwischen >>Personal Concept Definition<<, die ein ausformuliertes Abbild des Concept Image einer Person ist, und >>Formal Concept Definition<<, die eine in einer mathematischen Kommunität allgemein akzeptierte Definition ist. Eine Concept Definition wirkt selbst wieder auf das Concept Image zurück und verändert so das Concept Image, indem es einen neuen Bestandteil hinzufügt.

Weiterhin thematisieren Tall und Vinner kognitive Konflikte, die sowohl in Widersprüchen zwischen einzelnen, gleichzeitig aktiven Teilen des Concept Image bestehen können als auch durch Widersprüche zwischen Concept Image und Formal Concept Definition ausgelöst werden können. Besonders problematisch sind dabei Widersprüche des zweiten Typs, da diese nur dann bewusst und im Folgenden gelöst werden können, wenn die Formal Concept Definition ein Abbild auf dem Concept Image erzeugt hat. Erst zu diesem Zeitpunkt ist der Aufbau einer in der mathematischen Kommunität schon etablierten Theorie möglich.

Die hier umrissene Klärung der Begriffe Concept Image und Concept Definition dient vor allem einer Untersuchung zum Grenzwert- und Stetigkeitsverständnis, die von Tall und Vinner durchgeführt wurde und deren Ergebnisse in dem obig schon genannten Beitrag dargelegt sind (vgl. Tall & Vinner 1981). Tall und Vinners Concept Image und Concept Definition wurden weiterhin vielzitiert[49] und auch im theoretischen Rahmen einer Reihe weiterer empirischer Untersuchungen sowohl von Tall und Vinner selbst als auch von anderen Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern verwertet. In diesen Untersuchungen wurden unter anderem das Verständnis elementargeometrischer Begriffe (vgl. Vinner & Hershkowitz 1982), des Funktionsbegriffs (vgl. Vinner & Dreyfus 1989), des Tangentenbegriffs (vgl. Tall 1986; Vinner 1982), des Ableitungsbegriffs (vgl. Bingolbali & Monaghan 2008) und des Integralbegriffs (vgl. Rösken & Rolka 2007) vor allem bei Oberstufenschülerinnen und -schülern und auch Studentinnen und Studenten analysiert.[50]

Auch wenn sowohl Bingolbali und Monaghan als auch Rösken und Rolka kurz auf die Begriffsgeschichte von Concept Image und Concept Definition eingehen, so fehlt doch ein reflektierter Umgang mit beiden Begriffen. Dies verwundert umso mehr, da die genannten Autorinnen und Autoren durchaus ein Bewusstsein dafür ausdrücken, dass die Begriffe Concept Image und Concept Definition erstmals nicht durch Tall und Vinner sondern durch Hershkowitz und Vinner geprägt wurden und wohl einer Diskussionsgruppe auf der PME entsprungen sind. So heißt es bei Bingolbali und Monaghan:

> CI & CD emerged as a public construct in a PME article (Vinner and Hershkowitz 1980) and in the next year the first journal article on the construct, Tall and Vinner (1981) appeared […]. This article introduced all the

[49] So finden sich die Bezeichner >>Concept Image<< und >>Concept Definition<< beispielsweise über hundert Mal allein in den Proceedings der PME 2011 (vgl. Ubuz 2011).

[50] Für die hier aufgeführte Liste empirischer Untersuchungen, in deren theoretischen Rahmen Tall und Vinners Concept Image und Concept Definition berücksichtigt sind, wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben. Es soll lediglich exemplarisch gezeigt werden, wo Tall und Vinners Begriffe verwendet wurden.

> current terminology around the construct used today and is by far the most referenced article on the construct.
>
> (Bingolbali & Monaghan 2008, S. 20)

Die Autoren schreiben weiterhin:

> It should be noted that it is unlikely that the application of this concept in AMT [Advanced Mathematical Thinking] studies just happened; it is more likely that the construct grew from discussions within the informal PME AMT group.
>
> (Bingolbali & Monaghan 2008, S. 20)

RÖSKEN und ROLKA scheinen sich darüber hinaus bewusst zu sein, dass die Begriffe Concept Image und Concept Definition durch TALL und VINNER getrennt voneinander weiterentwickelt wurden. So heißt es:

> The approach presented there has been refined by both authors, partly in separate papers, and also by researches within the community and remarkably, the notion is still relevant in the current research […].
>
> (Rösken & Rolka 2007, S. 183)

Ein solches unterschiedliches Begriffsverständnis TALLs und VINNERs von Concept Image und Concept Definition drückt auch TALL selbst aus. So schreibt dieser auf seiner Internetseite:

> Here I should declare that this has led to two different meanings given to 'concept image' in the literature. […] It is up to you to choose which version you want.
>
> (Tall 2003)

In der Fußnote eines Beitrags heißt es außerdem:

> This significant difference in meaning has had no effect in the shared use of the term in the mathematical education community who are largely unaware of it.
>
> (Tall 2006, S. 12)

Aufgrund des Ursprungs der Begriffe Concept Image und Concept Definition in der Diskussion mehrerer Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker, der anschließenden aktiven Prägung durch wenigstens drei Personen, von denen jede eigene Concept Images der Begriffe hat,[51] und der weiteren Veränderung der Begriffe auf Grundlage persönlicher Concept Images ist, wie auch TALLs Kommentar auf seiner Internetseite zeigt, eine Klärung der Begriffe für eigene Untersuchungen unerlässlich.

---

[51] Dies kann mit Rückgriff auf das Modell des Begriffsfeldes erklärt werden – so überlagern sich verschiedene Begriffsfelder, die mit Bezug auf den Bezeichner übereinstimmen, und bedingen damit ein umso umfangreicheres Begriffsfeld.

Dazu wird zunächst das unterschiedliche Begriffsverständnis TALLs und VINNERs genauer betrachtet. TALL sieht Concept Definition als Teil des Concept Image, wobei eine solche Concept Definition sich nicht unbedingt etabliert haben muss (vgl. Tall 2003 & 2006). Laut VINNER hingegen sind (basierend auf VINNER und HERSHKOWITZ (1980)) Concept Image und Concept Definition als getrennte Zellen zu betrachten, die sich aber gegenseitig beeinflussen können (vgl. Tall 2003 & 2006; Vinner 1991). Es folgt, dass TALL Concept Definition sehr subjektiv, als verankert im Individuum, sogar im Sinne einer Personal Concept Definition, sieht. Für VINNER hingegen ist die Concept Definition eher intersubjektiv, im Sinne einer allgemeinen mathematischen Konvention, zu betrachten, womit der Charakter der Formal Concept Definition betont wird.

Weiterhin sieht TALL, wie weitere Veröffentlichungen dessen zeigen, Concept Image als unterteilt in mehrere Module, wobei er den Bezeichner Concept Image nur für die Gesamtheit der Vorstellungen von einem Begriff verwendet. Die einzelnen Module werden hingegen als >>met-befores<< bezeichnet:

> Technically, a *met-before* is part of the individual's concept image in the form of a mental construct that an individual uses at a given time based on experiences they have met before.
>
> (vgl. Tall & Mejia-Ramos 2009, S. 137)[52]

Bei VINNER hingegen hat das Concept Image den Charakter einer Einheit. Er unterscheidet nicht explizit verschiedene Vorstellungen einer Person von einem Begriff, was sich auch darin ausdrückt, dass er eine Veränderung des Concept Image als „reconstruction or accomodation“ (vgl. Vinner 1991, S. 70) bezeichnet.

Das in TALL und VINNERs Beitrag aus dem Jahr 1981 ausgedrückte Begriffsverständnis von Concept Image und Concept Definition umfasst schließlich sowohl TALLs als auch VINNERs Begriffe. Dies macht beide Begriffe sehr schwammig, weswegen eine weitere Klärung dieser notwendig erscheint. Als Mittel zu diesem Zweck werden Betrachtungen des Begriffsbegriffs aus Philosophie und Psycholo-

---

[52] Genauer unterscheidet TALL zunächst Met-Befores und Set-Befores:

> A mathematical concept […] which is with us at birth or soon after, I call a *set-before*, because it is set before our birth in our genes. As individuals meet new contexts, they build new ideas based on mental structure that they have at the time. A previous construction that is recalled to address a current situation is called a *met-before*. In practice the distinction between set-before and met-before is less important than the way in which both predispose us to think in new situations. […] In what follows, the term 'met-before' will […] therefore be used to refer to either or both.
>
> (Tall 2007, S. 4)

In TALLs neueren Veröffentlichungen (nach 2000) lässt sich eine deutliche Präferenz des Bezeichners >>Met-Before<< gegenüber >>Concept Image<< erkennen.

gie, die solche Begriffstypen, die als Parallelen oder potentielle Vorläufer[53] zu Concept Image und Concept Definition gewertet werden können (siehe hierzu auch: Rembowski 2012b & 2015b), enthalten, sowie ferner Arbeiten mit Bezug zur Fachmathematik herangezogen. Dabei sollen die entsprechenden Ausführungen möglichst knapp und sprachsparsam sein – das heißt, es sollen nur die in den herangezogenen Werken zentralen oder zum Verständnis notwendigen Bezeichner verwendet werden, und andere, entbehrliche, Bezeichner sollen der Übersichtlichkeit wegen vermieden werden. Es soll der Einblick in die Werke somit auf das beschränkt werden, was vor dem Hintergrund von TALL und VINNER und als Basis für darauf basierende weitere Betrachtungen notwendig ist. Die folgenden Ausführungen zu Philosophie, Psychologie und Fachmathematik sind dabei an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle genannt ist, Überblicke über die angegebene Primärliteratur mit einigen Querverweisen auf in anderen Abschnitten betrachtete Werke. Dabei ist es als Qualitätsmerkmal der vorliegenden Arbeit zu werten, dass wenige Verweise auf Sekundärquellen enthalten sind, da solche durch das Forschungsparadigma der jeweiligen Autorin oder des jeweiligen Autors immer auch verzerrend wirken. Es werden aus Gründen der Lesbarkeit nur aus Quellen aus Philosophie und Psychologie mit Bezug auf Mathematik oder Mathematikunterricht konkrete Textbelege angegeben.

4.2. Begriffsbild und Begriffskonvention in der Philosophie

In einer Vielzahl philosophischer Werke finden sich Betrachtungen zum Begriffsbegriff, wobei hier exemplarisch auf Werke von KANT, CASSIRER, FREGE und WITTGENSTEIN zurückgegriffen wird. Diese Wahl beruht zunächst darauf, dass KANTs „Kritik der reinen Vernunft“ wiederholt explizite Bezüge zur Mathematik enthält. CASSIRER ist als Neukantianer gewissermaßen ein Nachfolger KANTs, der sich in seiner „Philosophie der symbolischen Formen“ zur Begründung der Erkenntnis aber nicht mehr ausschließlich auf die Mathematik und die mathematischen Naturwissenschaften beruft, sondern der Kulturphilosophie und Semiotik zuwendet (vgl. Cassirer 2010c, S. VII; Kunzmann, Burkard & Wiedmann 1991, S. 175; Paetzold 1993, S. 39ff).[54] FREGEs Werke „Begriffsschrift“ und aufbauend darauf weitere kürzere Beiträge begründen die moderne Logik mit, und WITTGENSTEIN knüpft mit seinem Frühwerk „Logisch-philosophische Abhandlung“ an diese Schule der Logik und Sprachanalyse an (vgl. Kunzmann, Burkard & Wiedmann 1991, S. 219). Mit seinem Spätwerk „philosophische Untersuchungen“ wendet er sich allerdings der Sprachphilosophie zu und arbeitet stärker semiotisch.

[53] Der Bezeichner >>potentielle Vorläufer<< drückt aus, dass TALL und VINNER zur Ausarbeitung ihrer Begriffe auf die angesprochenen historisch vorgängigen Betrachtungen aus Philosophie und Psychologie hätten zurückgreifen können, dies aber nicht getan haben.

[54] In seiner 1910 erschienenen Schrift „Substanzbegriff und Funktionsbegriff“ suchte CASSIRER noch, wie KANT auch schon, ausgehend von der Mathematik nach einer Begründung der Erkenntnis (vgl. Cassirer 2010c, S. VII).

4.2.1. IMMANUEL KANT

KANTs „Kritik der reinen Vernunft“ (vgl. Kant 2004) besteht aus seiner „Transzendentalen Elementarlehre“ und seiner „Transzendentalen Methodenlehre“, wovon im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Teil der Elementarlehre, die „Transzendentale Ästhetik“ und die „Transzendentale Analytik“, die Bestandteil der „Transzendentalen Logik“ ist, relevant ist. KANT untersucht darin in Zusammenhang mit der Frage, auf welcher Grundlage eine Metaphysik als Wissenschaft möglich ist, auch die Grundlagen der Mathematik, um von dort auf die Metaphysik schließen zu können (vgl. Grondin 1994, S. 52). Die „Transzendentale Dialektik“ bleibt in der vorliegenden Arbeit außen vor, da KANT sich darin einem Denken widmet, das über (mögliche) Erfahrung hinausgeht und sich beispielsweise auch auf Begriffe bezieht, die keine reale Grundlage haben und zu denen damit keine realen Repräsentanten gegeben sein können.

Wenn Begriffsbildung im Sinne der bisherigen Verwendung in der vorliegenden Arbeit als Bestandteil von Erkenntnis im Sinne KANTs[55] untersucht werden soll, ist, KANT gemäß, zunächst zwischen Verstand und Anschauung als Grundquellen der Erkenntnis zu unterscheiden.[56] Der Verstand ist dabei ein Vermögen zu Denken und kann damit auch als ein Vermögen zu Urteilen vorgestellt werden, da Denken eine Erkenntnis durch Begriffe bedeutet und Begriffe sich als Bestandteile von Urteilen auf noch unbestimmte Gegenstände beziehen. Basierend auf einer Einteilung der Form von Urteilen arbeitet KANT die Kategorien, das sind Stamm- oder Elementarbegriffe der reinen Verstandesbegriffe, aus, wobei schon die Möglichkeit einer Auflistung der Kategorien ihre Objektivität ausdrückt. Diese Kategorien sind (basierend auf KANTs Urteilstafel) unterteilt in solche der Quantität – Einheit, Vielheit und Allheit –, der Qualität – Realität, Negation und Limitation –, der Relation – das heißt der Inhärenz und Subsistenz, der Kausalität und Dependenz und der Gemeinschaft[57] –, sowie der Modali-

[55] >>Begriff<< ist bei KANT bedeutend enger gefasst, als sonst in der vorliegenden Arbeit und heute allgemein üblich. >>Begriff<< bedeutet bei KANT zunächst etwas durch den Verstand Gedachtes, bei dem Anschauung außen vor bleibt. Allerdings unterscheidet sich KANTs Verwendung von >>Begriff<< in der A-Auflage der „Kritik der reinen Vernunft“ von jener in der B-Auflage. In erstem Fall fassen Begriffe immer Mehreres unter sich, sie klassifizieren somit, in zweitem Fall meint Begriff vor allem das Verfügen über eine Bedeutung, der Begriff muss aber nicht zwangsläufig klassifizierend wirken, sondern kann sich auch auf Raum oder Zeit an sich beziehen (vgl. Brandt 1998, S. 91). In der vorliegenden Arbeit wird mit Bezug auf Raum und Zeit allerdings nicht der Bezeichner >>Begriff<< verwendet.

[56] Wie bereits erwähnt, handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden allerdings nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil auf viele der genannten Punkte an mehreren Stellen im Original eingegangen wird und sich das Gesamte erst durch ein Zusammenspiel dieser Stellen ergibt.

[57] Die Kategorien der Inhärenz und Subsistenz beschreibt KANT auch mit „substantia et accidens“, der Kausalität und Dependenz mit „Ursache und Wirkung“ und der Gemeinschaft mit „Wechselwirkung zwischen dem Handelnden und Leidenden“.

tät – Möglichkeit, Dasein und Notwendigkeit[58]. Erst diese Kategorien erlauben es, anhand darauf basierender empirisch auferlegter Grundsätze – den Axiomen der Anschauung, den Antizipationen der Wahrnehmung, den Analogien der Erfahrung und den Postulaten des empirischen Denkens überhaupt – laut KANT, empirisch Wahrgenommenes letztlich als Begriff denken zu können, weil sie allgemeine Regeln zu dessen Verarbeitung bereitstellen. Bei Begriffen handelt es sich damit um Allgemeinvorstellungen, die auf mehrere Dinge zutreffen können und somit klassifizieren (vgl. Mohr & Willaschek 1998, S. 19).

Bezüglich der Anschauung wird zwischen reiner und empirischer Anschauung unterschieden. Neben dem Verstand liegt dem Begriffsbildungsprozess die reine Anschauung (noch vor dem empirisch Gegebenen, also der empirischen Anschauung) zu Grunde, wovon es mit der Anschauung des Raumes und jener der Zeit zwei Formen gibt. Wahrgenommenes hat zunächst keine räumlichen und zeitlichen Eigenschaften, sondern erscheint nur, von Erfahrung noch komplett unabhängig, in Raum und Zeit und wird dann >>Erscheinung<< genannt (vgl. Mohr & Willaschek 1998, S. 21) – als Anschauung ist es dabei immer nur auf Einzelnes gerichtet (vgl. Mohr & Willaschek 1998, S. 19).

Sich im Verstand (basierend auf den Grundsätzen und mittels der reinen Anschauung) und der reinen Anschauung abspielende mentale Konstruktionen ermöglichen es erst, greifbare und sichtbare Gegenstände als Erscheinungen wahrzunehmen, gleichzeitig Wahrgenommenes zu ordnen und miteinander in Verbindung zu setzen sowie zu reproduzieren, um es auch mit nacheinander Wahrgenommenem in Beziehung zu setzen. Das Wahrgenommene wird so erst assoziabel (wobei es weiterhin als identisch zu den ursprünglichen Erscheinungen erkannt wird) und damit zu empirischen Anschauungen. Zwischen Verstand und reiner Anschauung vermittelnde Vorstellungen[59] erlauben es, angewendet auf die empirischen Anschauungen, die nun als identisch mit den Erscheinungen erkannt werden, letztlich, diese zu empirischen Anschauungsbegriffen zu synthetisieren. Die empirischen Anschauungsbegriffe wiederum können aufgrund der Objektivität von Raum und Zeit und der Kategorien auch intersubjektiv sein (vgl. hierzu auch: Grondin 1994, S. 44) – insgesamt richten sich die Gegenstände also nach der Erkenntnis (vgl. Mohr & Willaschek 1998, S. 18). Andererseits ermöglichen der Verstand und die reine Anschauung aber nur dann wirkliche Erkenntnis, wenn sie auf die empirische Anschauung angewendet werden können, wenn also Gegenstände existieren, die mit den Erscheinungen korrespondieren.

In den Worten KANTs kann der Bezug von Verstand zu reiner und empirischer Anschauung folgendermaßen zusammengefasst werden:

[58] Der Kategorie der Möglichkeit stellt KANT jene der Unmöglichkeit gegenüber, der des Daseins jene des Nichtseins und der der Notwendigkeit jene der Zufälligkeit.
[59] Wie genau diese Vermittlung funktioniert, lässt sich aus KANT nicht sicher erschließen (vgl. Seel 1998, S. 223ff) und bleibt daher hier außen vor.

> Zu jedem Begriff wird erstlich die logische Form eines Begriffs (des Denkens) überhaupt, und denn zweitens auch die Möglichkeit, ihm einen Gegenstand zu geben, darauf er sich beziehe, erfordert. Ohne diesen letzten hat er keinen Sinn, und ist völlig leer an Inhalt, ob er gleich noch immer die logische Funktion enthalten mag, aus etwaigen datis einen Begriff zu machen. Nun kann der Gegenstand einem Begriffe nicht anders gegeben werden, als in der Anschauung, und, wenn eine reine Anschauung noch vor dem Gegenstande a priori möglich ist, so kann doch auch diese selbst ihren Gegenstand, mithin die objektive Gültigkeit, nur durch die empirische Anschauung bekommen, wovon sie die bloße Form ist. Also beziehen sich alle Begriffe und mit ihnen alle Grundsätze, so sehr sie auch a priori möglich sein mögen, dennoch auf empirische Anschauungen, d. i. auf data zur möglichen Erfahrung.
>
> (Kant 2004, S. 329f)

Nur reine Urteile und demnach auch solche, die der reinen Anschauung entspringen, können, laut KANT, notwendig und streng allgemein sein und sind damit a priori gültig (beziehungsweise „schlechterdings a priori", wenn sie nur von notwendigen Urteilen abgeleitet sind und Ausnahmen als unmöglich angesehen werden, vgl. Kant 2004, S. 55ff). Ebenso können nur reine Begriffe, also wiederum auch solche, die der reinen Anschauung entspringen, notwendig und streng allgemein sein, sie sind damit wiederum a priori gültig.

Als Beispiel für eine auf der reinen Anschauung basierende Wissenschaft nennt KANT die Mathematik (vgl. Kant 2004, S. 62) und insbesondere die Geometrie (vgl. Kant 2004, S. 62 & 108), was damit begründet wird, dass mathematische Begriffe nur auf Raum und Zeit beziehungsweise geometrische Begriffe nur auf dem Raum und nicht auf Erwartungswerten beruhen[60] – mathematische Begriffe werden nur dadurch möglich, dass die entsprechenden Gegenstände konstruiert werden (vgl. Förster 1998, S. 48). Wiederholt werden auch Urteile oder Begriffe als konkrete Beispiele angegeben:

> Läge nun in euch nicht ein Vermögen, a priori anzuschauen; wäre diese subjektive Bedingung der Form nach nicht zugleich die allgemeine Bedingung a priori, unter der allein das Objekt dieser (äußeren) Anschauung selbst möglich ist; wäre der Gegenstand (der Triangel) etwas an sich selbst ohne Beziehung auf euer Subjekt: wie könntet ihr sagen, daß, was in euren subjektiven Bedingungen einen Triangel zu konstruieren notwendig liegt, auch dem Triangel an sich selbst notwendig zukommen müsse? Denn ihr könntet doch zu euren Begriffen (von drei Linien) nichts neues (die Figur) hinzufügen, welches darum notwendig an dem Gegenstande angetroffen werden müßte, da dieser vor eurer Erkenntnis und nicht durch dieselbe gegeben ist. Wäre also nicht der Raum (und so auch die Zeit) eine bloße

[60] KANT versteht unter Geometrie ausschließlich die euklidische ebene Geometrie.

> Form eurer Anschauung, welche Bedingungen a priori enthält, unter denen allein Dinge für euch äußere Gegenstände sein können, die ohne diese subjektiven Bedingungen an sich nichts sind; so könntet ihr a priori ganz und gar nichts über äußere Objekte synthetisch ausmachen.
>
> (Kant 2004, S. 127f)

Im Gegensatz dazu sind empirische Urteile und Begriffe, also auch solche, die der sinnlichen Anschauung entspringen, KANT gemäß, zufällig und gültig, aber höchstens in einer bestimmten Vergleichsmenge allgemein – aufgrund der Wechselbeziehung von Verstand und reiner Anschauung einerseits und beidem mit empirischer Anschauung andererseits bleiben empirische Urteile und Begriffe allerdings intersubjektiv. Empirische Urteile und Begriffe sind damit nur a posteriori gültig. Mit Bezug auf die Mathematik gilt allerdings, dass a priori gültige Urteile und Begriffe zwangsläufig auch a posteriori gültig sein müssen (vgl. Kant 2004, S. 258ff).[61]

4.2.2. ERNST CASSIRER

CASSIRERs „Philosophie der symbolischen Formen" besteht aus einem ersten Teil, „Die Sprache" (vgl. Cassirer 2010a), einem zweiten Teil, „Das mythische Denken" (vgl. Cassirer 2010b) sowie einem dritten Teil, „Phänomenologie der Erkenntnis" (vgl. Cassirer 2010c). „Die Sprache" und „Das mythische Denken" sind in der vorliegenden Arbeit vor allem deshalb relevant, weil in ihnen Begriffsbildung, wie sie von KANT beschrieben wurde, auf alltäglichere Anwendungsbereiche als bei KANT, wie beispielsweise die Verwendung der Sprache oder mythisches Denken, bezogen wird. CASSIRER macht damit deutlich, dass alltägliches Denken die Grundlage für mathematisches und mathematisch naturwissenschaftliches Denken bietet (vgl. Paetzold 1993, S. 8). Im Fokus des Interesses der vorliegenden Arbeit steht allerdings CASSIRERs dritter Teil „Phänomenologie der Erkenntnis", da er sich in diesem mit der Unterscheidung seiner beiden Begriffstypen, der natürlichen Weltbegriffe und logischen Begriffe, explizit der Begriffsbildung und als Anwendungsbereich der Mathematik und mathematischen Naturwissenschaft unter Berücksichtigung neuerer nach-KANTscher Erkenntnisse zuwendet.

Laut CASSIRER wohnt der KANTschen Beschreibung der Begriffsbildung ein Zirkelschluss inne, der darin besteht, dass empirische Anschauungen, die als Keim wissenschaftlicher Begriffe gesehen werden können, nur durch diese wissenschaftlichen Begriffe – im Sinne der auf den Kategorien und reinen Anschauungen Raum und Zeit beruhenden reinen Anschauungsbegriffe – bedingt werden.[62]

---

[61] KANT fand zu auf der von ihm betrachteten euklidischen ebenen Geometrie basierenden Begriffen immer auch korrespondierende Repräsentanten in der Umwelt.
[62] Auch hier handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil sich die drei Bände des betrachteten Werkes

CASSIRER folgt grundsätzlich KANTs Unterscheidung zwischen Verstand und Anschauung, wobei ihm aber die KANTschen Kategorien und Formen der reinen Anschauung zu wissenschaftlich geprägt sind. CASSIRER geht davon aus, dass sowohl die Kategorien als auch Raum und Zeit verschiedenen Kontexten angepasst werden, indem sie zwar ihren grundsätzlichen Charakter beibehalten, aber jeweils verschiedene Ausschärfungen erfahren (vgl. hierzu auch: Paetzold 1993, S. 37).[63] Dieselbe Erscheinung – im Sinne KANTs – wird damit basierend auf dem Kontext, in dem sie untersucht wird, einer speziellen Deutung unterworfen, bleibt dabei aber frei von dem Einfluss jeglicher wissenschaftlicher Begriffe – eine kontextfreie Erscheinung kann demgegenüber nur abstrahierend entstehen. Die Formen einer Erscheinung können sich dabei zwischen verschiedenen (auch wissenschaftlichen) Gebieten unterscheiden, bedingen sich jedoch gegenseitig.

Für CASSIRER besteht die einfachste Form der Begriffsbildung darin, Eindrücke mit Hilfe von Sprachzeichen auszudrücken. So heißt es mit direktem Bezug auf KANT:

> Und in der Tat gilt das Kantische Wort, daß Begriffe ohne Anschauungen leer seien, nicht minder für die sprachliche Bezeichnung als für die logische Bestimmung der Begriffe. Auch die abstraktesten Gestaltungen der Sprache weisen noch deutlich den Zusammenhang mit der primären Anschauungsgrundlage auf, in der sie ursprünglich wurzeln. Auch hier trennt sich die Sphäre des >>Sinns<< nicht schlechthin von der >>Sinnlichkeit<<, sondern beide bleiben aufs engste ineinander verwoben. Der Schritt von der Welt der Empfindung zu der >>reinen Anschauung<<, den die Erkenntniskritik als ein notwendiges Moment im Aufbau der Erkenntnis, als eine Bedingung des reinen Ichbegriffs wie des reinen Gegenstandsbegriffs aufweist, hat daher in der Sprache sein genaues Gegenbild. Es sind auch hier die >>Formen der Anschauung<<, in deren Aufbau sich die Art und Richtung der in der Sprache waltenden geistigen Synthesis zunächst bekundet, und nur durch das Medium dieser Formen hindurch, nur durch die Vermittlung der Anschauungen von R a u m, Z e i t und Z a h l vermag die Sprache ihre wesentliche logische Leistung: die Gestaltung der Eindrücke zu Vorstellungen, zu vollziehen.
>
> (Cassirer 2010a, S. 147)[64]

Sprachliche Begriffsbildung ist dabei, laut CASSIRER, das grundlegendste Beispiel für natürliche Begriffsbildung, deren Produkte er als >>natürliche Weltbegriffe<< bezeichnet. CASSIRERs Beschreibung der natürlichen Begriffsbildung setzt

---

gewissermaßen parallel zueinander und interagierend miteinander entwickeln, so dass sich die Gesamtdarstellung erst in deren Zusammenwirken ergibt.

[63] So ist beispielsweise der sprachliche Raum an dem Umfeld der oder des Sprechenden selbst orientiert und damit konkret sowie individuell geprägt. Demgegenüber ist der geometrische Raum abstrakt und weist keine interindividuellen Unterschiede auf.

[64] Die Verwendung der Chevrons ist hier von CASSIRER übernommen, der Chevrons zu Zwecken der Hervorhebung verwendet.

auf einer elementareren Ebene an, als KANTs Beschreibung der logischen Begriffsbildung. Er sieht natürliche Weltbegriffe einer ständigen Auseinandersetzung von Verstand und Anschauung inbegriffen, in der die einzelnen Kategorien und Formen der reinen Anschauung je einzelne Motive zur Verarbeitung einer gegebenen Anschauungsgrundlage darstellen, die aber je nach Wechselwirkung mit den anderen Motiven unterschiedliche Wirkungen haben können. Die Anschauungsgrundlage wird durch räumliche und zeitliche Ordnung, durch Kausal- und Ding-Eigenschaftsordnung (die bei KANT bedingt werden durch dessen Axiome der Anschauung, Antizipationen der Wahrnehmung und Analogien der Erfahrung) sowie durch Anwendung auf verschiedene Kontexte zu einer in sich geschlossenen Erfahrungsgrundlage zusammengefügt. Die Betonung eines charakteristischen Merkmals dieser Erfahrungsgrundlage erst erlaubt es, laut CASSIRER, dass Eindrücke reproduziert, gruppiert und zu Begriffen – die im Fall der sprachlichen Begriffsbildung Bezeichner meinen – synthetisiert werden können. Die Betonung verschiedener Merkmale kann dabei zu verschiedenen Begriffen führen. Wohingegen natürliche Weltbegriffe schon auf eine gewisse Kontinuität ausgerichtet sind, sieht CASSIRER sprachliche Begriffe noch einer ständigen Entwicklung unterworfen.

Beim Übergang von natürlicher Begriffsbildung zu logischer Begriffsbildung wird das naive Verhältnis zwischen Begriff und Anschauung durch ein kritisches ersetzt. Natürliche Weltbegriffe werden als Voraussetzung für logische Begriffsbildung gesehen, da sie erlauben, den Grund der Zusammenfassung von Eindrücken unter einen Begriff zu hinterfragen sowie einen Begriff, im Sinne einer Regel zur Unterordnung von Eindrücken unter diesen Begriff, zu fixieren und von anderen Begriffen abzugrenzen.[65] Mit Bezug auf Geometrie wird ausgeführt:

> Alle mathematische Begriffsbildung beginnt damit, daß der Gedanke sich zwar nicht schlechthin vom anschaulich Gegebenen und anschaulich Vorstellbaren loslöst, daß er sich aber von dem Fließenden und Unbestimmten der Anschauung zu befreien sucht. An die Stelle des Ineinanderschillerns und des unmerklichen Ineinander-Übergehens der sinnlich-anschaulichen Data setzt sie scharfe und klare Sonderungen. Solche Sonderungen sind, solange wir im Kreise der bloßen Wahrnehmung und Anschauung stehenbleiben, nirgends vorhanden. Hier gibt es keine >>Punkte<<, keine >>Linien<< und >>Flächen<< in dem Sinne, den die Mathematik mit diesen Begriffen verbindet. Das axiomatische Denken der Mathematik ist es, das selbst erst die möglichen Subjekte für jede echt mathematische Aussage setzt.
>
> (Cassirer 2010c, S. 465)

[65] Diese Regel muss nicht zwangsläufig definitorischer Art sein, sondern kann auch in der Vorstellung eines Objekts bestehen.

CASSIRER geht mit Bezug auf Mathematik noch einen Schritt weiter, wenn er darlegt, dass in diesem Gebiet logische Begriffe nicht nur durch ein abstrahierendes Vorgehen, sondern auch konstruktiv erschaffen werden können (vgl. Cassirer 2010c, S. 366f & 380). Solche konstruierten Begriffe müssen sich zu in sich stimmigen Systemen zusammenfügen und finden damit ihren Halt nicht mehr an der empirischen Anschauungsgrundlage, sondern an einem selbst unterlegten System von Zeichen.[66] Diese eigenständige Konstruktion von Begriffssystemen begründet dabei die Möglichkeit verschiedener nebeneinander stehender Systeme (die jeweils unterschiedliche Grundlagen zur Bearbeitung eines naturwissenschaftlichen[67] Problems bereitstellen).

4.2.3. GOTTLOB FREGE

FREGE kritisierte in einer Vielzahl seiner Werke Schwächen der (im Alltag verwendeten) Gebrauchssprache, die sich bei einem Einsatz dieser für wissenschaftliches Arbeiten zeigen. Er entwickelte in seiner „Begriffsschrift“ (vgl. Frege 1964) zunächst,[68] seinen eigenen Worten nach, eine „Formelsprache des reinen Denkens“. Diese sollte, wohl in Anlehnung an KANT (vgl. Patzig 2003, S. 9), zur Bildung reiner, unabhängig von jeglicher Anschauung entstehender Urteile, die somit weit allgemeiner als mit Bezug auf die Anschauung gebildete Urteile sein sollten, nutzen. Die Begriffsschrift und Gründe zu deren Motivation werden in einer Vielzahl späterer, kürzerer Beiträge wiederholt aufgegriffen, so in „Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift“ (vgl. Frege 2002c), den weiteren in „Funktion – Begriff – Bedeutung“ zusammengefassten Werken (vgl. Frege 2002a, 2002b, 2002d & 2002e),[69] in den logischen Untersuchungen (vgl. Frege 2003a-2003c) und den Schriften zur Logik und Sprachphilosophie aus dem Nachlass FREGEs (vgl. Frege 1971a-1971e). Im Zuge dessen wird die alltägliche Sprach- und Begriffsverwendung einer wissenschaftlich gewünschten Sprach- und Begriffsverwendung gegenübergestellt.

Für FREGEs Begriffsschrift ist zunächst die Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung wichtig.[70] Während als Bedeutung eines Eigennamens der Eigennam-

[66] Diese konstruktive Schaffung von Begriffssystemen ermöglicht dabei erst Begriffe, die sich nicht auf reale Repräsentanten beziehen.

[67] Im letzten Kapitel der „Phänomenologie der Erkenntnis“ beschäftigt CASSIRER sich mit naturwissenschaftlicher Erkenntnis sowie mit den mathematischen Grundlagen dafür. Auf dieses Kapitel soll hier allerdings nicht weiter eingegangen werden.

[68] Die Begriffsschrift erschien 1879 und war wissenschaftliche Grundlage zu FREGEs Berufung als außerordentlicher Professor in Jena (vgl. Textor 2007, S. IX).

[69] „Funktion – Begriff – Bedeutung“ enthält außerdem die Beiträge „Funktion und Begriff“, „Über Sinn und Bedeutung“, „Über Begriff und Gegenstand“ sowie „Was ist eine Funktion?“ (in dieser Reihenfolge).

[70] Auch hier handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil FREGE die in seiner Arbeit wichtigsten Punkte – welche hier dargestellt sind – in mehreren seiner Beiträge anspricht. Erst durch Zusammenspiel der Beiträge kann wiederum die hier dargelegte Gesamtschau entstehen.

träger und als Bedeutung eines Einzelnamens ein konkreter Gegenstand gesehen wird, auf den der Einzelname sich bezieht, wird als Sinn ein konkreter, aber dennoch objektiver Gedanke, den ein Eigen- oder Einzelname enthält, gesehen. Verdeutlicht an einem Beispiel aus der Geometrie: Wenn drei Geraden f, g und h sich in einem Punkt schneiden, so ist die Bedeutung von >>Schnittpunkt von f und g<< und >>Schnittpunkt von g und h<< dieselbe, nicht jedoch ihr Sinn. Der Unterschied von Sinn und Bedeutung wird ebenso für Behauptungssätze geklärt. So gilt als die Bedeutung eines Behauptungssatzes dessen Wahrheitswert, und als dessen Sinn der dadurch ausgedrückte Gedanke.

Ein Begriff ist für Frege rein logisch zu betrachten – hiermit weicht er von der sonst in der vorliegenden Arbeit üblichen Verwendung ab – und ist etwas, das aufgrund seiner logischen Einfachheit nicht definiert werden kann. Ein Begriff wird allerdings durch den Verweis auf eine zunächst unbesetzte Stelle und seinen prädikativen Charakter als etwas beschrieben, das vergleichbar mit einer Funktion darin ist, dass jeweils ein Argument eingesetzt werden kann. Für einen Begriff wird, basierend auf der vorausgesetzten logischen Natur, weiterhin dessen scharfe Begrenzung gefordert. Das bedeutet mit Bezug auf die unbesetzte Stelle, dass für jedes einzusetzende Argument ein Wert bestimmt werden können muss beziehungsweise dass entschieden werden können muss, ob ein Gegenstand unter einen Begriff fällt oder nicht. Die Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung wird auch mit Bezug auf Begriff geklärt. Als Sinn eines Begriffs sieht Frege dabei den Begriffsinhalt, der über Sinn hinausgehend sogar eine subjektive Vorstellung des Begriffs sein kann. Die Bedeutung hingegen ist für Frege der Begriff selbst. Diese Bedeutung ist eng mit dem Begriffsumfang verbunden, der als wesentlich für den bei Frege betonten logischen Umgang mit dem Begriff gesehen wird:

> Wenn es einem auf die Wahrheit ankommt – und auf die Wahrheit zielt die Logik hin – muß man auch nach den Bedeutungen fragen, muß man Eigennamen verwerfen, welche keinen Gegenstand bezeichnen oder benennen, wiewohl sie einen Sinn haben mögen; muß man Begriffswörter verwerfen, die keine Bedeutung haben. Das sind nicht etwa solche, die Widersprechendes vereinigen – denn ein Begriff kann recht wohl leer sein – sondern solche, bei denen die Umgrenzung verschwommen ist. Es muß von jedem Gegenstand bestimmt sein, ob er unter den Begriff falle oder nicht; ein Begriffswort, welches dieser Anforderung an seine Bedeutung nicht genügt, ist bedeutungslos. […]
>
> […] Wenn also auch den Inhaltslogikern zuzugeben ist, daß der Begriff selbst gegenüber seinem Umfange das Ursprüngliche ist, so ist er doch hierbei nicht als Sinn des Begriffswortes aufzufassen, sondern als Bedeutung, und die Umfangslogiker kommen insofern der Wahrheit näher, als sie in dem Umfange eine Bedeutung als das Wesentliche hinstellen, die

> zwar nicht der Begriff selbst ist, aber doch sehr enge mit ihm zusammenhängt.
>
> (Frege 1971a, S. 32f)

Laut FREGE dient die Verwendung von Zeichen und damit auch von Sprache zur Ordnung von Sinneseindrücken. Zeichen können demnach als Kristallisationskerne gesehen werden, um die sich Erinnerungsbilder und Wahrnehmungen sammeln, womit diese organisiert werden und das Nachdenken über sie ermöglicht wird. Zeichen ermöglichen es somit, Sinn in gebündelter Form vor- und darzustellen, und sie sind denkökonomisch sinnvoll, da Altes kurzgefasst reproduziert werden kann, um Neues zu denken. Da unterschiedliche Erinnerungen und Wahrnehmungen unter ein Zeichen subsumiert werden, wird begriffliches Denken möglich. Zeichen als Bestandteile der Gebrauchssprache bleiben jedoch, laut FREGE, eng, bis zur Identifikation, an einzelne Bedeutungen gebunden, ein Eigen- oder Einzelname oder Satz kann dabei in der Gebrauchssprache auch keine oder sogar mehrere Bedeutungen (von denen der Kontext jeweils eine heraushebt) haben. Zeichen bleiben außerdem veränderlich, um sich neuen Wahrnehmungen anzupassen und unscharf, da sie verschiedenen Sinn haben und nicht ständig der komplette subsumierte Sinn bewusst ist.

Gerade diese Anpassbarkeit und Unschärfe der Gebrauchssprache sieht FREGE bei ihrer Verwendung für wissenschaftliches Arbeiten als Schwäche. Aus dem Grund, dass die Sprache stark in subjektiven Vorstellungen verhaftet gesehen wird, wird ein von der Gebrauchssprache komplett verschiedener Charakter von einer Wissenschaftssprache (einer Begriffsschrift) gefordert. Diese soll, laut FREGE, die Trennung von Psychologischem und Logischem und somit auch logische Konsistenz und Eindeutigkeit bei wissenschaftlichem Arbeiten gewährleisten – dazu werden klare Regeln zur Verknüpfung verschiedener Zeichen sowie für jedes Zeichen genau eine Bedeutung und ein Sinn gefordert. FREGE schreibt diesbezüglich:

> Von einer [Begriffsschrift] möchte ich folgendes verlangen: Sie muß für die logischen Beziehungen einfache Ausdrucksweisen haben, die, an Zahl auf das Notwendigste beschränkt, leicht und sicher zu beherrschen sind. Diese Formen müssen geeignet sein, sich mit einem Inhalte auf das Innigste zu verbinden. Dabei muß solche Kürze erstrebt werden, daß die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche für die Übersichtlichkeit der Darstellung gut ausgenutzt werden kann. Die Zeichen von inhaltlicher Bedeutung sind weniger wesentlich. Wenn die allgemeinen Formen einmal vorhanden sind, können jene leicht nach Bedürfnis geschaffen werden. Wenn es nicht gelingt oder nicht nötig erscheint, einen Begriff in seine letzten Bestandteile zu zerlegen, kann man sich mit vorläufigen Zeichen begnügen.
>
> (Frege 2002c, S. 75)

Es wird allerdings mit Bezug auf die Entwicklung einer Wissenschaft darauf hingewiesen, dass ein solches streng logisches System nicht von vornherein bestehen kann und sich andererseits auch bei Weiterentwicklung der Wissenschaft die Unzulänglichkeit eines schon bestehenden Systems erweisen kann.

Insbesondere fordert FREGE die Verwendung einer logisch vollkommenen Wissenschaftssprache zum Aufbau eines mathematischen Systems (vgl. u.a. Frege 1971d & 2002e). Diese soll auf Axiomen, die als Prämissen dienen, sowie auf Definitionen basieren. Im Sinne einer logischen Begriffsverwendung werden damit nur mittels einer Definition, um einen spezifischen Sinn auszudrücken, eingeführte Zeichen zugelassen. Demgegenüber werden, aufgrund ihrer Unschärfe, Zeichen ausgeschlossen, die inklusive ihres Sinns aus der Alltagssprache in die Mathematik übertragen wurden.[71] Die Axiome und Definitionen sollen dann als Grundlage für weitere mittels logischer Regeln ausgeführte Schlüsse gebraucht werden. FREGE merkt allerdings an, dass streng logisches Arbeiten im Mathematikunterricht nicht von Beginn an gefordert werden darf, aber sukzessive entwickelt werden muss (vgl. Frege 1971d, S. 121).

4.2.4. LUDWIG WITTGENSTEIN

WITTGENSTEIN beschäftigte sich, wie vor ihm unter anderem FREGE, mit einer Analyse der Umgangssprache (die bei FREGE Gebrauchssprache genannt wurde). Ihm ging es jedoch insgesamt weniger darum, gezielt Schwächen der Umgangssprache aufzuzeigen und außerdem eine logisch konsistente und eindeutige Wissenschaftssprache auszuarbeiten, sondern vielmehr um eine Analyse des Gebrauchs der Sprache. Diese steht im Zentrum sowohl von WITTGENSTEINs Frühwerk „Tractatus logico-philosophicus“ oder „Logisch-philosophische Abhandlung“ (vgl. Wittgenstein 1963), in dem er der Umgangssprache allerdings noch skeptisch und einer logisch basierten Zeichensprache befürwortend gegenübersteht, als auch von dessen Spätwerk „Philosophische Untersuchungen“ (vgl. Wittgenstein 1967). WITTGENSTEIN knüpft mit seiner Abhandlung noch relativ eng an FREGE an und stellt eine Theorie auf, wonach die Sprache ein Abbild der Wirklichkeit ist. Dabei bietet er grundlegende Bestandteile seiner Theorie axiomatisch und definitorisch dar (vgl. Raatzsch 2008, S. 57ff). Im Gegensatz dazu setzt er sich in seinen Untersuchungen mit seinem Frühwerk auseinander und sieht die Sprache durch ihren Gebrauch, wobei auch dasselbe Wort in verschiedenen Kontexten unterschiedlich gebraucht werden kann, festgelegt. Das spiegelt sich in einem eher lose aneinandergereihten Aufbau und einer einfachen Sprache des gesamten Werkes wider (vgl. Raatzsch 2008, S. 17ff).

[71] FREGE erlaubt in der mathematischen und der Gebrauchssprache die Verwendung derselben Zeichen, in der Mathematik muss ihnen jedoch explizit ein bestimmter Sinn zugeschrieben werden und jener aus der Gebrauchssprache muss außen vor bleiben.

WITTGENSTEINs „Logisch-philosophische Abhandlung“ erinnert dahingehend an KANT, dass es etwas gibt, das dem bei ihm sogenannten menschlichen Bild der Welt zu Grunde liegt – im Gegensatz zu KANT sieht er diese Grundlage allerdings nicht im menschlichen Verstand, sondern außerhalb dessen in der Logik.[72] Eine wirkliche Parallele findet sich darin, dass WITTGENSTEIN Raum und Zeit, neben der Farbe, als Formen von Gegenständen und damit als für Gegenstände wesentlich, weil substanzgebend, sieht. Die Logik bestimmt, laut WITTGENSTEIN, erst, wie Gegenstände miteinander verknüpft sein können, und jede logisch mögliche Verknüpfung sieht er als Tatsache an. Ein Modell der Wirklichkeit findet sich für WITTGENSTEIN im Sinne eines Abbilds von logisch möglichen Verknüpfungen im menschlichen Bild der Welt. Die Wirklichkeit und das Bild müssen, laut WITTGENSTEIN, sowohl ihre räumliche, zeitliche oder farbliche Form (wenn sie eine haben) als auch ihre logische Form (die vorliegen muss) gemeinsam haben. Dabei gibt es kein a priori wahres Bild, sondern die Wahrheit oder das Falschsein eines Bildes konstituiert sich allein in der Übereinstimmung des Dargestellten mit der Wirklichkeit – wobei allerdings das Folgern dieser Übereinstimmung a priori geschieht.[73] Das menschliche Bild der Welt nennt WITTGENSTEIN, weil es logisch möglich ist, wiederum eine Tatsache, und das logische Bild der Tatsachen wird der Gedanke genannt. Der Gedanke wird dabei als durch ein Satzzeichen ausgedrückt beschrieben, dessen Form (im Gegensatz zum Inhalt) bereits als im Satz enthalten gesehen wird.

WITTGENSTEIN übernimmt in seiner Abhandlung die FREGEsche Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung nur in Ansätzen. Für ihn hat ein Satz, in Form von etwas in einem Bild Dargestellten, Sinn, aber keine Bedeutung, und ein Name, der ein im Satz verwendetes Urzeichen[74] ist, hat, in Form eines konkreten Gegenstandes, auf den er sich bezieht, eine Bedeutung, aber keinen Sinn. Mit Bezug auf Begriffe ist für WITTGENSTEIN zwischen eigentlichen und formalen Begriffen zu unterscheiden, wobei beide rein logisch zu betrachten sind. WITTGENSTEINs eigentliche Begriffe haben dieselbe Bedeutung wie Begriffe bei FREGE und anderen Logikern und werden als noch unbestimmte Sätze betrachtet, in die Argumente eingesetzt werden können, sie werden damit als durch Funktionen dar-

[72] Es handelt sich bei den Ausführungen zu beiden Werken WITTGENSTEINs an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil WITTGENSTEINs Werke durch seine Verwendung der Sprache leben und viele der dargelegten Punkte, insbesondere deren Stellenwert, erst durch seine Sprachverwendung und Parallelitäten verschiedener sprachlicher Konstruktionen ausgedrückt werden.

[73] Laut WITTGENSTEIN kann ein Bild nur dann a priori richtig sein, wenn seine Möglichkeit seine Wahrheit bedingt, wenn es sich also um eine Tautologie handelt.

[74] Urzeichen heißt bei WITTGENSTEIN ein Zeichen, das durch keine Definition zu zergliedern ist.

stellbar gesehen. Wittgensteins formale Begriffe hingegen können nicht in Sätzen ausgedrückt werden, sondern haben stattdessen die Form von Variablen.[75]

Mit Bezug auf die Umgangssprache finden sich bei Wittgenstein einige auch schon bei Frege genannten Kritikpunkte. So bemerkt er, dass dasselbe Wort verschiedene Funktionen haben kann, also auch ein Name verschiedene Bedeutungen haben kann. Insgesamt weist er vor allem auf die Komplexität der Umgangssprache hin.

> 4.002 […]
>
> Die Umgangssprache ist ein Teil des menschlichen Organismus und nicht weniger kompliziert als dieser.
>
> Es ist menschenunmöglich, die Sprachlogik aus ihr unmittelbar zu entnehmen. Die Sprache verkleidet den Gedanken. Und zwar so, daß man nach der äußeren Form des Kleides, nicht auf die Form des bekleideten Gedankens schließen kann; weil die äußere Form des Kleides nach ganz anderen Zwecken gebildet ist als danach, die Form des Körpers erkennen zu lassen.
>
> Die stillschweigenden Abmachungen zum Verständnis der Umgangssprache sind enorm kompliziert.
>
> (Wittgenstein 1963, S. 32)

Für Wittgenstein ist, wie schon für Frege, diese Unschärfe der Umgangssprache ein Grund, eine Zeichensprache zu verwenden, der eine „*logische* Grammatik“ (Wittgenstein 1963, S. 27) unterliegt – ähnlich der Begriffsschrift Freges, die allerdings noch fehlerbehaftet sei. Vor allem ist für Wittgenstein aber eine logische Analyse der Sprache notwendig, um Unklarheiten in der Sprachverwendung aufzudecken (vgl. Raatzsch 2008, S. 56). Diese Analyse führt ihn auf die sogenannten Elementarsätze, die durch ihre Wahrheit oder ihr Falschsein angeben, ob ein Sachverhalt besteht und die Welt damit vollständig beschreiben.[76] Auf diese Elementarsätze sollen alle Sätze zurückgeführt werden können, und die Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze bestimmen, unter welchen Bedingungen ein Satz wahr ist. Insofern es sich bei den Elementarsätzen und daraus zusammengesetzten Sätzen allerdings um rein logische Sätze handelt, haben diese, laut Wittgenstein, entweder tautologischen oder kontradiktorischen Charakter und keinen Inhalt, da sie diesen erst durch ihre Verbindung zur Welt er-

[75] Entsprechend Wittgenstein bezeichnen beispielsweise >>Gegenstand<<, >>Komplex<<, >>Tatsache<<, >>Funktion<< und >>Zahl<< formale Begriffe. Es wird als sinnlos angesehen, beispielsweise zu sagen „Es gibt zwei Gegenstände“, wobei eine solche Aussage von eigentlichen Begriffen möglich ist. Stattdessen wird für formale Begriffe eine weitere Begriffsbestimmung als notwendig erachtet (vgl. Wittgenstein 1963, S. 46f).

[76] Zur Angabe der Wahrheit oder des Falschseins von Elementarsätzen entwickelt Wittgenstein seine Wahrheitstafeln, auf die in der Logik wiederholt zurückgegriffen wird.

halten. Es können ebenso die Elementarsätze nicht explizit angegeben werden, da diese sich erst durch die Anwendung der Logik auf die Welt konstituieren. In der Logik selbst gilt:

> 6.127 Alle Sätze der Logik sind gleichberechtigt, es gibt unter ihnen nicht wesentlich Grundgesetze und abgeleitete Sätze.
>
> […]
>
> 6.1271 Es ist klar, daß die Anzahl der >>logischen Grundgesetze<< willkürlich ist, denn man könnte die Logik ja aus Einem Grundgesetz ableiten, indem man einfach z.B. aus Freges Grundgesetzen das logische Produkt bildet. (Frege würde vielleicht sagen, daß dieses Grundgesetz nun nicht mehr unmittelbar einleuchte. Aber es ist merkwürdig, daß ein so exakter Denker wie Frege sich auf den Grad des Einleuchtens als Kriterium des logischen Satzes berufen hat.)
>
> 6.13 Die Logik ist keine Lehre, sondern ein Spiegelbild der Welt.
>
> (Wittgenstein 1963, S. 101)

Wie die Logik die Struktur bereitstellt, mit der die Welt abgebildet wird, stellt, laut WITTGENSTEIN, die Mathematik als logische Methode die Struktur bereit, womit mathematische Probleme gelöst werden können (vgl. Wittgenstein 1963, S. 102ff). Genauer bietet Geometrie jene Struktur, mit der etwas über Form und Lage geometrischer Figuren ausgedrückt werden kann (vgl. Wittgenstein 1963, S. 107f). Allerdings erhalten Mathematik und speziell Geometrie ihren Wert, der über tautologische oder kontradiktorische Aussagen hinausgeht, erst durch ihre Anwendung auf die Welt.

In seinen Philosophischen Untersuchungen spricht WITTGENSTEIN von Irrtümern in seinem ersten Buch. Insgesamt hat er sich von seiner Abbildtheorie der Sprache gelöst – er geht somit nicht mehr davon aus, dass die Logik einem menschlichen Bild der Welt zu Grunde liegt. Dies spiegelt sich auch in seiner Verwendung von Sinn und Bedeutung wieder. Dabei wird einem Satz weiterhin Sinn zugesprochen, aber es wird nicht mehr ein konkreter Gegenstand, auf den ein Name sich bezieht, sondern der Gebrauch eines Wortes in der Sprache als dessen Bedeutung aufgefasst.

Weiterhin tritt WITTGENSTEIN der Umgangssprache weniger kritisierend gegenüber, sondern konzentriert sich auf ihre Beschreibung mit dem Ziel, ihr Wirken zu verstehen. Dementsprechend propagiert er auch nicht mehr die Verwendung einer logisch basierten Zeichensprache. Durch den Fokus auf den flexiblen Gebrauch der Sprache wird insbesondere die Idee der Elementarsätze verworfen, da festgestellt wird, dass nicht ausgemacht werden kann, wann Bestandteile wirklich elementar sind, und dass Sätze in analysierter Form je nach Kontext nicht zwangsläufig aussagekräftiger sind.

Für die Umgangssprache vergleicht WITTGENSTEIN den Gebrauch eines Wortes in unterschiedlichen Kontexten mit den Ähnlichkeiten in einer Familie:

> 66. […]
>
> Und das Ergebnis dieser Betrachtung lautet nun: Wir sehen ein kompliziertes Netz von Ähnlichkeiten, die einander übergreifen und kreuzen. Ähnlichkeiten im Großen und Kleinen.
>
> 67. Ich kann diese Ähnlichkeiten nicht besser charakterisieren als durch das Wort >>Familienähnlichkeiten<<; denn so übergreifen und kreuzen sich die verschiedenen Ähnlichkeiten, die zwischen den Gliedern einer Familie bestehen: Wuchs, Gesichtszüge, Augenfarbe, Gang, Temperament, etc. etc. […]
>
> […]
>
> Wenn aber einer sagen wollte: >>Also ist allen diesen Gebilden etwas gemeinsam, – nämlich die Disjunktion aller dieser Gemeinsamkeiten<< – so würde ich antworten: hier spielst du nur mit einem Wort. Ebenso könnte man sagen: es läuft ein Etwas durch den ganzen Faden, – nämlich das lückenlose Übergreifen dieser Fasern.
>
> (Wittgenstein 1967, S. 48f)[77]

Für WITTGENSTEIN haben Begriffe in der Form, wie sie in der Umgangssprache verwendet werden, damit unscharfe Ränder und sind unbegrenzt. Sie können auch interindividuell verschieden sein, da die Konzentration auf jeweils unterschiedlichen Aspekten liegen kann oder Begriffe kontextbedingt unterschiedlich wahrgenommen werden können.[78] Kommuniziert werden können diese Begriffe, laut WITTGENSTEIN, mittels Beschreibungen oder Aufzählungen eines Teils dessen, was der Begriff unter sich fasst, aber nicht durch Definitionen – es heißt, eine indirekte Art der Beschreibung wird verwendet, da keine bessere vorhanden

---

[77] Die Verwendung der Chevrons ist hier von WITTGENSTEIN übernommen, der sie zu Zwecken der Hervorhebung und im Sinne normaler Anführungszeichen verwendet.

[78] Mit Bezug auf den Begriff Würfel schreibt WITTGENSTEIN:

> 139. Wenn mir jemand z.B. das Wort >>Würfel<< sagt, so weiß ich, was es bedeutet. Aber kann mir denn die ganze *Verwendung* des Wortes vorschweben, wenn ich es so *verstehe*?
> Ja, wird aber andererseits die Bedeutung des Wortes nicht auch durch diese Verwendung bestimmt? Und können sich diese Bestimmungen nun widersprechen? Kann, was wir so *mit einem Schlage* erfassen, mit einer Verwendung übereinstimmen, zu ihr passen, oder nicht zu ihr passen? Und wie kann das, was uns in einem Augenblicke gegenwärtig ist, was uns in einem Augenblick vorschwebt, zu einer *Verwendung* passen?
>
> (Wittgenstein 1967, S.74)

ist. Insbesondere werden Begriffe damit durch einzelne Repräsentanten dargestellt gesehen und nicht in einer gewissermaßen allgemeinen Form.

WITTGENSTEIN erwähnt aber, dass Begriffe als logische Summe ihrer Teilbegriffe (und damit als logische Begriffe) gefasst werden können. Begriffe können für einen bestimmten Zweck scharfe Ränder bekommen, sie können damit begrenzt und objektiviert werden, verlieren allerdings im Zuge dessen einen Teil ihrer ursprünglichen Bedeutung. Diesbezüglich weist er auf wissenschaftliche, insbesondere auch mathematische Begriffe hin, in denen mehr oder weniger willkürlich ein fest umgrenzter Teil der Begriffsverwendung akzentuiert wird – wobei nachrangige Aspekte in den Vordergrund rücken können (vgl. Wittgenstein 1967, S. 55 & 262ff). Auch eine Kommunikation der Begriffe mittels Definitionen wird so möglich.

4.2.5. Zwischenfazit – Begriffsbild und Begriffskonvention in der Philosophie

Zunächst ist, schon bezüglich der betrachteten Wissensstruktur, ein grundsätzlicher Unterschied von TALLs und VINNERs (und anderen in diesem Umfeld entstandenen) Beiträgen zu Concept Image und Concept Definition und jenen aus der Philosophie festzustellen. So bezieht sich der Begriff Concept Image auf die kognitive Wissensstruktur und stellt diesem die Concept Definition gegenüber, während die hier betrachteten Arbeiten aus der Philosophie die epistemologische Wissensstruktur untersuchen. Wie bereits in 0.1. erwähnt, wurden Werke aus der Philosophie allerdings nur insofern betrachtet, als sie sich auf die subjektive Begriffsbildung beziehen – darin stimmen die psychologisch geprägten Beiträge von TALL und VINNER und die angeführten Arbeiten aus der Philosophie somit überein.

Die natürliche Begriffsentwicklung spielt in den Werken aus der Philosophie allerdings mit Bezug auf die subjektive Begriffsbildung eine nachrangige Rolle. Entwicklungsaspekte werden von KANT und CASSIRER im Sinne der Entstehung von Begriffen angesprochen und sind bei FREGE und WITTGENSTEIN im Sinn der Entwicklung einer logisch eindeutigen Sprache aus der Umgangssprache relevant. Dabei ist, unter Berücksichtigung der kognitiven Wissensstruktur und eines jeweils subjektiven Entwicklungsstandes, die Entstehung bestimmter vorgegebener Begriffe beziehungsweise die Entwicklung einer logisch geprägten Sprache aus der Umgangssprache auch Ziel des Mathematikunterrichts. Dementsprechend verwundert es nicht, dass sich die in TALL und VINNERs Begriffen Concept Image und Concept Definition konstituierende Polarität auch mit Bezug auf die epistemologische Wissensstruktur findet.

Bei Abgleich mit TALL und VINNERs Begriffen Concept Image und Concept Definition finden sich in den thematisierten Werken von KANT, CASSIRER, FREGE und WITTGENSTEIN damit einige Parallelen aber dennoch auch Unterschiede einerseits untereinander und andererseits zu TALL und VINNERs Begriffen. Die grundlegendste Parallele insgesamt ist, wie angedeutet, dass sich in den betrachteten Werken jeweils zwei Begriffstypen gegenüberstehen (Tabelle 3).

	potentielle Vorläufer zu Concept Image	potentielle Vorläufer zu Concept Definition
KANT	empirische Begriffe	reine Begriffe
CASSIRER	natürliche Weltbegriffe	logische Begriffe
FREGE	Zeichen	Begriffe
früher WITTGENSTEIN	Worte	Begriffe
später WITTGENSTEIN	Familienähnlichkeitsbegriffe	logische Begriffe

Tabelle 3: Potentielle Vorläufer zu Concept Image und Concept Definition aus der Philosophie

So können KANTs empirische Begriffe, CASSIRERs natürliche Weltbegriffe, die bei FREGE genannten Zeichen und beim frühen WITTGENSTEIN genannten Worte mit den darunter subsumierten Bedeutungen sowie die Familienähnlichkeitsbegriffe des späten WITTGENSTEIN als Parallelen oder potentielle Vorläufer zu TALL und VINNERs Concept Image gelesen werden. Ebenso können KANTs reine Begriffe, CASSIRERs logische Begriffe, FREGEs und des frühen WITTGENSTEINs Begriffe insgesamt sowie die logischen Begriffe des späten WITTGENSTEIN als Parallelen oder potentielle Vorläufer zu TALL und VINNERs Concept Definition aufgefasst werden.

Am stärksten aus dieser Reihe von Begriffstypen stechen zunächst jene von KANT heraus, was in dessen Theorie der Erkenntnis allgemein begründet ist. Bei ihm liegt, im Gegensatz zu den anderen Philosophen, mit den reinen Begriffen der potentielle Vorläufer zu Concept Definition den empirischen Begriffen und damit dem potentiellen Vorläufer zu Concept Image zu Grunde, und dieser kann wiederum erst auf Basis jenes entstehen. Genannter Unterschied bedingt einen bei KANT besonderen Charakter der reinen und empirischen Begriffe als potentielle Vorläufer zu Concept Definition und Concept Image. KANTs reine Begriffe entwickeln sich im Verstand und der reinen Anschauung und werden nicht aus den empirischen Begriffen abstrahiert. Da die Begriffsbildung in diesem Fall der empirischen Anschauung vorausgeht (und alle wichtigen oder unwichtigen Aspekte eines Begriffs, wie er in der Anschauung auftritt, nicht bekannt sind), können nicht bewusst bestimmte Aspekte des Begriffsinhalts in den Vordergrund gerückt und von anderen abgesehen werden. Dies gibt einem entstehenden reinen Begriff einen weniger willkürlichen Charakter, als den potentiellen Vorläufern zu Concept Definition bei den anderen Philosophen. Allerdings lässt sich keine Aussage darüber treffen, ob ein reiner Begriff in Worten formuliert und in Form einer Definition ausgedrückt werden kann.[79]

[79] KANTs Reihenfolge der Entstehung reiner und empirischer Begriffe wird in 4.4.5. mit Bezug auf den Mathematikunterricht ausgeblendet. Insbesondere der ideale Charakter der reinen Begriffe bleibt allerdings für mathematische Begriffe weiterhin kennzeichnend.

Allerdings können einige Punkte herausgehoben werden, worin vor allem CASSIRERs natürliche Weltbegriffe, FREGEs Zeichen und des frühen WITTGENSTEINs Worte mit ihren Bedeutungen sowie die Familienähnlichkeitsbegriffe des späten WITTGENSTEIN übereinstimmen oder sich gegenseitig ergänzen und die vor dem Hintergrund von Concept Image besonders wichtig erscheinen. So entstehen die verschiedenen Begriffe[80] in Auseinandersetzung einer Person mit ihrem Umfeld, sie haben, wegen der jeweils eigenen Anschauungs- und Erfahrungsgrundlage sowie eigenen Motiven, subjektiven Charakter. Um Wahrnehmungen zu ordnen, werden einzelne Merkmale dieser betont, die Wahrnehmungen werden damit intuitiv zu Begriffen zusammengefasst. Die Begriffe sind folglich synthetisch und induktiv gebildet. Um ständig neue Erfahrungen unter sich fassen zu können, bleiben diese Begriffe allerdings flexibel, vage und damit auch definitorisch nicht fassbar. Durch ihre Nähe zur gegenständlichen Welt ist außerdem der Unterschied von Begriff und Objekten nicht bewusst. CASSIRER, FREGE und WITTGENSTEIN weisen mit Bezug auf die natürlichen Weltbegriffe, Zeichen, Worte mit Bedeutungen und Familienähnlichkeitsbegriffe dabei jeweils auf die Nähe verschiedener Begriffe sowie von Begriffen und Objekten zueinander, die bis zu einem lückenlosen Zusammenhängen reichen kann und auch kontextuell bedingt sein kann, hin. Insbesondere FREGE und der frühere WITTGENSTEIN führen Fehlvorstellungen und -verständnisse auf diese begriffliche Nähe zurück.

Insgesamt stimmen CASSIRERs logische Begriffe, FREGEs und des frühen WITTGENSTEINs Begriffe insgesamt sowie die logischen Begriffe des späten WITTGENSTEIN weniger überein, als obig thematisierte Parallelen oder potentielle Vorläufer zu Concept Image – was darin begründet sein kann, dass ihnen ein weniger vager Charakter zugeschrieben wird. Die Betrachtungsweise von FREGE und dem frühen WITTGENSTEIN unterscheidet sich, wegen deren Zugang von der Logik und ihrem damit verbundenen stark grammatisch geprägten Blickwinkel, stark von jener CASSIRERs und des späten WITTGENSTEINs. Insbesondere bedingen alltägliche Zeichen bei FREGE oder Worte bei dem frühen WITTGENSTEIN nicht die Bildung der dort sogenannten Begriffe, die einen komplett anderen Charakter als Zeichen oder Worte haben. Dennoch sind einige Punkte zu nennen, in denen CASSIRERs, FREGEs und WITTGENSTEINs Parallelen oder potentielle Vorläufer zu TALL und VINNERs Concept Definition übereinstimmen oder sich gegenseitig ergänzen und die vor dem Hintergrund von Concept Definition wesentlich sind. So ist eine Grundlage zur Bildung der verschiedenen Begriffe ein kritisches Verhältnis zur Begriffsbildung. Im Zuge der Begriffsbildung wird, auch wenn die Begriffe basierend auf lebensweltlichen Objekten gebildet werden (und nicht frei konstruiert werden), der Mensch ausgeblendet, die Begriffe werden intersubjektiv. Es handelt sich somit um analytische, deduktive Begriffsbildung. Die Begrif-

[80] >>Begriffe<< ist hier im Sinne der üblichen Verwendung in der vorliegenden Arbeit und nicht im Sinne der Verwendung in Werken der genannten Philosophen gemeint.

fe bekommen klare Grenzen, einen konventionalen Charakter und können in Form einer Regel oder Definition ausgedrückt werden. Dies trennt sie vollständig von den konkretisierenden Objekten. Durch Rückgriff auf KANTs Theorie der Erkenntnis und seine reinen Begriffe lässt sich außerdem der ideale Charakter der Parallelen oder potentiellen Vorläufer zu Concept Definition – der mit Bezug auf mathematische Begriffe besonderes Gewicht hat – betonen.

4.3. Begriffsbild und Begriffskonvention in der Psychologie[81]

In der Psychologie werden verschiedene Theorien zur Begriffsbildung unterschieden. Genauer ist die klassische Theorie, deren Bezeichner darin begründet ist, dass es sich bei ihr um die älteste Theorie handelt, zu unterscheiden von Prototypentheorien und ferner Exemplartheorien und wissensbasierten Ansätzen. Die klassische Theorie ist mit Bezug auf die natürliche Begriffsentwicklung und das so entstehende Begriffswissen mittlerweile verworfen, bleibt allerdings mit Bezug auf die von der Mathematikdidaktik betrachtete Begriffsbildung relevant. Aus diesem Grund und weil sie eng an die Logik anknüpft sowie Parallelen zu TALL und VINNER enthält, wird sie im Folgenden thematisiert. Dabei soll zunächst allgemein auf die Theorie eingegangen werden, bevor Arbeiten von PIAGET sowie BRUNER, GOODNOW und AUSTIN, da es sich bei diesen um prägende Vertreter der klassischen Theorie der Begriffsbildung handelt, thematisiert werden. Die klassische Theorie wurde mit Bezug auf das natürliche Begriffswissen von den Prototypentheorien abgelöst, und diese wurden auch in Bezug auf jene betrachtet. Im Folgenden wird insbesondere die Theorie von ROSCH als Mitbegründerin der Prototypentheorien thematisiert. Da neben den Prototypentheorien nach aktuellerem Stand auch die Exemplartheorien und wissensbasierten Ansätze wohl jeweils einen Teil zu einer umfassenden psychologischen Theorie der menschlichen Begriffsentwicklung und des Begriffswissens beitragen,[82] werden diese in einem Exkurs kurz angesprochen.

Arbeiten aus der sowjetischen Psychologie sollen an dieser Stelle noch außen vor bleiben und erst in 6.5. im Rahmen der Grundvorstellungsdiskussion thematisiert werden. Wie dort dargelegt wird, bieten auch diese Arbeiten Anknüpfungspunkte an Concept Image und Concept Definition. Aufgrund von grundsätzlichen Unterschieden des in den Arbeiten aus der sowjetischen Psychologie dargelegten Weges der Begriffsbildung zu den Ausführungen zur Begriffsbildung in den in

[81] Während in REMBOWSKI (2012b & 2015b) noch Bezüge zu Werken von GAGNÉ und AEBLI enthalten sind, sind GAGNÉ und AEBLI als Lernpsychologen in der vorliegenden Arbeit ausgeklammert. Dies ist darin begründet, dass deren lernpsychologische Betrachtungen nicht klar von didaktischen Betrachtungen zu trennen sind, die in diesem Kapitel aber nicht thematisiert werden sollen.

[82] Dabei ist unklar, wie genau sich eine solche umfassende Theorie aus den verschiedenen Theorien zusammensetzt (vgl. Murphy 2004). Da Begriffsbildung in der Psychologie ein extrem weites Feld ist, kann nicht auf alle Aspekte davon eingegangen werden.

diesem Kapitel betrachteten Arbeiten fügen sie sich aber erst an späterer Stelle in die in der vorliegenden Arbeit entstehende Theorie ein.

4.3.1. Die klassische Theorie

Entsprechend der klassischen Theorie der Begriffsbildung (vgl. Edelmann 2000, Murphy 2004) sind Begriffe in Form ihrer Definitionen abgespeichert. Diese Definitionen verweisen auf die Oberklasse und auf kritische Attribute, die durch verschiedene Kombinationsregeln verknüpft sein können und die sowohl notwendig als auch hinreichend für die Klassenzugehörigkeit sind. Der Begriff erhält somit den Charakter einer abstrakten Regel und wird daher auch logischer Begriff genannt. Verworfen wurde die klassische Theorie für das natürliche Begriffswissen unter anderem, weil sich auf Grundlage einer solchen Definition problemlos entscheiden lassen müsste, ob ein gegebener Repräsentant einen bestimmten Begriff konkretisiert, da die Definition keine Unschärfen in dieser Hinsicht zulässt. Ein weiterer Mangel der klassischen Theorie ist, dass alle Repräsentanten einen Begriff gleichermaßen gut oder schlecht konkretisieren müssten, da keine Grundlage geliefert wird, die es legitimiert, zwischen verschiedenen Repräsentanten eines Begriffs zu unterscheiden, und insgesamt, laut der klassischen Theorie, Begriffsinhalt und -umfang klar begrenzt sind. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, dass, auch wenn die klassische Theorie der Begriffsbildung häufig auf obig Dargelegtes reduziert wird, innerhalb dieser, wie die Theorien von PIAGET und BRUNER zeigen, durchaus Entwicklungsprozesse berücksichtigt werden. Zudem unterscheiden sich einzelne Theorien, auch schon jene von PIAGET und BRUNER, in Bezug darauf, inwieweit im Zuge der natürlichen Begriffsentwicklung ein definitorisch abgespeicherter Begriff erreichbar ist.

Aus den Gründen, aus welchen die klassische Theorie für die natürliche Begriffsentwicklung und das so entstehende Begriffswissen verworfen wurde, bleibt sie allerdings für die von der Mathematikdidaktik betrachtete Begriffsbildung relevant. Dies ist darin begründet, dass mathematische Begriffe häufig die Form einer Definition haben und eindeutig sind. Ziel des Mathematikunterrichts ist es dabei, ausgehend von natürlich gebildeten Begriffen die mathematischen Begriffe zu erschließen – einen genau solchen Weg nimmt die klassische Theorie, in unterschiedlichen Ausprägungen, für die Begriffsentwicklung allgemein an.

JEAN PIAGET

Wie bereits erwähnt, geht die klassische Theorie beispielsweise zurück auf PIAGET. PIAGETs „Psychologie der Intelligenz“ (vgl. Piaget 2000), die gemeinsam mit INHELDER entstandenen Werke „Psychologie des Kindes“ (vgl. Piaget & Inhelder 1972) und „Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen“ (vgl. Piaget & Inhelder 1973a & 1973b) sowie PIAGETs „Meine Theorie der geistigen Entwicklung“ (vgl. Piaget 2003) repräsentieren hier das Werk des Autors in psychologischer Hinsicht. Bei den beiden erstgenannten Werken handelt es sich um allgemeinere Arbeiten, die im Original in einem Abstand von etwa 20 Jahren erschienen sind und somit einen Längsschnitt durch das Schaffen PIAGETs liefern. Anschließend genanntes zweibändiges Werk hingegen beschäftigt sich konkreter mit verschiedenen Untersuchungen zur Entwicklung der von PIAGET sogenannten elementaren logischen Strukturen. Bei letztgenanntem Werk handelt es sich um den Versuch einer Gesamtdarstellung aus PIAGETs eigener Feder (vgl. Fatke 2003, S. 10). Außerdem wird sowohl auf „Weisheit und Illusionen der Philosophie“ (Piaget 1974a) als auch auf „Lebendige Entwicklung“ (Piaget 1974b) zurückgegriffen, um das Verhältnis PIAGETs zur Philosophie offenzulegen.

PIAGET steht, wie er in „Weisheit und Illusionen der Philosophie“ umfassend darlegt, philosophischer Forschung sehr kritisch gegenüber.[83] Dies begründet er unter anderem damit, dass in der Philosophie sehr gesellschaftsorientiert gearbeitet wird und daher philosophische Forschung zu verschiedenen Zeiten und entsprechend verschiedener Gesellschaften (die selbstverständlich auch politisch beeinflusst sind) unterschiedliche Theorien hervorbringt. PIAGET bezeichnet Philosophie weiterhin als wissenschaftsfern, was er auf die philosophischen Forschungsmethoden zurückführt. Laut ihm ist eine in der Philosophie angewendete rein reflexive Methode, gegenüber einer auch in der Psychologie verwendeten experimentellen und deduktiven Methode, kein Instrument zur Lösung eines Problems. Unter philosophischen Arbeiten hebt PIAGET allerdings jene KANTs (und u.a. auch CASSIRERs[84]) positiv hervor, da dieser in seiner Kritik der reinen Vernunft bereits erkennende Intuitionen als Trugschlüsse statuiert hat und im Zuge dessen festgestellt hat, dass Verstand und reine Anschauung nur dann wirkliche Erkenntnis hervorbringen, wenn sie auf die empirische Anschauung angewendet werden können (vgl. 4.2.1.). PIAGET übernimmt in seiner Theorie, seinen eigenen Aussagen nach, KANTs von vornherein gegebene Merkmale, wenn auch nicht im Sinne einer Apriorität der Strukturen, sondern im Sinne einer „rationale[n] Notwendigkeit und Strukturierung der Erfahrung“ (Piaget 1974a, S. 79). Daran schließt er mit einem „dynamischen Kantianismus“ (Piaget 1974a, S. 97), der KANTs Perspektive bereichern soll, in Form seines Entwicklungsmodells an.

PIAGETs Arbeiten fließen in diesem Entwicklungsmodell zusammen. Er unterscheidet dabei insgesamt vier Stadien – das Stadium der sensomotorischen Intelligenz (die ersten eineinhalb Lebensjahre) sowie die Stadien der präoperationalen

[83] Auch mit Bezug auf die Werke PIAGETs handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden allerdings nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil auf viele der genannten Punkte in mehreren von PIAGETs Werken eingegangen wird und sich das Gesamte erst durch Zusammenspiel dieser Stellen ergibt.

[84] Auf CASSIRER verweist PIAGET nur knapp und nennt ihn eine Ausnahme unter den Philosophen, „die nicht versucht hätte[n], ihre Prinzipien auf einen Erkenntnismodus zu gründen, der für die Philosophie spezifisch und der wissenschaftlichen Erkenntnis fremd sein soll“ (Piaget 1974a, S. 83).

Intelligenz (bis zum 7. oder 8. Lebensjahr), der konkret-operationalen Intelligenz (bis zum 11. oder 12. Lebensjahr) und der formal-operationalen Intelligenz (anschließend). Begriffe und auch andere kognitive Strukturen sind, laut PIAGET, nicht von vornherein gegeben, sondern bilden sich beim Durchlaufen der Stadien sukzessive aus. Jegliche Strukturen haben ihren Ursprung dabei schon im Stadium der sensomotorischen Intelligenz, in welchem die Schemata – das sind Substrukturen, in welchen Verhaltens- und Wissensmuster organisiert sind – des Raumes und der Zeit (die dem Begriffsbildungsprozess wie schon in der Philosophie somit zu Grunde liegen), des permanenten Gegenstandes, der Kausalität und weitere Substrukturen später zu entwickelnder Begriffe gebildet werden. Die verschiedenen Strukturen gehen allerdings nicht ausschließlich auf Wahrnehmungen zurück und sind ebenfalls nicht allein sprachlichen Ursprungs.[85] Stattdessen werden sie wesentlich von Handlungen als konkreten Operationen mitbegründet, die insbesondere im Stadium der präoperationalen Intelligenz und der konkret-operationalen Intelligenz ausgebildet werden. Im Stadium der präoperationalen Intelligenz bleiben Schemata allerdings nachahmend und von einer jeweils ausgeübten Tätigkeit abhängend, es fehlen beispielsweise transitive, reversible und assoziative Komponenten. Von PIAGET sogenannte Vorbegriffe, die diesem Stadium zuzurechnen sind, vermischen Individuelles mit Allgemeinem. Im Stadium der konkret-operationalen Intelligenz findet eine zunehmende Dezentrierung statt, und transitives, reversibles sowie assoziatives Denken ist mit Bezug auf konkrete Gegenstände möglich. Das bedeutet, dass begriffliches Denken mit konkretem Bezug schließlich auch möglich wird. Erst im Stadium der formal-operationalen Intelligenz besteht allerdings die Fähigkeit, von einer Handlung unabhängige formale Operationen auch in der Vorstellung, ohne Verwendung konkreter Gegenstände, durchzuführen. Weiterhin ist in diesem Stadium das Begriffssystem soweit ausgereift, dass neue Begriffe in das System integriert werden können, ohne Widersprüche aufzuwerfen und demnach mit bereits vorhandenen Begriffen harmonieren.

PIAGET zeichnet sich dadurch aus, dass er Psychologie in einer engen Beziehung zu Logik und Mathematik und ferner auch Erkenntnistheorie, Biologie, Soziologie und Linguistik betrachtet. So formuliert er verschiedene im Laufe der Entwicklung zu erwerbende Kenntnisse in einer logisch-mathematischen Sprache.[86]

[85] PIAGET widerspricht der Auffassung CASSIRERs, indem er genauer schreibt, dass die Verwendung eines bestimmten Bezeichners durch ein Kind noch keine Auskunft über den durch das Kind gebildeten Begriff zu geben vermag. Dies ist, laut PIAGET, darin begründet, dass der Bezeichner sich auf nur ein spezielles Individuum oder eine ganze Klasse (oder auch auf Etwas, das sowohl Charakteristika des Individuellen und des Allgemeinen trägt) beziehen kann, und dass die Verwendung des Bezeichners zunächst keine Auskunft darüber gibt, welcher der genannten Fälle vorliegt. Dennoch weist PIAGET die Notwendigkeit der Sprache hin, welche vor allem in ihrer symbolischen Repräsentationsfunktion begründet ist.

[86] Diesbezüglich haben BENDER und SCHREIBER mit Rückgriff auf FREUDENTHAL darauf hingewiesen, dass bei PIAGET an einigen Stellen mathematische Bezeichner andere, als die in der Mathematik üblichen, Begriffe bedeuten (vgl. Bender & Schreiber 1985, S. 273).

Es wird beispielsweise der im Stadium der sensomotorischen Intelligenz zu erwerbenden Objektpermanenz die Struktur einer Translationsgruppe zugeschrieben, die folgende Eigenschaften hat, wenn es sich bei AB um eine Translation von A nach B handelt: „*(a)* […] AB+BC=AC; *(b)* AB+BA=0; *(c)* AB+0=AB; *(d)* AC+CD=AB+BD“ (Piaget 2003, S. 46). Auch die im Stadium der konkret-operationalen Intelligenz auszubildenden Strukturen, beispielsweise der Transitivität oder der Addition von Klassen inklusive der inversen und neutralen Operationen und Elemente bezüglich der Addition sowie deren Assoziativität, werden in einem logisch-mathematischen Vokabular sowie in Formelschreibweise präsentiert (Piaget 2003, S. 107f). Dem folgt im Stadium der formal-operationalen Intelligenz PIAGETs Zusammenführung von Reziprokem und Inversem zu einem Ganzen, was in aussagenlogischer Form vorgestellt wird (Piaget & Inhelder 1972, S. 141 & 2003, S. 116f). PIAGET erwähnt, dass sich Kenntnisse und Handeln insgesamt auf logisch-mathematische Strukturen hin entwickeln – dies liegt allerdings laut PIAGET nicht daran, dass die Modelle dafür von vornherein vorgegeben sind. Der Zusammenhang von Psychologie zu Logik und Mathematik wird schließlich folgendermaßen formuliert:

> Allgemein gesehen, ist Logik ein axiomatisches System, und in unserem Zusammenhang müssen wir fragen: Eine Axiomatisierung wovon? Sie ist gewiss keine Axiomatisierung der bewussten Denkprozesse des Subjekts, weil diese inkonsistent und unvollständig sind. Aber hinter dem bewussten Denken verbergen sich die >>natürlichen<< operatorischen Strukturen, und es ist offensichtlich, dass sie, obgleich die logische Axiomatisierung sie unendlich überschreitet […], durch einen Prozess >>reflektierender Abstraktion<< zur Grundlage dieser Axiomatisierung werden.
>
> (Piaget 2003, S. 123)[87]

Dabei ist zu betonen, dass laut PIAGET die Logik nicht grundsätzlich auf der Psychologie beruht, sondern dass sie psychologische Strukturen lediglich widerspiegelt. Diesbezüglich untersucht er auch die Wechselbeziehung von Logik und Psychologie und subsumiert beides unter Erkenntnistheorie:

> Wenn Erkenntnistheorie als die Untersuchung der Aufbaus gültiger Erkenntnis definiert wird, so setzt das Fragen der Validität voraus, welche von der Logik und von einzelnen Wissenschaften abhängen, aber auch Fragen nach Fakten, weil das Problem nicht nur formaler, sondern ebenso sehr realer Natur ist: Wie ist Wissenschaft *real* möglich? Deshalb ist jede Erkenntnistheorie gezwungen, von psychologischen Voraussetzungen auszugehen, […].
>
> (Piaget 2003, S. 127)

[87] Die Verwendung der Chevrons ist hier von PIAGET übernommen, wo sie im Sinne normaler Anführungszeichen verwendet werden.

Piaget unterscheidet allerdings, zumindest in seinem frühsten Werk (wobei diese Unterscheidung sich implizit in den späteren Werken wiederfindet), auch für das Stadium der formal-operationalen Intelligenz zwischen lebendigen Begriffen, die einem konkreten und formalen Operieren entspringen, und axiomatisierten Begriffen, die einer übergeordneten Axiomatik zugehören und definitorischen Charakter haben. Er betont dabei, dass lebendige Begriffe nicht die Form solcher Definitionen haben, und weiterhin, dass Definitionen keinen Einfluss auf die Bildung lebendiger Begriffe haben, sondern nachträglich und häufig unvollständig bewusst würden. Gegenüberstellend schreibt Piaget:

> So sprechen – um mit dem einfachsten Beispiel zu beginnen – sowohl die Psychologie wie auch die klassische Logik vom Begriff als Element des Denkens. Eine <<Klasse>> kann jedoch nicht durch sich selbst existieren (von der Tatsache abgesehen, daß ihre Definition auch noch andere Begriffe gebraucht). Als Instrument des Denkens und unabhängig von ihrer logischen Definition ist eine Klasse nur ein <<strukturiertes>> und kein <<strukturierendes>> Element oder mindestens: sie ist schon strukturiert in dem Maß, in welchem sie strukturierend ist. Sie existiert nur in ihrer Beziehung zu allen Elementen, von denen sie sich abhebt oder die sie umfassen (oder die sie selber umfaßt). Eine <<Klasse>> setzt eine <<Klassifikation>> voraus und diese bildet das ursprüngliche Element, denn die besonderen Klassen werden erst durch die Tätigkeit der Klassifizierung erzeugt. Unabhängig von der Gesamtklassifizierung bezeichnet ein Gattungsbegriff keine Klasse, sondern nur eine anschauliche Sammlung.
>
> (Piaget 2000, S. 41)[88]

Piaget geht von definitorisch fassbaren Begriffen aus, deren Begriffsinhalt – per genus proximum et differentia specifica[89] – und -umfang klar begrenzt sind, und untersucht auf Grundlage dieser, inwieweit sich die in einer Definition zu findenden Beziehungen auch in der Wahrnehmung finden lassen. Er merkt dabei jedoch an, dass sich solche definitorisch fassbaren Begriffe nie in vollem Ausmaß in der Wahrnehmung finden lassen können. Dies ist, laut Piaget, darin begründet, dass nie der komplette Begriffsumfang wahrgenommen werden kann, und dass verschiedene Wahrnehmungen von konkreten und formalen Operationen mit einem Objekt lediglich verschiedene Schemata bedingen, deren Beurteilung und Verbalisation zu einem Begriff führen.

Jerome Bruner

Auch Bruner ist ein prägender Vertreter der klassischen Theorie. „A Study of Thinking“ (vgl. Bruner, Goodnow & Austin 1986) sowie „Studien der kognitiven Entwicklung“ (vgl. Bruner, 1971a-1971d; Bruner & Kenney 1971a & 1971b; Ol-

[88] Bei den hier verwendeten spitzen Doppelklammern handelt es sich um die französischen Anführungszeichen oder Guillemets.
[89] Dies ist die klassische Formulierung der Definitionsregel, wonach Begriffe durch Angabe der Oberklasse und kritischen Attribute definiert werden können.

son 1971),[90] die gemeinsam mit GOODNOW und AUSTIN beziehungsweise einer gesamten Arbeitsgruppe der Harvard-Universität erarbeitet wurden, dienen hier als Repräsentanten BRUNERs Werk. Dabei handelt es sich um Arbeiten BRUNERs, die im Original in einem Abstand von 10 Jahren voröffentlich wurden und die zwei unterschiedlichen Schaffensperioden entstammen. In erster dieser Schaffensperioden beschäftigte BRUNER sich mit menschlichem Denken und genauer mit Begriffsfindung, wobei seine Untersuchungen sich auf künstlich geschaffene, logische Begriffe bezogen. In zweiter Schaffensperiode wandte BRUNER sich der Entwicklung von Kindern, unter anderem auch der Begriffsentwicklung, zu und betrachtete alltagsnähere Begriffe (vgl. Anglin 1973, S. xiivff).[91] Im Folgenden werden die genannten Werke allerdings weitestgehend in umgekehrt-chronologischer Reihenfolge angesprochen, um zu Beginn der Lebenswelt entstammende Begriffe zu betonen und an PIAGET anknüpfen zu können.

Die „Studien der kognitiven Entwicklung“ der Arbeitsgruppe um BRUNER sind wesentlich von PIAGET und der Sowjetpsychologie (die in 6.5.1. angesprochen wird) beeinflusst.[92] BRUNER und PIAGET stimmen darin überein, dass die kindliche Entwicklung durch eine Veränderung in der Qualität der erworbenen Handlungen, beziehungsweise der bei PIAGET sogenannten konkreten Operationen, und Operationen, welche bei BRUNER ausschließlich PIAGETs formale Operationen meinen, gekennzeichnet ist. BRUNER unterscheidet sich allerdings von PIAGET darin, dass er keine klar voneinander getrennten Stadien hervorhebt, sondern stattdessen feststellt, dass sich Kontinuität und Diskontinuität im Erwerb kindlicher Fähigkeiten ergänzen. Dabei spielt aufgrund von BRUNERs Rückgriff auf die Sowjetpsychologie die Sprache eine größere Rolle, als noch bei PIAGET (vgl. Aebli 1971, S. 8). Insbesondere kritisiert BRUNER die bekannten Umschüttversuche[93] PIAGETs, bei deren Auswertung dieser aus Reversibilitäts- und Kompensationsargumenten auf den Invarianzbegriff geschlossen hat, und hebt stattdessen die Bedeutung der Verschlüsselung eines Identitätsargumentes in sprach-

[90] Zur besseren Lesbarkeit wurde, wo eine deutsche Übersetzung vorhanden ist, die deutsche Ausgabe zitiert. Es wurde allerdings mit der englischen Ausgabe abgeglichen, dass der Sinn übereinstimmt – dass ein Misstrauen diesbezüglich angemessen ist, zeigt auch VON DER BANK (2013).

[91] In der weiteren Entwicklung seines Schaffens wandte BRUNER sich noch stärker von einem künstlich geschaffenen Forschungsumfeld ab und Beobachtungen einer natürlichen Entwicklung zu (vgl. Anglin 1973, S. xvff).

[92] Mit Bezug auf die Werke BRUNERs handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, erneut um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil einerseits die für „Studien der kognitiven Entwicklung“ wichtigsten Punkte – welche hier dargestellt sind – in mehreren Beiträgen des Sammelbandes angesprochen werden. Andererseits ergeben sich die meisten in „A Study of Thinking“ wichtigen Punkte erst durch Zusammenspiel der unterschiedlichen dargelegten Untersuchungen.

[93] Dabei wird eine Flüssigkeit aus einem Gefäß in ein anderes Gefäß gegossen, das entweder höher und schmaler oder flacher und breiter als das ursprüngliche Gefäß ist. Ein Kind wird gefragt, ob die Menge der Flüssigkeit noch gleich sei, und ist meist bis zu einem bestimmten Alter nicht in der Lage, die Gleichheit festzustellen.

licher Form hervor. Zudem kommen Logik und Mathematik nicht solche für die Theorie grundlegenden Funktionen wie bei PIAGET zu, womit auch die von PIAGET verwendete logisch-mathematische Ausdrucksweise inklusive ihres Formalismus außen vor bleibt (vgl. Anglin 1973, S.xix). Stattdessen kommt in BRUNERs Theorie der Umwelt und Erziehung, wiederum durch dessen Rückgriff auf die Sowjetpsychologie, ein größeres Gewicht zu, als dies bei PIAGET der Fall war. Insgesamt lässt der genannte Unterschied zwischen BRUNER und PIAGET sich unter der Unterscheidung von Strukturalismus und Funktionalismus fassen. Diese Unterscheidung meint gerade, dass bei PIAGET sich entwickelnde Schemata logisch mathematisch interpretiert werden, während bei BRUNER Umwelteinflüsse die tragende Kraft sind (vgl. Beilin 1983, S. 23f).

BRUNER unterscheidet mit Bezug auf die kindliche Entwicklung drei Arten der Repräsentation – eine enaktive oder handlungsmäßige (die ersten ein bis zwei Lebensjahre), eine ikonische oder bildhafte (bis etwa zum siebten Lebensjahr) sowie eine symbolische[94] (anschließend),[95] wobei eine jeweils neuere Repräsentationsform die ältere ergänzt, statt sie abzulösen.[96] Begriffe und andere Fertigkeiten sind, laut BRUNER, nicht von vornherein gegeben, sondern werden auf den verschiedenen Repräsentationsebenen sukzessive erworben. Dabei dient die enaktive Repräsentation Kleinkindern zunächst dazu, Gegenstände in dem Sinn zu repräsentieren, dass eine mit einem Gegenstand ausgeführte Handlung auch bei Fehlen des Gegenstands auf den Gegenstand verweist. Auf der ikonischen Repräsentationsebene nimmt im Zuge einer Internalisierung eine solche Handlung die Form eines räumlich organisierten Schemas an, das schon begrifflichen Charakter hat, weil es mehrere Instanzen einer Handlung unter einer Vorstellung subsumiert. Gleichzeitig mit der Fähigkeit der Vorstellung solcher räumlichen Schemata entsteht auch die Fähigkeit einer bildlichen Vorstellung, wobei ebenso ein begrifflicher Charakter aufgrund der Klassifizierung von Gegenständen basierend auf anschaulichen Aspekten gegeben ist. Allerdings bleiben genannte Schemata und bildliche Vorstellungen zunächst häufig nachahmend, an be-

---

[94] In der deutschen Ausgabe werden die Repräsentationen mit >>handlungsmäßig<<, >>bildhaft<< beziehungsweise >>symbolisch<< bezeichnet, während im englischen Original (vgl. Bruner 1966a & 1966b) die Bezeichner >>enactive<<, >>ikonic<< beziehungsweise >>symbolic<< zu finden sind. In der deutschen Ausgabe von BRUNERs „Entwurf einer Unterrichtstheorie" (siehe hierzu: 7.3.1.) wurden >>enactive<<, >>ikonic<< beziehungsweise >>symbolic<< dann mit >>enaktiv<<, >>ikonisch<< beziehungsweise >>symbolisch<< übersetzt. Hier werden im Weiteren, aufgrund der gewünschten Passung mit den Ausführungen in 7.3.1., auch schon die im deutschen mit Bezug auf BRUNER geläufigeren Bezeichner >>enaktiv<<, >>ikonisch<< beziehungsweise >>symbolisch<< verwendet.

[95] Wie bereits erwähnt, hebt BRUNER keine klar voneinander getrennten Stadien hervor. Aus diesem Grund sind die hier genannten Altersangaben auch nicht als klare Trennlinien zu verstehen, sondern geben Anhaltspunkte, in welchem Alter das Erreichen einer neuen Repräsentationsebene bei einem einzelnen Kind durch spezielle Aufgaben in etwa nachgewiesen werden kann.

[96] Diese drei Arten der Repräsentation überträgt BRUNER später auch in die Lernpsychologie und unterscheidet dort zwischen einer enaktiven, einer ikonischen und einer symbolischen Repräsentationsebene (siehe 7.3.1.).

stimmte Situationen gebunden, egozentrisch und abhängig von Einzelheiten, die den Charakter des Ganzen verschleiern können. Erst auf der symbolischen Repräsentationsebene werden Worte als Symbole aufgefasst, die auf ein Objekt verweisen – die jeweiligen Bezeichner bezeichnen von diesem Zeitpunkt an die Begriffe – und es wird gelernt, diese Symbole systematisch zu gebrauchen sowie damit auch auf symbolischer Ebene in einem Begriffsnetz zu navigieren. Symbole können dann auch dazu dienen, bildliche Vorstellungen und Handlungen zu leiten und sowohl ikonisch als auch enaktiv ökonomischer zu agieren sowie komplett neue Aussagen zu generieren.[97] Auf der symbolischen Vorstellungsebene spielt die Sprache eine zentrale Rolle, da Worte zur Strukturierung eines Begriffssystems dienen und diese anregen. BRUNER fasst zu den drei Repräsentationsebenen zusammen:

> Unser Ausgangspunkt ist daher ein menschlicher Organismus mit Fähigkeiten der Weltdarstellung gemäß drei Modi, von denen ein jeder durch das Wesen der menschlichen Funktionen, in denen sie sich verwirklichen, beschränkt ist. Wir sehen den Menschen im Prozeß der Internalisierung des Tuns, des Vorstellens und des Symbolisierens heranwachsen. Diese Darstellungsformen „existieren“ in seiner Kultur. Sie sind Verstärker seiner Kräfte. Er entwickelt sie in einer Weise, die die Verwendungszwecke widerspiegeln, denen er sein eigenes Leben unterwirft. Die Entwicklung dieser Kräfte, so scheint mir, hängt in hohem Maße von drei Gegebenheiten ab. Die erste bezieht sich auf das Vorhandensein von „Verstärkern“, die eine Kultur zur Verfügung stellt – Bilder, Fertigkeiten, Konzeptionen usw. Die zweite Gegebenheit ist die Art des Lebens, das das Individuum führt, die Anforderungen, denen es unterworfen ist. Die dritte (und spezifischste) Gegebenheit betrifft das Maß, in dem das Individuum angeregt wird, die Quellen der Übereinstimmung und der Diskordanz zwischen den drei Modi des Wissens, der Handlung, dem Bild und dem Symbol, zu explorieren.
>
> (Bruner 1971a, S. 379)

BRUNER stellt allerdings fest, dass ein großer Teil der von ihm konstituierten Modelle auf einer axiomatischen Basis beruht, was heißt „auf Ideen über Ursache und Wirkung, über die Kontinuität von Raum und Zeit, über Invarianzen der Erfahrung usw.“ (Bruner 1971a, S. 377), und daher nicht geprüft werden kann. Er vermutet, dass ein Teil dieser axiomatischen Basis durch die drei genannten Repräsentationsebenen bedingt ist und dass damit die Anpassungshandlungen

[97] In einer Reihe von Untersuchungen haben BRUNER, BRUNER und KENNEY beziehungsweise OLSON (1971) gezeigt, dass Kinder, die sich auf einer ikonischen Repräsentationsebene befinden, und solche, die schon die symbolische Repräsentationsebene erreicht haben, Probleme unterschiedlich lösen. Erstere halten dabei enger an spezifischen Bildern oder Fällen fest und überprüfen mögliche im Problemlöseprozess auftauchende Hypothesen direkt, während letztere zunächst verschiedene Hypothesen abwägen.

entsprechend der Repräsentationsebenen, die durch physische und psychische Möglichkeiten bestimmt sind, die Weltdarstellung leiten.

In „A Study of Thinking" beschäftigen BRUNER, GOODNOW und AUSTIN sich, wie oben erwähnt, mit Begriffsfindung insbesondere künstlich geschaffener logischer Begriffe und beschreiben im Zuge dessen eine begriffsinterne Struktur expliziter, als dies in den bisher betrachteten Werken der Fall war. Sie unterscheiden zunächst drei Begriffstypen – affektive, funktionale und formale Kategorien.[98] Affektive Kategorien gehen dabei, laut BRUNER, GOODNOW und AUSTIN, häufig zurück auf die Kindheit und basieren auf jeweils derselben affektiven Reaktion. Solche affektiven Kategorien können daher meist weder in einer Handlung zusammengefasst noch bildlich oder symbolisch vorgestellt und dargestellt werden, was heißt, dass sie sich auch nicht durch einen intersubjektiv mit jeweils derselben Bedeutung aufgeladenen Bezeichner bezeichnen lassen. Funktionale Kategorien fassen, im Gegensatz dazu, solche Repräsentanten zusammen, die dieselbe Funktion erfüllen. Dies erlaubt es, die Kategorien sowohl in einer Handlung zusammenzufassen als auch vorzustellen und auf einer intersubjektiven Ebene sprachlich zu fassen. Formale Kategorien entwickeln sich basierend auf funktionalen Kategorien und beruhen letztlich auf der Angabe kritischer Attribute – sie haben somit eine logische Struktur. Unter kritischen Attributen unterscheiden BRUNER, GOODNOW und AUSTIN kriterielle von definierenden Attributen. Während erstere persönlichen Charakter haben, sind letztere konventional. Mehrere kritische Attribute können, entsprechend BRUNER, GOODNOW und AUSTIN, entweder durch eine Konjunktion, eine Disjunktion oder eine Relation verknüpft werden, wobei konjunktive Verknüpfungen am zugänglichsten sind und am häufigsten auftreten.[99] Parallel zu der Entwicklung formaler Kategorien prägen sich auch symbolische Repräsentanten sowie Möglichkeiten, mit diesen zu operieren, aus.

BRUNER, GOODNOW und AUSTIN zufolge haben auch viele dem natürlichen Umfeld entstammende Begriffe den Charakter formaler Kategorien, was sie damit be-

[98] Die Unterscheidung von drei, statt wie in den bisherigen Werken zwei Begriffstypen, macht deutlich, dass es sich auch bei solchen Meta-Begriffen um Setzungen handelt, die unterschiedlich ausfallen können. BRUNER, GOODNOW und AUSTIN erläutern ihre Begriffstypen mit Rückgriff auf weitere, aber für jeden Begriffstyp unterschiedliche, Arbeiten aus der Psychologie (vgl. Bruner, Goodnow & Austin 1986, S. 4ff). Sie beschäftigen sich im Weiteren allerdings ausschließlich mit formalen Kategorien, weswegen kein Grund für ihre Wahl dreier statt zweier Begriffstypen ersichtlich ist.

[99] Die Zugänglichkeit wird damit begründet, dass verschiedene Vertreter einer konjunktiv gebildeten Kategorie gemeinsame Eigenschaften haben, welche die Kategorie offensichtlicher machen. Es wird, laut BRUNER, GOODNOW und AUSTIN, Kategorien, die zunächst disjunktiven Charakter haben, im Zuge einer Konventionalisierung häufig konjunktiver Charakter auferlegt. (Ein Beispiel aus der Mathematik diesbezüglich liefert der Begriff parallel: Während zwei Geraden in der Ebene dann parallel sind, wenn sie gleich sind oder keinen Schnittpunkt haben, sind zwei Geraden in der Ebene und im Raum dann parallel, wenn sie überall den gleichen Abstand haben. Zweitgenannte Beschreibung des Begriffs parallel stellt dabei die in der Mathematik übliche Konvention dar.)

gründen, dass die Umwelt die Charakteristika bereitstellt, nach denen Repräsentanten klassifiziert werden können, die Kategorien selbst aber Erfindungen sind, die dann auf die Objekte passen. Sie beschreiben, dass in der Auseinandersetzung mit lebensweltlichen Objekten jeweils Attribute gesucht werden, welche die Abstrahierung zu Begriffen zulassen, die durch denselben Bezeichner bezeichnet werden. So werden einzelne Repräsentanten auf Attribute getestet, und es wird darauf basierend eine Entscheidung über die Zugehörigkeit zu einer Kategorie getroffen. Diese Entscheidung wird dann bewertet, und die Bewertung stellt Informationen bereit, die den weiteren Begriffsfindungsprozess beeinflussen. Wenn der Begriffsfindungsprozess vollendet ist, nimmt der Begriff symbolischen Charakter an. Er wird damit ein Hilfsmittel zur Navigation in einem Begriffsnetz. Er kann dazu dienen, Vorstellungen und Handlungen zu leiten und ökonomisch zu agieren sowie neue Aussagen zu generieren.

BRUNER, GOODNOW und AUSTIN erwähnen allerdings auch, dass im Zuge der Begriffsfindung nicht alle relevanten Attribute klar definiert werden können, sondern dass solche Attribute auch kontinuierlich sein können, wobei die Zugehörigkeit zu einem Begriff bei einer gegebenen Ausprägung eines Attributs situationsspezifisch unterschiedlich gewertet werden kann. Weiter gehen sie darauf ein, dass die einzelnen Attribute in den Hintergrund treten, wenn ein Begriff hinreichend bekannt ist. Stattdessen werden bei der Begegnung mit Repräsentanten, die bereits bekannte Begriffe konkretisieren, die Repräsentanten ganzheitlich betrachtet und einer Kategorie zugeordnet:

> *The development of configurational attributes* is best illustrated by a concrete example. The student being introduced for the first time to microscopic techniques in a course of histology is told to look for the *corpus luteum* in a cross-sectional slide of rabbit ovary. He is told with respect to its defining attributes that it is yellowish, roundish, of a certain size relative to the field of the microscope, etc. He finds it. Next time he looks, he is still "scanning the attributes." But as he becomes accustomed to the procedure and to the kind of cellular structure involved, the *corpus luteum* begins to take on something classically referred to as a *Gestalt* or configurational quality. Phenomenologically, it seems that he no longer has to go through the slow business of checking size, shape, color, texture, etc. Indeed, "corpus luteumness" appears to become a property or attribute in its own right.
>
> (Bruner, Goodnow & Austin 1986, S. 46)[100]

Zudem weisen BRUNER, GOODNOW und AUSTIN auf affektive und motivationale Komponenten der Begriffsfindung hin, die dann eine Rolle spielen, wenn die Be-

[100] Dieses Zitat zeigt, dass die unter anderem durch BRUNER initiierte kognitive Wende in der Psychologie von Arbeiten aus der Gestaltpsychologie mitbeeinflusst war und diese reflektierte (vgl. Takaya 2013, S. 7ff).

griffsfindung sich auf Material bezieht, welches bekannt ist und das insbesondere persönliche Konnotationen trägt, oder aber wenn die Begriffsfindung in einem lebensweltlichen Kontext stattfindet. So spielen die Eindringlichkeit von Eigenschaften sowie die Vorlieben, Erwartung und Ablenkbarkeit der Begriffsfinderinnen und -finder und der Zweck des Begriffsfindungsprozesses eine große Rolle.

In dem erst 1986 entstandenen Vorwort zu einem Nachdruck des Buches würdigen BRUNER und GOODNOW schließlich auch die im nächsten Abschnitt thematisierte Prototypentheorie. Sie räumen ein, dass eine Kombination kritischer Attribute nicht die einzige Möglichkeit darstellt, Begriffe zu definieren, sondern dass insbesondere natürlich gegebene Begriffe häufig durch typische Vertreter der jeweiligen Begriffe repräsentiert werden. Sie schließen die Gegenüberstellung der Theorien dann mit den Worten:

> It is still moot whether any way of forming concepts or categories is any more "natural" or any more "given" than any other. After all, Mendeleev's discovery of the periodic table (which lies at the heart of physical nature) is better captured by our attribute model than by the prototype models that have been so elegantly developed by Rosch, Anglin, and others.
>
> (Bruner & Goodnow 1986, S. xiv)[101]

4.3.2. Die Prototypentheorien

Die klassische Theorie der Begriffsbildung wurde mit Bezug auf das natürliche Begriffswissen zunächst von den Prototypentheorien (vgl. Edelmann 2000; Murphy 2004, S. 19ff) abgelöst. Diese berücksichtigen, dass für die meistens lebensweltlichen Begriffe keine notwendigen und hinreichenden Kriterien für die Klassenzugehörigkeit angegeben werden können, sondern dass es stattdessen typische und weniger typische Merkmale gibt. Es folgt für lebensweltliche Begriffe direkt, dass sich einige Repräsentanten leichter einem Begriff zuordnen lassen als andere und dass es damit auch typischere und weniger typische Repräsentanten für einen Begriff gibt.[102] Begriffe sind somit häufig gekennzeichnet durch Unschärfe und können nur unter Einbeziehung des Kontextes sinnvoll gebraucht werden, ebenso können Begriffe von pragmatischen Gesichtspunkten geprägt sein.

ELEANOR ROSCH

Wie bereits angesprochen, war ROSCH eine Mitbegründerin der Prototypentheorien der Begriffsbildung. ROSCHs Beiträge „Cognitive Representations of Semantic Categories" (Rosch 1975), „Family Resemblances: Studies in the Internal

---

[101] Diesbezüglich ist anzumerken, dass es sich bei dem Periodensystem um ein hochwissenschaftliches Konstrukt handelt, das sich, auch wenn es sich auf Gegebenheiten in der Natur bezieht, selbstverständlich besser durch die Angabe kritischer Attribute als durch ein Prototypenmodell beschreiben lässt.

[102] Dies lässt sich ohne Weiteres nachvollziehen: Wie ließe sich Tasse definieren, und wo ist die Grenze zwischen Becher und Tasse (vgl. Edelmann 2000, S. 120)?

Structure of Categories“ (Rosch & Mervis 1975), der gemeinsam mit MERVIS verfasst wurde, sowie „Human Categorization“ (Rosch 1977), „Principles of Categorization“ (Rosch 1978) und „Prototype Classification and Logical Classification“ (Rosch 1983) repräsentieren hier das Werk der Autorin. Die beiden erstgenannten Beiträge behandeln weitestgehend experimentelle Untersuchungen ROSCHs, mittels derer ihre Theorie konstituiert werden konnte. Bei den drei letztgenannten Beiträgen handelt es sich um Übersichtsbeiträge, die jedoch auf experimentelle Untersuchungen zurückgreifen. Im Laufe ihrer Untersuchungen von Begriffswissen modifizierte ROSCH ihre Theorie leicht (vgl. Lakoff 1987, S. 42ff), wobei hier nur die modifizierte Form dargestellt wird.

ROSCH knüpft an die klassische Theorie der Begriffsbildung an, indem sie das Begriffssystem als sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung sehr geordnet sieht.[103] Die vertikale Richtung bezieht sich dabei auf die hierarchische Ordnung von Begriffen und somit auf die Beziehung von Begriffen zu unter- und übergeordneten Begriffen, während sich die horizontale Richtung auf die Beziehung von Begriffen zu nebengeordneten Begriffen und die Abspeicherung der Begriffe bezieht. ROSCH unterscheidet sich von PIAGET allerdings schon in der grundsätzlichen Ausrichtung ihrer Theorie und knüpft stärker an BRUNER an. PIAGETs Theorie ist, weil eine logisch mathematische Interpretation eine große Rolle spielt, wie bereits erwähnt, dem Strukturalismus zuzurechnen. Demgegenüber kann ROSCHs Theorie, wie auch BRUNERs, durch ihre Annahme, dass die Klassen, welche die Begriffe widerspiegeln, auf Korrelationen in der Umwelt beruhen, was Umwelteinflüssen ein großes Gewicht bei der Begriffsbildung zuschreibt, als funktionalistisch eingestuft werden (vgl. Beilin 1983, S. 27).[104] ROSCHs mehrmalige Bekräftigung, dass prototypisch gegebene Begriffe sich von Begriffen, die definiert werden durch die Angabe einer Oberklasse und von kritischen Attributen, abheben, verdeutlich jedoch, dass ihr selbst die Distanz ihrer Theorie zur klassischen Theorie und damit auch zu PIAGET und BRUNER wichtiger ist, als eventuell übereinstimmende Aspekte herauszuheben. ROSCH betont hingegen die Nähe ihrer Prototypentheorie zu WITTGENSTEINs Familienähnlichkeiten – je mehr verschiedene Repräsentanten eine Eigenschaft teilen, desto stärker weist diese Eigenschaft auf einen bestimmten Begriff hin. Diese Lokali-

---

[103] Auch hier handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil ROSCH die in ihrer Arbeit wichtigsten Punkte – welche hier dargestellt sind – in mehreren ihrer Beiträge anspricht. Erst durch Zusammenspiel der Beiträge kann wiederum die hier dargelegte Gesamtschau entstehen.
Die wichtigsten Aspekte ROSCHs Theorie sind in ROSCH (1978) dargelegt.

[104] Hierzu ist zu erwähnen, dass ROSCH selbst ihre Theorie als strukturalistisch einstuft, was sie damit begründet, dass prototypische Vertreter als zentrale einen Begriff konkretisierende Repräsentanten mit den mathematischen Begriffen des arithmetischen Mittels und Medians verwandt sind. Dabei repräsentieren, laut ROSCH, prototypische Vertreter im Fall von einer Metrik unterliegenden Eigenschaften (wie Größe) das arithmetische Mittel der Eigenschaften (vgl. Rosch 1978, S. 37).

sierung spiegelt sich auch darin wider, dass ROSCH wiederholt den kontinuierlichen Charakter vieler Begriffseigenschaften betont, der die eindeutige Definition basierend auf kritischen Attributen erschwert und besser unter Familienähnlichkeiten gefasst werden kann.

ROSCHs Theorie liegen zwei Prinzipen zu Grunde. Das erste Prinzip besagt, dass es die Aufgabe eines Begriffssystems ist, maximale Information bei möglichst geringer kognitiver Leistung bereitzustellen. Das zweite Prinzip besagt, dass die wahrgenommene Welt die Form strukturierter Informationen im Gegensatz zu willkürlichen und unvorhersehbaren Eigenschaften hat – was meint, dass einige Eigenschaften sehr wahrscheinlich in Kombination auftauchen, während dies bei anderen Kombinationen sehr selten oder sogar logisch unmöglich ist. Wie bereits erwähnt, betrachtet ROSCH das Begriffssystem als sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung als geordnet.

Die beiden genannten Prinzipien bedeuten für die Ordnung in vertikaler Richtung, dass nicht alle Begriffsebenen in der Umwelt gegebene Klassen gleich gut abbilden, sondern dass es eine Basisebene (basic level) gibt, auf welcher Begriffe diese Klassen hinreichend genau spezifizieren, ohne zu viele Informationen bereitzustellen. Das meint, dass auf dieser Basisebene Begriffe einerseits die wichtigsten charakterisierenden Eigenschaften enthalten und andererseits möglichst wenige mit anderen Begriffen überlappende Eigenschaften enthalten. Weiterhin ähneln sich verschiedene Repräsentanten eines Begriffs auf der Basisebene, laut ROSCH, sowohl in der zur Interaktion verwendeten Motorik,[105] die eng mit den Eigenschaften eines Begriffs verknüpft ist, als auch in ihrer Form, womit solche Begriffe folglich am leichtesten aufgrund der Form der Repräsentanten identifizierbar sind. Hinzu kommt, dass Begriffe auf der Basisebene, wie ROSCH feststellt, im Entwicklungsverlauf zuerst bezeichnet werden können, und dass die Bezeichner häufig zur Bezeichnung untergeordneter Kategorien herangezogen werden.

Die beiden Prinzipien bedeuten außerdem für die Ordnung in horizontaler Richtung, dass Begriffe eine Prototypenstruktur haben. Dies meint, dass Begriffe sich nicht durch notwendige kritische Attribute auszeichnen, sondern dass sie durch eine große Anzahl Eigenschaften beschrieben werden, die jeweils nur auf einen Teil der Repräsentanten zutreffen. Besonders prototypische Vertreter haben dabei einerseits viele Eigenschaften mit anderen Repräsentanten desselben Begriffs gemeinsam und andererseits möglichst wenige Eigenschaften mit Repräsentanten anderer Begriffe. Prototypische Vertreter dürfen allerdings, außer im Fall

[105] Wenn als Begriff auf der Basisebene Stuhl betrachtet wird, so hat Stuhl Eigenschaften wie Lehne, Beine, Sitzfläche, die Möbel nicht hat und die Küchenstuhl und Bürostuhl gemeinsam haben. Das Sitzen auf einen Stuhl erfordert bestimmte Bewegungen, die wiederum nicht auf die Interaktion mit jedem Möbelstück angewendet werden können, die für verschiedene Stühle aber nötig sind (vgl. Rosch 1978, S. 33).

künstlich geschaffener Begriffe, explizit nicht als einzelne Repräsentanten vorgestellt werden, mit denen alle anderen Repräsentanten verglichen werden – auch wenn sie häufig etwas verzerrend Prototypen genannt werden und von ROSCH noch zu Beginn ihrer Forschung selbst derart gesehen wurden (vgl. Lakoff 1987, S. 42ff). Stattdessen können Repräsentanten nach ihrem Grad der Prototypizität eingestuft werden, wobei als Prototyp ein Repräsentant mit hoher Prototypizität gesehen werden kann. ROSCH bestätigt mittels verschiedener Untersuchungen,[106] dass prototypische Repräsentanten leichter einem Begriff zugeordnet und auch mit Bezug auf einen Begriff leichter erinnert werden können, als solche, die weniger prototypisch sind. Dabei macht sie allerdings keine Aussagen darüber, in welcher Form Prototypizität repräsentiert wird, und wie diese Repräsentation abgerufen wird (vgl. Lakoff 1987, S. 44).

Insgesamt betont ROSCH, dass einzelne Begriffe nicht isoliert voneinander betrachtet werden dürfen, sondern dass sich Aspekte eines Prototyps erst im Wechselspiel mit anderen Begriffen ergeben. Weiterhin relativiert sie den noch stark interindividuellen Charakter, der Begriffen durch die Betrachtung als Klassen auf vertikaler und horizontaler Ebene und durch die Auszeichnung von Prototypen auferlegt wird. Sie weist insbesondere darauf hin, dass erst der Rückgriff auf lebensweltliches Wissen viele Begriffe möglich macht. So lässt Kontextwissen, das individuell unterschiedlich akzentuiert sein kann, häufig erst auf Funktionen eines Objekts schließen, und der Vergleich mit anderen, nebengeordneten, Begriffen erlaubt erst die Feststellung relativer Eigenschaften. ROSCH erwähnt zudem weitere Aspekte individuellen Charakters, welche die Bildung von Prototypen beeinflussen:

> Family resemblances (even broadly defined) are undoubtedly not the only principle of prototype formation – for example, the frequency of items and the salience of particular attributes or particular members of the categories (perceptual, social, or memorial salience) as well as the as yet undefined gestalt properties of stimuli and stimulus combinations, undoubtedly contribute to prototype formation […] – however, the results of the present study indicate that family resemblance is a major factor.
>
> (Rosch & Mervis 1975, S. 599)[107]

So spielen die Häufigkeit, mit der einzelne Repräsentanten angetroffen werden, die Eindringlichkeit derer Eigenschaften, die auch individuell unterschiedlich wahrgenommen werden kann, sowie der ganzheitliche Charakter eine große Rolle bei der Prototypenbildung.

---

[106] In ihren Untersuchungen stellt ROSCH lebensweltliche Begriffe auch künstlichen gegenüber. Mit Bezug auf die Prototypenstruktur von Begriffen erzielt sie für lebensweltliche und künstliche Begriffe ähnliche Ergebnisse.

[107] Diesbezüglich ist darauf hinzuweisen, dass der Begriff der Familienähnlichkeiten, wie ihn schon WITTGENSTEIN beschrieben hat, ein sehr prototypischer Begriff ist.

ROSCHs Prototypentheorie fügt sich schließlich in den allgemeineren Kontext von Schlussfolgerungen basierend auf einzelnen Referenzpunkten (reference point reasoning) ein. ROSCH führt mit Rückgriff auf verschiedene Untersuchungen aus, dass häufig erlebte oder kommunizierte Einzelfälle, die weitere Erinnerungen oder Informationen zu einem Thema an Lebendigkeit übertreffen, besonderes Gewicht beim Schließen haben.[108] Ebenso legt sie, wiederum verweisend auf Untersuchungen, dar, dass in vielen strukturierten Bereichen einzelne Punkte als Referenzpunkte dienen, von denen ausgehend mittels der bekannten Struktur geschlossen wird. Prototypen einzelner Begriffe nennt sie schließlich als ein weiteres Beispiel für Referenzpunkte, von denen ausgehend geschlossen werden kann.

ROSCH weist allerdings auch darauf hin, dass von ihr sogenannte aristotelische oder logische Begriffe, die den Charakter von Definitionen durch die Angabe einer Oberklasse und von kritischen Attributen haben, und Prototypenstrukturen sich nicht in dem Sinn ausschließen, dass eine Person nicht über beides gleichzeitig verfügen kann:

> Subjects may know the mathematical definition of an odd number and the biological definition of a woman […]; however, neither is evidence that categories do not also have a representativeness structure. We could conjecture that categories with formal definitions are not required to have a representativeness structure because the definition and potentially clear-cut category boundaries that can be generated from it could provide a means of categorization. And we might prefer it if categories, such as woman, did not have a representativeness structure. However, the fact of the matter is that categories, even categories with definitions, do have a representativeness structure. And clearly, subjects perform processing tasks with categories in relation to that structure rather than by use of the concurrently available class logic.
>
> (Rosch 1983, S. 83)[109]

ROSCH merkt darüber hinaus an, dass der Bereich, in dem jeweils gearbeitet wird, mit darüber bestimmt, ob Schlüsse basierend auf einer Definition oder einem Prototypen angemessen sind. Dabei werden insbesondere im wissenschaftlichen Bereich Definitionen verwendet. Allerdings zeigt ROSCH auch anhand von Untersuchungen zu geometrischen Figuren, dass in der Geometrie, soweit im anschaulichen Bereich gearbeitet wird, häufig basierend auf Prototypen geschlossen wird (vgl. Rosch 1977, S. 15f).

---

[108] Wenn ein Bekannter sich ausführlich über eine spezielle Automarke aufregt, so kann dies für den Hörenden ein allgemein schlechtes Licht auf diese Marke werfen (vgl. Rosch 1983, S. 75).

[109] Insbesondere letzter Satz bezieht sich, wie aus dem gesamten Beitrag deutlich wird, auf die von ROSCH durchgeführten experimentellen Untersuchungen zur Begriffsstruktur. Würde diese Aussage absolut gesetzt, würde sie mathematischem Schließen, das auf definitorisch vorliegenden Begriffen basieren kann, widersprechen.

4.3.3. Exkurs: Die Exemplartheorien und wissensbasierten Ansätze

Die Exemplartheorien (vgl. Murphy 2004) unterscheiden sich dahingehend von den Prototypentheorien, dass sie nicht von einer mehrere Repräsentanten widerspiegelnden Repräsentation eines Begriffs ausgehen. Stattdessen wird, wie noch bei den Prototypentheorien, eine Zusammenfassung der einzelnen Repräsentanten in einer Klasse angenommen, aber, im Gegensatz zu den Prototypentheorien, eine nicht komprimierte Erinnerung an alle Repräsentanten eines Begriffs, denen eine Person begegnet ist, als Begriff betrachtet. Die Kategorisierung eines möglichen Repräsentanten basiert in diesem Fall auf der Anzahl der Erinnerungen, mit denen der Repräsentant assoziiert wird, sowie auf dessen Ähnlichkeit mit den jeweiligen Repräsentanten in diesen Erinnerungen. Auch mit Bezug auf die Exemplartheorien folgt, wie schon für die Prototypentheorien, für lebensweltliche Begriffe, dass sich einige Repräsentanten leichter einem Begriff zuordnen lassen als andere und es damit typischere und weniger typische Repräsentanten für einen Begriff gibt. Begriffe sind somit wiederum häufig gekennzeichnet durch Unschärfe und können nur unter Einbeziehung des Kontextes sinnvoll gebraucht werden, ebenso können Begriffe von pragmatischen Gesichtspunkten geprägt sein. Die Exemplartheorien bleiben allerdings dahingehend hinter den Prototypentheorien zurück, dass sie keine Erklärung für die hierarchische Struktur des Begriffswissens und insbesondere für das bevorzugte Abstraktionsniveau der Basisbegriffe bieten (weil Erinnerungen auf jeder Begriffsebene gleiches Gewicht haben). Zudem sind Kategorisierungen bestimmter neuer Repräsentanten aufgrund der Anzahl an Erinnerungen, mit denen diese verglichen werden müssen, nicht erklärbar.[110]

Entsprechend den wissensbasierten Ansätzen (vgl. Murphy 2004) sind Begriffe Teil des menschlichen Allgemeinwissens. Begriffe werden dabei nicht isoliert gelernt, sondern in Zusammenhang zu bereits vorhandenem Wissen und in dieses vorhandene Wissen eingebunden. Die Kategorisierung erfolgt in diesem Fall mittels Rückgriff auf bereits vorhandenes Wissen auch über andere Begriffe, das insbesondere hilft, verschiedene wahrgenommene Eigenschaften in Beziehung zueinander zu setzen, und mittels Rückschluss auf den jeweils konkretisierten Begriff. Auch hier folgt, dass es typischere und weniger typische Repräsentanten für einen Begriff gibt, sowie dass Begriffe unscharf, kontextabhängig und zweckgebunden sein können. Insgesamt verweisen die wissensbasierten Ansätze so auf weitere Aspekte menschlicher Begriffsbildung und menschlichen Begriffswissens, welche über die Prototypentheorien, die Begriffsstrukturen erklären können, und die Exemplartheorien, die insbesondere bei Kategorisierungsprozessen eine Rolle spielen, hinausgehen.

---

[110] Eine Absolut-Setzung der Exemplartheorien widerspricht, ebenso wie eine Absolut-Setzung der Prototypentheorien, mathematischem Schließen, das auf definitorisch vorliegenden Begriffen basieren kann.

4.3.4. Zwischenfazit – Begriffsbild und Begriffskonvention in der Psychologie

An dieser Stelle ist zunächst zu erwähnen, dass Talls und Vinners Beiträge zu Concept Image und Concept Definition sich vor allem mit dem Begriff Concept Image auf die kognitive Wissensstruktur beziehen, welche auch die Psychologie untersucht. Sowohl die Arbeiten von Tall und Vinner als auch jene aus der Psychologie stimmen außerdem darin überein, dass sie sich ausschließlich mit der subjektiven Begriffsbildung beschäftigen. Bei Piagets und Bruners Theorien handelt es sich um reine Entwicklungstheorien, Bruner, Goodnow und Austin widmen sich der Beschreibung begriffsinterner Strukturen und stellen einige Bezüge zur menschlichen Entwicklung her, und auch Rosch beschäftigt sich hauptsächlich mit der internen Struktur von Begriffen. Dabei ist basierend auf dem jeweils subjektiven Entwicklungsstand die Entstehung bestimmter Begriffe, unter Berücksichtigung deren logischer und prototypischer Struktur, Ziel des Mathematikunterrichts. Dementsprechend verwundert es nicht, dass sich die in Tall und Vinners Begriffen Concept Image und Concept Definition konstituierende Polarität auch in den verschiedenen Arbeiten aus der Psychologie findet.

Bei Abgleich mit Tall und Vinners Concept Image und Concept Definition finden sich in den thematisierten Werken von Piaget, Bruner und Bruner, Goodnow und Austin sowie Rosch wiederum sowohl einige Parallelen als auch einige Unterschiede untereinander und mit Bezug auf Tall und Vinners Begriffe. Hierbei ist wiederum grundlegend, dass sich in den betrachteten Werken unterschiedliche Begriffstypen gegenüberstehen (Tabelle 4).

<table>
<tr><th></th><th>potentielle Vorläufer
zu Concept Image</th><th>potentielle Vorläufer
zu Concept Definition</th></tr>
<tr><td>Piaget</td><td>lebendige Begriffe</td><td>axiomatisierte Begriffe</td></tr>
<tr><td>Rosch</td><td>Begriffe mit
Prototypenstruktur</td><td>aristotelische / logische Begriffe</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Bruner</td><td>(affektive Kategorien)
funktionale Kategorien</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">formale Kategorien</td></tr>
</table>

Tabelle 4: Potentielle Vorläufer zu Concept Image und Concept Definition aus der Psychologie

So können zunächst Piagets lebendige Begriffe und Roschs Begriffe mit Prototypenstruktur als Parallelen oder potentielle Vorläufer zu Tall und Vinners Concept Image gelesen werden. Ebenso können Piagets axiomatisierte Begriffe sowie Roschs aristotelische oder logische Begriffe als Parallelen oder potentielle Vorläufer zu Tall und Vinners Concept Definition aufgefasst werden. Bruner ist vor dem Hintergrund dieser Polarität schwieriger zu fassen. Obwohl seine (sowie Goodnow und Austins) affektive Kategorie einen sehr vagen und durch Erinnerungen geprägten rein subjektiven Charakter hat, so kann sie doch, weil sie wegen der affektiven Natur auch intersubjektiv fassbare Begriffe konnotiert, als ein untergeordneter Teil des Concept Image betrachtet werden, welches nach TALL und VINNER die gesamte kognitive Struktur, die mit einem Begriff assoziiert wird, umfasst. Auch seine funktionale Kategorie fällt, weil sie erfahrungsgebunden und offen ist, unter Concept Image. Demgegenüber befindet sich BRUNERs formale Kategorie im Spannungsfeld von Concept Image und Concept Definition. Dies ist darin begründet, dass ein im Findungsprozess stehender Begriff in seiner noch unfertigen Form schon als formale Kategorie bezeichnet wird und auch die Möglichkeit von Vagheit und Situationsabhängigkeit dieser Kategorie eingeräumt wird, grundsätzlich formalen Kategorien aber eine logische Struktur zugeschrieben wird. BRUNERs spätere Bekenntnis, dass Begriffe auch durch Prototypen repräsentiert sein können,[111] gestaltet die Einordnung zusätzlich schwierig.

Es bedingen Unterschiede zwischen PIAGETs, BRUNERs und ROSCHs Theorien auch Unterschiede zwischen PIAGETs lebendigen Begriffen, ROSCHs Begriffen mit Prototypenstruktur sowie BRUNERs affektiven, funktionalen und entwicklungsmäßig frühen formalen Kategorien. So ist zu erinnern, dass es sich bei PIAGETs Theorie um eine reine Entwicklungstheorie handelt, BRUNER, GOODNOW und AUSTIN sich der Beschreibung begriffsinterner Struktur widmen und einige Bezüge zur menschlichen Entwicklung herstellen, die erst mit Bezug auf BRUNERs Entwicklungstheorie stärkeres Gewicht bekommen, während ROSCH sich hauptsächlich mit der internen Struktur von Begriffen beschäftigt. Dennoch sind einige Punkte zu nennen, in denen PIAGETs, BRUNERs und ROSCHs Parallelen oder potentielle Vorläufer zu TALL und VINNERs Concept Image übereinstimmen oder sich gegenseitig ergänzen und die vor dem Hintergrund von Concept Image insbesondere wichtig erscheinen. So entstehen die nun betrachteten Begriffe sämtlich in Auseinandersetzung einer Person mit ihrem natürlichen Umfeld beziehungsweise in Anpassung der Person an das natürliche Umfeld und haben, wegen des jeweils persönlichen Umfelds, persönlichen Erfahrungen und Motiven, subjektiven Charakter. Dabei ist die Auseinandersetzung mit dem natürlichen Umfeld in PIAGETs Entwicklungstheorie, als einer Äquilibrationstheorie, vordergründig, in BRUNER, GOODNOW und AUSTINs Werk mitthematisiert, erhält aber in Bezug auf BRUNERs Entwicklungstheorie stärkeres Gewicht, und außerdem in ROSCHs Theorie durch die Betrachtung natürlicher Begriffe angesprochen. Zudem werden, bei PIAGET und BRUNER zumindest zu Beginn der Begriffsentwicklung basierend auf einer unvollständigen Merkmalsaufnahme, Begriffe intuitiv gebildet. Dabei sind, wenn wiederum insbesondere zu Beginn der Begriffsentwicklung bei PIAGET und BRUNER Operationen mit konkreten Gegenständen beziehungsweise Handlungen großes Gewicht haben, Begriffe häufig gebunden an

[111] Dass BRUNER die Möglichkeit einer Repräsentation von Begriffen durch Prototypen einräumt, soll in den folgenden Betrachtungen nicht weiter berücksichtigt werden. Da er mit Bezug auf die Prototypentheorie direkt auf ROSCH verweist, genügt es, Begriffe mit Prototypenstruktur mit Bezug auf ihre Theorie zu thematisieren.

die konkreten Objekte und deren Bezeichner. Um sich an neue Anforderungen oder eine neue Umgebung anpassen zu können, bleiben die Begriffe flexibel und behalten damit auch einen gewissen vagen Charakter, PIAGET und ROSCH stimmen zudem überein, dass sie nur nachträglich und auf einer übergeordneten Ebene definitorisch fassbar sind. Darüber hinaus können, entsprechend allen genannten Theorien, Begriffe Handlungen beinhalten, und BRUNER und ROSCH weisen außerdem darauf hin, dass Begriffe affektiv geprägt sein können, wobei BRUNER diesen Punkt durch Einführung neuer Bezeichner für solche Kategorien unterstreicht.

Insgesamt kann für PIAGETs axiomatisierte Begriffe, BRUNERs formale Kategorien, wenn diese vollständig ausgeprägt sind, und ROSCHs aristotelische oder logische Begriffe eine stärkere Übereinstimmung festgestellt werden, als für obig thematisierte Parallelen oder potentielle Vorläufer zu Concept Image – was darin begründet ist, dass aristotelische oder logische Begriffe auch bei ROSCH entsprechend der klassischen Theorie gefasst werden. So handelt es sich bei den genannten Begriffen um Definitionen, welche auf die Oberklasse und die kritischen Attribute verweisen, die, wie BRUNER betont, durch verschiedene Kombinationsregeln verknüpft sein können. Die Begriffe sind somit intersubjektiv und werden analytisch, deduktiv gebildet. Zudem werden den Begriffen klare Grenzen gegeben und der Mensch wird, bei BRUNER zumindest weitestgehend auf der symbolischen Repräsentationsebene am Ende eines Begriffsfindungsprozesses, ausgeblendet.

4.4. Begriffsbild und Begriffskonvention in der Fachmathematik (auch mit Bezug auf den Mathematikunterricht)

Betrachtungen zur Begriffsbildung als Bestandteil mathematischen Denkens und Arbeitens finden sich (mehr oder weniger explizit) auch in Arbeiten von aus der Fachmathematik stammenden Autoren, wie beispielsweise in POINCARÉs „The Foundations of Science“, HADAMARDs „The Psychology of Invention in the Mathematical Field“, WITTENBERGs „Vom Denken in Begriffen“ sowie in FREUDENTHALs „Didactical Phenomenology of Mathematical Structures“. Genauer besteht POINCARÈs Werk aus drei Aufsätzen („Science and Hypothesis“, „The Value of Science“, „Science and Method“), die sich mit Objektivität, Arten des Schließens und Methoden (auch Denkstilen) in der Mathematik und verwandten Wissenschaften beschäftigen. HADAMARD greift mit stärker kognitivem Blick teilweise auf POINCARÉ zurück und behandelt in seinem Werk insbesondere die Rolle von Kreativität, Unbewusstem und Intuition in der Mathematik. Mit erkenntnistheoretischer Prägung geht WITTENBERG auf die Fundierung mathematischer Begriffe, Begriffsfelder[112] und -netze ein. FREUDENTHAL arbeitet, im Sinne einer

[112] Der Bezeichner >>Begriffsfeld<< wird in den hier genannten Quellen nicht verwendet und ausschließlich mit der in 1.3. geklärten Bedeutung gebraucht. Da Begriffsbildung in den Quellen

didaktischen Phänomenologie, auf verschiedenste Begriffe, Begriffsfelder und -netze bezogene Phänomene, die ein über Definitionen hinausreichenden Begriffsverständnis bedingen sollen, aus.

Genannte Werke dienen in der vorliegenden Arbeit dazu, eine Position für die Mathematikdidaktik mit Bezug auf die noch diskussionswürdigen Punkte aus 4.2.5. sowie 4.3.4. herauszuarbeiten, indem ein stärker mathematischer Blick auf den Begriffsbegriff geworfen wird. Insbesondere soll die Frage, welche Rolle ein logischer Begriff, der in Form einer Definition formuliert werden kann, im mathematischen Arbeiten und der mathematischen Begriffsbildung spielt, beantwortet werden. Im Speziellen FREUDENTHALs Arbeit dient dann dazu, die gefundene Antwort didaktisch zu beleuchten.

4.4.1. HENRY POINCARÉ und JACQUES HADAMARD

POINCARÉs Sicht relativiert insgesamt jene KANTs mit Bezug auf reine Begriffe als a priori gegeben, wie schon die von ROYCE verfasste Einführung zu „Science and Hypothesis“ deutlich heraushebt:

> For Kant, the interpretations imposed by the ‘forms of sensibility,’ and by the ‘categories of the understanding,’ upon our doctrine of nature are rigidly predetermined by the unalterable ‘form’ of our intellectual powers. We ‘must’ thus view facts, whatever the data of sense must be. This, of course, is not M. Poincaré’s view. A similarly rigid predetermination also limits the Kantian ‘ideas of reason’ to a certain set of principles whose guidance of the course of our theoretical investigations is indeed only ‘regulative,’ but is ‘a priori,’ and so unchangeable. For M. Poincaré, on the contrary, all this adjustment of our interpretations of experience to the needs of our intellect is something far less rigid and unalterable, and is constantly subject to the suggestions of experience. We must indeed interpret in our own way; but our way is itself only relatively determinate; it is essentially more or less plastic; other interpretations of experience are conceivable. Those that we use are merely the ones found to be most convenient.
>
> (Royce 1913, S. 17)

POINCARÉ (vgl. Poincaré 1913) führt aus, dass die in der Fachmathematik, insbesondere auch in der Geometrie, üblichen Definitionen, die konventionalen Charakter haben, erst entstehen müssen.[113] Begriffe sind zunächst geprägt durch Erfahrung und entspringen der Intuition. Sie existieren nur in der Vorstellung, bleiben allerdings vage. Sie eignen sich nicht als Grundlage mathematischer For-

nicht aus einer explizit semiotischen Perspektive betrachtet wird, werden semiotische Dreiecke im Begriffsfeld dort allerdings nicht explizit thematisiert.

[113] Es handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, wiederum um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden allerdings nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil auf viele der genannten Punkte an mehreren Stellen im Original eingegangen wird und sich das Gesamte erst durch Zusammenspiel dieser Stellen ergibt.

schung, da nur auf Basis eindeutiger Begriffe sichere Folgerung stattfinden kann. Erst Konventionalisierung gibt Begriffen ihre Schärfe und Eindeutigkeit, macht sie damit aber auch enger.

Laut POINCARÉ dienen einige unbeweisbare Axiome den verschiedenen fachmathematischen Gebieten als Grundlage, ebenso einige Aussagen aus bestimmten mathematischen Gebieten (z.B. der Arithmetik oder Analysis) anderen mathematischen Gebieten (z.B. der Geometrie).[114] Aussagen, welche zunächst häufig einem anschaulichen Kontext oder der Intuition entspringen, werden dann basierend auf diesen Axiomen oder Aussagen aus anderen mathematischen Gebieten bewiesen. Neben solchen Aussagen können allerdings andere, möglicherweise in anderen Referenzrahmen gültigen, Aussagen bewiesen werden. Das kann insgesamt zu unterschiedlichen, auf denselben unbeweisbaren Axiomen oder in anderen mathematischen Gebieten bewiesenen Aussagen beruhenden Systemen, die jeweils in sich widerspruchsfrei sind, führen. Aussagen, die auf Beweisen beruhen, aber nachrangiger auch schon Axiome und Definitionen sind daher lediglich Konventionen – nur die Beziehungen zwischen verschiedenen Aussagen genügen damit einer objektiven Richtigkeit.

Für die Geometrie betont POINCARÉ insbesondere, dass sie sich mit Idealisierungen von in der Erfahrung angetroffenen Objekten beschäftigt. Dabei können gewisse Idealisierungen (wie sie durch die euklidische Geometrie beschrieben sind) besonders gut in die Erfahrung hineingesehen werden, sie sind somit besonders intuitiv. Andere Idealisierungen (z.B. wie in der Bolyai-Lobachevsky Geometrie) sind allerdings auch möglich und rein mathematisch ebenso gut zu handhaben. Bei einer möglichen Idealisierung handelt es sich somit nur um eine Konvention unter mehreren möglichen (vgl. Poincaré 1913, S. 55ff).

POINCARÉ betont, dass auch auf Basis konventionalisierter Begriffe und Aussagen induktive Vorgehensweisen ständig als Gegengewicht zu deduktiven Vorgehensweisen herangezogen werden müssen. Geschähe dies nicht, so würden jegliche Folgerungen zu Tautologien verkommen – Forschung könnte damit nichts Neues schaffen. Er verdeutlicht an einem Beispiel aus der Geometrie:

> A construction, therefore, becomes interesting only when it can be ranged besides other analogous constructions, forming species of the same genus.
>
> If the quadrilateral is something besides the juxtaposition of two triangles, this is because it belongs to the genus polygon.
>
> Moreover, one must be able to demonstrate the properties of the genus without being forced to establish them successively for each of the species.

---

[114] Als Beispiel für eine Aussage, die aus der Analysis in die Geometrie übertragen wird, nennt POINCARÉ jene zur Transitivität der Gleichheitsrelation (vgl. Poincaré 1913, S. 55).

To attain that, we must necessarily mount from the particular to the general, ascending one or more steps.

The analytic procedure 'by construction' does not oblige us to descend, but it leaves us at the same level.

We can ascend only by mathematical induction, which alone can teach us something new. Without the aid of this induction, different in certain aspects from physical induction, but quite as fertile, construction would be powerless to create science.

(Poincaré 1913, S. 42)

POINCARÉ unterscheidet schließlich Mathematiktreibende, die eine Präferenz für intuitives Denken und Arbeiten hegen von solchen, die logisch denken und arbeiten. Eine Präferenz für intuitives Arbeiten schreibt er sogenannten Geometern zu, wohingegen er eine Präferenz für logisches Arbeiten sogenannten Analysten zuschreibt.[115] Dabei betont er jedoch, dass auch Analysten induktive, wenigstens zusätzlich zu deduktiven, Vorgehensweisen einsetzen müssen, um echte mathematische Forschung zu betreiben.

HADAMARD (vgl. HADAMARD 1945) folgt POINCARÉ mit Bezug auf dessen Ausführungen zur Rolle von Intuition und Logik in mathematischem Arbeiten weitestgehend.[116] Er findet allerdings jeweils zwei Formen intuitiven und logischen Denkens in der mathematischen Praxis und erweitert damit POINCARÉs Unterscheidung von Geometer und Analyst, die nur eine Unterscheidung entsprechend im Folgenden erstgenannter Form ist. Da HADAMARD sich stark mit der Rolle von Unterbewusstsein und Bewusstsein in mathematischer Forschung beschäftigt, spricht er einerseits von intuitivem Arbeiten, wenn das Unterbewusstsein eine große Rolle spielt, wohingegen logisches Arbeiten bei vollem Bewusstsein stattfindet. Andererseits geht er von intuitivem Arbeiten aus, wenn das Denken unbestimmt und damit nicht auf ein bestimmtes Ziel ausgerichtet ist, wohingegen logisches Arbeiten zielgerichtet ist – HADAMARD macht dabei deutlich, dass es wichtig ist, insbesondere zwischen letztgenannten Formen intuitiven und logischen Arbeitens wechseln zu können. Diese Gegenüberstellungen zeigen wiederum, hier allerdings nur implizit, dass eine Konventionalisierung mathematischer Aussagen nur dann möglich ist, wenn sie der Intuition (und damit ihrer Vagheit) enthoben werden.

---

115 Diesbezüglich ist zu erwähnen, dass F. KLEIN bereits drei Typen mathematischen Denkens unterschied: Geometer, die von der Anschauung ausgehen, Philosophen, die begriffsbezogen arbeiten und Analytiker, die formelgebunden arbeiten (vgl. Borromeo Ferri 2004, S. 3) – siehe hierzu auch 7.2.2..

116 Es werden erneut nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil HADAMARDs Schlüsse auf seinen Darlegungen des Denkens der von ihm befragten Mathematiker beruhen, die sich durch sein gesamtes Werk ziehen.

HADAMARD weist außerdem darauf hin, dass es verschiedene Präferenzen der (insbesondere inneren) Repräsentation mathematischer Ideen gibt. So können mathematische Ideen beispielsweise bildlich, in Worten oder symbolisch vorgestellt werden,[117] und dem Denken einen entweder intuitiven Charakter oder logischen Charakter geben.

4.4.2. ALEXANDER WITTENBERG

Wohingegen POINCARÉ KANTs Auffassung mit Bezug auf reine Begriffe als a priori gegeben nur relativierte, bemängelt WITTENBERG (vgl. Wittenberg 1957) dessen Konstituierung analytischer Urteile sowie reiner, a priori gegebener, Begriffe:

> […] wie KANT durchaus unkritisch auf dem Boden der inhaltlichen Auffassung der Sprache steht: Für ihn ist ein Begriff an sich wohlbestimmt, er beinhaltet ein wohlumgrenztes Ganzes, das durch die Analyse offenbar gemacht werden kann. Dementsprechend ist auch der Unterschied zwischen analytischen und synthetischen Urteilen ein wohlbestimmter.
>
> (Wittenberg 1957, S. 217)[118]

WITTENBERG kritisiert allgemein die sogenannte inhaltliche Auffassung, die sich schon in KANTs „Kritik der reinen Vernunft“ aber auch POINCARÉs Arbeit ausdrückt.[119] Entsprechend dieser Auffassung wird davon ausgegangen, dass Worte als Bezeichner bestimmte Begriffe bedeuten, die jeweils in Objekten konkretisiert werden können[120] – Begriffe wären damit eineindeutig.[121] Daraus würde folgen, dass Aussagen über Begriffe einen feststehenden Sinn haben. WITTEN-

---

[117] HADAMARD folgert die verschiedenen möglichen Repräsentationsformen aus Aufzeichnungen von Mathematikern und anderen Wissenschaftlern, seine Ausführungen diesbezüglich bleiben jedoch exemplarisch, er systematisiert die verschiedenen Repräsentationsformen nicht.
Da es sich bei diesen Repräsentationsformen jedoch um Präferenzen insbesondere der inneren Repräsentation handelt, sind sie von den in 7.3.1. genannten Repräsentationsebenen nach BRUNER, aber auch von den in 7.2.2. erwähnten Symbolsystemen visuell-geometrisch, konzeptuell-begrifflich und formal-algebraisch nach LAMBERT (2012) zu unterscheiden. So ist das bildliche Vorstellen mathematischer Ideen genauer als ein inneres Aufblitzen von Bildern zu verstehen (vgl. Hadamard 1945, S. 71ff).

[118] Auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die KANTsche Position, wie in 4.4.5. erläutert wird, kritisch zu betrachten und damit der WITTENBERGschen Kritik zu folgen. Schon aufgrund des semiotischen Hintergrundes, der in 1. dargelegt wurde, kann ein Begriff nicht als „wohlumgrenztes Ganzes“ betrachtet werden.

[119] Es handelt sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, wiederum um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden allerdings nicht zu jeder Aussage konkrete Textbelege angegeben, weil auf viele der genannten Punkte an mehreren Stellen im Original eingegangen wird und sich das Gesamte erst durch Zusammenspiel dieser Stellen ergibt.

[120] WITTENBERG verwendet den Bezeichner >>Begriff<< und spricht an Stelle von >>Bezeichner<< von >>Wort<< sowie an Stelle von >>Objekt<< von >>Entitäten<< oder >>Dingen<<, womit sowohl Objekte als auch Repräsentanten gemeint sind (vgl. Wittenberg 1957, S. 35 & 46). WITTENBERG unterscheidet allerdings nur selten explizit zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt.

[121] Eine solche Eineindeutigkeit von Begriffen widerspricht dabei auch dem Modell des Begriffsfeldes.

BERG führt jedoch aus, dass jegliche Aussagen, die einen Begriff beinhalten, ein Wissen über den Begriff voraussetzen, das vage ist. Diese Unbestimmtheit des Wissens über einen Begriff nennt er das begriffskritische Problem.

Mit Bezug auf die Mathematik lässt sich, wie WITTENBERG ausführlich darlegt, schließen, dass selbst Grundlagen, so auch grundlegende Begriffe, nicht eineindeutig sind, und dass Begriffe an sich nie absolut feststehen. Für einen axiomatischen Aufbau wiederum heißt das, dass auch Begriffe, welche in die grundlegendsten Axiome eingehen, nicht absolut feststehen. Hieraus ergibt sich unmittelbar die Möglichkeit verschiedener mathematischer Systeme, die jeweils in sich widerspruchsfrei sind. WITTENBERG schreibt mathematischen Aussagen somit insgesamt einen noch stärker konventionalen Charakter zu, als POINCARÉ dies getan hat, weil er betont, dass bereits das Fundament ausschließlich auf Konventionen beruht.

Insgesamt stellt WITTENBERG, statt einer isolierten Betrachtungsweise zu folgen, Begriffsfelder und Begriffsnetze, in denen Begriffe auftreten, heraus – seine Sichtweise bezeichnet er, im Gegensatz zu der inhaltlichen, als funktionelle. Er führt aus, dass Begriffe erst in begrifflichen Zusammenhängen, die ausgedrückt werden durch sprachliche Zusammenhänge, ihre Bedeutung[122] erlangen. Um dies genauer auszuführen, verwendet er die durch >>Bedeutungsgewebe<< und >>Bedeutungsfamilie<< bezeichneten Begriffe. Ein Bedeutungsgewebe ist für WITTENBERG ein Kontext, in dem Begriffe gemeinsam verwendet werden und durch diese Verwendung geprägt sind, während eine Bedeutungsfamilie eine Menge von Bezeichnern, die mehr oder weniger als Synonyme verwendet werden können, meint.[123] Diesbezüglich weist er darauf hin, dass die Bedeutungen einzelner Bezeichner schon innerhalb einer Bedeutungsfamilie einer Entwicklung unterworfen und damit nicht eindeutig sind. Ebenso können Bedeutungsfamilien

---

[122] WITTENBERG verwendet >>Bedeutung<< folgendermaßen:

> Einem Begriff, den wir sinnvoll verwenden – bzw. einem Wort unserer sinnerfüllten Sprache –, kommt so etwas wie ein Bedeutungsgehalt zu, dessen Beziehung zum Wort als Geräusch bzw. als Zeichenreihe auf dem Papier eine ähnliche ist wie die Beziehung des Goldschatzes einer Nationalbank zum umlaufenden Papiergeld. Dieser Goldschatz stellt für dieses Papiergeld eine Deckung dar und verbürgt dessen Wert.
>
> (Wittenberg 1957, S. 175)

WITTENBERG betont dabei den Begriffsinhalt und betrachtet Bedeutung, im Vergleich zur vorliegenden Arbeit, weniger als Relation.

[123] So kann ein Bedeutungsgewebe beispielsweise durch einen mengentheoretischen Kontext gegeben sein. Zur Bedeutungsfamilie heißt es:

> Ein Beispiel für eine solche Bedeutungsfamilie ist etwa die des <<Zusammenfassens zu einem Ganzen>>, die den Nährboden für solche, mehr oder weniger gleichbedeutende Ausdrücke und Denkweisen, wie <<Menge>>, <<System>>, <<Gesamtheit>>, <<Klasse>>, <<zu einer Totalität zusammenfassen>>, <<als eine Einheit denken>> und dergleichen mehr, abgibt.
>
> (Wittenberg 1957, S. 311)

in verschiedene Bedeutungsgewebe eingebettet sein, wodurch die Bedeutung unterschiedliche, nicht zwangsläufig miteinander verträgliche Akzentuierungen erhalten kann. Bedeutungsgewebe können sich somit teilweise überlappen und, wie dargelegt wird, insbesondere an den Rändern teilweise unscharf sein, was vor allem dann zu Tage tritt, wenn die Begriffe strapaziert[124] werden. Zusammenfassend heißt das:

> In Wirklichkeit sind aber unsere Begriffe, wie wir eingehend besprochen haben, in gewissem Masse unscharf und nichtkategorisch, dazu teilweise subjektiv und einer Entwicklung unterworfen. Sie widersetzen sich einer so vollständigen und endgültigen Festlegung, wie sie durch eine formale Axiomatik angestrebt wird.
>
> (Wittenberg 1957, S. 280)

Zur Verwendung von Begriffen in der Mathematik werden, laut WITTENBERG, ursprünglich anschaulich gegebene Begriffe in neue Bedeutungsgewebe eingesponnen, dort dann abstrakt gefasst und gegebenenfalls auch definitorisch formuliert. Eine solche Definition bezeichnet WITTENBERG in der Wissenschaft als legitim und unerlässlich, weist jedoch darauf hin, dass sie erkenntnistheoretisch wertlos ist. So heißt es:

> In der Tat: das begriffskritische Problem nimmt primär Bezug auf die Wirklichkeit unseres Denkens. Es geht von der Aktualität unseres Verfügens über gewisse Denkweisen aus und stellt in bezug auf dieses gewisse Fragen. Eine nachträgliche Definition eines Begriffes lädt uns aber ein, von der Wirklichkeit unseres Denkens abzusehen, um ihr eine konstruierte Wirklichkeit zu substituieren. Damit sieht es aber am sich stellenden Problem vorbei. Die Angabe einer nachträglichen Definition für einen Begriff stellt keine Antwort auf die Frage dar, was wir von einem Begriff wissen, wenn wir ihn in unserem Denken in natürlicher Weise verwenden.
>
> (Wittenberg 1957, S. 182)

Für speziell geometrische Begriffe führt WITTENBERG aus, dass diese nicht durch Idealisierung natürlicher Begriffe entstehen. Stattdessen werden, im Sinne des Aufbaus eines Bedeutungsgewebes, die Beziehungen zwischen natürlichen Begriffen verallgemeinert.[125]

4.4.3. POINCARÉ, HADAMARD und WITTENBERG – Bezüge zur Schule

Schon POINCARÉ und HADAMARD gehen kurz auf die Vermittlung mathematischer Begriffe im Unterricht ein. HADAMARD erwähnt diesbezüglich, dass Mathemati-

[124] Begriffe werden dann strapaziert, wenn von erlaubten zu unzulässigen Begriffsbildungen und von einsichtigen zu nicht mehr schlüssigen Aussagen übergegangen wird.

[125] Diese Aussagen WITTENBERGs sind vor allem auf Geometrie als Fachwissenschaft zu beziehen. Mit Bezug auf die Geometrie im Schulunterricht, die auf der euklidischen Geometrie basiert, scheint eine Idealisierung natürlicher Begriffe in Ergänzung zur Verallgemeinerung der Beziehungen zwischen natürlichen Begriffen legitim.

kerinnen und Mathematiker sowie Mathematiklernende ähnlich und lediglich auf einem unterschiedlichen Level arbeiten (vgl. Hadamard 1945, S. 104). Mathematische Aussagen sollen daher auch im Unterricht, um nachvollziehbar zu sein, entsprechend ihrer historischen Genese entwickelt werden. POINCARÉ führt, stärker die Entwicklung der Lernenden berücksichtigend, an, dass Begriffe (insbesondere in der Grundschule) mittels vorgestellter und durchgeführter Handlungen beschrieben werden sollen, woraus das Bedürfnis nach einer logischen Definition erwachsen soll. Zudem regt er dazu an, von Lernenden formulierte Umschreibungen von Begriffen aufzunehmen und unter Umständen deren Ungenauigkeit aufzuzeigen (vgl. Poincaré 1913, S. 430ff).

WITTENBERG weist, entsprechend seiner erkenntnistheoretischen Ausführungen, darauf hin,[126] dass mathematische Begriffe aus natürlichen Begriffen durch Verallgemeinerung der zwischenbegrifflichen Beziehungen entstehen sollen (vgl. Wittenberg 1957, S. 330).

4.4.4. HANS FREUDENTHAL – Bezüge zur Schule

FREUDENTHALs „Phänomenologie“ (vgl. Freudenthal 1983) schließt im Charakter an die schon von HADAMARD, POINCARÉ und WITTENBERG mit Bezug auf den Unterricht erwähnten Punkte an. So betont FREUDENTHAL die Nachteile einer didaktischen Inversion,[127] die er stattdessen pointiert als antididaktisch bezeichnet (vgl. Freudenthal 1983, S. ix). Er greift auf Handlungen zurück, will das Bedürfnis nach logischen Definitionen erwachsen sowie diese selbst formulieren lassen und betont die Anknüpfung an natürliche Begriffe und zwischenbegriffliche Zusammenhänge.[128] Dennoch darf nicht unterschlagen werden, dass FREUDENTHAL, wie schon POINCARÉ und HADAMARD, die von WITTENBERG kritisierte inhaltliche Auffassung vertritt – wie sich im Folgenden zeigen wird, ist der zentrale Aspekt FREUDENTHALs Ansatzes das Ausgehen von Phänomenen und mittels dieser das Heranführen an mathematische Begriffe.

Seinen Ansatz beschreibt FREUDENTHAL folgendermaßen:

> […] I have avoided the term concept attainment intentionally. Instead I speak of the constitution of mental objects, which in my view precedes con-

---

[126] Dieser Verweis auf den Schulunterricht findet sich bei WITTENBERG nur nachrangig in Form einer Fußnote.

[127] Didaktische Inversion meint, wenn im Mathematikunterricht eine Begriffsentwicklung oder Problemlösung nicht genetisch, entsprechend ihrer Entstehung, dargelegt wird, sondern wenn in der Präsentation die Reihenfolge einzelner Schritte im Vergleich zum Entwicklungs- oder Lösungsprozess verändert ist. Eine solche didaktische Inversion soll zur Übersichtlichkeit beitragen, nimmt der Mathematik aber ihre Lebendigkeit (vgl. Freudenthal 1983, S. ix).

[128] Es handelt es sich bei den Ausführungen an den Stellen, wo nicht explizit eine Sekundärquelle angegeben ist, erneut um Überblicke über die angegebene Primärliteratur. Es werden allerdings zu den nicht das grundsätzliche Vorgehen FREUDENTHALs betreffenden Aussagen keine konkreten Textbelege angegeben, weil sich die meisten der genannten Punkte aus einer Gesamtschau des Originals ergeben.

> cept attainment and which can be highly effective even if it is not followed by concept attainment. With respect to geometrically realizable mental objects (square, sphere, parallels) it is obvious that the constitution of the mental object does not depend at all on that of the corresponding concept, but this is equally true for those that are not (or less easily) geometrically realisable (number, induction, deduction).
>
> (Freudenthal 1983, S. 33)

FREUDENTHAL greift in diesem Ansatz[129] viele schon von POINCARÉ und HADAMARD mit Bezug auf die Denk- und Arbeitsweisen von Fachmathematikerinnen und -mathematikern genannten Punkte auf. So appelliert er, zum Aufbau der mentalen Objekte[130] von Phänomenen, welche dem natürlichen Umfeld und der Erfahrung der Lernenden entstammen können, auszugehen und weist induktivem Arbeiten großes Gewicht zu. Das Arbeiten soll dabei weitestgehend experimentellen Charakter haben – Phänomene sollen untersucht und Repräsentanten eines Begriffs dazu gegebenenfalls sogar hergestellt werden – und nicht in einem gezielt für die schulische Begriffsbildung zur Verfügung gestellten Gegenstandsbereich stattfinden. FREUDENTHAL weist zudem darauf hin, dass der Bezeichner häufig vor dem Erwerb eines Begriffes aus dem Alltag bekannt ist und alltägliche Begriffe sowie entsprechende Assoziationen für die Mathematik nutzbar gemacht werden sollen.

Ein solches Arbeiten ist dabei, laut FREUDENTHAL, für die Geometrie insbesondere geeignet. Dies begründet er einerseits damit, dass Realisate geometrischer Begriffe vielfach im Alltag auftreten und sich sogar geometrische Begriffe schon im Alltag aufdrängen. Zur Begründung heißt es andererseits:

> In no part of mathematics do mental objects serve so long before, or even without, concept formation as in geometry. Images and imageries are more efficient if they represent figures and spatial constellations than if they represent numbers. Small numerical quantities can be supported efficiently by images, actual and imaginary ones, but this support does not reach far in the quantitative world and so is soon renounced. […] On the other hand each triangle that is drawn in a not too specific way is a good paradigm of the triangle, each pair of line-segments is a paradigm of the pair of line-segments if the aim is to show what the sum or the product is of two lengths. One can show other people what a parallelogram is, a rhombus, a square, what are diagonals and what it means to say that they halve each other, that they are perpendicular to each other, that they are equal. Without bothering oneself or the other person with concepts, one can introduce words to indicate them and restrict oneself to examples to explain what the words mean. One can explore widely the geometrical domain

[129] Zu FREUDENTHALs Ansatz allgemein: vgl. Freudenthal 1983, S. 10 & 31ff.
[130] FREUDENTHALs mentale Objekte sind dabei zu vergleichen mit KANTs Vorstellungen oder in anderen Arbeiten genannten Intuitionen (vgl. Freudenthal 1983, S. 226).

> without forming concepts, so widely that finally over-ripe concepts drop in one's lap. One can even disregard the formalism characterizing traditional geometry and for a long time be satisfied with demonstrative linguistic means and wait for relative and more symbolic linguistic tools to announce themselves.
>
> (Freudenthal 1983, S. 226)

Entsprechend FREUDENTHAL sollen demnach Begriffe nur dann formalisiert werden, wenn dies zur Kommunikation oder als Grundlage für weiteres Arbeiten notwendig ist – Formalisierungen können dabei meinen, noch unbekannte Bezeichner für Begriffe zu nutzen, einzelne Zeichen als Abkürzungen zu verwenden oder auch, wie in einer Definition üblich, zu einer fachwissenschaftlich üblichen Syntax überzugehen. Dabei soll in den Lernenden der Wunsch, Begriffe bewusst zu ordnen, definitorisch zu fassen und damit zu präzisieren und zu objektivieren, entstehen. Die Definitionen sollen den Lernenden gerechtfertigt erscheinen und möglichst durch die (geleitete) Analyse von Repräsentanten eines Begriffs sowie benachbarter Begriffe im Begriffsnetz entstehen. FREUDENTHAL ruft jedoch dazu auf, auch wenn sie bekannt sind, Formalismen nicht an Stelle von Verständnis treten zu lassen – treten auch im fortgeschrittenen Stadium der Beschäftigung mit einem Begriff Verständnisprobleme auf, so soll zu den Phänomenen zurückgegangen werden.

4.4.5. Zwischenfazit – Begriffsbild und Begriffskonvention in der Fachmathematik

Wie bereits in 0.1., 4.2.5. und 4.3.4. erwähnt, beziehen TALL und VINNER sich auf die kognitive Wissensstruktur, während in den in 4.2. betrachteten Werken aus der Philosophie die epistemologische und in den in 4.3. betrachteten Werken aus der Psychologie wiederum die kognitive Wissensstruktur untersucht wird. Die Werke wurden hier insgesamt nur insofern betrachtet, als sie sich auf die subjektive Begriffsbildung beziehen. Aus den unterschiedlichen Ausrichtungen der Bezugswissenschaften folgen dennoch unterschiedliche Schwerpunktsetzungen mit Bezug auf Begriffsbildung auch für den Mathematikunterricht. So folgen aus den philosophischen Arbeiten die Betonung der Zielorientierung der Begriffsbildung und der Entwicklung einer logisch geprägten Sprache aus der Umgangssprache. Aus den psychologischen Arbeiten folgt, im Fall der Entwicklungstheorien, ein Aufruf zur Berücksichtigung des jeweils subjektiven Entwicklungsstandes und, im Fall der weiteren Arbeiten, ein Hinweis auf die jeweilige logische oder prototypische Struktur eines Begriffs. Die philosophischen und psychologischen Arbeiten ergänzen sich vor dem Hintergrund des Mathematikunterrichts somit gut darin, dass einerseits die durch offizielle Vorgaben definierten Ziele, die Entwicklung einer mathematischen Sprache und andererseits das Anknüpfen an den jeweiligen Entwicklungsstand und die natürliche Begriffsstruktur angesprochen werden. Trotz offizieller Vorgaben darf aber nicht aus den Augen verloren werden, dass, wie POINCARÉ, HADAMARD, WITTENBERG sämtlich darlegen, fachmathematische Begriffsbildung in Auseinandersetzung mit dem natürlichen Umfeld geschieht und dementsprechend, wie bei FREUDENTHAL deutlich wird, auch im Mathematikunterricht so weit als möglich geschehen soll. Die Werke von POINCARÉ, HADAMARD, WITTENBERG und FREUDENTHAL sollen nun, wie erwähnt, herangezogen werden, um eine Position für die Mathematikdidaktik mit Bezug auf noch diskussionswürdige Punkte aus 4.2.5. sowie 4.3.4. herauszuarbeiten, indem ein stärker mathematischer oder mathematikdidaktischer Blick auf den Begriffsbegriff geworfen wird.[131]

So geht KANT davon aus, dass reine Begriffe den empirischen Begriffen zu Grunde liegen, während in allen anderen Fällen der potentielle Vorläufer zu Concept Image dem potentiellen Vorläufer zu Concept Definition zu Grunde liegt. POINCARÉ und WITTENBERG konstituieren allerdings, dass definitorisch fassbare Begriffe erst entstehen müssen. Dem folgt HADAMARD implizit. Des Weiteren ist die vorgeordnete Stellung von Phänomenen und mentalen Objekten im Vergleich zu Definitionen Grundlage FREUDENTHALs Phänomenologie. Für einen Geometrieunterricht in der Schule, der von einer Propädeutik ausgeht, ist dabei ein, wie von FREUDENTHAL umrissenes, Ansetzen am natürlichen Umfeld der Schülerinnen und Schüler und eine, wie von POINCARÉ, WITTENBERG und HADAMARD festgestellte, sukzessive Entstehung definitorisch fassbarer Begriffe unabdinglich. Daher kann KANTs Position eines Primats reiner Begriffe für die vorliegende Arbeit ausgeblendet werden, sowohl eine Komplementarität schlechthin von Verstand und Anschauung als auch der ideale Charakter reiner Urteile und Begriffe und die Kontextbezogenheit empirischer Urteile und Begriffe können allerdings weiterhin berücksichtigt werden (vgl. hierzu auch Otte 1994, S. 52 & 294).

Weiterhin gehen FREGE und der frühe WITTGENSTEIN davon aus, dass alltägliche Zeichen oder Worte nicht die Bildung der bei ihnen sogenannten Begriffe bedingen, da diese einen komplett anderen Charakter als Zeichen oder Worte haben. Demgegenüber besteht in allen anderen Fällen ein Entwicklungszusammenhang zwischen den potentiellen Vorläufern zu Concept Image und Concept Definition, auch wenn der potentielle Vorläufer zu Concept Definition teilweise nachträglich und auf einer übergeordneten Ebene entsteht. POINCARÉ erläutert diesbezüglich, dass definitorisch fassbare Begriffe erst, basierend auf Erfahrung und Intuition, entstehen müssen und auch WITTENBERG geht von ursprünglich anschaulich gegebenen Begriffen aus, die in neue Bedeutungsgewebe eingesponnen werden. Ebenso sind, laut FREUDENTHAL, Phänomene die Voraussetzung dafür, dass Begriffe formalisiert werden können. Für einen Geometrieunterricht in der Schule ist dementsprechend ein Ausgehen vom natürlichen Umfeld und, soweit als möglich, auch ein sukzessives Entwickeln eines logischen Begriffs wichtig. Daher soll

[131] Dabei ist es nachrangig, dass WITTENBERG die inhaltliche Auffassung, welche insbesondere POINCARÉ und FREUDENTHAL vertreten, kritisiert.

die Position FREGEs und des frühen WITTGENSTEINs, wonach alltägliche Zeichen oder Worte nicht die Bildung der sogenannten Begriffe, die sich grundlegend von Worten und Zeichen unterscheiden, bedingen, für die vorliegende Arbeit verworfen werden.

Darüber hinaus unterscheidet BRUNER (mit GOODNOW und AUSTIN) drei verschiedene Begriffstypen, in allen anderen Arbeiten werden jedoch nur zwei Begriffstypen unterschieden. BRUNER beschäftigt sich, wie bereits erwähnt, im Weiteren allerdings ausschließlich mit formalen Kategorien, weswegen affektive und funktionale Kategorien nachrangig scheinen. Zudem sind auch mit Rückgriff auf die Werke von POINCARÉ, HADAMARD, WITTENBERG und FREUDENTHAL zwei Begriffstypen, anknüpfend an Concept Image und Concept Definition nach TALL und VINNER, insbesondere relevant. Erster Begriffstyp spiegelt dabei, wie beschrieben, die stärker alltägliche Seite der Begriffsbildung wider, während anderer erst durch Konventionalisierung daraus hervorgeht.[132] Daher kann BRUNERs Unterscheidung von drei Begriffstypen für die vorliegende Arbeit ausgeblendet werden.

Vor dem Hintergrund des semiotischen Modells des Begriffsfeldes soll letztlich darauf hingewiesen werden, dass die Arbeiten von POINCARÉ, HADAMARD und WITTENBERG für die Fachmathematik schon die Möglichkeit einer Mehrdeutigkeit von Begriffen, die sich in Triangulationsbrüchen im semiotischen Dreieck wiederfinden, und auch ganzen Begriffssystemen feststellen. So wird ausgeführt, dass eine Konventionalisierung von Begriffen, welche diese der Erfahrung, Intuition und Anschauung enthebt, die Möglichkeit verschiedener, miteinander widersprüchlicher mathematischer Systeme schafft, die auf denselben Grundlagen basieren können. Für die Geometrie wird insbesondere dargelegt, dass Begriffe in einigen solchen Systemen der Erfahrung näher sein können, während andere abstrakter und weniger leicht greifbar sind. Wie eng solche Triangulationsbrüche von den jeweiligen Bezeichnern abhängen können, machen darüber hinaus WITTENBERGs Begriffe der Bedeutungsgewebe und Bedeutungsfamilie deutlich.

4.5. Begriffsbild und Begriffskonvention für die Mathematikdidaktik

Die genannten Begriffstypen von TALL und VINNER sowie aus Philosophie und Psychologie sollen schließlich unter den in der vorliegenden Arbeit mit >>Begriffsbild<< und >>Begriffskonvention<< bezeichneten Begriffen zusammengefasst werden (siehe: Rembowski 2014 & 2015a). Der Bezeichner >>Begriffsbild<< ist angelehnt an TALL und VINNERs Bezeichner >>Concept Image<<, er bezeichnet jedoch weniger ein Abbild als ein individuell selbst erschaffenes Bild. Das

[132] Damit wird die insbesondere von TALL verwendete Bedeutung der Concept Definition als Personal Concept Definition ausgeblendet.

Begriffsbild hat klar philospisch-psychologischen[133] Charakter und wird lediglich aus Gründen der Handlichkeit nicht als >>philosophisch-psychologisches Begriffsbild<< bezeichnet. Der Bezeichner >>Begriffskonvention<< wurde an Stelle von >>Begriffsdefinition<<, was TALL und VINNERs >>Concept Definition<< ähnlicher wäre, gewählt, um den Normcharakter des Begriffs zu akzentuieren und demgegenüber die Forderung nach gewissen semantischen Spielregeln, die häufig mit dem Begriff Definition assoziiert ist, außen vor zu lassen. Zudem kann mit dem Bezeichner >>Begriffskonvention<< darauf hingewiesen werden, dass eine Definition notwendigerweise eine Konvention ist, wenn sie wiederholt in gleicher Form, wie in der Mathematik üblich, auftritt. Die Begriffskonvention hat klar logischen Charakter, wird jedoch wieder aus Gründen der Handlichkeit nicht >>logische Begriffskonvention<< genannt.

Das *Begriffsbild* und die *Begriffskonvention* sollen im Weiteren als Begriffe abgesteckt werden. Dazu wird auf die Arbeiten von TALL und VINNER sowie aus Philosophie und Psychologie zurückgegriffen – die dort genannten Begriffstypen ergänzen sich, nachdem noch Diskussionswürdiges in 4.4.5. mit Rückgriff auf mathematiknähere Werke diskutiert und damit geklärt wurde, in solchen Aspekten, die für den Mathematikunterricht relevant sind.

Das Begriffsbild entsteht in Auseinandersetzung einer Person mit deren natürlichem Umfeld und hat daher subjektiven Charakter. Im Zuge der Entstehung werden einzelne Merkmale von Repräsentanten, die nicht zwangsläufig klar umrissen sind, intuitiv betont, und die Repräsentanten werden unter Begriffen zusammengefasst. Das Begriffsbild entsteht damit auf einem synthetischen, induktiven Weg. Die Bedeutung bleibt allerdings gebunden an den Bezeichner und eine komplette Abstrahierung von konkreten Objekten ist nicht möglich. Schon aus der Art der Entstehung folgt, dass das Begriffsbild unscharf und somit auch definitorisch nicht fassbar ist. Weiterhin ist es unbegrenzt und kann sich damit, auch im Umfang, ständig weiterentwickeln. Aufgrund seiner Nähe zum natürlichen Umfeld und dem Alltag kann das Begriffsbild affektiv geprägt sein und auch Handlungen beinhalten.

Die Begriffskonvention hingegen basiert auf dem kritischen Verhältnis einer Person zu nicht nur von dieser Person verwendeten Begriffen und wird aus dem Bedürfnis, diese Begriffe als Grundlage weiteren Arbeitens und zu Zwecken der Kommunikation festzulegen, gebildet. Die Begriffskonvention hat dann intersubjektiven Charakter und entsteht insgesamt auf einem analytischen, deduktiven Weg. Schon die Intersubjektivierung als Motivierung zur Konventionalisierung lässt darauf schließen, dass die Begriffskonvention unabhängig von Bezeichnern

[133] Philosophisch-psychologisch meint hier auf dem subjektiven Denken und Erleben von Menschen und deren epistemologischer und kognitiver Wissensstruktur beruhend und ist dem folgenden Bezeichner >>logisch<< gegenübergestellt.

und konkreten Objekten sein muss. Die Begriffskonvention ist somit eindeutig, insbesondere mit Bezug auf die Oberklasse und spezifischen Merkmale. Sie bekommt zwangsläufig klare Grenzen und blendet den Menschen aus.[134]

In einer tabellarischen Übersicht lassen sich Begriffsbild und Begriffskonvention auf folgende Eigenschaften reduzieren (Tabelle 5):

Begriffsbild	Begriffskonvention
• subjektiv, intuitiv	• intersubjektiv
• synthetisch, induktiv gebildet	• analytisch, deduktiv gebildet
• gebunden an Bezeichner und konkrete Objekte	• unabhängig von Bezeichnern und konkreten Objekten
• unscharf	• eindeutig (in Oberklasse und spezifischen Merkmalen)
• unbegrenzt, sich ständig in Entwicklung befindend	• klar begrenzt
• kann affektiv geprägt sein und Handlungen beinhalten	• blendet den Menschen aus

Tabelle 5: Begriffsbild und Begriffskonvention (vgl. Rembowski 2014 & 2015a)

Sowohl das Begriffsbild als auch die Begriffskonvention sollen nun im semiotischen Dreiecksprisma lokalisiert werden (Abbildung 48).

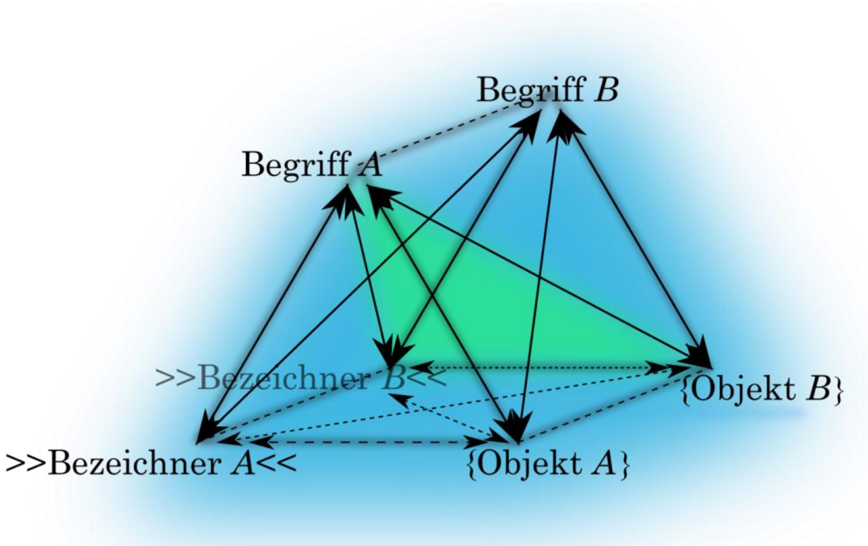


Abbildung 48: Begriffsbild (blau) und Begriffskonvention (grün) im semiotischen Dreiecksprisma

Das (blau dargestellte) Begriffsbild enthält neben Bezeichner, Objekt und dem dadurch bezeichneten beziehungsweise dazu abstrahierten Begriff auch ein durch Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck entstehendes persönliches Begriffsfeld, das Bestandteil eines allgemeinen, auf theoretischen Überlegungen

[134] Dieses dialektische Verhältnis, das darin besteht, dass mathematische Begriffskonventionen einerseits auf dem natürlichen Umfeld entwachsenden Begriffen beruhen und sich andererseits diesem natürlichen Umfeld komplett entheben, betont auch OTTE (1994, S. 101).

beruhenden, Begriffsfeldes ist. Da im Begriffsbild allerdings nicht deutlich zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt unterschieden wird und auch die durch verschiedene Kontexte bestimmten semiotischen Dreiecke verschwimmen können, ist das Begriffsbild unscharf, wobei diese Unschärfe durch Rauschen visualisiert ist. Die (grün dargestellte) Begriffskonvention ist intersubjektiv und enthält eine ausformulierte Zuordnung des Begriffs zu Bezeichner und Objekt, sie lässt sich daher als mathematisch gewünschter Schnitt durch das Dreiecksprisma (und damit als ein spezielles semiotisches Dreieck) visualisieren. Die Lage der Begriffskonvention im Dreiecksprisma („schräg“ mit Begriff A, >>Bezeichner B<< und {Objekt B} als Ecken) soll lediglich darauf hindeuten, dass eine Begriffskonvention, wie schon beschrieben, eine Setzung ist, die sich auf das gewollte semiotische Dreieck in dem Dreiecksprisma bezieht, welches aber beliebig lokalisiert sein kann.

Sobald ein Bezeichner oder Objekt bekannt ist – wie die Ausführungen in 4.2. bis 4.4. gezeigt haben, geht Begriffsbildung in einem lebensweltlichen Kontext üblicherweise von einer dieser beiden Ecken aus – bildet sich ein Begriffsbild heraus, das notwendigerweise subjektiven Charakter hat. Solche Begriffsbilder bestehen im Alltag im Allgemeinen, ohne dass in einem speziellen Kontext eine Begriffskonvention ein spezielles semiotisches Dreieck in dem Begriffsbild auszeichnet. Insbesondere in der Wissenschaft (oder auch schon im Schulunterricht) werden durch Begriffskonventionen spezielle semiotische Dreiecke ausgezeichnet. Solche Begriffskonventionen geben mathematischen Begriffen häufig einen rein relationalen Charakter, indem sie einen Begriff dadurch beschreiben, dass sie andere Begriffe in Beziehung zueinander setzen. Doch insbesondere dann, wenn, wie die Visualisierung im Begriffsfeld aufzeigt, mathematische Begriffe durch auch im Alltag verwendete Bezeichner bezeichnet werden und auch in alltäglichen Objekten konkretisiert sind, müssen Begriffskonventionen derart mit dem Begriffsbild in Beziehung gesetzt werden, dass sie entweder aus dem Begriffsbild hervorgehen oder in das Begriffsbild aufgenommen werden.

4.6. Exkurs: Bisheriges aus der Mathematikdidaktik mit Bezug zu Begriffsbild und Begriffskonvention

Letztlich soll ein kurzer Blick auf Werke der deutschen Mathematikdidaktik geworfen werden – auch hier ist die sich in Begriffsbild und Begriffskonvention manifestierende Unterscheidung zu finden. Diese Unterscheidung ist teilweise implizit vorhanden, wenn Schülerinnen und Schülern eigene Vorstellungen zu einem Begriff zu- oder zumindest nicht abgesprochen werden und auf Seiten der Fachmathematik eine Definition steht. Bei VOLLRATH heißt es:

> Schüler sollen mathematische Begriffe lernen. Jeder Schüler ist ein Individuum mit konkreten Bedürfnissen, Fähigkeiten, Erwartungen, Kenntnissen und Erfahrungen. Unterricht ist in unserer Gesellschaft meist ein

> Unterricht in einer Gruppe, in der Klasse. […] Meist behandelt man die Schüler einer Gruppe im Unterricht einheitlich. Man führt also z.B. einen Begriff nach einer bestimmten Strategie ein. Erst wenn man merkt, daß einige Schüler hierbei Schwierigkeiten haben, werden Korrekturmaßnahmen ergriffen, die dafür sorgen sollen, daß auch diese Schüler den gewünschten Lernerfolg erreichen.
>
> (Vollrath 1984, S. 58)

Hier werden über insbesondere Kenntnisse und Erfahrungen Vorstellungen mittelbar angesprochen. Dabei steht jedoch die Klasse im Mittelpunkt, und erst im Fall des Auftretens von Fehlvorstellungen oder -verständnissen wird ein Eingehen auf subjektive Vorstellungen einzelner Schülerinnen oder Schüler angenommen. Ein Blick auf WEIGAND zeigt:

> Im Geometrieunterricht stehen Definitionen nicht am Anfang des Begriffslernens, sie bauen vielmehr auf Vorstellungen, Kenntnissen und Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff auf. Das bewusste ‚Definieren' und die Verwendung des Wortes ‚Definition' erfordert Kenntnisse über den Aufbau eines mathematischen Gebietes und ist erst im fortgeschrittenen Lehrgang möglich.
>
> (Weigand 2009a, S. 113)

In diesem Fall werden Vorstellungen als Ausgangspunkt des Begriffslernprozesses gesehen, was genau dahinter steckt, wird jedoch nicht ausgearbeitet. Allerdings werden diese Vorstellungen deutlich einer Definition gegenübergestellt.[135]

Explizit unterscheidet FÜHRER zwischen unscharfen Begriffen, die auch Alltagsbegriffe genannt werden, und scharfen Begriffen, womit definierte Fachbegriffe gemeint sind. Charakterisiert werden die Begriffstypen durch FÜHRER mittels ihrer Funktionen (Tabelle 6).

Unscharfe Begriffe helfen …	Scharfe Begriffe helfen…
• der vagen Erinnerung (indem sie Vorstellungskomplexe benennen), • der anregenden Verständigung, • Situationen zu erklären und Probleme zu lösen, • einschlägige Informationen zu sammeln und Hypothesen durch spekulative Verallgemeinerung zu bilden (unvollständige Induktion), • Analogien zu bilden und Ähnlichkeiten zu entdecken.	• Tatbestände zu identifizieren und zu ordnen (Gattungsbegriffe, die einander z.T. über- oder untergeordnet werden können), • der präzisen Erinnerung (indem sie Vorstellungskomplexe benennen), • der unmissverständlichen Verständigung, • logische Schlüsse zu formulieren, • Informationen systematisch zu sammeln.

Tabelle 6: Funktionen scharfer und unscharfer Begriffe nach FÜHRER (2002, S. 67)

[135] In einer späteren Veröffentlichung verweist WEIGAND explizit auf Concept Image und Concept Definition nach TALL und VINNER, es bleibt jedoch bei diesem Verweis (vgl. Weigand 2015).

Diese Unterscheidung spiegelt einerseits jene von Begriffsbild und Begriffskonvention wieder, andererseits bleiben mit Bezug auf die unscharfen Begriffe der subjektive, unbegrenzte und möglicherweise affektive Charakter des Begriffsbildes sowie mit Bezug auf die scharfen Begriffe der intersubjektive Charakter und die komplette Unabhängigkeit vom Menschen außen vor. FÜHRER schreibt zu den Begriffstypen weiterhin:

> Es empfiehlt sich für die didaktische Praxis sehr, die Wechselwirkung zwischen Alltags- und Fachbegriffen nicht durch demonstrative Abgrenzung totzuschlagen. Eine solche Abgrenzung ist auch künstlich, denn jede gedankliche Arbeit mit Fachbegriffen bemüht unvermeidlich außerfachliches Wissen, Können, Vorstellen und Denken – und dies auf jedem Niveau.
>
> (Führer 2002, S. 67)

FÜHRER betont somit die insbesondere bei KANT, CASSIRER, PIAGET, BRUNER und FREUDENTHAL auch schon angesprochene Verzahnung der beiden Begriffstypen. Eine Verzahnung der Begriffstypen wird außerdem in den anderen didaktischen Werken, welche Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern berücksichtigen, gefordert. Im Speziellen fordert FÜHRER die Nutzbarmachung von fachsprachlichen Begriffen auch für den Alltag. Dies erfordert eine Untermauerung der Begriffe, worauf in den Kapiteln 6. und 7. genauer eingegangen wird.

5. Der Würfel – ein Begriffsbild

In den vorhergehenden Kapiteln wurden die Begriffe Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention als Kern einer fachdidaktischen Theorie zur Begriffsbildung herausgearbeitet. In diesem Kapitel wird eine Untersuchung dargelegt, die sich mit Begriffsbildern von Schülerinnen und Schülern beschäftigt – dabei wird exemplarisch das schon in Kapitel 2. angesprochene Beispiel des Würfels betrachtet. Nachdem zunächst auf allgemeine theoretische Grundlagen, Vorüberlegungen und die Konzeption der Erhebung eingegangen wird, werden Begriffsbilder zu Würfel auf ihre Kontextbezogenheit untersucht. Zudem werden in Begriffsbildern, die nicht eineindeutig triangulierte persönliche Begriffsfelder enthalten, die Triangulationsbrüche, welche die Begriffsfelder konstituieren, betrachtet, und es wird außerdem ein Blick auf Fehler im Begriffsverständnis geworfen.

5.1. Allgemeine theoretische Grundlagen

Das grundlegende Anliegen der Untersuchung ist, die empirische Evidenz des Begriffsbildes vor dem Hintergrund des Begriffsfeldes nachzuweisen. Zu diesem Zweck eignet sich ein qualitativer Untersuchungsansatz. Das zeigt schon eine Reflexion von MAYRINGs fünf Grundsätzen qualitativer Forschung, die sich aus den Gemeinsamkeiten qualitativer Ansätze ergeben:

> Fünf solcher Grundsätze möchte ich nun hervorheben: die Forderung stärkerer *Subjektbezogenheit* der Forschung, die Betonung der *Deskription* und der *Interpretation* der Forschungssubjekte, die Forderung, die Subjekte auch in ihrer natürlichen, *alltäglichen* Umgebung (statt im Labor) zu untersuchen, und schließlich die Auffassung von der Generalisierung der Ergebnisse als *Verallgemeinerungsprozess*.
>
> (Mayring 2002, S. 19)

So ist eine wichtige Eigenschaft des Begriffsbildes dessen Subjektivität, was die Subjektbezogenheit der Forschung zu einem notwendigen Kriterium macht. Dieses Begriffsbild muss dann beschrieben werden. Da es sich bei der Beschreibung um eine Offenlegung subjektiver Daten handelt, kann deren Bedeutung nur mittels Interpretation erschlossen werden. Dabei soll das Begriffsbild im Mathematikunterricht als einer natürlichen, alltäglichen Umgebung für die Auseinandersetzung mit mathematischen Begriffen erhoben werden, das Umfeld aber dennoch so offen als natürlich möglich gehalten werden. Die Verallgemeinerbarkeit ergibt sich schließlich einerseits über die offene Fragestellung, die von Schülerinnen und Schülern selbst angefertigten Beschreibungen ihrer Begriffsbilder und die zur Auswertung verwendeten Methoden (vgl. Mayring 2002, S. 142f). Im Folgenden werden zunächst die Erhebungsmethoden und Aufbereitungs- und Auswertungsverfahren beschrieben.

5.1.1. Erhebungsmethoden

Die Begriffsbilder von Schülerinnen und Schülern sollen mittels einer offenen Fragestellung, die schriftlich vorgelegt wird und schriftlich zu beantworten ist, erhoben werden. Dies ist zunächst in der zu Grunde liegenden Theorie des Begriffsbildes begründet – dieses ist, neben der Subjektivität, unter anderem intuitiv und gebunden an den Bezeichner an konkrete Objekte. Die Bindung an den Bezeichner und an konkrete Objekte erlaubt es, das Begriffsbild mittels einer einzelnen offenen Frage zu erheben, und die Intuitivität sollte es Schülerinnen und Schülern erlauben, diese Frage auch zu beantworten. Dabei provoziert eine offene Fragestellung keine speziellen Antworten, weil sie keine nicht aktiv erinnerten Aspekte eines Begriffs in das Gedächtnis ruft, sondern stattdessen spontane Äußerungen erfasst. Die Umfrage wird anonym durchgeführt. Dies ist wiederum darin begründet, dass möglichst offene Antworten provoziert und keinesfalls das Gefühl einer Leistungsüberprüfung vermittelt werden soll.

Eine Interviewerhebung ist unpassend, weil bei einer solchen die durch die Situierung im Mathematikunterricht gegebene natürliche Umgebung nicht beizubehalten wäre. Dies ist darin begründet, dass Einzelinterviews aus zeitlichen Gründen nicht durch die Mathematiklehrerin oder den Mathematiklehrer durchgeführt werden können und Gruppendiskussionen nicht in der Lage sind, ausschließlich subjektive Begriffsbilder zu erfassen. Darüber hinaus ist eine schriftliche Erhebung das natürlichste Umfeld, um sowohl Text als auch Zeichnungen (im Sinne von Darstellungen von Objekten) zu erfassen.

Mit der offenen Umfrage unterscheidet sich die vorliegende Erhebung deutlich von den quantitativen Multiple-Choice-basierten Erhebungen, die auf Grundlage von TALL und VINNERs Begriffen Concept Image und Concept Definition durchgeführt wurden (für Verweise siehe 4.1.). Sobald die Antworten nicht mehr, wie das im Umfeld von Concept Image und Concept Definition war, auf den mathematischen Kontext festgelegt sein sollen, und ein Begriffsfeld an Stelle eines einzelnen Begriffs betrachtet werden soll, muss auch Unerwartetes gefasst werden können. Daher wird die im Multiple-Choice-Prinzip gegebene Vorauswahl von für einen Begriff relevanten Aspekten unpassend.

5.1.2. Aufbereitungs- und Auswertungsverfahren

Da die Daten bereits in schriftlicher Form erfasst werden, muss keine Transkription stattfinden. Die Konstruktion deskriptiver Systeme lässt sich allerdings im Spannungsfeld von Aufbereitung und Auswertung lokalisieren. Sie meint „im Wesentlichen das Erstellen von beschreibenden Kategoriensystemen von Klassifikationen“ (Mayring 2002, S. 99). MAYRING legt diesbezüglich dar, dass das Erstellen der Kategoriensysteme stärker von der Theorie beziehungsweise stärker von der Empirie geleitet sein kann, dann aber auf das Material angewendet und nach einer Probeauswertung möglicherweise angepasst werden muss. Mit Bezug auf die vorliegende Erhebung werden die Kategoriensysteme stärker theoriegeleitet entwickelt.

Die Konstruktion deskriptiver Systeme steht schließlich schon in einer engen Beziehung zur Auswertung. Das Auswertungsverfahren enthält Aspekte der gegenstandbezogenen Theoriebildung (auch >>Grounded Theory<<), lässt sich aber vor allem der qualitativen Inhaltsanalyse zuordnen. Aus der gegenstandsbezogenen Theoriebildung wird die grundlegende Idee, dass sich verschiedene Phasen des Kodierprozesses überschneiden, übernommen:

> Diese Prozeduren [der Kodierung] sollten weder als klar voneinander trennbare Vorgehensweisen noch als zeitlich eindeutig getrennte Phasen des Prozesses (miss-)verstanden werden. Sie stellen vielmehr verschiedene Umgangsweisen mit textuellem Material dar, zwischen denen der Forscher bei Bedarf hin und her springt und die er miteinander kombiniert. Jedoch beginnt der Interpretationsprozess mit offenem Kodieren, während gegen Ende des gesamten Analyseprozesses das selektive Kodieren stärker in den Vordergrund rückt.
>
> (Flick 2007, S. 388)

So werden mit einem offenen Kodieransatz zunächst Kategorien gebildet, die durch Rückgriff auf das vorliegende Material bestätigt und ausgearbeitet werden. Da der grundsätzliche Charakter der Kategorien – deren Kontextbezogenheit – allerdings schon durch die zu Grunde liegende Theorie gegeben ist, bietet sich eine Schritt für Schritt-Auswertung entsprechend der gegenstandsbezogenen Theoriebildung – Segmentierung, Verfassen von Memos, Bilden offener Kategorien, … – für das vorliegende Datenmaterial nicht an.

Stattdessen wird hauptsächlich auf die qualitative Inhaltsanalyse zurückgegriffen. Diese eignet sich insbesondere für die vorliegenden Daten, da sie speziell zur Klassifikation von Inhalten größerer Textmengen dient und einheitliche Kategorien bedingt, welche das Einordnen neuer Fälle erleichtern (vgl. Flick 2007, S. 416). Die in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich verwendete zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse soll in den Worten MAYRINGs charakterisiert werden:

> Innerhalb der Logik der Inhaltsanalyse müssen die Kategorisierungsdimension und das Abstraktionsniveau vorab definiert werden. Es muss ein Selektionskriterium für die Kategorienbildung festgelegt werden. Dies ist ein deduktives Element und muss mit theoretischen Erwägungen über Gegenstand und Ziel der Analyse begründet werden. Mit dieser Definition im Hinterkopf wird das Material Zeile für Zeile durchgearbeitet.
>
> Wenn das erste Mal eine zur Kategoriendefinition passende Textstelle gefunden wird, wird dafür eine Kategorie konstruiert. Ein Begriff oder Satz, der möglichst nahe am Material formuliert ist, dient als Kategorienbe-

> zeichnung. Wird im weiteren Analyseverlauf wieder eine dazu passende Textstelle gefunden, so wird sie dieser Kategorie ebenfalls zugeordnet (Subsumption). Wenn die neue Textstelle die allgemeine Kategoriendefinition erfüllt, aber zu der (den) bereits induktiv gebildete(n) Kategorie(n) nicht passt, so wird eine neue Kategorie induktiv, aus dem spezifischen Material heraus, formuliert.
>
> Nach einem guten Teil des Materialdurchgangs (etwa 10 bis 50%), wenn so gut wie keine neuen Kategorien mehr gebildet werden können, wird das gesammelte Kategoriensystem überarbeitet. Es muss geprüft werden, ob die Logik klar ist (keine Überlappungen) und der Abstraktionsgrad zu Gegenstand und Fragestellung passt. Falls dadurch Veränderungen des Kategoriensystems vorgenommen werden mussten, wird das Material nochmals von Anfang an bearbeitet.
>
> (Mayring 2002, S. 115ff)

Dabei weist MAYRING darauf hin, dass die zusammenfassende qualitative Inhaltsanalyse auch eine weitere quantitative Auswertung der Daten erlaubt, wie sie basierend auf der in 5.4.1. vorgestellten Kodierung in den Kapiteln 5.4.3., 5.4.4. und 5.4.6. vorgenommen wird. In der vorliegenden Arbeit kommt allerdings auch ein von MAYRING mit Bezug auf die strukturelle qualitative Inhaltsanalyse erwähnter Aspekt zum Zug: So werden im Fall von Abgrenzungsproblemen von Kategorien klare Regeln für die Zuordnung definiert (vgl. Mayring 2002, S. 119).

Es kann somit zusammengefasst werden, dass die Kategoriensysteme auf Basis der vorliegenden Theorie entwickelt werden und damit auch die Kategorisierungsdimension und das Abstraktionsniveau der Kategorien gegeben sind. Die Kategorien werden dann durch wiederholten Rückgriff auf das Datenmaterial ausgeschärft. Genauer werden verschiedene Textstellen den Kategorien untergeordnet und definieren damit die Kategorien. Nach einer Überarbeitung der Kategorien wird eine erneute Zuordnung durchgeführt. Es zeigt sich, dass dabei kaum zusätzliche Regeln zur Kategorisierung definiert werden müssen. Es wird somit mit allgemeinen Kategorien begonnen, die durch Rückgriff auf das Datenmaterial aufgefüllt und diesem nicht aufgenötigt werden.

5.2. Vorüberlegungen zur Erhebung und Probeumfrage

Zur Erhebung wird erneut das Beispiel des Würfels herangezogen, was wiederum sowohl in dessen Reichhaltigkeit als auch in der gegenständlichen Natur der Realisate begründet ist. Um herauszufinden, welche Aspekte des allgemeinen, auf theoretischen Überlegungen beruhenden, Begriffsfeldes sich in Begriffsbildern wiederfinden, sollen genauer verschiedene Assoziationen mit dem Begriff Würfel, die unterschiedlichen Kontexten entstammen, erfasst und zunächst allgemein entsprechend ihres Kontextes eingeordnet werden. Außerdem sollen Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck, wie sie in Kapitel 2. ausgeführt sind, in ihrem Auftreten im Begriffsverständnis, wenn möglich, erfasst und den unterschiedlichen Fällen aus Kapitel 2. zugeordnet werden.[136] Zu diesem Zweck bietet es sich an, durch Bereitstellen einer Ecke eines semiotischen Dreiecks im Begriffsfeld möglichst vielfältige Äußerungen zu Begriffen, Bezeichnern und Objekten zu provozieren, die einen Aufschluss über die Begriffsbilder von Schülerinnen und Schülern geben – da ein Begriff aus semiotischer Sicht, wie in 1.1. ausgeführt, lediglich als Abstraktum existiert, gibt es die Möglichkeit, entweder den Bezeichner oder das Objekt, beim Würfel in Form einer Darstellung von Realisaten, bereitzustellen.

Die den Bezeichner enthaltende Fragestellung und auf das Objekt bezogene Fragestellungen wurden zunächst in Probeumfragen gegenübergestellt, um ihr Potential für die Erfassung verschiedener Kontexte und spezifischer Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck zu prüfen. Dazu wurde in sechsten Klassen ein Umfragebogen (Abbildung 49) ausgeteilt, auf dem die Schülerinnen und Schüler gebeten wurden, aufzuschreiben, was ihnen zu >>Würfel<< einfällt.

Universität des Saarlandes
Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu „Würfel“ einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

Abbildung 49: Umfragebogen >>Würfel<<[137]

Mit Bezug auf obige Fragestellung war vor allem zu klären, ob die provozierten Antworten lediglich einen der in Kapitel 2. genannten Kontexte ansprechen oder ob verschiedene Kontexte thematisiert werden. Es hat sich dabei gezeigt, dass die meisten Antworten (47 von insgesamt 61) den elementargeometrischen und den alltäglichen Kontext vereinen – dabei wurden die Kontexte hier noch als offene Kategorien gefasst. Der mathematisch-stochastische Kontext wurde vermutlich nicht angesprochen, weil die Stochastik in der sechsten Klassenstufe noch kein Unterrichtsgegenstand war – ein intuitiver Zugang zum Würfeln wurde dabei als alltäglich gefasst.

[136] Inwieweit Triangulationsbrüche erfasst werden können, wird 5.5. deutlich machen – an dieser Stelle ist dies noch offen, da die philosophisch-psychologischen Betrachtungen gezeigt haben, dass im Begriffsbild nicht deutlich zwischen Begriff, Bezeichner und Objekt unterschieden wird, und auch die durch verschiedene Kontexte bestimmten semiotischen Dreiecke verschwimmen können.
[137] Um Verwirrungen vorzubeugen, wurden auf dem Umfragebogen die in der Alltagssprache geläufigeren Anführungsstriche statt den in der vorliegenden Arbeit verwendeten Chevrons gebraucht.

Weiterhin wurde ergründet, ob Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck überhaupt erfasst werden können und ob sämtliche in Kapitel 2. genannten Triangulationsbrüche erreicht werden können oder ob durch Bereitstellen eines Bezeichners lediglich Fälle 1-1-2, 2-1-1 und 2-1-2 – in denen nur ein Bezeichner und höchstens verschiedene Begriffe und Objekte auftreten – provoziert werden. Es hat sich gezeigt, dass genügend Antworten die Erfassung von Triangulationsbrüchen erlaubten. Ebenso wurde deutlich, dass nicht nur die Fälle 1-1-2, 2-1-1 und 2-1-2 provoziert werden, sondern dass über die jeweiligen Begriffe oder Objekte auch verschiedene Bezeichner aktiviert und zu Papier gebracht werden. Die Antwort von Schülerin oder Schüler P 6.1 (Abbildung 50) zeigt beispielsweise, dass über die Beschreibung „… wo nichts drauf ist. Mit 12 Kanten und 8 Ecken. 6 Quadrate. Und ein schön symetrischer Würfel.“[138] ein elementargeometrischer Begriff enthalten ist. Mit der Beschreibung „… für Menschergere dich nicht.“ wird der alltägliche Kontext angesprochen, wobei, da nicht explizit Begriffseigenschaften genannt sind, eine Zuordnung der Aussage zu der Begriffs- oder Objektecke des semiotischen Dreiecks schwieriger ist. Es wurde allerdings sowohl ein elementargeometrisches als auch ein alltägliches Objekt zu Papier gebracht. Der elementargeometrische Begriff wurde dabei als >>ganz normahler Würfel<< bezeichnet, der alltägliche Begriff oder das alltägliche Objekt als >>Spielwürfel<<.

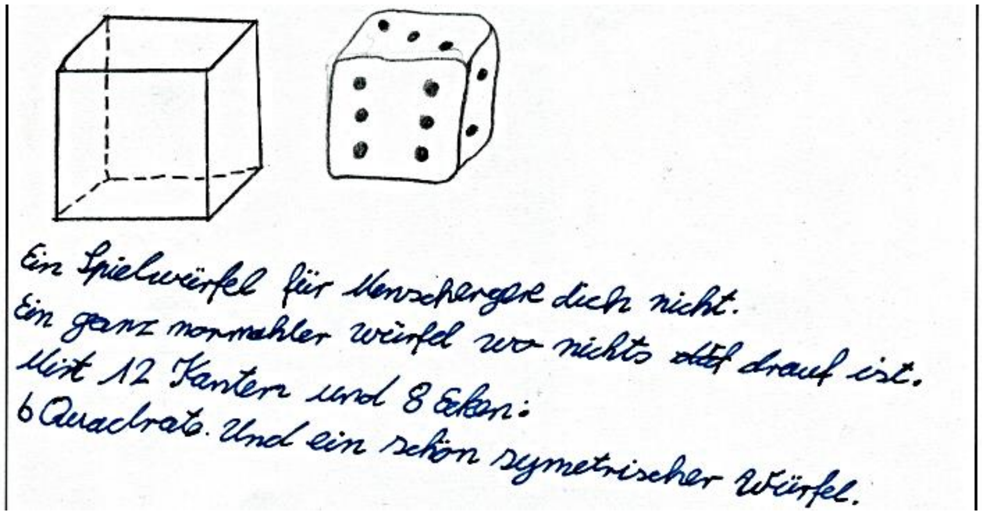


Abbildung 50: Schülerantwort P 6.1

Weiteren sechsten Klassen wurde ein Umfragebogen ausgeteilt, auf dem die Schülerinnen und Schüler gebeten wurden, aufzuschreiben, was ihnen zu einer gegebenen Abbildung eines Würfels einfällt. Diesbezüglich wurden vier verschiedene Versionen ausprobiert – einige Klassen erhielten Umfragebögen mit Schrägbildern eines Würfels (Abbildung 51), andere Klassen mit Fotos eines Spielwürfels (Abbildung 52), eine dritte Gruppe mit beiden Darstellungen gemeinsam (Abbildung 53) und eine vierte Gruppe mit einem Foto verschiedener

[138] Die Rechtschreibung wird bei einem direkten Zurückgreifen auf Schülerantworten von diesen übernommen.

Würfel (Abbildung 54). Die Problematik des Findens einer angemessenen Darstellung ergab sich, weil, im Gegensatz zum Bezeichner, eine einzige Abbildung nicht zwangsläufig verschiedenen Kontexten zuzuordnen ist und sich vor allem das Schrägbild in seiner Darstellungsform von anderen Objekten unterscheidet. (Ein einzelner Repräsentant engt den Begriff ein, wie auch in 1.1. ausgeführt ist.)

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu dem Bild rechts einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

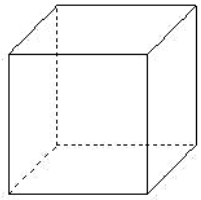


Abbildung 51: Umfragebogen Schrägbild Würfel[139]

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu dem Bild rechts einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

Abbildung 52: Umfragebogen Spielwürfel

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu den Bildern rechts einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

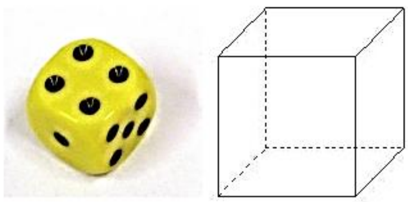


Abbildung 53: Umfragebogen Würfelbilder 1

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu dem Bild rechts einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

Abbildung 54: Umfragebogen Würfelbilder 2

[139] Dieser und die folgenden drei Umfragebögen enthielten denselben Kopf wie jener in Abbildung 49.

Mit Bezug auf obige vier Umfragebögen war zu klären, inwieweit die Auswahl der Würfelbilder einen Kontext vorgibt, über den die Schülerantworten[140] nicht hinauskommen. Die Auswertung hat ergeben, dass dies ganz klar der Fall ist. Ein Großteil der Antworten auf den Umfragebögen, die das Schrägbild des Würfels enthalten, bleibt im Kontext der Elementargeometrie. Ebenso bleibt ein Großteil der Antworten auf den Umfragebögen, die das Foto des Spielwürfels enthalten, in dem vorgegebenen alltäglichen Kontext. Die meisten Antworten auf den Umfragebögen mit mehr als einer Würfeldarstellung hingegen versuchen, die einzelnen Würfel einem Kontext zuzuordnen – so wurde die Berücksichtigung verschiedener Kontexte angeregt, diese können jedoch nicht als spontan erinnert gelten. Die Antwort von Schülerin oder Schüler P 6.2 (Abbildung 55) zu dem Umfragebogen, der das Foto eines Spielwürfels und das Schrägbild eines Würfels enthält, zeigt, dass beide Darstellungen zunächst einem Kontext zugeordnet werden und anschließend in ihrer Erscheinung beschrieben werden. Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck konnten auch mit den Umfragebögen, die eine Abbildung enthalten, erfasst werden, allerdings wurden aus den in Kapitel 2. genannten Fällen vor allem Fälle 2-1-1 und 2-2-1 erreicht. Die Bandbreite der erreichten Fälle ist bedeutend schmaler als jene in den Antworten zur Fragestellung, die den Bezeichner enthält.

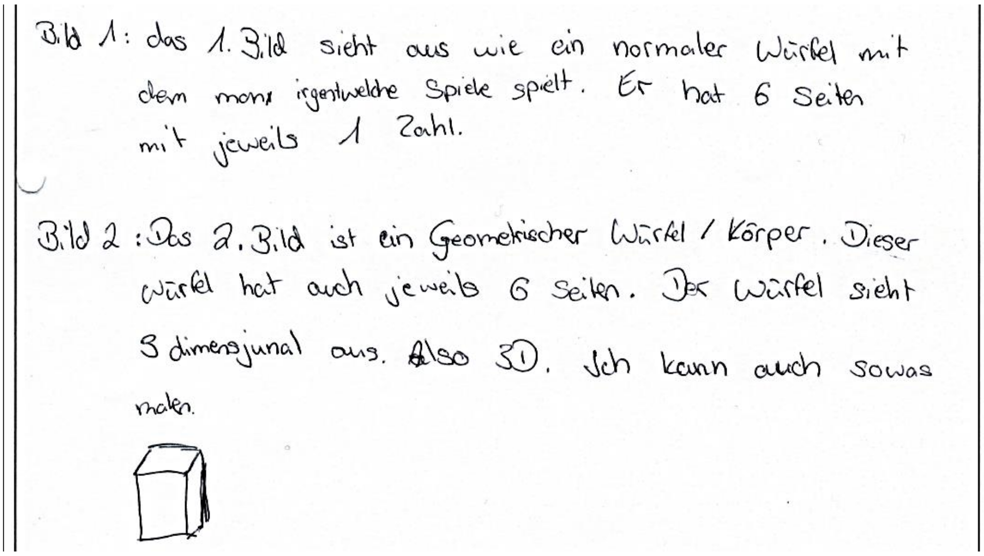


Abbildung 55: Schülerantwort P 6.2[141]

5.3. Konzeption der Erhebung

Basierend auf den Antworten zu den verschiedenen Probefragestellungen wurde entschieden, in der Erhebung schließlich eine Fragestellung zu wählen, in welcher der Bezeichner bereitgestellt wird. Dies ist auch darin begründet, dass mit

[140] Schülerantworten schließen Antworten von Schülerinnen und Schülern ein, lediglich aus Gründen der Lesbarkeit wird nicht von Schülerinnen- und Schülerantworten gesprochen.
[141] Die Schülerin oder der Schüler hat das Foto des Spielwürfels als >>Bild 1<< bezeichnet, das Schrägbild des Würfels als >>Bild 2<<.

dem Bezeichner häufig eine unmittelbare Vorstellung dessen verbunden ist, was damit gemeint ist, die Erinnerungen von Sinneseindrücken sowie Handlungen und Operationen mit einschließt und sich auch auf Begriffe und Objekte bezieht, zwischen diesen allerdings nicht unbedingt unterscheiden kann – wie auch FREGE schon angemerkt hat (vgl. Frege 2002d, S. 26f)[142]. Der Umfragebogen wurde gegenüber der Probeumfrage leicht abgeändert (Abbildung 56). Statt „Schreibe auf dieses Blatt – soviel Du willst" heißt es „Schreibe auf dieses Blatt – soviel Dir einfällt", um unwilligen Schülerinnen und Schülern nicht das Gefühl zu geben, einen leeren Bogen abgeben zu dürfen. Außerdem wurde der Kopf entfernt, um den Kontext offener zu halten.

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

mit dieser anonymen Umfrage wollen wir von Dir erfahren, was Dir zu „Würfel" einfällt. Schreibe auf dieses Blatt – soviel Dir einfällt.

Wir danken Dir herzlich für Deine Mitarbeit.

Abbildung 56: Umfragebogen >>Würfel<<

Die Erhebung wurde in der ersten Mathematikstunde des Schuljahres 2014/15 durchgeführt. Dieser Zeitpunkt wurde gewählt, da durch die Sommerferien die größtmögliche Distanz zum vorhergehenden Unterrichtsstoff geschaffen wurde.[143] Insgesamt wurden jeweils vier fünfte, siebte, achte und zehnte Klassen an Gymnasien befragt. Dabei wurden zwei Klassen jeder Klassenstufe von jeweils zwei Schulen (im Folgenden A und B genannt) ausgewählt. Dies ist darin begründet, dass für eventuelle auffällige Ergebnisse einzelner Klassen festgestellt werden können soll, ob diese nur klassen- oder möglicherweise schulspezifisch oder nichts von beidem sind. Ebenso soll festgestellt werden können, ob eventuelle Auffälligkeiten sich in verschiedenen Jahrgängen einer Schule finden. In den Fällen, in denen es mehr als zwei Klassen pro Klassenstufe gab, wurden die untersuchten Klassen zufällig ausgewählt. Es wurde bei der Auswahl der Schulen darauf geachtet, dass diese in verschiedenen Orten/Städten lokalisiert sind, um in Klassenstufe 5 Schülerinnen und Schüler verschiedener Grundschulen zu erreichen. Insgesamt wurden vier Klassen pro Klassenstufe erfasst, um einerseits einen Vergleich zu ermöglichen und andererseits das Datenmaterial auf eine auswertbare Menge zu begrenzen.

Es wurden weiterhin die Klassenstufen fünf, sieben, acht und zehn ausgewählt, weil zu Beginn der fünften Klassenstufe die Begriffsvorstellungen nach der

[142] Für FREGE ist gerade diese Mehrdeutigkeit ein Grund für die von ihm kritisierte Unvollkommenheit der Sprache (vgl. Frege 2002d).

[143] Die Probeumfrage wurde zu Beginn des Schuljahres 2013/14 an anderen Schulen als die Erhebung selbst durchgeführt, der Zeitpunkt und die Unbefangenheit der Schülerinnen und Schüler sind somit vergleichbar.

Grundschule erhoben werden. Entsprechend den gültigen Lehrplänen (Ministerium für Bildung und Kultur Saarland 2014b & 2014c; Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft Saarland 2004 & 2005) soll in der sechsten Klassenstufe der Würfel elementargeometrisch untersucht werden, in der siebten Klassenstufe als Instrument in der Stochastik verwendet werden und in der achten und neunten Klassenstufe sowohl in einem elementargeometrischen als auch in einem stochastischen Kontext erneut aufgegriffen werden. Dementsprechend sind zu Beginn der siebten, achten und zehnten Klassenstufe sich auch kontextuell unterscheidende Begriffsvorstellungen beziehungsweise eine „Anreicherung“ des jeweils individuellen Begriffsbildes zu erwarten.

Die Erhebung wurde jeweils durch die Mathematiklehrerin oder den Mathematiklehrer durchgeführt, da die Situierung der Umfrage im Mathematikunterricht durchaus gewünscht war und es nur so organisatorisch möglich war, vergleichbare Bedingungen zu schaffen.[144] Zur Förderung gleicher Bedingungen wurden die Lehrpersonen außerdem mit einer Handreichung zur Umfrage ausgestattet (Abbildung 57).

Handreichung zur Umfrage

Liebe Kollegin, lieber Kollege,

zunächst bedanke ich mich sehr für Ihre Bereitschaft, die Erhebung in Ihrer Klasse durchzuführen.

Mit dieser Erhebung möchte ich systematisch erfassen, was Schülerinnen und Schüler alles mit dem Begriff des Würfels verbinden – dies interessiert mich im Rahmen meines Dissertationsprojektes zur Begriffsbildung im Mathematikunterricht.

Mit Bezug auf die Umfrage bitte ich Sie:

- Führen Sie die Erhebung möglichst zu Beginn der ersten Mathematikstunde des neuen Schuljahres durch.
- Geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern 10 Minuten Zeit zum Ausfüllen der Umfragebögen und achten Sie darauf, dass während dieser Zeit alleine gearbeitet wird.
- Geben Sie Ihren Schülerinnen und Schülern keine weiteren Hinweise zur Umfrage, außer, dass die Umfragebögen von der Universität des Saarlandes stammen – nur so bleiben die Antworten aus verschiedenen Klassen vergleichbar.

Herzlichen Dank,

Verena Rembowski

Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik
an der Universität des Saarlandes

GeS/GemS Saarbrücken-Dudweiler

Abbildung 57: Handreichung zur Umfrage

[144] Auch diese Bedingung war für die Probeumfrage schon gegeben.

5.4. Verschiedene Kontexte im Begriffsbild von Würfel

Um die mit der Umfrage erhobenen verschiedenen Assoziationen mit dem Begriff Würfel entsprechend ihres Kontextes einzuordnen, müssen zunächst die einzelnen Kontexte kodiert werden. In einem Exkurs wird dann kurz auf die Idee und Probleme einer computergestützten Auswertung eingegangen. Basierend auf der Kodierung wird einerseits eine klassenstufenspezifische Auswertung vorgenommen und andererseits auch klassenstufenübergreifend ausgewertet. Schließlich wird in einem weiteren Exkurs auf Grundlage der Auswertung die (Un-)Abhängigkeit der Ergebnisse sowohl von Schulklassen- als auch von Klassenstufenzugehörigkeit untersucht.

5.4.1. Kodierung der Kontexte

Zur Einordnung der verschiedenen Assoziationen mit dem Begriff Würfel entsprechend ihres Kontextes werden die schon in Kapitel 2. angesprochenen Kontexte „elementargeometrisch“, „alltäglich“ und „stochastisch“ unterschieden. Da die Antworten zur Probeumfrage sich im alltäglichen Kontext hauptsächlich auf den Würfel als Spielinstrument bezogen, wird innerhalb des alltäglichen Kontextes zunächst nicht weiter (z.B. zwischen Spielinstrument und Sitzmöbel) unterschieden. Antworten werden jeweils als elementargeometrisch, alltäglich oder stochastisch gefasst, wenn einer der folgenden Punkte enthalten ist (Tabelle 7 bis Tabelle 9) – ein solch offengelegter Kodierungsschlüssel trägt zur Objektivität der Zuordnung bei, da er der oder dem Lesenden Informationen bereitstellt, welche es erleichtern, die Einordnung nachzuvollziehen.

Elementargeometrisch
• Auftreten in der Geometrie • Körper / Polyeder • Quader • Anzahl von Flächen, Kanten und Ecken (siehe hierzu den nachfolgenden Kommentar) • Verweis auf rechte Winkel, Angabe von Winkeln allgemein • Die Seitenflächen sind quadratisch. • Der Körper ist symmetrisch, hat parallele Flächen, nur Flächen gleicher Größe und Kanten gleicher Länge. • Volumen, Oberflächeninhalt und Diagonalenlänge können berechnet werden (evtl. Angabe von Formeln). • Der eulersche Polyedersatz kann angewendet werden. • Es gibt verschiedene Würfelnetze. • Projektive Darstellung oder Darstellung als Würfelnetz (ohne Punkte)

Tabelle 7: Kodierung „elementargeometrisch“

Alltäglich
• Spielwürfel • Die einzelnen Seiten enthalten Zahlen / Punkte, meist die Zahlen / Punkte von 1 bis 6. • Die Punktsumme gegenüberliegender Seiten ist 7, die Punktsumme insgesamt ist 21. • Die Ecken und Kanten sind rund. • Sie liegen mit unterschiedlicher Seitenanzahl vor. • Sie können unterschiedlich aussehen (Farbe, Material, Motive statt Zahlen / Punkte). • Verwendung zum Spielen von Spielen (evtl. Nennung verschiedener Spiele) • Verwendung zum Würfeln • Glück / Pech • Nennung würfelförmiger Objekte aus dem Alltag (z.B. Würfelhocker, Eiswürfel, Käsewürfel, Bauklotz, Block im Spiel „Mine Craft“ oder Schachtel) • Darstellung eines Spielwürfels mit Punkten

Tabelle 8: Kodierung „alltäglich“

Stochastisch
• Wahrscheinlichkeitsrechnung / Stochastik • Wahrscheinlichkeitsexperimente / Laplace-Experimente • Zufall / zufällig • Zufallsgenerator • Ergebnisse / Ereignisse • Die einzelnen Ergebnisse / Ereignisse haben eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$. • Angabe / Vergleich von Wahrscheinlichkeiten bei mehreren Würfelwürfen

Tabelle 9: Kodierung „stochastisch“

Zu obiger Kodierung ist hinzuzufügen, dass Antworten dann nicht als elementargeometrisch eingeordnet werden, wenn sie von den unter „elementargeometrisch“ gelisteten Punkten nur die Aussage enthalten, dass ein Würfel sechs Flächen habe und eventuell außerdem, dass er eckig sei. Dies ist damit zu begründen, dass es sich, auch wenn streng genommen die meisten Spielwürfel gewölbte Ecken und Kanten haben, bei beiden Eigenschaften um intuitive Charakteristika zum alltäglichen Kontext handelt: Nur das Vorliegen der sechs Flächen erlaubt es, sechs Ziffern auf unterschiedliche Flächen zu verteilen, und vor allem das Vorhandensein der Ecken lässt den Würfel in begrenzter Zeit zum Liegen kommen. Wenn allerdings Flächenanzahl, Kantenanzahl und Eckenanzahl eines Würfels genannt werden, wird eine Antwort als elementargeometrisch eingeordnet, da es sich dann um eine im Kontext der Elementargeometrie übliche Beschreibung handelt. Ebenso wird beim Vorliegen eines der anderen Punkte eine Antwort als elementargeometrisch klassifiziert, weil einerseits das verwendete Vokabular alltagsuntypisch ist und sich andererseits die jeweiligen Eigenschaften nicht unmittelbar aus der Verwendung des Würfels in einem alltäglichen Kontext ableiten lassen, sondern ein geometrischer Blickwinkel erforderlich ist. Gleichermaßen wird beim Vorliegen eines beliebigen unter „alltäglich“ oder „stochastisch“ aufgeführten Punktes die Antwort entsprechend eingeteilt. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass der alltägliche und der stochastische Kontext sehr eng miteinander verwandt sind, ein intuitiver Zugang aber, wie die Kodierung zeigt, als „alltäglich“ eingeordnet wird, und nur ein mathematisch-stochastischer Zugang als „stochastisch“.

Es bildete sich heraus, dass die Betrachtung eines weiteren Kontextes, „arithmetisch“, sinnvoll ist, da sich ein solcher gelegentlich bei Schülerinnen und Schülern der fünften und siebten Klassenstufe findet. Dieser Kontext lässt sich folgendermaßen fassen (Tabelle 10).

Arithmetisch
• Berechnung von Würfelanzahlen in Würfelmustern und -strukturen. • Bearbeitung von Rechenaufgaben auf der Basis von gewürfelten Zahlen.

Tabelle 10: Kodierung „arithmetisch“

Exemplarisch wird nun die Zuordnung zweier Schülerantworten, jeweils einer aus einer siebten und einer zehnten Klasse, zu den entsprechenden Kategorien betrachtet.[145] Dabei wird folgende farbliche Markierung gewählt:

- „elementargeometrisch“: orange,
- „alltäglich“: grün,
- „stochastisch“: blau.

Mathematische Fehler in Äußerungen (z.B. „Bei einem Wurfel, der 10 cm breit, hoch und lang ist, ist der Flächeninhalt 1 dm^3 und somit 1 l.“ in Schülerantwort A 7.1_6) werden bei der Zuordnung nicht berücksichtigt.

Wie die einzelnen Äußerungen zugeordnet werden, lässt sich schließlich den folgenden Abbildungen (Abbildung 58 und Abbildung 59) entnehmen. Festgestellt werden soll an dieser Stelle nur, dass die Antwort aus der siebten Klassenstufe die Kategorien „elementargeometrisch“ und „alltäglich“ enthält, die Antwort aus der zehnten Klassenstufe zusätzlich die Kategorie „stochastisch“.

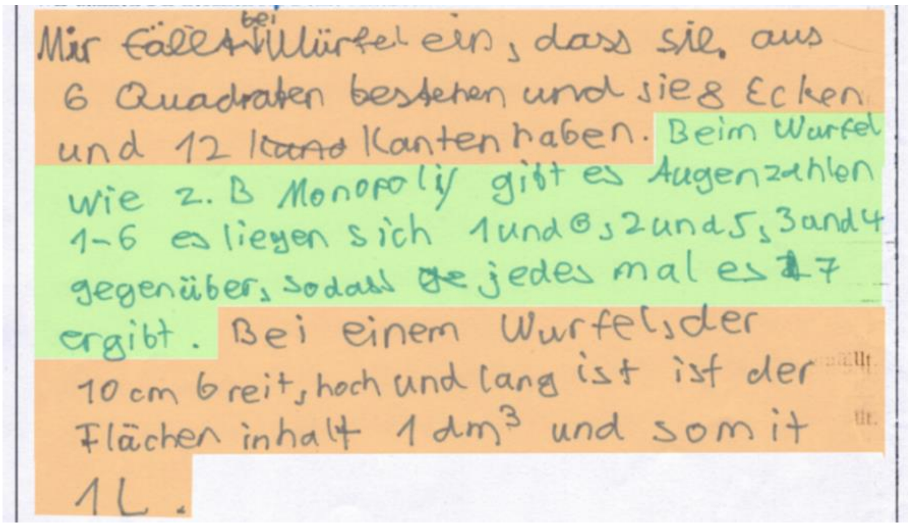

Mir fällt bei Würfel ein, dass sie aus 6 Quadraten bestehen und sie 8 Ecken und 12 ~~Kand~~ Kanten haben. Beim Wurfel wie z.B Monopoly gibt es Augenzahlen 1-6 es liegen sich 1und 6, 2und5, 3und4 gegenüber, sodass ~~die~~ jedes mal es 7 ergibt. Bei einem Wurfel, der 10 cm breit, hoch und lang ist ist der Flächen inhalt 1 dm³ und somit 1L.

Abbildung 58: Schülerantwort A 7.1_6

145 Weitere Beispielantworten sind im Anhang zu finden.

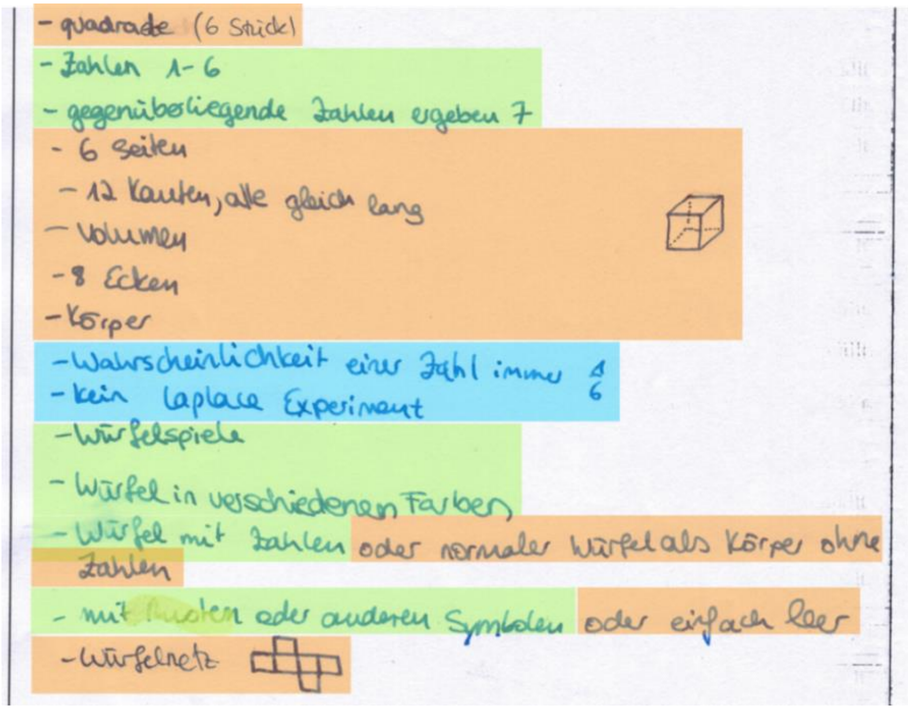


Abbildung 59: Schülerantwort A 10.2_16

5.4.2. Exkurs: Idee und Probleme einer computergestützten Auswertung

Ursprünglich stand – nach einer vielversprechenden Anregung aus dem Gebiet der Künstlichen Intelligenz – der Gedanke im Raum, die verschiedenen Schülerantworten computergestützt den unterschiedlichen Kontexten zuzuordnen. Zu diesem Zweck wurden die Antworten abgetippt und als Textdatei gespeichert, die enthaltenen Zeichnungen wurden kodiert (beispielsweise {Schrägbild} oder {Spielwürfel}) und in der kodierten Form ebenfalls übernommen. Die Auswertung sollte mit Hilfe eines in Java implementierten Semantic Vectors-Modells[146] geschehen. Die Idee hinter Semantic Vectors ist, dass Worte zunächst als Punkte in einem mathematischen Raum (>>WordSpace<<) repräsentiert werden (vgl. Widdows & Ferraro 2008; Widdows & Cohen 2010). Die Konstruktion dieses WordSpace beruht auf der Idee, Bedeutung geometrisch zu repräsentieren, es wird somit angenommen, dass Bedeutungsunterschiede von Worten in der Sprachverwendung als Verteilungsunterschiede abgebildet werden. Daher werden Worte, die häufig in demselben Kontext (das heißt, in derselben linguistischen Umgebung) auftreten, geometrisch nah beieinander liegenden Punkten zugeordnet (vgl. Sahlgren 2006). Die Dimension eines so entstehenden WordSpace wird daraufhin mittels eines Algorithmus (>>Random Projection<<) reduziert (vgl. Widdows & Ferraro 2008; Widdows & Cohen 2010). Das Semantic Vectors-Modell erlaubt es dann, mittels verschiedener Befehle beispielsweise so-

[146] Dieses Semantic Vectors-Modell wurde als Projekt an der University of Pittsburgh entwickelt (vgl. Widdows 2015).

wohl die zu einem speziellen Wort nahen Worte als auch die Nähe zweier Worte zueinander zu ermitteln.

Zunächst wirkte ein Semantic Vectors-Modell passend für die Analyse der vorliegenden Daten, weil mit Hilfe des Modells Aspekte des WITTGENSTEINschen Familienähnlichkeitsprinzips sowie der ROSCHschen Prototypenstruktur technisch nutzbar gemacht werden (vgl. Widdows & Ferraro 2010; Turney & Pantel 2010). Allerdings birgt das Semantic Vectors-Modell das Problem, dass einzelne Worte isoliert betrachtet werden und die Bedeutung ganzer Ausdrücke und Sätze nicht berücksichtigt wird (vgl. Mitchell & Lapata 2008). Um die vorliegenden Schülerantworten entsprechend der Frage der Kontextzugehörigkeit mit Hilfe des Semantic Vectors-Modells auszuwerten, hätten somit zunächst händisch die Kontexte, wie in 5.4.1. beschrieben, kodiert werden müssen. Zusätzlich hätten allerdings alle möglichen Ausdrucksweisen der einzelnen unter einen Kontext fallenden Punkte ebenfalls händisch gefasst werden müssen. Erst dann hätte der Computer als technisches Werkzeug zum Einsatz kommen können. Eine auf dem Semantic Vectors-Modell basierende, computergestützte Zuordnung der Schülerantworten zu den Kontexten bot sich, weil die durch die offene Fragestellung provozierten Äußerungen dermaßen vielfältig waren, dass nur immense Hand- und Programmierarbeit es gegebenenfalls ermöglicht hätte, alle Äußerungen zu einem Kontext aufzuspüren, somit nicht an. Die für die vorliegende Fragestellung festgestellte Unangemessenheit des genannten Modells kann allerdings auch darin begründet sein, dass das Interesse der Auswertung nicht rein linguistischer, sondern aufgrund der Kontextbildung auch inhaltlicher Natur ist.

Die Zuordnung der Schülerantworten zu den Kontexten wurde daher händisch vorgenommen. Die Güte der Zuordnung wurde durch die bereits in 5.1.2. genannten Auswertungsverfahren sichergestellt.

5.4.3. Auswertung für die einzelnen Klassenstufen

Zur quantitativen Auswertung der Antworten von Schülerinnen und Schülern sind ausschließlich die in 5.4.1. entwickelten Kontextkategorien relevant, in welchen Äußerungen genau sich diese widerspiegeln, ist unwesentlich. Zur Auswertung der Antworten von Schülerinnen und Schülern der fünften Klassenstufe werden zunächst die Kategorien „elementargeometrisch“, „alltäglich“, „arithmetisch“, „stochastisch“ sowie alle Kombinationen dieser Kontexte als Kategorien getrennt betrachtet. Zu den nur durch einen Kontext definierten Kategorien kommen damit „elementargeometrisch & alltäglich“, „elementargeometrisch & arithmetisch“, „elementargeometrisch & stochastisch“, „alltäglich & arithmetisch“, „alltäglich & stochastisch“, „arithmetisch & stochastisch“ sowie die entsprechenden durch drei und die durch alle vier Ausprägungen definierten Kategorien hinzu. Aufgrund der geringen Antworthäufigkeit in der Kategorie „arithmetisch“, beziehungsweise in Kategorien, die den arithmetischen Kontext in

Kombination mit anderen enthalten,[147] fassen die folgende Tabelle (Tabelle 11) und das folgende Diagramm (Abbildung 60) allerdings alle Kategorien, die den Kontext „arithmetisch" enthalten, zusammen. Antworten, welche der Kategorie „stochastisch" zuzuordnen wären, finden sich bei Schülerinnen und Schülern der fünften Klassenstufe nicht, weshalb diese Kategorie nicht in der Tabelle und dem Diagramm enthalten ist. Die Häufigkeit solcher Antworten, die sich nicht zuordnen lassen, ist mit aufgeführt.[148]

	A 5.1 *in %*	A 5.2 *in %*	B 5.1 *in %*	B 5.2 *in %*	*Gesamt in %*
elementar-geometrisch	4 *14,3 %*	2 *8,0 %*	2 *7,4 %*	1 *3,4 %*	*8,3 %*[149]
alltäglich	5 *17,9 %*	2 *8,0 %*	3 *11,1 %*	6 *20,7 %*	*14,4 %*
elementar-geometrisch & alltäglich	16 *57,1 %*	20 *80,0 %*	18 *66,7 %*	20 *69,0 %*	*68,2 %*
zusätzlich arithmetisch	1 *3,6 %*	1 *4,0 %*	2 *7,4 %*	0 *0 %*	*3,7 %*
nicht zuzuordnen	2 *7,1 %*	0 *0 %*	2 *7,4 %*	2 *6,9%*	*5,4 %*
Gesamt	28 *100 %*	25 *100 %*	27 *100 %*	29 *100 %*	*100 %*

Tabelle 11: Auswertung Klassenstufe 5[150]

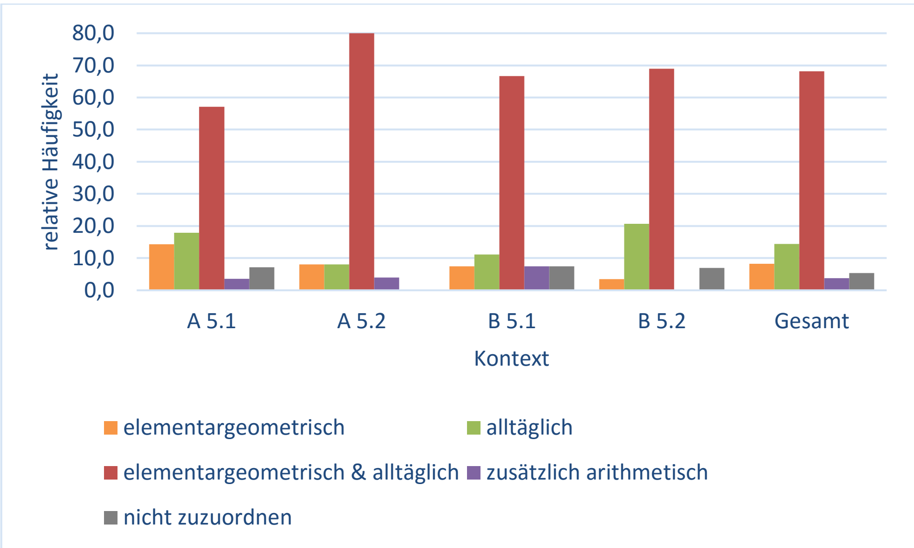


Abbildung 60: Auswertung Klassenstufe 5

[147] Rein arithmetische Antworten ließen sich nicht finden, es handelte sich jeweils um eine Verknüpfung des arithmetischen mit dem elementargeometrischen oder dem alltäglichen Kontext.
[148] Bei den nicht zuzuordnenden Antworten handelt es sich um stichwortartige Aufzählungen, die einige in keinem Zusammenhang mit Würfel stehenden Punkte enthalten.
[149] In dieser und den folgenden Tabellen sind die relativen Häufigkeiten mit einer Nachkommastelle angegeben. Gerechnet wurde aber jeweils mit den genauen Zahlen.
[150] Beispielantworten zu den einzelnen Kategorien sind für die verschiedenen Klassenstufen im Anhang zu finden.

Der Tabelle lässt sich entnehmen, dass der Modalwert deutlich in der Kategorie „elementargeometrisch & alltäglich“ liegt. Mit insgesamt 8,3 % + 14,4 % = 22,7 % sind weniger als ein Viertel der Antworten einer Kategorie zuzuordnen, die nur einen Kontext fasst, während mit 68,2 % + 3, 7 % = 71,9 % fast drei Viertel der Antworten Kategorien zuzuordnen sind, die mehrere verschiedene Kontexte fassen.

Zur Auswertung der Antworten von Schülerinnen und Schülern der siebten Klassenstufe werden zunächst, wie schon mit Bezug auf Klassenstufe fünf, die Kategorien „elementargeometrisch“, „alltäglich“, „arithmetisch“ und „stochastisch“ sowie alle Kombinationen dieser Kontexte als Kategorien getrennt betrachtet. Begründet in der geringen Antworthäufigkeit der Kategorien „arithmetisch“ und „stochastisch“ sowie dem Vorliegen keiner Antwort, die beide Kontexte umfasst, werden in der folgenden Tabelle (Tabelle 12) und dem folgenden Diagramm (Abbildung 61) einerseits die Kategorien, die den Kontext „arithmetisch“ und andererseits jene, die den Kontext „stochastisch“ zusätzlich zu „elementargeometrisch“ und „alltäglich“ enthalten, zusammengefasst.

	A 7.1 *in %*	A 7.2 *in %*	B 7.1 *in %*	B 7.2 *in %*	*Gesamt* *in %*
elementar-geometrisch	2 *12,5 %*	10 *58,8 %*	1 *4,0 %*	0 *0 %*	*18,8 %*
alltäglich	0 *0 %*	0 *0 %*	3 *12,0 %*	2 *6,9 %*	*4,7 %*
elementar-geometrisch & alltäglich	13 *81,3 %*	6 *35,3 %*	21 *84,0 %*	23 *79,3 %*	*70 %*
zusätzlich arithmetisch	1 *6,3 %*	0 *0 %*	0 *0 %*	1 *3,4 %*	*2,4 %*
zusätzlich stochastisch	0 *0 %*	1 *5,9 %*	0 *0 %*	0 *0 %*	*1,5 %*
nicht zuzuordnen	0 *0 %*	0 *0 %*	0 *0 %*	3 *10,3 %*	*2,6 %*
Gesamt	16 *100,1 %*[151]	17 *100 %*	25 *100 %*	29 *99,9 %*	*100 %*

Tabelle 12: Auswertung Klassenstufe 7

[151] Aufgrund von Rundungsungenauigkeiten können als Summe der Prozentsätze auch Ergebnisse kleiner oder größer als 100 auftreten.

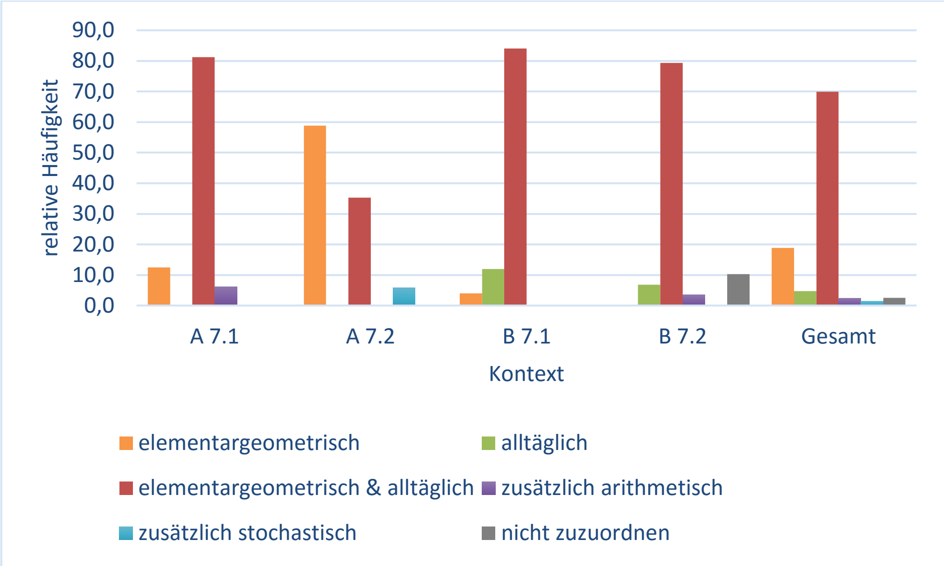


Abbildung 61: Auswertung Klassenstufe 7

Es lässt sich entnehmen, dass der Modalwert wiederum deutlich in der Kategorie „elementargeometrisch & alltäglich" liegt. Mit insgesamt 23,5 % beziehen sich nur knapp ein Viertel der Antworten auf nur einen Kontext, während sich mit insgesamt 73,9 % knapp drei Viertel der Antworten auf mehrere Kontexte beziehen.

Auch zur Auswertung der Antworten aus Klassenstufe 8 werden zunächst die Kontexte und alle Kontextkombinationen als Kategorien jeweils getrennt betrachtet. Die Kategorie „arithmetisch" findet sich bei Schülerinnen und Schülern der Klassenstufe 8 allerdings nicht mehr, weswegen sie nicht in der folgenden Tabelle (Tabelle 13) und dem folgenden Diagramm (Abbildung 62) enthalten ist. Neben den Häufigkeitsangaben der Kategorien, welche Kontextkombinationen, die den Kontext „stochastisch" enthalten, fassen, werden, für eine bessere Vergleichbarkeit zwischen den einzelnen Jahrgängen später, schon die Häufigkeiten aller Kategorien, welche den Kontext „stochastisch" neben anderen enthalten, aufaddiert.[152] Das Diagramm stellt dabei nur die Häufigkeitssummen dar.

[152] Errechnet wurden auch die Häufigkeitssummen mit den genauen, nicht auf eine Nachkommastelle gerundeten, relativen Häufigkeiten.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">A 8.1
in %</th><th colspan="2">A 8.2
in %</th><th colspan="2">B 8.1
in %</th><th colspan="2">B 8.2
in %</th><th colspan="2">Gesamt
in %</th></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch</td><td colspan="2">3
14,3 %</td><td colspan="2">1
5,0 %</td><td colspan="2">3
14,3 %</td><td colspan="2">1
4,0 %</td><td colspan="2">9,4 %</td></tr>
<tr><td>alltäglich</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">3
15,0 %</td><td colspan="2">3
14,3 %</td><td colspan="2">2
8,0 %</td><td colspan="2">9,3 %</td></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch & alltäglich</td><td colspan="2">12
57,1 %</td><td colspan="2">14
70,0 %</td><td colspan="2">11
52,4 %</td><td colspan="2">10
40,0 %</td><td colspan="2">54,9 %</td></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch & stochastisch</td><td>1
4,8[153]</td><td rowspan="3">6
28,6</td><td>0
0</td><td rowspan="3">2
10,0</td><td>1
4,8</td><td rowspan="3">3
14,3</td><td>0
0</td><td rowspan="3">9
36,0</td><td>2,4</td><td rowspan="3">22,2</td></tr>
<tr><td>alltäglich & stochastisch</td><td>0
0</td><td>0
0</td><td>1
4,8</td><td>1
4,0</td><td>2,2</td></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch & alltäglich & stochastisch</td><td>5
23,8</td><td>2
10,0</td><td>1
4,8</td><td>8
32,0</td><td>17,7</td></tr>
<tr><td>nicht zuzuordnen</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">1
4,8 %</td><td colspan="2">3
12,0 %</td><td colspan="2">4,2 %</td></tr>
<tr><td>Gesamt</td><td colspan="2">21
100 %</td><td colspan="2">20
100 %</td><td colspan="2">21
100,1 %</td><td colspan="2">25
100 %</td><td colspan="2">100 %</td></tr>
</table>

Tabelle 13: Auswertung Klassenstufe 8

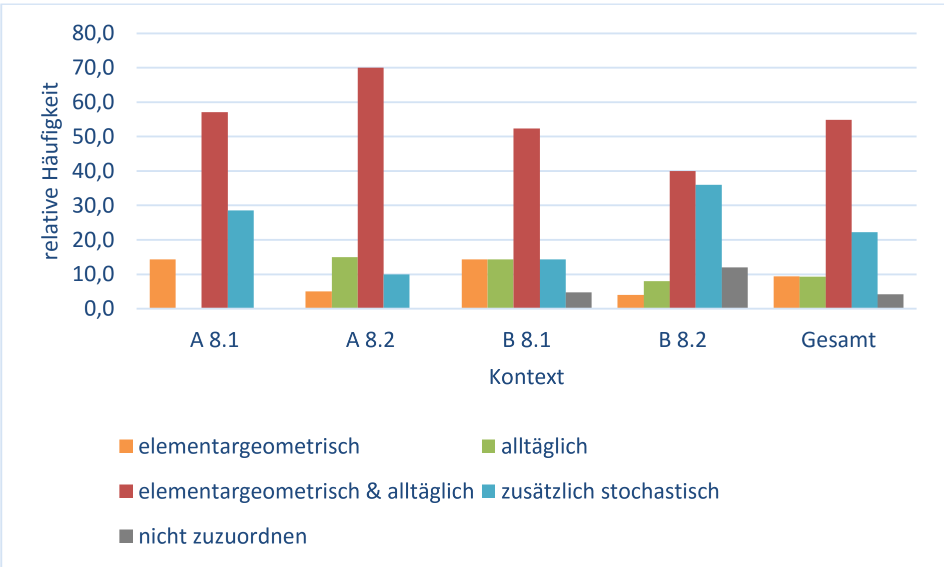


Abbildung 62: Auswertung Klassenstufe 8

Wie auch bei den zuvor betrachteten Klassenstufen liegt der Modalwert in der Kategorie „elementargeometrisch & alltäglich". Es bezieht sich mit 18,7 % nur knapp ein Fünftel der Antworten auf nur einen Kontext, während mit 22,2 % schon knapp ein Viertel der Antworten den im Unterricht der siebten Klassenstufe neu hinzugewonnenen Kontext der Stochastik mitberücksichtigt. Insgesamt

153 Hier werden aus Platzgründen die Prozentzeichen eingespart, in kursiver Schrift sind dennoch die relativen Häufigkeiten angegeben.

beziehen sich mit 77,1 % wiederum mehr als drei Viertel der Antworten auf mehrere Kontexte.

Zur Auswertung der Antworten aus Klassenstufe 10 wird analog zu den bisher vorgestellten Auswertungen vorgegangen. Es sind wiederum die Häufigkeiten der einzelnen Kategorien, die sich auf Kontextkombinationen, die „stochastisch" enthalten, beziehen, und die Häufigkeitssummen in der Tabelle (Tabelle 14) enthalten. Das Diagramm (Abbildung 63) stellt nur die Häufigkeitssummen dar.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">A 10.1
in %</th><th colspan="2">A 10.2
in %</th><th colspan="2">B 10.1
in %</th><th colspan="2">B 10.2
in %</th><th colspan="2">*Gesamt*
in %</th></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch</td><td colspan="2">2
8,7 %</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">3
15,0 %</td><td colspan="2">*5,9 %*</td></tr>
<tr><td>alltäglich</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">1
5,0 %</td><td colspan="2">1
5,0 %</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">*2,5 %*</td></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch & alltäglich</td><td colspan="2">14
60,9 %</td><td colspan="2">2
10,0 %</td><td colspan="2">10
50,0 %</td><td colspan="2">6
30,0 %</td><td colspan="2">*37,7 %*</td></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch & stochastisch</td><td>1
4,3</td><td rowspan="3">7
30,4</td><td>3
15,0</td><td rowspan="3">17
85,0</td><td>0
0</td><td rowspan="3">8
40,0</td><td>0
0</td><td rowspan="3">10
50,0</td><td>*4,9*</td><td rowspan="3">*51,4*</td></tr>
<tr><td>alltäglich & stochastisch</td><td>0
0</td><td>0
0</td><td>0
0</td><td>0
0</td><td>*0*</td></tr>
<tr><td>elementar-geometrisch & alltäglich & stochastisch</td><td>6
26,1</td><td>14
70,0</td><td>8
40,0</td><td>10
50,0</td><td>*46,5*</td></tr>
<tr><td>nicht zuzuordnen</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">0
0 %</td><td colspan="2">1
5,0 %</td><td colspan="2">1
5,0 %</td><td colspan="2">*2,5*</td></tr>
<tr><td>Gesamt</td><td colspan="2">23
100 %</td><td colspan="2">20
100 %</td><td colspan="2">20
100 %</td><td colspan="2">20
100 %</td><td colspan="2">*100 %*</td></tr>
</table>

Tabelle 14: Auswertung Klassenstufe 10

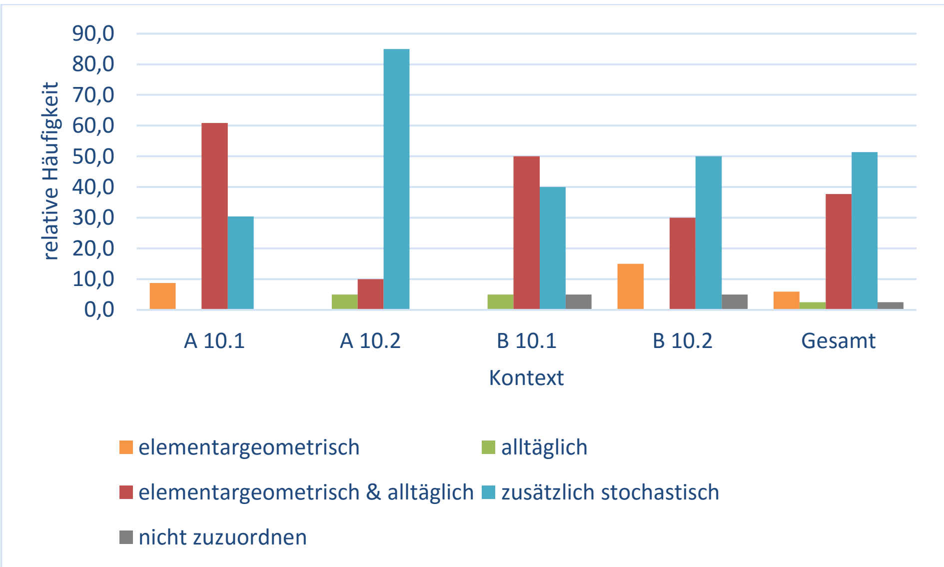


Abbildung 63: Auswertung Klassenstufe 10

Dieser Tabelle lässt sich entnehmen, dass der Modalwert für Klassenstufe 10 in der Kategorie „elementargeometrisch & stochastisch & alltäglich“ liegt. Mit insgesamt 8,4 % sind weniger als ein Zehntel der Antworten einer Kategorie zuzuordnen, die nur einen Kontext fasst, während mit 89,1 % fast neun Zehntel der Antworten Kategorien zuzuordnen sind, die mehrere verschiedene Kontexte fassen.

5.4.4. Klassenstufenübergreifende Auswertung

Schließlich sollen die Antworten der verschiedenen Klassenstufen nebeneinander gestellt werden (Tabelle 15 und Abbildung 64). Dazu werden die Kategorien „elementargeometrisch“, „alltäglich“, „elementargeometrisch & alltäglich“, „zusätzlich arithmetisch“, „zusätzlich stochastisch“ sowie „nicht zuzuordnen“ unterschieden. Die Kategorie „zusätzlich stochastisch“ fasst für die Jahrgänge 8 und 10 die bereits errechneten Häufigkeitssummen der Kategorien, die sich auf Kontextkombinationen, die unter anderem den Kontext „stochastisch“ enthalten, beziehen.

	Klassen-stufe 5 *in %*	Klassen-stufe 7 *in %*	Klassen-stufe 8 *in %*	Klassen-stufe 10 *in %*	*Gesamt in %*
elementar-geometrisch	9 *8,3*	13 *14,9*	8 *9,2*	5 *6,0*	*9,6*
alltäglich	16 *14,7*	5 *5,7*	8 *9,2*	2 *2,4*	*8,0*
elementar-geometrisch & alltäglich	74 *67,9*	63 *72,4*	47 *54,0*	32 *38,6*	*58,2*
zusätzlich arithmetisch	4 *3,7*	2 *2,3*	0 *0*	0 *0*	*1,5*
zusätzlich stochastisch	0 *0*	1 *1,1*	20 *23,0*	42 *50,6*	*18,7*
nicht zuzu-ordnen	6 *5,5*	3 *3,4*	4 *4,6*	2 *2,4*	*4,0*
Gesamt	109 *100,1 %*	87 *99,8 %*	87 *100 %*	*83* 100 %	*100 %*

Tabelle 15: Klassenstufenübergreifende Auswertung

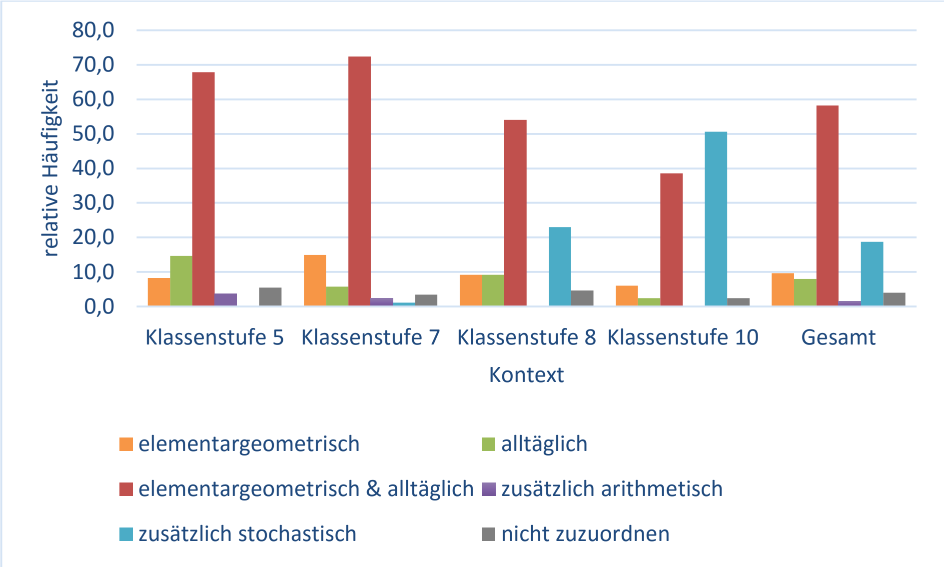


Abbildung 64: Klassenstufenübergreifende Auswertung

Auch für die Gesamtpopulation liegt der Modalwert, wie schon für die Klassenstufen 5, 7 und 8, in der Kategorie „elementargeometrisch & alltäglich“. Es beziehen sich mit 17,6 % weniger als ein Fünftel der Antworten auf nur einen Kontext, während sich mit 78,4 % mehr als drei Viertel der Antworten auf mehrere Kontexte beziehen.

Zudem fallen einige Entwicklungsrichtungen auf. So nimmt die Häufigkeit, mit welcher der arithmetische Kontext angesprochen wird, von Klassenstufe 5 nach Klassenstufe 7 ab. Der arithmetische Kontext wird in Klassenstufen 8 und 10 gar nicht mehr erwähnt. Dies lässt sich damit begründen, dass dieser Kontext meist explizit mit dem Mathematikunterricht in der Grundschule assoziiert wird, woran die Erinnerung, je älter die Schülerinnen und Schüler werden, immer weiter in den Hintergrund rückt. Demgegenüber nimmt die Häufigkeit, mit welcher der stochastische Kontext angesprochen wird, sukzessive zu. Die starke Zunahme von Klassenstufe 7 nach Klassenstufe 8 lässt sich mit der Thematisierung des Würfels als Instrument in der Stochastik in Klassenstufe 7 begründen. Für die weitere Zunahme kann vermutlich ein erneutes unterrichtliches Aufgreifen des Würfels als stochastisches Instrument und damit eine stärkere Fundierung des stochastischen Begriffs verantwortlich gemacht werden.

Darüber hinaus fällt auf, dass die Häufigkeiten der Kategorien „elementargeometrisch“ und „elementargeometrisch & alltäglich“, demnach die Häufigkeiten, mit welchen ausschließlich der elementargeometrische oder der elementargeometrische in Verbindung mit dem alltäglichen Kontext angesprochen werden, ab Klassenstufe 7 sukzessive abnehmen. Dies lässt sich möglicherweise mit dem Vorhandensein des stochastischen Kontextes ab Klassenstufe 8 und einer dadurch bedingten Verschiebung der Antworthäufigkeiten begründen.

5.4.5. Kommentar: der alltägliche Kontext

Wie in 5.4.1. erwähnt, wurde bei der Kodierung des alltäglichen Kontextes zunächst nicht weiter, beispielsweise zwischen Spielinstrument und Sitzmöbel, unterschieden. Nachträglich wurde eine solche Unterscheidung allerdings noch vorgenommen, es wurde dann unterschieden zwischen dem Aufführen des Würfels als Spielwürfel und dem Erwähnen anderer würfelförmiger Objekte aus dem Alltag. Dies ist darin begründet, dass deutlich wurde, dass das Erwähnen würfelförmiger Objekte aus dem Alltag, mit Ausnahme des Spielwürfels, der noch weiter beschrieben wurde, häufig lediglich in der Angabe eines Bezeichners bestand (z.B. Würfelhocker, Eiswürfel, Käsewürfel, Bauklotz, Block im Spiel „Mine Craft“ oder Schachtel). Ein solcher genannter Bezeichner kann dabei einerseits einen alltäglichen Begriff meinen, andererseits aber auch eine prototypische Vorstellung des elementargeometrischen Begriffs ausdrücken.

Bei einer Auswertung der Umfragebögen, welche den alltäglichen Kontext mitberücksichtigen, entsprechend dem Aufführen des Würfels als Spielwürfel (und weiteren Eigenschaften des Begriffs oder Objekts) und der Angabe anderer würfelförmiger Objekte aus dem Alltag (durch ausschließlich einen Bezeichner) fiel auf, dass lediglich zwei Antworten von 90[154] aus Klassenstufe 5 (eingeordnet in die Kategorie „alltäglich“) und zwei Antworten von 68 aus Klassenstufe 7 (eingeordnet in die Kategorie „elementargeometrisch & alltäglich“) ausschließlich würfelförmige Objekte aus dem Alltag bezeichnen und keinen weiteren Bezug zum Spielwürfel nehmen. Alle anderen Antworten beschreiben entweder Spielwürfel und bezeichnen würfelförmige Objekte aus dem Alltag (siehe hierzu: Abbildung 65) oder beschreiben nur Spielwürfel. Aufgrund dieser geringen Anzahl an Antworten, für welche die Unterscheidung zwischen dem Würfel als Spielinstrument und dem Würfel in einem anderen alltäglichen Kontext einen Unterschied machen würde, wurde die bisherige Einordnung beibehalten.

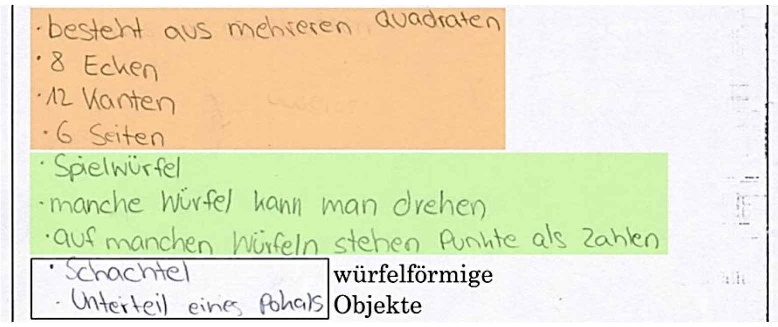


Abbildung 65: Schülerantwort B 7.1_20 –
neben einer elementargeometrischen Charakterisierung des Würfels wird der Spielwürfel angesprochen, und es werden würfelförmige Objekte bezeichnet.

[154] Hier sind die Antworthäufigkeiten der Kategorien „alltäglich“ und „elementargeometrisch & alltäglich“ aufaddiert.

5.4.6. Exkurs: (Un-)Abhängigkeit der Ergebnisse von Schulklassen und Klassenstufen

Die Auswertungstabellen zeigen insbesondere für Klassenstufe 5 eine schulklassenübergreifend große Ähnlichkeit der Antworthäufigkeiten in den einzelnen Kategorien. Der Modalwert stimmt jeweils mit dem Modalwert über alle fünften Klassen überein und liegt auf der Kategorie „elementargeometrisch & alltäglich“. Lediglich kleinere Häufigkeitsschwankungen zwischen den Kategorien sind sichtbar. In Klassenstufe 7 sticht die Klasse A 7.2 heraus, weil dort der Modalwert auf der Kategorie „elementargeometrisch“ liegt, davon abgesehen sind wiederum nur kleinere Häufigkeitsschwankungen zu beobachten. In den Klassenstufen 8 und 10 sind insbesondere Schwankungen zwischen den Kategorien „elementargeometrisch & alltäglich“ und „zusätzlich stochastisch“ zu beobachten. Dies hat in Klassenstufe 10 unterschiedliche Modalwerte für die einzelnen Klassen zufolge. Der Modalwert für Klassenstufe 10 ist dabei nicht schulspezifisch, sondern unterscheidet sich schon innerhalb der einzelnen Schulen. Darüber hinaus fällt, wie bereits in 5.4.4. erwähnt, auf, dass klassenstufenübergreifend betrachtet von Klassenstufe 5 bis Klassenstufe 10 die Häufigkeit der Kategorie „zusätzlich stochastisch“ jeweils zunimmt.

Um zu überprüfen, inwieweit die Variablen „Schulklasse“ und „Antwortkategorie“ (un-)abhängig voneinander sind, wird der χ^2-Unabhängigkeitstest (vgl. Cleff 2008, Müller-Benedict 2006) zunächst innerhalb der einzelnen Klassenstufen angewendet. Dazu werden, wegen geringer Häufigkeiten, jeweils die Kategorien „elementargeometrisch“ und „alltäglich“, da sie sich auf nur jeweils einen Kontext beziehen, zusammengefasst. Zudem werden für die Klassenstufen 5 und 7 die Kategorien, die mehrere Kontexte enthalten, zusammengefasst, und für die Klassenstufen 8 und 10 wird nur zwischen „elementargeometrisch & alltäglich“ sowie „zusätzlich stochastisch“ unterschieden. Somit kann für Klassenstufe 7 auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}001$ eine Abhängigkeit von „Schulklassenzugehörigkeit“ und „Antwortkategorie“ konstatiert werden (3 Freiheitsgrade, $\chi^2 = 18{,}23$).[155] Für Klassenstufe 10 kann auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}025$ eine Abhängigkeit der beiden Variablen konstatiert werden (6 Freiheitsgrade, $\chi^2 = 16{,}50$). Innerhalb der einzelnen Schulen kann für die siebten Klassen der Schule A eine Abhängigkeit festgestellt werden (1 Freiheitsgrad, $\chi^2 = 7{,}64$ und somit $\alpha = 0{,}01$), genauso wie für die zehnten Klassen derselben Schule (2 Freiheitsgrade, $\chi^2 = 13{,}36$, somit $\alpha = 0{,}01$). Für die Jahrgänge 5 und 8 sowie andere Klassen innerhalb einer Schule kann mittels des χ^2-Tests auf einem Signifikanzniveau ab $\alpha = 0{,}1$ weder Abhängigkeit noch Unabhängigkeit konstatiert werden. Die hier gefundenen Ergebnisse deuten jedoch an, dass es hauptsächlich klassenspezifische und wenige klassenübergreifende aber schulspezifische Auffälligkeiten gibt.

---

[155] Hier wurde die Tabelle aus MÜLLER-BENEDICT (2006, S. 139) verwendet.

Darüber hinaus wird die (Un-)Abhängigkeit der Variablen „Klassensstufe“ und „Antwortkategorie“ mit Hilfe des χ^2-Tests untersucht. Dazu werden wieder die Kategorien „elementargeometrisch“ und „alltäglich“ zusammengefasst und zusätzlich die Kategorien „elementargeometrisch & alltäglich“ sowie „zusätzlich stochastisch“ betrachtet. Damit kann, wie die Tabellen erwarten lassen, sowohl schulübergreifend als auch innerhalb der einzelnen Schulen auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0{,}001$ eine Abhängigkeit der Variablen konstatiert werden (6 Freiheitsgrade, allgemein: $\chi^2 = 102{,}01$, A: $\chi^2 = 56{,}39$, B: $\chi^2 = 72{,}77$). Somit kann festgestellt werden, dass die Antworten deutlich klassenstufenspezifisch sind.

Insgesamt ist allerdings darauf hinzuweisen, dass der χ^2-Wert „mit der Größe der Stichprobe und mit der Anzahl der Zeilen und Spalten der Kontingenztabelle“ (Cleff 2008, S. 87) steigt. Somit sind die im Vergleich größeren χ^2-Werte für die klassenstufenübergreifende Betrachtung nicht verwunderlich. Auch wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten der Kontingenztabelle durch die Beachtung der Freiheitsgrade berücksichtigt ist, so macht der χ^2-Wert doch nur ungenaue Aussagen über das Maß der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit, weil χ^2 nicht gleich groß bleibt, wenn alle Daten einer Kontingenztabelle mit demselben Faktor multipliziert werden (vgl. Müller-Benedict 2006, S. 197).

CLEFF nennt als das „wohl am **sinnvollsten einsetzbare Zusammenhangsmaß** zweier nominaler oder ordinaler Variablen“ (Cleff 2008, S. 92) Cramers V, welches auf der Berechnung des χ^2-Wertes basiert und immer Werte zwischen 0 und 1 annimmt. Er weist aber auch darauf hin, dass Uneinigkeit darüber herrscht, wann Cramers V auf einen „starken“, „mittleren“, „schwachen“ oder gar keinen Zusammenhang schließen lässt. Als eine mehrfach gewählte Abgrenzung nennt CLEFF (2008, S. 92):

- $V \in [0{,}00; 0{,}10[$ → kein Zusammenhang,
- $V \in [0{,}10; 0{,}30[$ → schwacher Zusammenhang,
- $V \in [0{,}30; 0{,}60[$ → mittlerer Zusammenhang,
- $V \in [0{,}60; 1{,}00]$ → starker Zusammenhang.

Entsprechend dieser Abgrenzung kann für die Klassenstufen 7 ($V = 0{,}47$) und 10 ($V = 0{,}32$) ein mittlerer Zusammenhang der Variablen „Schulklasse“ und „Antwortkategorie“ festgestellt werden, für die Klassenstufen 5 ($V = 0{,}16$) und 8 ($V = 0{,}22$) hingegen ein schwacher Zusammenhang. Ebenso kann für die siebten ($V = 0{,}48$) und die zehnten Klassen ($V = 0{,}39$) der Schule A ein mittlerer Zusammenhang festgestellt werden. Auch die klassenstufenübergreifende Betrachtung ergibt, sowohl schulübergreifend ($V = 0{,}38$) als auch schulintern (A: $V = 0{,}41$, B: $V = 0{,}43$), einen mittleren Zusammenhang, hier der Variablen „Klassenstufe“ und „Antwortkategorie“. Die berechneten Zusammenhangswerte können nun miteinander verglichen werden, was bei den χ^2-Werten nicht möglich ist, allerdings ist ein festgestellter mittlerer Zusammenhang nicht allzu aussagekräftig.

Sowohl der χ^2-Wert als auch darauf basierend Cramers V vermögen es somit, die ohnehin vermuteten Zusammenhänge in Zahlen auszudrücken, die sich allerdings im Fall des χ^2-Wertes durch die erwähnte Ungenauigkeit und Unvergleichbarkeit, im Fall von Cramers V hingegen durch eine geringe Aussagekraft auszeichnen. Dementsprechend sind die zu Beginn des Abschnitts gegebenen, nicht durch Zahlen unterlegten Vergleiche zumindest genauso aufschlussreich, wie der χ^2-Wert und Cramers V. Zudem lassen sich solche vergleichenden Folgerungen besser unter mathematischer Grundbildung (oder mathematical literacy), wie der Begriff im PISA-Umfeld definiert wurde, fassen, als das kalkülhafte Anwenden von Berechnungsverfahren:

> Mathematical Literacy wird in aller Knappheit als die Fähigkeit definiert, die Rolle, die Mathematik in der Welt spielt, zu erkennen und zu verstehen, begründete mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als eines konstruktiven, engagierten und reflektierenden Bürgers entspricht.
>
> (Klieme, Neubrand & Lüdtke 2001, S. 141, nach OECD 1999, S. 41)

5.5. Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck in Begriffsbildern von Würfel

Eine Zuordnung der erhobenen Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck zu den unterschiedlichen Fällen aus Kapitel 2. gestaltet sich schwierig. Dennoch wird eine solche Zuordnung exemplarisch für Antworten aus der achten Klassenstufe unternommen. Dazu müssen zunächst die Ecken des semiotischen Dreiecks – Begriff, Bezeichner und Objekt – kodiert werden. Basierend auf einer solchen Kodierung kann dann die Auswertung durchgeführt werden.

5.5.1. Kodierung von Begriff, Bezeichner und Objekt

Während die Antworten der Probeumfrage gut den einzelnen in Kapitel 2. thematisierten Triangulationsbrüchen zuzuordnen waren, ist die Zuordnung bei den Antworten der darauf basierend durchgeführten Umfrage bedeutend schwieriger. Dies ist einerseits darin begründet, dass ein größerer Anteil der Antworten Stichpunktcharakter hat, was es nicht möglich macht, Begriffe und Objekte voneinander zu trennen. Falls zusätzliche Bezeichner verwendet werden, scheinen diese außerdem häufig Begriffe und Objekte zu implizieren.[156] Die Problematik der Einordnung beruht andererseits darauf, dass, im Gegensatz zur Probeumfrage, bei der enthaltene Skizzen oder Zeichnungen eine Trennung zwischen Begriff und Objekt vereinfachten, kaum Antworten solche Skizzen oder Zeichnungen enthalten, was eine Trennung zwischen Begriff und Objekt zusätzlich erschwert.

[156] Hier zeigt sich nun, wie schon in den philosophisch-psychologischen Überlegungen angesprochen, dass sich teilweise Begriff, Bezeichner und Objekt nicht deutlich unterscheiden lassen.

Um in den Begriffsbildern einzelner Schülerinnen oder Schüler konkrete Triangulationsbrüche, welche persönliche Begriffsfelder konstituieren, feststellen zu können, wäre daher eine gegebenenfalls nachträgliche zusätzliche Interviewerhebung notwendig gewesen, in der Unklarheiten hätten geklärt werden können.

Dennoch sollen im Folgenden einige Antworten exemplarisch den unterschiedlichen Triangulationsbrüchen aus Kapitel 2. zugeordnet werden – dies dient dazu, einen Eindruck zu verschaffen, wie sich die Triangulationsbrüche in Begriffsbildern von Schülerinnen und Schülern niederschlagen können. Die betrachteten Antworten stammen dabei, um eine gewisse Vergleichbarkeit beizubehalten, sämtlich aus der achten Klassenstufe.[157] Die achte Klassenstufe wurde gewählt, weil der Würfel als Instrument in der Stochastik schon bekannt sein sollte und die explizite Thematisierung dessen sowie des Würfels im Kontext der Geometrie noch nicht allzu weit zurück liegen.

Den Antworten wird in den im Folgenden genannten Fällen ein bestimmter Begriff, Bezeichner oder ein bestimmtes Objekt zugeschrieben (Tabelle 16 bis Tabelle 18).

Begriff
• Beschreibung mittels Eigenschaften

Tabelle 16: Kodierung „Begriff“

Bezeichner
• Jeder Antwort wird, auch ohne explizite Nennung, der schon auf dem Fragebogen genannte Bezeichner >>Würfel<< zugeschrieben. • Ein weiterer Bezeichner wird in der Auswertung nur dann berücksichtigt, wenn er explizit genannt ist (z.B. >>Spielwürfel<<).

Tabelle 17: Kodierung „Bezeichner“

Objekt
• Einer Antwort wird ein Objekt zugeschrieben, wenn auf Eigenschaften des Objekts, die den Begriff nicht betreffen, eingegangen wird (z.B. Vorliegen in verschiedenen Farben oder Materialien). • Außerdem wird dann ein Objekt zugeschrieben, wenn explizit die Verwendung angesprochen wird, da, um einen Würfel zu verwenden, das Objekt konkret vorliegen muss. • Auch wenn „Gegenstand“ erwähnt wird, wird ein Objekt angenommen. • Da davon ausgegangen wird, dass dem Begriff Würfel immer ein Objekt zu Grunde liegt, weil der Begriff nicht in rein definitorischer Form gelernt wird, wird allerdings teilweise ein Objekt impliziert. (Dies ist legitim, weil insbesondere in einem elementargeometrischen und einem alltäglichen Kontext Begriff und Objekt sehr eng miteinander verwandt sind.)

Tabelle 18: Kodierung „Objekt“

[157] Keine der Antworten stammt allerdings aus Klasse B 8.2. Dies ist darin begründet, dass ein Großteil der Antworten aus dieser Klasse Stichpunktcharakter hat.

5.5.2. Auswertung

Zur Auswertung werden basierend auf obiger Kodierung den einzelnen Antworten Begriffe, Bezeichner und Objekte aus verschiedenen Kontexten, die weiterhin kodiert sind wie in 5.4.1. angegeben, zugeschrieben. Allerdings wird, basierend auf der jeweils verwendeten Syntax, bei einigen Analysen von der für Begriff, Bezeichner und Objekt angegebenen Kodierung abgewichen – solche Fälle werden im Folgenden begründet. Mathematische Fehler und Begriffsverwendungen, die nicht mit der Begriffskonvention übereinstimmen, werden wiederum nicht berücksichtigt.

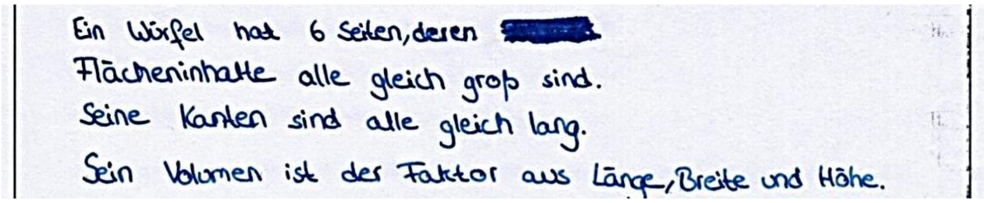


Abbildung 66: Schülerantwort A 8.1_12

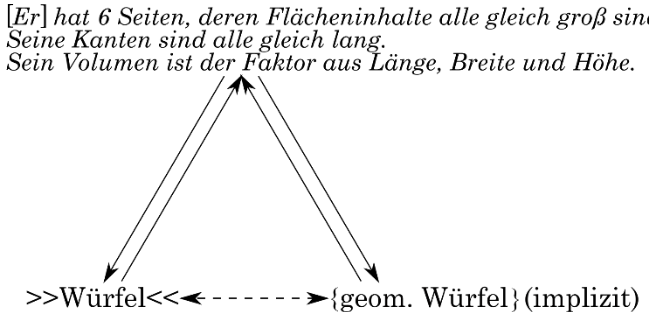


Abbildung 67: Semiotisches Dreieck zu Schülerantwort A 8.1_12[158]

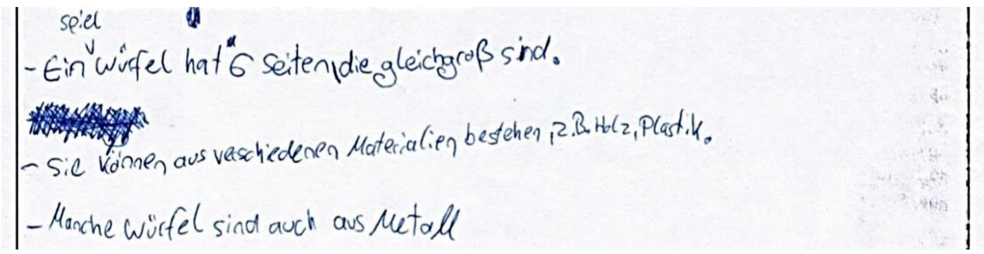


Abbildung 68: Schülerantwort B 8.1_3

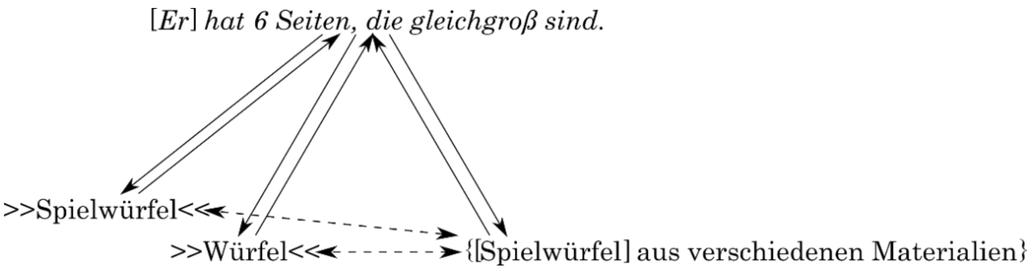
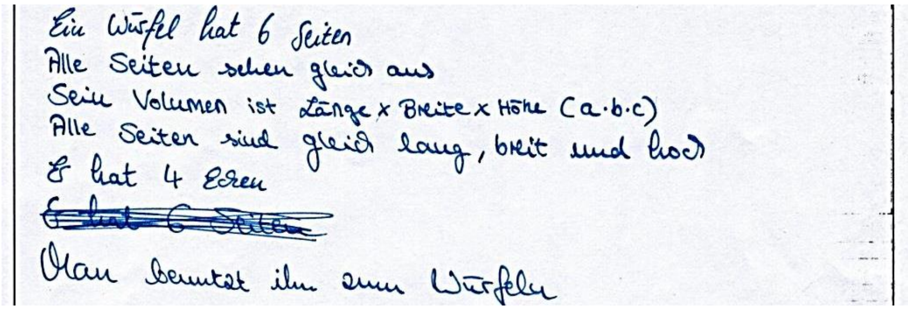


Abbildung 69: Triangulationsbruch zu Schülerantwort B 8.1_3, Fall 1-2-1

158 Erläuterungen sind sämtlichen Schülerantworten und Darstellungen der Triangulationsbrüche dazu nachgestellt.



Ein Würfel hat 6 Seiten
Alle Seiten sehen gleich aus
Sein Volumen ist Länge x Breite x Höhe (a·b·c)
Alle Seiten sind gleich lang, breit und hoch
Er hat 4 Ecken
~~Er hat 6 Seiten~~
Man benutzt ihn zum Würfeln

Abbildung 70: Schülerantwort A 8.2_3

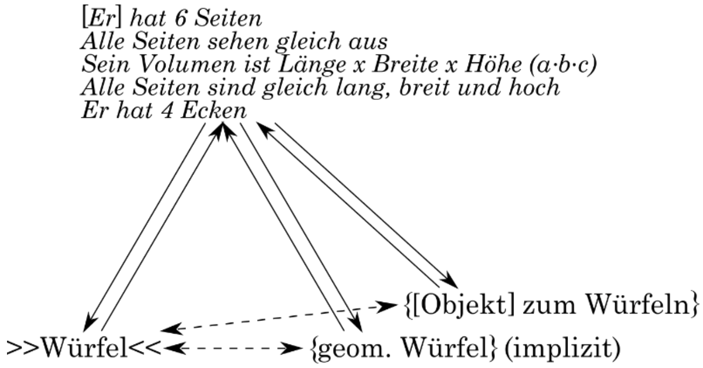
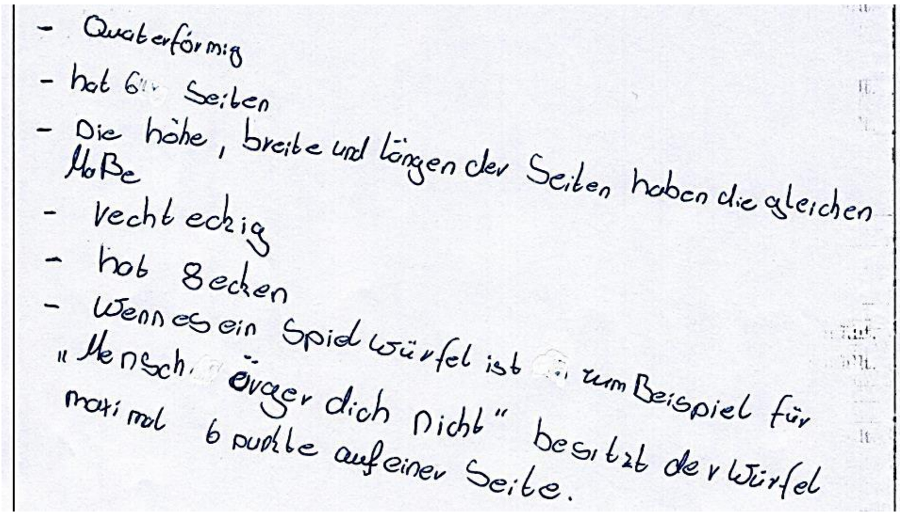


Abbildung 71: Triangulationsbruch zu Schülerantwort A 8.2_3, Fall 1-1-2



- Quaterförmig
- hat 6 Seiten
- Die höhe, breite und längen der Seiten haben die gleichen Maße
- rechteckig
- hat 8 ecken
- Wenn es ein Spielwürfel ist zum Beispiel für „Mensch ärger dich nicht" besitzt der Würfel maximal 6 punkte auf einer Seite.

Abbildung 72: Schülerantwort A 8.1_13

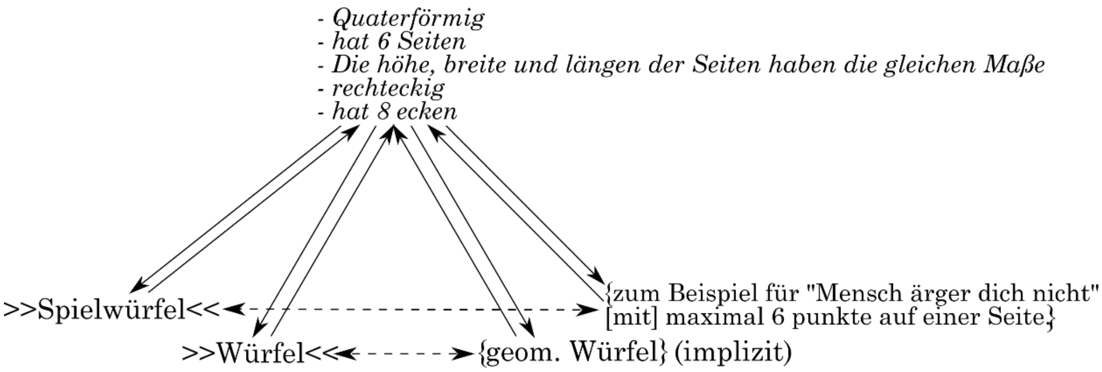


Abbildung 73: Triangulationsbruch zu Schülerantwort A 8.1_13, Fall 1-2-2

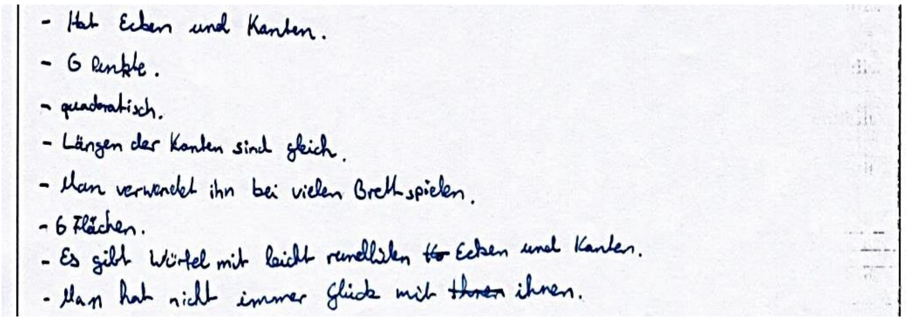

- Hat Ecken und Kanten.
- 6 Punkte.
- quadratisch.
- Längen der Kanten sind gleich.
- Man verwendet ihn bei vielen Brettspielen.
- 6 Flächen.
- Es gibt Würfel mit leicht rundlichen Ecken und Kanten.
- Man hat nicht immer Glück mit ihnen.

Abbildung 74: Schülerantwort B 8.1_21

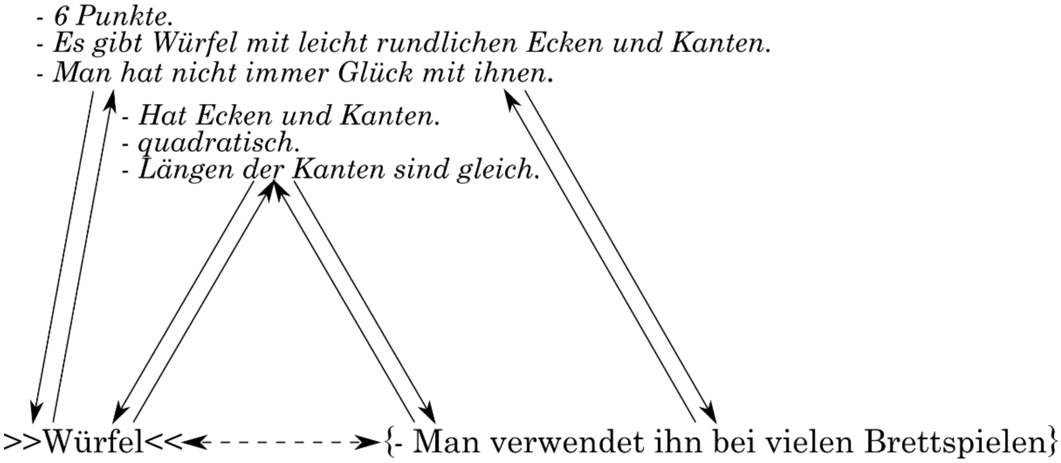


Abbildung 75: Triangulationsbruch zu Schülerantwort B 8.1_21, Fall 2-1-1

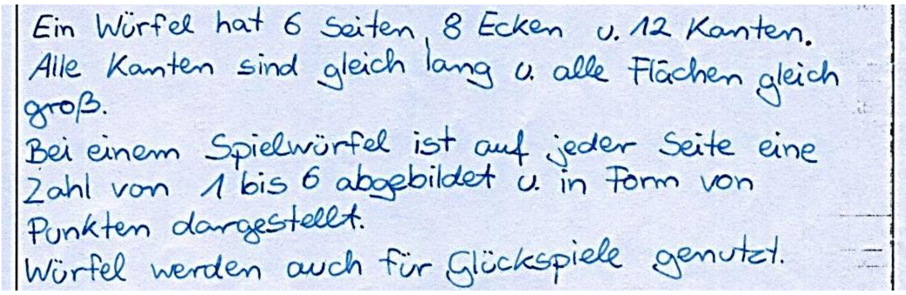

Ein Würfel hat 6 Seiten, 8 Ecken u. 12 Kanten.
Alle Kanten sind gleich lang u. alle Flächen gleich groß.
Bei einem Spielwürfel ist auf jeder Seite eine Zahl von 1 bis 6 abgebildet u. in Form von Punkten dargestellt.
Würfel werden auch für Glückspiele genutzt.

Abbildung 76: Schülerantwort B 8.1_2

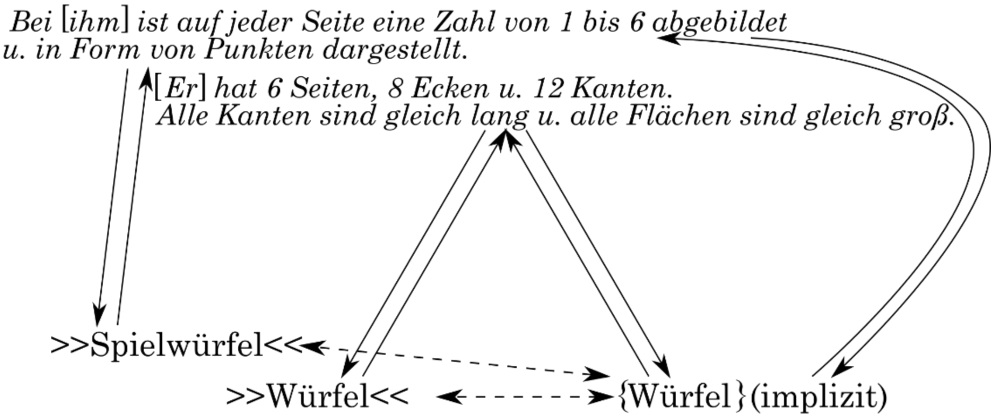
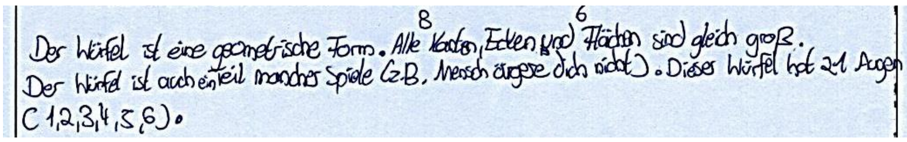


Abbildung 77: Triangulationsbruch zu Schülerantwort B 8.1_2, Fall 2-2-1



8 6
Der Würfel ist eine geometrische Form. Alle Kanten, Ecken und Flächen sind gleich groß.
Der Würfel ist auch ein Teil mancher Spiele (z.B. Mensch ärgere dich nicht). Dieser Würfel hat 21 Augen
(1,2,3,4,5,6).

Abbildung 78: Schülerantwort A 8.1_4

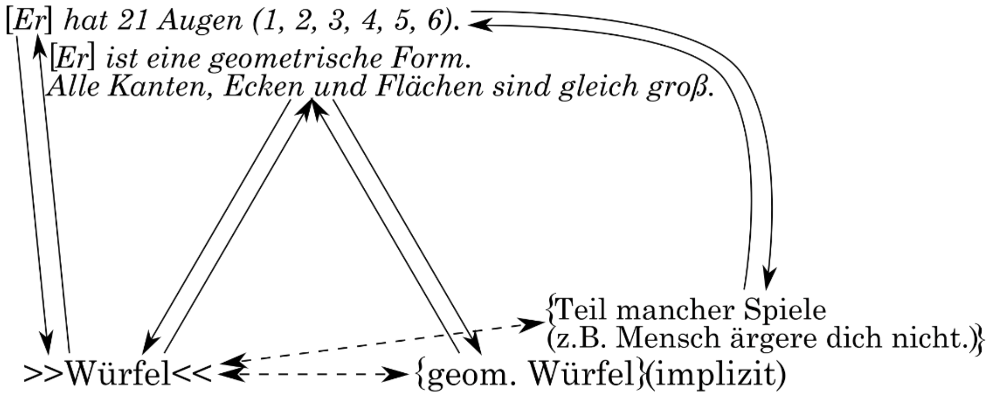


Abbildung 79: Triangulationsbruch zu Schülerantwort A 8.1_4, Fall 2-1-2

Die erste Schülerantwort (Abbildung 66) bezieht sich auf nur den geometrischen Kontext. In die Antwort lässt sich ein eindeutiges semiotisches Dreieck hineinlesen, das obig dargestellt ist (Abbildung 67). An der Bezeichnerecke findet sich der verwendete Bezeichner >>Würfel<<, an der Begriffsecke die verwendete Beschreibung des Begriffs, als Objekt ist {geom. Würfel} aufgeführt, wenn auch nicht explizit auf Objektebene argumentiert wird. Da neben dem mathematischen Kontext kein weiterer angesprochen wird, kann jedoch impliziert werden, dass das mathematische Objekt mitgemeint ist. Ein solches eindeutiges semiotisches Dreieck, wie es aus Antwort A 8.1_12 herauszulesen ist, zeigt, dass die Schülerin oder der Schüler sich in der Umfrage auf nur einen Kontext bezogen hat, und ihn deutlich von anderen getrennt hat.

Die zweite Schülerantwort (Abbildung 68)[159] spricht nur den alltäglichen Kontext an. Die Bezeichner >>Spielwürfel<< und >>Würfel<< bezeichnen den alltäglichen Begriff, der in alltäglichen Objekten konkretisiert gesehen wird (Abbildung 69) – hier konstituiert sich damit Fall 1-2-1 der Triangulationsbrüche.

In der nächsten Schülerantwort (Abbildung 70) wird der Würfel ausschließlich als geometrischer Begriff beschrieben. Daher wird hier davon ausgegangen, dass ein entsprechendes geometrisches Objekt impliziert wird. Explizit angesprochen wird aber die Verwendung zum Würfeln und damit das alltägliche Objekt (Abbildung 71) – hier findet sich somit Fall 1-1-2.

[159] Es wird zunächst die Zuordnung einzelner Antworten zu den Fällen 1-2-1, 1-1-2, 1-2-2, 2-1-1, 2-2-1 und 2-1-2 aus Kapitel 2. beschrieben. Weitere Anmerkungen zu der Analyse folgen anschließend.

In einer weiteren Antwort (Abbildung 72) wird lediglich der geometrische Begriff, mit Bezug auf den auf dem Fragebogen genannten Bezeichner >>Würfel<<, beschrieben und ein entsprechendes Objekt wohl wiederum impliziert. Allerdings wird der geometrische Begriff auch als >>Spielwürfel<< bezeichnet, wenn er in dem alltäglichen Objekt konkretisiert gesehen wird. Die Beschreibung „maximal 6 punkte auf einer Seite“ wird in diesem Fall nicht als Begriff gewertet, weil sie klaren Bezug auf die Verwendung und damit Objektcharakter hat (Abbildung 73) – dies bedeutet Fall 1-2-2.

Darüber hinaus wird in einer Antwort (Abbildung 74) das alltägliche Objekt zu dem elementargeometrischen Begriff und dem alltäglichen Begriff abstrahiert. Dies wird deutlich an den Aussagen „– Hat Ecken und Kanten. [...] – Es gibt Würfel mit leicht rundlichen Ecken und Kanten.“ Die Begriffe werden dabei jeweils als >>Würfel<< bezeichnet (Abbildung 75) – hier konstatiert sich damit Fall 2-1-1.

Zudem wird in einer Antwort (Abbildung 76) nur implizit von einem Objekt ausgegangen. Es werden allerdings der elementargeometrische Begriff und möglicherweise als Unterbegriff (weil es heißt „Bei einem Spielwürfel“) der alltägliche Begriff beschrieben. Bezeichnet werden die Begriffe als >>Würfel<< beziehungsweise als >>Spielwürfel<< (Abbildung 77) – hier findet sich Fall 2-2-1.

Schließlich wird in einer Antwort (Abbildung 78) der Würfel sowohl als geometrischer Begriff als auch als alltäglicher Begriff beschrieben. Es wird hier davon ausgegangen, dass ein geometrisches Objekt impliziert wird, da das alltägliche Objekt explizit davon abgegrenzt wird („Dieser Würfel [...]“) (Abbildung 79) – dies bedeutet Fall 2-1-2.

Es soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass obig vorgenommene Zuordnungen von Schülerantworten zu den Triangulationsbrüchen aus Kapitel 2. nicht so eindeutig sind, wie die Abbildungen implizieren – und dies auch gar nicht sein können, weil ein psychologisches Begriffsbild nie so eindeutig sein kann, wie rein theoretisch semiotisch gewonnene Zusammenhänge. Ebenso soll darauf hingewiesen werden, dass die Zuordnungen natürlich darauf beruhen, wie die entsprechenden Schülerinnen und Schüler ihr Begriffsbild kommunizieren. So muss die Möglichkeit eingeräumt werden, dass das in einem Begriffsbild enthaltene persönliche Begriffsfeld nur wie oben analysiert kommuniziert wurde, in der Vorstellung von Schülerinnen und Schülern jedoch eine andere Form hat. Dies ist vor allem darin begründet, dass im Zuge der Auswertung teilweise Objekte impliziert wurden, und dass aus einer gegebenen Syntax auf den Zusammenhang von Begriff, Bezeichner und Objekt geschlossen werden musste.

Kleine Unterschiede in Äußerungen können somit schon zu unterschiedlichen festgestellten Triangulationsbrüchen oder semiotischen Dreiecken führen. Um dies zu verdeutlichen, soll auf Schülerantwort A 8.1_13 (Abbildung 72) zurückgegangen werden. Die Beschreibung „maximal 6 punkte auf einer Seite“ wurde wegen des Objektcharakters der Aussage nicht als Begriff gewertet. Wäre diese Aussage beispielsweise formuliert gewesen in der Form „Ein Spielwürfel besitzt maximal 6 Punkte auf einer Seite und wird zum Beispiel für ‚Mensch ärger dich nicht‘ verwendet“, wäre sie als einen alltäglichen Begriff sowie den Bezeichner und das Objekt enthaltend eingestuft worden, und es wären zwei getrennte semiotische Dreiecke gefolgt (Abbildung 80).

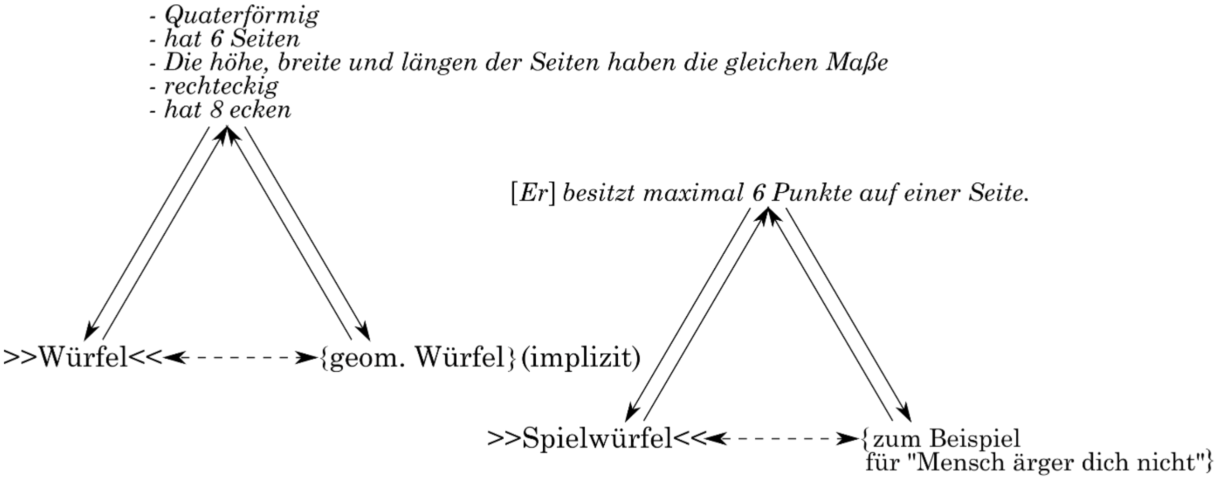


Abbildung 80: Semiotische Dreiecke zu alternativer Schülerantwort A 8.1_13

Weiterhin soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass, obwohl die achte Klassenstufe zur Auswertung gewählt wurde, weil zu diesem Zeitpunkt der Würfel als Instrument der Stochastik schon bekannt sein sollte, keine der obig betrachteten Antworten den stochastischen Kontext mit berücksichtigt. Dies ist einerseits darin begründet, dass der stochastische Kontext teilweise nur in Form der Nennung des Schlagwortes „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ berücksichtigt ist, was es nicht möglich macht, Begriffe, Bezeichner und Objekte festzustellen. Gründe sind andererseits, dass der stochastische Kontext eng mit dem alltäglichen verwandt ist, was ein Verschwimmen von Begriffen und Objekten begünstigt, sowie dass ein zusätzlicher Kontext zusätzliche Aspekte ins Spiel bringt, was häufiger zu einer Überlagerung mehrerer Triangulationsbrüche führt, als dass eine Antwort einem Triangulationsbruch zugeordnet werden kann. Exemplarisch sind hier zwei Schülerantworten ausgesucht.

In der ersten Antwort (Abbildung 81) bedeutet der Bezeichner einen elementargeometrischen und einen alltäglichen Begriff. Ein elementargeometrisches Objekt kann nur impliziert werden. Ausgehend von einem alltäglichen Objekt (Verwendung in Spielen) wird aber auch der stochastische Begriff angesprochen (Abbildung 82).

In der zweiten Antwort (Abbildung 83) bedeutet der Bezeichner einen geometrischen Begriff, der in einem geometrischen Objekt konkretisiert gesehen wird (weil von Gegenstand die Rede ist). Außerdem bedeutet der Bezeichner einen alltäglichen Begriff, der in einem entsprechenden Objekt konkretisiert gesehen wird. In Verbindung mit diesem Objekt wird allerdings ein stochastischer Bezeichner verwendet, der, weil die Relation zwischen Objekt und Bezeichner nur vermittelt vorliegt, auch einen stochastischen Begriff impliziert (Abbildung 84).

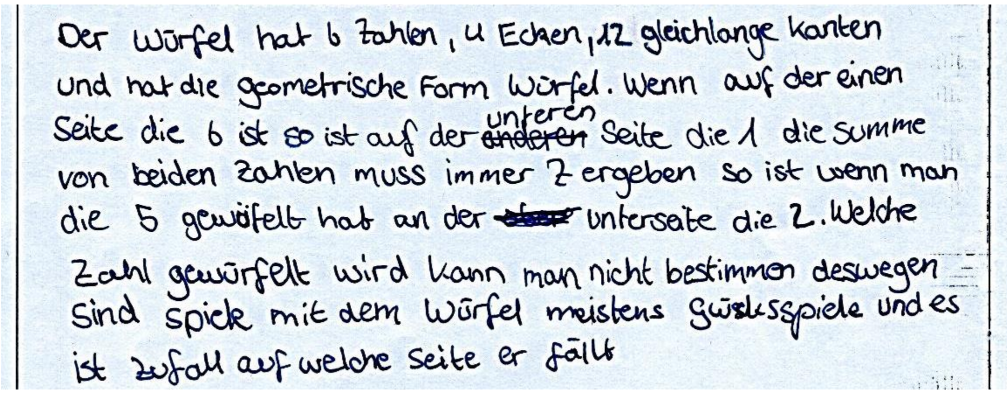


Abbildung 81: Schülerantwort A 8.2_6

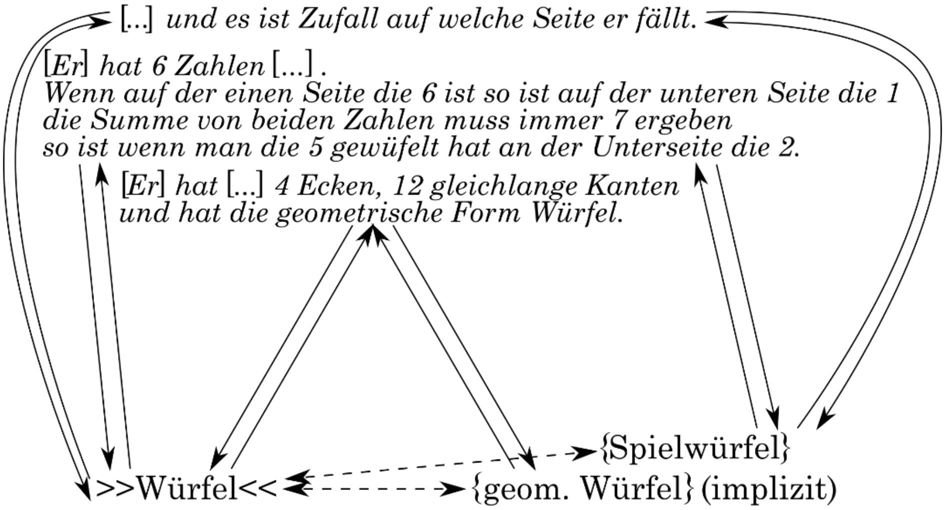


Abbildung 82: Triangulationsbrüche zu Schülerantwort A 8.2_6

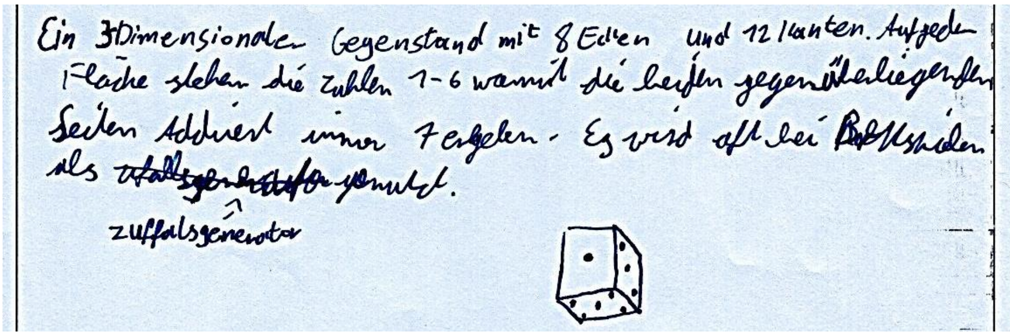


Abbildung 83: Schülerantwort A 8.1_9

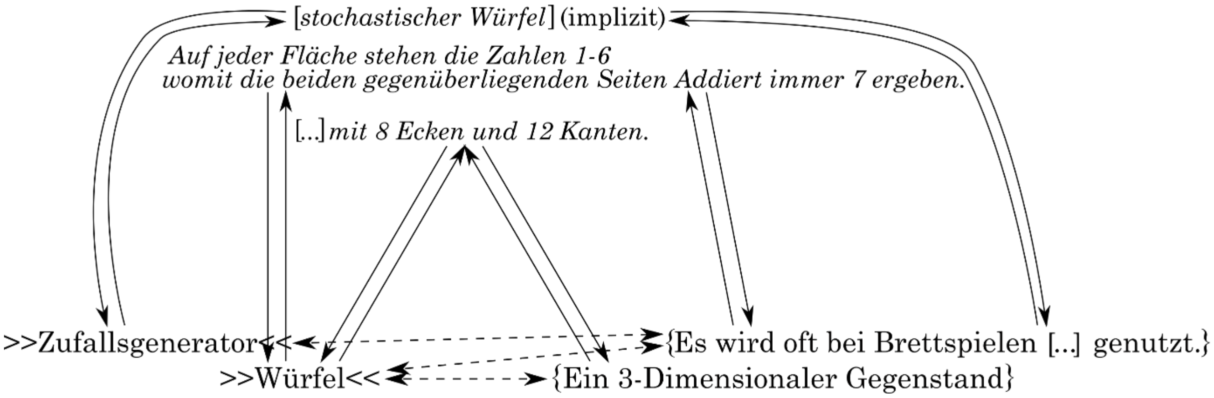


Abbildung 84: Triangulationsbrüche zu Schülerantwort A 8.1_9

5.6. Fehler im Begriffsverständnis

Bei exemplarischer Betrachtung der Schülerantworten sind schon einige mathematische Fehler und Begriffsverwendungen, die nicht mit der Begriffskonvention übereinstimmen,[160] aufgefallen. Diese sollen im Folgenden, subsumiert unter >>Fehler<<, als Abschluss der Beschäftigung mit der Umfrage systematisiert werden. Solche Fehler verdeutlichen im Rahmen der vorliegenden Arbeit einerseits, dass trotz der angesprochenen Alltagsnähe und Anschaulichkeit geometrischer Objekte auch der Begriffsbildungsprozess geometrischer Begriffe auf Hindernisse trifft. Sie zeigen andererseits auf, dass neben den bereits betrachteten Triangulationsbrüchen im semiotischen Dreieck, die ein Begriffsfeld konstituieren, die Überlagerung ganzer Begriffsfelder zu unterschiedlichen Begriffen möglich ist – wenn beispielsweise ein Würfel als >>Quadrat<< bezeichnet wird, überlagern sich die entsprechenden Begriffsfelder.

Es wird ein jeweils klassenstufenspezifischer Überblick über die Fehler mit Angabe der jeweiligen Häufigkeiten gegeben (Tabelle 19 bis Tabelle 22).

[160] Siehe hierzu: Schülerantworten A 7.1_6 (Abbildung 58), A 8.2_3 (Abbildung 70), A 8.1_13 (Abbildung 72) und B 8.1_21 (Abbildung 74).

Klassenstufe 5	
Art des Fehlers	Häufigkeit
Bezeichnung als Quadrat / quadratisch	23 (21,10 %)
Bezeichnung als Viereck / viereckig[161]	13
Bezeichnung als Rechteck / rechteckig	1
Bezeichnung als Dreieck	1
Angabe einer falschen Eckenzahl • 4 Ecken • 12 Ecken • 10 Ecken	9 4 3 (davon einmal: 12 Ecken, 8 Kanten) 2
Angabe einer falschen Kantenzahl • 8 Kanten • 13 Kanten	4 3 1
Angabe einer falschen Seiten (Flächen?) -zahl • 4 Seiten	2 2
„besteht aus 2 Dreiecken“	1

Tabelle 19: Fehler in Klassenstufe 5

Klassenstufe 7	
Art des Fehlers	Häufigkeit
Bezeichnung als Quadrat / quadratisch	17 (19,54 %)
Bezeichnung als Viereck / viereckig	13
Angabe einer falschen Eckenzahl • 4 Ecken • 24 Ecken • 12 Ecken	6 3 2 1 (davon einmal: 12 Ecken, 8 Kanten)
Angabe einer falschen Kantenzahl • 8 Kanten • 10 Kanten • 17 Kanten	6 4 1 1
„die Flächen sind gleichlang“	1
Es ist der „Flächeninhalt 1 dm^3“	1
„Der Umfang der sechs Seiten kann berechnet werden“	1

[161] Ein Bezeichnen als >>Viereck<< beziehungsweise ein Beschreiben als viereckig wurde nicht zusammengefasst mit der Angabe der Eckenzahl 4, weil >>Viereck<< beziehungsweise viereckig im Sinne eines ganzheitlichen Blickes einen anderen Begriff bezeichnet oder beschreibt, während die Angabe einer falschen Eckenzahl in falschem Zählen begründet sein kann.

„Der Inhalt einer Seite wird berechnet mit oberer und unterer Kante mal zwei“	1

Tabelle 20: Fehler in Klassenstufe 7

Klassenstufe 8	
Art des Fehlers	Häufigkeit
Bezeichnung als Quadrat / quadratisch	20 (22,99 %)
Bezeichnung als Viereck / viereckig	6
Bezeichnung als Rechteck / rechteckig	1
Angabe einer falschen Eckenzahl • 4 Ecken	4 4
Angabe einer falschen Kantenzahl • 2 Kanten • 16 Kanten	3 2 (einmal: Bezeichnung als Strecken) 1
„Der Würfel ist ein 6-seitiges Quadrat“	1

Tabelle 21: Fehler in Klassenstufe 8

Klassenstufe 10	
Art des Fehlers	Häufigkeit
Bezeichnung als Quadrat / quadratisch	17 (20,48 %)
Bezeichnung als Viereck / viereckig	1
Bezeichnung als Rechteck / rechteckig	1
Angabe einer falschen Eckenzahl • 4 Ecken	1 1
Angabe einer falschen Kantenzahl • 8 Kanten • 10 Kanten	2 1 (in der Form: 8 Kanten, 12 Seiten) 1
Angabe einer falschen Seiten (Flächen?) -zahl • 4 Seiten • 12 Seiten	2 1 1
„4-seitige Würfel haben sechs Seiten“	1
Skizze eines fehlerhaften Würfelnetzes	1

Tabelle 22: Fehler in Klassenstufe 10

Ein Vergleich obiger Tabellen zeigt, dass ein Bezeichnen eines Würfels als >>Quadrat<< oder ein Beschreiben als quadratisch in allen betrachteten Klassenstufen in etwa einem Fünftel der Antworten zu finden ist. Auch in Klassenstufe 10 tritt der Fehler damit relativ häufig auf. Sowohl das Bezeichnen als

Viereck als auch die Angabe falscher Ecken- und Kantenanzahlen hingegen nimmt kontinuierlich ab, bei den weiteren auftretenden Fehlern handelt es sich um Einzelfehler. Daraus lässt sich schließen, dass insbesondere das Übertragen von Begriffen aus der Ebene in den Raum Fehler produziert und ebene und räumliche Begriffe nicht ausreichend voneinander abgegrenzt werden. Ein Vermeiden der obig aufgelisteten Fehler und ein Abgrenzen von Begriffen soll durch den Aufbau von Grundvorstellungen, die im nächsten Kapitel angesprochen werden, geschehen.

6. Grundvorstellungen

In dieser Arbeit wurde bereits ein Blick auf Begriffsbildung aus einer semiotischen und einer philosophisch-psychologischen Perspektive geworfen. Die philosophisch-psychologische Perspektive einnehmend wurden Begriffsbild und Begriffskonvention nebeneinander gestellt und in Beziehung zum Begriffsfeld gesetzt. Nun soll eine über Koexistenz hinausgehende Verbindung von Begriffsbild und Begriffskonvention angesprochen werden, bevor zunächst ein allgemeiner und anschließend ein exemplarischer Blick auf Grundvorstellungen als das Verbindungsglied geworfen wird. In einem Exkurs wird die Grundvorstellungsdiskussion weiterhin in die Diskussion um Fundamentale Ideen eingebettet. Letztlich wird vor dem Hintergrund der Grundvorstellungsdiskussion das „Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten“ als ein Weg der Begriffsbildung in der sowjetischen Philosophie und Psychologie thematisiert.

6.1. Eine Verbindung von Begriffsbild und Begriffskonvention

Im Zuge der schulischen Begriffsbildung stehen sich Begriffsbilder, welche die Lernenden aus ihrem Leben mit in den Unterricht bringen oder die durch früheren Unterricht vorgeprägt sind, und Begriffskonventionen, die aus der Fachmathematik mittels Lehrplänen und Schulbüchern in möglicherweise abgespeckter, aber rein relationaler, Form den Unterricht erreichen, gegenüber. Aus den entwicklungspsychologischen Arbeiten von PIAGET und BRUNER, insbesondere aber auch aus FREUDENTHALs Phänomenologie geht jedoch hervor, dass komplett subjektive Begriffsbilder und in der Mathematik feststehende Begriffskonventionen nur zwei Extrema eines Begriffsverständnisses oder Begriffswissens darstellen. Dazwischen hat das Begriffsverständnis oder -wissen einen weder komplett subjektiven noch formal definitorischen Charakter, sondern kann durch sowohl subjektive Präferenzen als auch normative Aspekte bestimmt sein.[162]

Ein Ziel des Mathematikunterrichts ist es daher, ausgehend von Begriffsbildern den Weg in Richtung eines intersubjektiven Begriffs zu ebnen, indem normativ festgelegte Aspekte des Begriffs hervorgehoben werden, beziehungsweise einen intersubjektiven Begriff so aufzufüllen, dass er Teil des Begriffsbildes werden kann. Diesbezüglich heißt es bei MAIER und SCHWEIGER mit Rückgriff auf ein semiotisches Dreieck nach STEINBRING:

> Wichtig erscheint, daß der Referenzkontext, bzw. der Gegenstand [hier: das Objekt] nicht vorab eindeutig vorgegeben ist, sondern erst im Verlaufe der Entwicklung des mathematischen Wissens durch Umdeutung nach und nach in seinen strukturellen Zusammenhang entwickelt wird. Mathematische Bedeutungen werden im Wechselspiel zwischen einem Refe-

[162] Dieser Gedanke findet sich ebenso in vielen relevanten Grundlagenwerken der Mathematik- oder konkreter der Geometriedidaktik, beispielsweise bei WITTMANN (1981) beziehungsweise HOLLAND (2007), KADUNZ (2009) und WEIGAND (2009b).

> renzkontext und einem Zeichensystem entwickelt, indem von einem relativ vertrauten oder teilweise bekannten Referenzbereich mögliche Bedeutungen auf ein neues, noch bedeutungsloses Zeichensystem übertragen werden.
>
> (Maier & Schweiger 1999, S. 155f)[163]

Außerdem heißt es bei BROMME und STEINBRING:

> Der Prozeß des Lernens und Lehrens von Mathematik erfordert also eine Explikation von Bedeutung, die mehr umfaßt als die formale Struktur mathematischer Begriffe. In der Schule erfordert sie die Herstellung einer Beziehung zwischen lebensweltlichen Erfahrungen der Schüler, Vorkenntnissen der Schüler aus anderen Teilgebieten der Mathematik sowie spezifischen Erfahrungen mit der jeweiligen Aufgabe einerseits und dem formalen Kalkül andererseits. Diese 'Anbindung' von Erfahrung an die Logik des zu unterrichtenden Stoffs ist dabei nicht nur zu Zwecken der Motivierung und Propädeutik erforderlich, vielmehr konstituiert sich die Bedeutung mathematischer Begriffe erst durch das Zusammenspiel von formaler Bedeutung und ausgezeichneten Anwendungsfällen.
>
> (Bromme & Steinbring 1990, S. 161f)[164]

Des Weiteren schreibt WINTER:

> Weder das begriffliche Denken noch das anschauliche Erfassen sind im historischen und individualgenetischen Sinn konstante Größen. Es besteht vielmehr eine Wechselwirkung, und diese sollten wir für das Lernen nutzen.
>
> (Winter 1983, S. 199)

WINTER unterscheidet dabei vier Stufen der Begriffsbildung, die Phänomenstufe, die Stufe der Rekonstruktion, die Stufe der Systematisierung und die Anwendungsstufe (Winter 1983, S. 182ff). Das Arbeiten auf der Phänomenstufe entspricht einem geleiteten Ausgehen von dem Begriffsbild, während auf der Stufe der Rekonstruktion der mathematische Begriff erschlossen wird und auf der Stufe der Systematisierung dann zu einem intersubjektiven Begriff übergegangen wird. Die Anwendungsstufe geht schließlich über die drei genannten Stufen dahingehend hinaus, dass Begriffe als Teile eines wissenschaftlichen Systems evaluiert werden. WINTER betrachtet daher dem subjektiven Begriffsbild und der

[163] Der von MAIER und SCHWEIGER hier angesprochene „strukturelle Zusammenhang" meint „Bedeutungszusammenhänge, wie z.B. Beziehungen zwischen Begriffen und Sätzen" (vgl. Maier & Schweiger 1999, S. 154).
MAIER und SCHWEIGER sprechen in dem Zitat, um das Vokabular der vorliegenden Arbeit zu verwenden, eine Mehrdeutigkeit an der Objektecke eines semiotischen Dreiecks und zudem verschiedene Bezeichnerecken an. Somit kann das Zitat vor dem allgemeineren Hintergrund des Begriffsfeldes betrachtet werden.

[164] Hier schwingt FREUDENTHALs Prinzip der Beziehungshaltigkeit mit (vgl. Freudenthal 1973a, S. 75ff).

intersubjektiven Begriffskonvention auf einer gleichberechtigten Stufe die Begriffserschließung und -nutzbarmachung zwischengeordnet. Insbesondere seine Arten der Begriffsbildung, welche sich hauptsächlich auf den ersten beiden Stufen abspielen, betonen deren prozesshaften Charakter.[165] Diesen und auch ein aktiv-operatives Wesen heben allerdings BENDER und H. N. JAHNKE im Rahmen einer umfassenderen Betrachtung von Anschauung und Strenge noch stärker hervor:

> Thesis 2: Interpretations, even geometrical ones, are not "pictures speaking by themselves." They can fulfill their purposes only on the basis of the learners' active construction of meaning. In each case, they, as well as their relations to other interpretations and to the underlying concepts, have to be learned anew.
>
> (Bender & Jahnke 1992, S. 263)[166]

> Thesis 3: Not only are interpretations to convey the allegedly static meanings of mathematical concepts, but they hold new relations and thus contain the germ for new, farther-reaching insights. In addition to their explicatory function, they are provided with an exploratory character that can be utilized for a hermeneutic working style in mathematics instruction as well.
>
> (Bender & Jahnke 1992, S. 264)

Als ein Mittel, mit Hilfe dessen ein intersubjektiver Begriff erschlossen und nutzbar gemacht werden kann, werden in der Mathematikdidaktik häufig Grundvorstellungen gesehen. Grundvorstellungen werden dabei meist sehr allgemein verstanden:

> Allgemein zielt das Konzept [der Grundvorstellungen] auf den verständnisorientierten Erwerb mathematischer Begriffe und Verfahrensweisen, wobei bestimmte grundlegende Vorstellungen im Mittelpunkt stehen, die für dieses Verstehen konstituierend sind […].
>
> (Vohns 2007, S. 95)

Die meisten Mathematikdidaktikerinnen und -didaktiker scheinen zudem eine prototypische (oder exemplarische) Vorstellung davon zu haben, was Grundvor-

---

[165] WINTER unterscheidet dabei zwischen exemplarischer, konstruktiver, abstraktiver und ideativer Begriffsbestimmung. Stärker die dritte Stufe der Begriffsbildung ansprechend nennt er außerdem explizit-definitorische und implizit-axiomatische Begriffsbestimmung, wo Prozesshaftes sehr kurz kommt (vgl. hierzu auch: Meyer 2013, S. 58f).

[166] BENDER und JAHNKE erklären „Interpretations" folgendermaßen:

> First, we understand *interpretation* as ascribing meaning to concepts, primarily by anchoring them in the real world (in a wide sense). But the phrase "interpretation" also includes the embodiment of concepts in some mathematical situation, where they can be provided with a new meaning or with some meaning, on the grounds of a new context, and where the direct reference to the real world (taken literally) can vanish.
>
> (Bender & Jahnke 1992, S. 262)

stellungen sind, die jedoch nicht über die bereits angetroffenen Repräsentanten hinauszureichen vermag.[167] Daher wird in den folgenden beiden Abschnitten zunächst ein etwas genauerer Blick auf Grundvorstellungen geworfen, indem die Arbeiten diesbezüglich von BENDER und VOM HOFE thematisiert werden, bevor Grundvorstellungen exemplarisch angesprochen werden. Dass es sich bei Grundvorstellungen um einen in der mathematikdidaktischen Diskussion heute zentralen Begriff handelt, hat auch der Hauptvortrag von HEFENDEHL-HEBEKER auf der letzten GDM-Jahrestagung in Basel deutlich gemacht[168] – dort nannte sie Grundvorstellungen als einen zentralen Anknüpfungspunkt der Mathematikdidaktik an die Mathematik.

6.2. Grundvorstellungen allgemein

Eine erste Aufarbeitung des Begriffs Grundvorstellungen unternahm BENDER mit seinem Beitrag „Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen“ (Bender 1991a) – BENDERs Beitrag zu Grundvorstellungen wird auch von VOM HOFE als „wohl erste[r] wesentliche[r] Beitrag zu einer theoretischen Einordnung des Begriffs ‚Grundvorstellung‘ aus psychologisch-phänomenologischer Perspektive“ gesehen (vom Hofe 1995, S. 13). Daher stellt dieser Beitrag hier den Ausgangspunkt der Beschäftigung mit Grundvorstellungen dar. Meist wird der Begriff Grundvorstellungen in der deutschen Mathematikdidaktik heute jedoch in Anlehnung an VOM HOFE verwendet, der diesen in seiner Arbeit „Grundvorstellungen mathematischer Inhalte“ (1995) historisch-genetisch[169] untersucht hat.

6.2.1. Grundvorstellungen bei BENDER

BENDER weist in seinem Beitrag zu Grundvorstellungen[170] darauf hin, dass das „Gegensatzpaar ‚concept image‘ vs. ‚concept definition‘ zu eng“ sei (Bender 1991a, S. 49), und spricht erweiternd von Grundvorstellungen und -verständnissen. Er charakterisiert zunächst Grundvorstellungen und -verständnisse mittels der Bedeutungen sowohl des Bestimmungswortes >>Grund-<< als auch der Grundworte >>Vorstellungen<< und >>Verständnisse<< (vgl. Bender 1991a, S. 48ff). Dabei stuft er die Bedeutung des Bestimmungswortes im Vergleich zu jenen der Grundworte als wichtiger ein.

[167] >>Prototypisch<< und >>exemplarisch<< bezeichnet eine entsprechend der Theorien in 4.3. zu beschreibende Vorstellung. Bei einer prototypischen Vorstellung von Grundvorstellungen dienen meist die Grundvorstellungen zu Brüchen als besonders prototypischer Vertreter, eine exemplarische Vorstellung subsumiert verschiedene Repräsentanten.

[168] Der Titel HEFENDEHL-HEBEKERs Vortrag lautete „Die Rolle der Mathematik in der Mathematikdidaktik“.

[169] Hinter VOM HOFEs Arbeit steckt die Idee des historisch-genetischen – VOM HOFEs historisch-genetische Betrachtungen bleiben aber oberflächlich.

[170] Der angesprochene Beitrag zu Grundvorstellungen (Bender 1991a) ist der einzige von BENDER, in dem er sich explizit einer theoretischen, insbesondere etymologischen, Grundlegung des Begriffs widmet.

Laut BENDER weist das Bestimmungswort >>Grund-<< auf allgemeine Verbindlichkeit, Verankerung in der Lebenswelt und einen fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet hin. Die allgemeine Verbindlichkeit meint, dass Grundvorstellungen und -verständnisse möglichst weit mit dem sogenannten epistemologischen Kern von Begriffen übereinstimmen sollen, der aus verschiedenen inner- und außermathematischen Zusammenhängen besteht, die didaktisch für das Lernen aufbereitet werden. BENDER betont dabei, dass dieser epistemologische Kern nicht zu einem eindeutigen Begriff führt. Weiterhin bedeutet Verankerung in der Lebenswelt, entsprechend BENDER, dass Grundvorstellungen und -verständnisse Begriffe durch Einbettung in lebensweltliche Situationen, die nicht zwangsläufig den Charakter einer echten Anwendung haben müssen, sondern auch metaphorisch geprägt sein können, zugänglich machen sollen.[171] Es wird jedoch angemerkt, dass solche lebensweltlichen Situationen nicht Bestandteil des epistemologischen Kerns der Begriffe sind, sondern didaktisches Mittel. Der fundamentale Charakter für das jeweilige Teilgebiet meint darüber hinaus, dass Grundvorstellungen und -verständnisse bei einer weiteren Verwendung und Weiterentwicklung von Begriffen zur inhaltlichen Interpretation herangezogen werden sollen und damit einen Kontext bieten sollen, in dem ein Begriff vorgestellt werden kann.

Mit >>Vorstellungen<< sind, laut BENDER, (innere) Repräsentationen von Objekten, Handlungen und Situationen, die erneut aktiviert werden können, gemeint. Er merkt diesbezüglich an, dass zwischen einem bildhaften und einem verbalen Modus zu unterscheiden ist, wobei häufig sowohl verbale Vorstellungen bildhaft als auch bildhafte Vorstellungen verbal gefasst werden können – aufgrund der im Mathematikunterricht im Allgemeinen stärkeren Verwendung verbaler Vorstellungen bringen Grundvorstellungen allerdings meist eine Veranschaulichung mit sich. >>Verständnisse<< sprechen darüber hinaus das Verstehen von Sachverhalten, Äußerungen sowie auch Menschen, Handlungen und Situationen an, was ein Verstehen der Schülerinnen und Schüler durch Lehrpersonen einschließt. Zu dem Unterschied von Vorstellungen und Verständnis schreibt BENDER:

> Mit ihrem Charakter des Ergebnishaften erscheinen *die Verständnisse in einer engen Wesensverwandtschaft mit den Vorstellungen*. Tendenziell sind diese stärker analog, jene eher propositional ausgerichtet. Zusammen gehören sie zum GVV [Grundvorstellungen und -verständnisse]-Konzept:

[171] Hier klingt der Begriff der Authentie von T. JAHNKE an:

> Wenn man die Bezeichnung authentisch für Mathematikaufgaben retten will, dann darf man sie nicht an die Realität oder authentische Kontexte binden, sondern muss sich mit der übertragenen Bedeutung ‚echt', ‚glaubwürdig', ‚zuverlässig' begnügen. Unter ‚echt' könnte man auch ‚in sich stimmig' verstehen, ob eine Aufgabe also nichts anderes will, als sie zugibt.
>
> (Jahnke 2005, S. 12)

Verständnis ist nicht ohne Vorstellungen, und Vorstellungen sind nicht ohne Verständnis möglich.

(Bender 1991a, S. 55)[172]

Insgesamt handelt es sich bei Grundvorstellungen und -verständnissen damit um Vorstellungen und Verständnisse, die geprägt sind durch ihre allgemeine Verbindlichkeit, die Verankerung in der Lebenswelt sowie den fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet – einzelne Vorstellungen und Verständnisse beruhen dabei stark auf den Formulierungen, mit denen sie kommuniziert werden (siehe hierzu auch: Bender 1991b[173]).

BENDER beschreibt Grundvorstellungen und -verständnisse als ein Mittel, mit dem die Begriffsbildung in Richtung eines intersubjektiven Begriffs gelenkt werden kann und mit dem gegen Fehlvorstellungen und -verständnisse vorgegangen werden kann – es klingt somit ein normativer Charakter des Grundvorstellungsbegriffs an. Er betont jedoch:

> Aber es soll hier kein Algorithmus zur Aufstellung von GVV entwickelt werden […]. Dazu sind die theoretischen Grundlagen nicht mit hinreichender Operationalität faßbar und einige der Merkmale zu trivial, andere zu speziell und unverbindlich, die meisten auch zu vage.

(Bender 1991a, S. 56)

6.2.2. Grundvorstellungen bei VOM HOFE

VOM HOFE (1995) setzt in seiner Untersuchung des Grundvorstellungsbegriffs bei Anschauungen – angelehnt an PESTALOZZI und HERBART – sowie Vorstellungen – angelehnt an DIESTERWEG und HENTSCHEL – an. Er erarbeitet vor allem mit Rückgriff auf KÜHNELs Stellvertretervorstellungen, J. WITTMANNs Mengenanschauungen, BREIDENBACHs Vorstellungsgrundlagen, PIAGETs Vorstellungen oder Verinnerlichungen sowie OEHLs und GRIESELs Grundvorstellungen – zwischen denen es Gemeinsamkeiten aber auch viele Unterschiede gibt – seine Grundvorstellungsidee. Mit den Vertretern um PESTALOZZI, sowie KÜHNEL, J. WITTMANN, BREIDENBACH und OEHL ist dabei die Volks- und Hauptschuldidaktik und insbesondere die Rechenmethodik sehr stark vertreten. Mit Bezug auf seine Grundvorstellungsidee schreibt VOM HOFE:

---

[172] Mit seiner Unterscheidung von Vorstellungen und Verständnissen geht BENDER über VOM HOFEs Vorstellungen hinaus, die dieser in Grundvorstellungen betont (siehe 6.2.3.). Allerdings verwendet BENDER den Ausdruck >>Vorstellungen und Verständnisse<< meist als Ganzes und unterscheidet nicht explizit zwischen Vorstellungen und Verständnissen.

[173] In diesem Beitrag zu Fehlvorstellungen und -verständnissen widmet BENDER sich dem Thema Folgen und Grenzwerte, wobei auch TALL und VINNER schon das Concept Image zu Grenzwerten untersucht hatten. BENDER spricht dabei Aspekte des Themas an, die auch bei TALL und VINNER (vgl. Tall & Vinner 1981) schon relevant waren, argumentiert aber von einer Meta-Ebene (anstatt mit direktem Bezug auf empirische Forschungsergebnisse) und viel stärker sprachbezogen als TALL und VINNER.

> Die Grundvorstellungsidee beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:
>
> - Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
> - Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. „Verinnerlichungen", die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
> - Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.
>
> (vom Hofe 1995, S. 97f)

Hinsichtlich einer normativen Nutzung des Begriffs Grundvorstellungen heißt es:

> Faßt man Grundvorstellungen als normative Leitlinien auf, so besteht ihre didaktische Hauptaufgabe darin, geeignete reale Sachkonstellationen bzw. Sachzusammenhänge zu beschreiben, die den jeweiligen mathematischen Begriff auf eine für den Lernenden verständliche Art konkretisieren bzw. repräsentieren.
>
> (vom Hofe 1995, S. 98)

VOM HOFE ruft, neben der normativen Nutzung, außerdem zu einer deskriptiven und einer konstruktiven Nutzung des Begriffs Grundvorstellungen auf (vgl. vom Hofe 1995, S. 103ff). Dies heißt bei ihm, dass die Lehrperson individuelle Vorstellungen und vor allem Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern erkennen soll und davon ausgehend zum Aufbau der erwünschten Grundvorstellungen beitragen soll. Grundlage sind dabei mögliche normative Grundvorstellungen, wovon im Fall von Fehlvorstellungen für eine gegebene Situation inadäquate Vorstellungen als aktiviert gesehen werden, deren Unangemessenheit verdeutlicht werden soll.

In einer späteren Arbeit wird dann darauf hingewiesen, dass Grundvorstellungen nicht als feste Sammlung von Werkzeugen gedacht werden dürfen, sondern dass alte Vorstellungen kontinuierlich erweitert werden und neue Vorstellungen hinzukommen (vgl. vom Hofe 2003).

Insgesamt fasst VOM HOFE den Prozess des Ausbildens von Grundvorstellungen in dem folgenden Modell (Abbildung 85) zusammen, in dem die linke Seite didaktische Entscheidungen, die rechte Seite Aktivitäten der Lernenden wiedergibt.

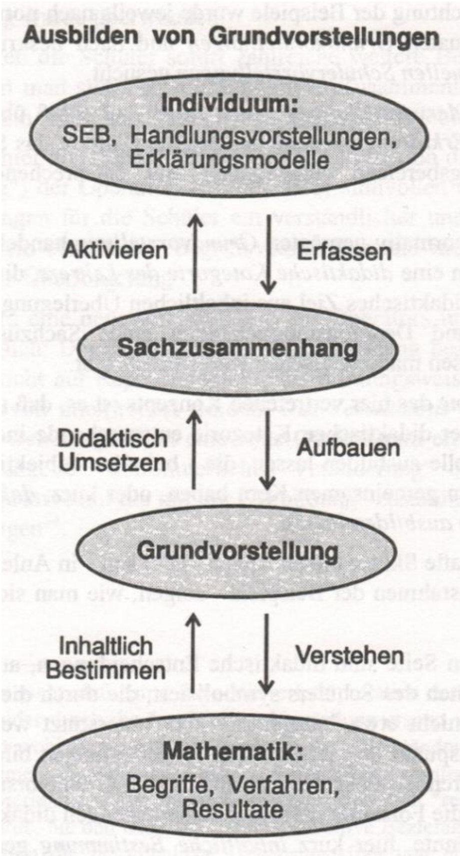


Abbildung 85: Modellhafte Skizze zur Ausbildung von Grundvorstellungen nach VOM HOFE 1995, S. 224

Das Modell bewegt sich zwischen den Ebenen des Individuums und der Mathematik mittels der Ebenen des Sachzusammenhangs und der Grundvorstellungen. Insbesondere nimmt die Ausbildung von Grundvorstellungen eine vermittelnde Rolle zwischen der Realität und der Mathematik ein (vgl. vom Hofe 2003). Implizit ausgeblendet werden in dem Modell allerdings solche Fehlvorstellungen, die keinem didaktischen Erklärungsmodell, sondern beispielsweise dem Alltag entspringen. Es heißt:

> Natürlich können Störungsquellen auch in den sozialen, affektiven oder interaktiven Bedingungen des lernenden Individuums zu suchen sein; diese sollen hier nicht unterbewertet werden. Die […] didaktischen Entscheidungsfelder sind für den Lehrer jedoch am direktesten zugänglich; insofern lassen sich die hier auftretenden Störungen vielleicht am ehesten beheben.
>
> (vom Hofe 1995, S. 126)[174]

[174] Die Zugänglichkeit der didaktischen Entscheidungsfelder begründet VOM HOFE durch Verweis auf die von ihm diskutierten Fallanalysen, in welchen „sich die wesentlichsten Störungselemente des Verständnisses und der Kommunikation in Divergenzen zwischen den vom Schüler verfolgten bzw. den vom Lehrer erwarteten Deutungsmöglichkeiten des jeweiligen Sachzusammenhangs" (vom Hofe 1995, S. 126) zeigten.

6.2.3. Zwischenfazit – Grundvorstellungen allgemein

Mit Bezug auf VOM HOFEs Grundvorstellungsidee ist zunächst festzustellen, dass sich die drei von ihm genannten Punkte – kurz gefasst: Sinnkonstituierung eines Begriffs, Aufbau (visueller) Repräsentationen, Fähigkeit zur Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit – nicht nur in den von ihm betrachteten Quellen, sondern auch in vielen anderen Arbeiten zur Begriffsbildung finden. Es wird generell dann von erfolgreicher Begriffsbildung gesprochen, wenn der Sinn eines Begriffs durch Bezug auf bekannte Situationen konstituiert wurde, wenn Repräsentationen eines Begriffs vorhanden sind und der Begriff auf die Wirklichkeit angewendet werden kann. So lassen sich diese Punkte bereits in unterschiedlichen Ausprägungen in den in 4.2. genannten Arbeiten aus der Philosophie mit Bezug auf die Begriffsbildung finden. Bei KANT ermöglichen erst Repräsentationen im Sinn von sich in der reinen Anschauung abspielenden mentalen Konstruktionen, einen Begriff auf die Wirklichkeit, das heißt bei KANT auf die empirische Anschauung, anzuwenden. Bei CASSIRERs natürlichen Weltbegriffen, FREGEs Zeichen, den Worten des frühen WITTGENSTEIN und den Familienähnlichkeitsbegriffen des späten WITTGENSTEIN lässt erst die Sinnkonstituierung eines Begriffs es zu, diesen Begriff wiederum auf die Wirklichkeit anzuwenden. Die von VOM HOFE genannten Punkte finden sich ebenfalls in allen in 4.3. genannten Arbeiten aus der Psychologie – wobei VOM HOFE selbst schon auf PIAGET eingeht. So ergibt sich bei BRUNER, GOODNOW und AUSTIN schon aus der Struktur der affektiven, funktionalen und lebensweltlichen formalen Kategorien, dass die Sinnkonstituierung eines Begriffs dessen erneute Anwendung auf die Wirklichkeit ermöglicht, BRUNERs Entwicklungstheorie betont darüber hinaus den Aufbau von Repräsentationen als Voraussetzung der Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit. Bei ROSCH ist der Aufbau von Repräsentationen wiederum essentiell, bedingt die Sinnkonstituierung eines Begriffs und macht dadurch wiederum dessen Anwendung auf die Wirklichkeit möglich.

VOM HOFE selbst weist schon darauf hin, dass sich aus psychologisch unterschiedlichen Theorien für die Didaktik ein gemeinsames Grundvorstellungsmodell herausschäle (vgl. vom Hofe 1995, S. 95). Damit sind Sinnkonstituierung eines Begriffs, der Aufbau (visueller) Repräsentationen und die Fähigkeit zur Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit ein kleinster gemeinsamer Nenner von Theorien zur Begriffsbildung. Diese Punkte sind damit von nicht zu unterschätzender Bedeutung für den Prozess der Begriffsbildung, aber scheinen dennoch ungeeignet, einen für die Schule tragfähigen Grundvorstellungsbegriff zu charakterisieren. Auch VOM HOFEs lange Reihe weiterer Bezeichner (vgl. vom Hofe 1995, S. 99f), die ebenfalls Welt, Individuum und Mathematik in Beziehung zueinander setzen, macht die Allgemeinheit seiner Grundvorstellungsidee deutlich. Insbesondere die Nennung von Concept Image als eines mit Grundvorstellungen sehr eng verwandten Begriffs verdeutlicht für den Rahmen dieser Arbeit die Vagheit und Unverbindlichkeit von VOM HOFEs Grundvorstellungsbegriff – wenn man außerdem in Betracht zieht, dass der Bezug von Concept Image zu Grundvorstellungen auch bei Weigand (2015) unscharf bleibt, und dass Prediger (2008) im Gegensatz zu vom Hofe Concept Definition mit Grundvorstellungen gleichsetzt, wird die Unverbindlichkeit der Verwendung des auf vom Hofe zurückgehenden Bezeichners in der weiteren Mathematikdidaktik deutlich.

Vor dem Hintergrund obiger Ausführungen verwundert es nicht, dass vom Hofes drei Aspekte der Grundvorstellungsidee Benders Grundvorstellungen und -verständnisse in verschiedener Hinsicht berühren. So spricht, um mit vom Hofes zweitem Punkt zu beginnen, „Aufbau […] (visueller) Repräsentationen bzw. ‚Verinnerlichungen', die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen" den Aufbau von Vorstellungen an sich, in der Bedeutung Benders, an. Dabei wird allerdings die Veranschaulichung verbaler Vorstellungen betont, die Verbalisierung bildhafter Vorstellungen ist nachrangig. Zudem wird, über Bender hinausgehend, von operativem Handeln auf der Vorstellungsebene gesprochen – dieser Punkt hat vor allem mittels Piaget die Grundvorstellungsidee erreicht. Weiterhin meint „Sinnkonstituierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen" den Aufbau von Vorstellungen und Verständnissen durch Anknüpfung an den epistemologischen Kern der Begriffe oder die Verankerung von Begriffen in der Lebenswelt.[175] Schließlich berührt „Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur" sowohl Benders epistemologischen Kern der Begriffe als auch die Verankerung in der Lebenswelt und den fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet. Insgesamt stellt vom Hofe allerdings, wohl bedingt durch seinen Rückgriff auf vor allem die Volks- und Hauptschuldidaktik und auf die Entwicklungspsychologie, die Anknüpfung an bekannte Sach- und Handlungszusammenhänge und die Anwendung auf die Lebenswelt stärker heraus, als Bender. Zudem liegt bei vom Hofe die Betonung von Grundvorstellungen deutlich auf >>Vorstellungen<<, wohingegen Bender explizit >>Grund-<< hervorhebt. Vom Hofe betont sowohl mit der Anknüpfung an Sach- und Handlungszusammenhänge und der Anwendung auf die Lebenswelt als auch mit >>Vorstellungen<< den Zweckcharakter von Grundvorstellungen. Bender geht mit seiner Beschreibung der Bedeutung von >>Grund-<< stärker darauf ein, wie Grundvorstellungen aufgebaut werden können. Bender und vom Hofe stimmen jedoch darin überein, dass sie Grundvorstellungen als ein Mittel sehen, mit Hilfe dessen Begriffswissen aufgebaut und gegen Fehlvorstellungen vorgegangen werden soll.

[175] Hierbei wird davon ausgegangen, dass Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen inner- und außermathematischen Charakter haben können. Vom Hofes dritter Punkt macht aber deutlich, dass der Lebenswelt entnommene Sachzusammenhänge in seinem Grundvorstellungsbegriff eine große Rolle spielen.

Für die vorliegende Arbeit sollen Grundvorstellungen aufgrund der Allgemeinheit und damit verbundenen Vagheit von VOM HOFEs Grundvorstellungsidee zunächst entsprechend BENDER als Vorstellungen und Verständnisse, die geprägt sind durch ihre allgemeine Verbindlichkeit, die Verankerung in der Lebenswelt sowie den fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet, gefasst werden. SCHREIBER (2011, S. 88) fügt den schon von BENDER angesprochenen Aspekten insbesondere das Kriterium der psychologischen Plausibilität hinzu – dieses Kriterium erlaubt eine Anknüpfung an das Begriffsbild der Schülerinnen und Schüler.[176] Die Möglichkeit der Ergänzung des BENDERschen Grundvorstellungsbegriffs um das Kriterium der psychologischen Plausibilität verdeutlicht daher die Eignung dieses Grundvorstellungsbegriffs für die vorliegende Arbeit. Grundvorstellungen haben in der vorliegenden Arbeit, wiederum anknüpfend an BENDER,[177] einen ausschließlich normativ-konstruktiven Charakter[178] – der deskriptive Aspekt ist im Begriffsbild enthalten, an das konstruktiv angeknüpft werden soll. So wird auch der, vor allem aufgrund von teilweise normativen und teilweise deskriptiven Bezügen, verwirrenden und teilweise widersprüchlichen Verwendung des Bezeichners, wie sie sich in Anlehnung an VOM HOFE findet, vorgebeugt.[179] In Kapitel 7. wird dann, basierend auch auf den BENDERschen Grundvorstellungen und -verständnissen, ein Werkzeug, das helfen soll, einen im Hinblick auf den Aufbau von Grundvorstellungen gehaltvollen Unterricht zu planen, durchzuführen, zu evaluieren und zu reflektieren,[180] und das damit einen normativ-konstruktiven Maßstab für diesen liefert, entwickelt.

6.3. Grundvorstellungen exemplarisch

Im Folgenden soll nun ein Blick auf bereits vorhandene inhaltsspezifische Grundvorstellungen geworfen werden. Dabei wird, weil zu Grundvorstellungen in der Geometrie bisher nur wenig publiziert wurde, zunächst ein Blick auf Grundvorstellungen außerhalb der Geometrie geworfen. Diese werden dann vor dem Hintergrund der theoretischen Ausführungen vor allem nach BENDER reflek-

---

[176] Es ist allerdings darauf hinzuweisen, dass SCHREIBER (2011) den Grundvorstellungsbegriff neben der hier angesprochenen normativen Nutzung auch deskriptiv verwendet.

[177] Auch bei GRIESEL (1973 & 1996) hatten Grundvorstellungen schon normativen Charakter – siehe hierzu auch 6.3.1..

[178] Auch andere, bisher nicht genannte Aspekte des Grundvorstellungsbegriffs, wie der segmentive Aspekt (vgl. Kleine 2007), werden damit explizit ausgeklammert.

[179] Bei VOM HOFE findet sich neben verschiedenen Grundvorstellungslisten der Hinweis, „[b]ei Grundvorstellungen ist nicht an eine Kollektion von stabilen und ein für allemal gültigen gedanklichen Werkzeugen zu denken, […]“ (vom Hofe 2003, S. 6).

[180] Planen bezieht sich hierbei auf die theoretische Durchdringung und methodische Aufbereitung des Unterrichtsstoffes, Durchführen auf die Umsetzung der Planung, Evaluieren beziehungsweise Reflektieren auf die stärker schülerinnen- und schüler- beziehungsweise stärker unterrichts- und lehrpersonbezogene Einschätzung und Bewertung des durchgeführten Unterrichts. Planen, Durchführen, Evaluieren und Reflektieren wird in der vorliegenden Arbeit im Weiteren unter Gestalten zusammengefasst, wobei davon ausgegangen wird, dass Evaluationen und Reflexionen jeweils die Planung und Durchführung zukünftigen Unterrichts beeinflussen.

tiert. Anschließend wird auf die wenigen Arbeiten aus der Geometrie eingegangen.

6.3.1. Außerhalb der Geometrie

Die wohl bekanntesten und am weitesten verbreiteten Grundvorstellungen beziehen sich auf Brüche. Daher werden diese Grundvorstellungen zunächst, im Sinne eines prototypischen Vertreters, thematisiert, bevor auf Grundvorstellungen oder unter Grundvorstellungen subsumierte Aspekte zu weiteren Begriffen eingegangen wird. Mit Bezug auf Brüche werden folgende Grundvorstellungen (vgl. Hefendehl-Hebeker 1996, S. 20ff; Hischer 2012, S. 256ff) unterschieden, so dass die Form einer „Grundvorstellungsliste“ entsteht:

- Bruch als Teil eines Ganzen (z. B. $\frac{3}{4}$ von 1),
- Bruch als Teil mehrerer Ganzer (z. B. $\frac{1}{4}$ von 3),
- quasikardinaler Aspekt (z. B. drei Viertel mit der neuen Einheit „Viertel“),
- quasiordinaler Aspekt (z. B. jedes Vierte ist schwarz, der Rest ist weiß),
- Bruch als Zahlenverhältnis (z. B. drei von vier oder eins zu drei) und
- Bruch als Vergleichsinstrument (z. B. das $\frac{3}{4}$-fache von …).

Die einzelnen Grundvorstellungen lassen sich folgendermaßen visualisieren (Abbildung 86). Solche Visualisierungen dienen dabei zur Veranschaulichung verbaler Vorstellungen und können daher auch den Aufbau innerer Repräsentationen unterstützen.

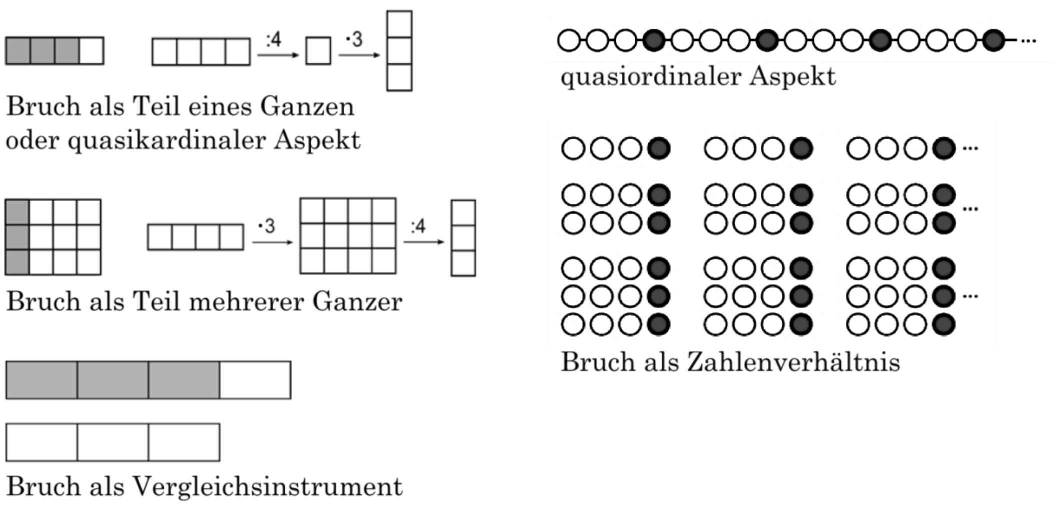


Abbildung 86: Grundvorstellungen zu Brüchen (vgl. Hischer 2012, S. 265ff)

Auch für weitere Begriffe werden Grundvorstellungen häufig in Form von Grundvorstellungslisten formuliert[181] – die in den folgenden Listen subsumierten Punkte werden von den Autoren BLUM und KIRSCH, MALLE sowie MALLE und MALLE in Beiträgen der Zeitschrift „mathematik lehren“ explizit als >>Grund-

[181] Für die Auflistung der folgenden Listen wird nicht der Anspruch der Vollständigkeit erhoben.

vorstellungen<< bezeichnet. Es führen beispielsweise Blum und Kirsch (1996, S. 60ff) Grundvorstellungen zu Ableitung und Integral auf:

- Ableitung als lokale Änderungsrate,
- Ableitung als Steigung eines Funktionsgraphen,
- Integral als verallgemeinertes Produkt,
- Integral als Flächeninhalt.

Blum und Kirsch subsumieren unter die einzelnen Grundvorstellungen jeweils Beispiele für deren kontextbezogene Anwendung mit auch außermathematischem Bezug – unter „Ableitung als lokale Änderungsrate“ unter anderem „die Momentangeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt als lokale (momentane) Änderungsrate des zurückgelegten Wegs in bezug auf diese Zeit“ (Blum und Kirsch 1996, S. 60). Auch Blum und Törner (1983) beziehungsweise Blum und Kirsch (1979) formulierten schon >>Grundverständnisse<< beziehungsweise >>Grundverständnisse<< und >>Grundvorstellungen<<[182] zu Ableitung[183] und Integral[184], die sich mit obigen Grundvorstellungen überschneiden und ebenso mittels vielfältiger Beispiele in Kontexte auch außermathematischer Art eingebettet werden können.[185]

Malle (2003, S. 58) listet Grundvorstellungen zum Differenzenquotienten:

- Differenzenquotient als Änderungsverhältnis,
- Differenzenquotient als mittlere Änderung pro Einheit,
- Differenzenquotient als Änderungsfaktor.

Malles Darlegung seiner Grundvorstellungen wird zunächst nicht in einen weiteren Kontext eingebettet. Seine Grundvorstellungen werden erst im Rahmen

---

[182] Blum und Kirsch betonen den Zweckcharakter von Grundvorstellungen:

> Diese Grundvorstellungen sollen sich beim Schüler einprägen. Sie sollen ihn – d. h. den späteren Nichtmathematiker [aufgrund des Bezug zum Analysisunterricht der Grundkurse] – in die Lage versetzen, *mit den einfachsten Begriffen, Methoden und Sätzen der Analysis bei inner- und außermathematischen Problemen umzugehen*. Dieses Handhaben der Analysis insbesondere auch in anderen Schulfächern oder im späteren Studium bzw. Beruf, soll nicht nur rezeptmäßig bei vorgegebenen Beispielen bekannter Art, sondern *verständig* erfolgen, auch in „nichtgehabten“ Situationen.
>
> (Blum & Kirsch 1979, S. 6)

Grundvorstellungen sehen Blum und Kirsch dabei den Grundverständnissen zu- beziehungsweise untergeordnet, formulieren diese allerdings nicht so präzise wie jene.
Während Bender mit seinen Grundvorstellungen und -verständnissen schließlich beide Bezeichner zusammengeführt hat, beschränkt vom Hofe sich auf nur ersteren.

[183] Ableitung als Änderungsrate und Ableitung als lineare Approximation (vgl. Blum & Törner 1983, S. 91ff; Blum & Kirsch 1979, S. 10ff).

[184] Integral als verallgemeinertes (Größen-)Produkt, Integral als Mittelwert und Stammfunktion (vgl. Blum & Törner 1983, S. 159ff) beziehungsweise Integral als Flächeninhalt und Stammfunktionsintegral (vgl. Blum & Kirsch 1979, S. 14ff).

[185] Blum und Kirsch (1996) verweisen allerdings von den hier genannten Beiträgen ausschließlich auf Blum und Kirsch (1979).

seiner „Musteraufgaben zur Förderung von Grundvorstellungen“ (Malle 2003, S. 61) in Kontexte mit auch außermathematischem Bezug eingebunden.

MALLE und MALLE (2003, S. 53) gehen auf Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeiten ein:

- Wahrscheinlichkeit als Maß für eine Erwartung,
- Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil,
- Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit,
- Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen.

In MALLE und MALLEs Grundvorstellungen ist dabei der Bezug zu Häufigkeits- oder Wahrscheinlichkeitserhebungen, auch in außermathematischen Kontexten, implizit schon enthalten, er wird in weiteren Ausführungen zu den Grundvorstellungen aber auch offengelegt.

Es lässt sich weiterhin die Tendenz feststellen, in der Stoffdidaktik als Aspekte eines Begriffs festgestellte Punkte in Listenform unter Grundvorstellungen zu subsumieren, ohne dass die Begriffe Aspekt und Grundvorstellung voneinander abgegrenzt werden. (Damit gehen die schon in 6.2.2. und 6.2.3. angesprochenen Ebenen der Mathematik und der Grundvorstellung in VOM HOFEs Modell zur Ausbildung von Grundvorstellungen ineinander über.) So erwähnt VOM HOFE (2003) mit Verweis auf PADBERG (1996) Grundvorstellungen zum Begriff der natürlichen Zahlen, wobei PADBERG selbst diesbezüglich von Zahlaspekten spricht.[186] Ebenso führt er, mit Verweis auf MALLE (1993) Grundvorstellungen zum Variablenbegriff auf, wo MALLE selbst von Variablenaspekten spricht.[187] Statt von Grundvorstellungen zum Funktionsbegriff ist bei VOLLRATH (1989) und MALLE (2000) gleichermaßen von Aspekten von Funktionen die Rede. Diese Gleichsetzung von Grundvorstellungen und Aspekten ist umso problematischer, da die Begriffe Grundvorstellungen und Aspekte auch nebeneinander verwendet werden können, wie PADBERGs (1989 und 2009) Unterscheidung von Bruchzahlaspekten und Grundvorstellungen von Brüchen oder VOHNS (2007) Betrachtung von Grundvorstellungen zu den einzelnen Zahlaspekten zeigt.

Zudem wird der Bezeichner >>Grundvorstellungen<< auch dann verwendet, wenn der Begriff intuitiven und unscharfen Charakter hat – dieser Fall liegt beispielsweise in den oben schon angesprochenen Beiträgen von BLUM und KIRSCH (1996), MALLE (2003) sowie MALLE und MALLE (2003) vor. Aber auch GRIESEL kommuniziert einen nur vagen Grundvorstellungsbegriff. Er spricht beispielsweise 1971 (Griesel 1971b) schon von Grundvorstellungen, legt aber selbst sei-

[186] Die einzelnen Grundvorstellungen beziehungsweise Aspekte sollen an dieser Stelle jeweils nicht aufgeführt werden.
[187] FÜHRER (1999) und LAMBERT (2014) entwickeln MALLEs Variablenaspekte dabei unter dem Bezeichner >>Variablenaspekte<< weiter.

nem Themenbeitrag zu Grundvorstellungen (Griesel 1996) keine Definition oder zumindest Beschreibung des Begriffs zu Grunde. Stattdessen hat >>Grundvorstellungen<< den Charakter von normativen Vorstellungen:

> Alles menschliche Denken und alles Anwenden von Mathematik auf reale Sachverhalte hängt eng mit Vorstellungen, mit visuellen Bildern zusammen, welche mehr oder weniger prägnant und mehr oder weniger detailliert in mente vorhanden sind oder vom Menschen gewissermaßen kreativ in mente geschaffen werden. Nicht zufällig werden daher in der Umgangssprache die Verben ‚Denken' und ‚Vorstellen' auch synonym verwendet.
>
> […]
>
> Die von Schülern aufzubauenden Grundvorstellungen bei der Behandlung der jeweiligen Größen sind spezifisch für die jeweilige Größe und können daher hier nicht pauschal beschrieben werden.
>
> (Griesel 1996, S. 16)

Entsprechend formuliert er konkrete Grundvorstellungen als normative Vorstellungen. Als Grundvorstellung zur Addition zweier Größen wird bei Griesel dann die „Zusammenfassung (Vereinigung) (quasidisjunkter) Repräsentanten" (Griesel 1973, S. 70) genannt, oder genauer:

> Zu $4+3$ gehört die Grundvorstellung, daß eine Menge mit 4 Elementen und eine Menge mit 3 Elementen zu einer Gesamtmenge zusammengefaßt werden und $4+3$ den Anzahlwert (die Zahleigenschaft) dieser Gesamtmenge angibt.
>
> (Griesel 1996, S. 18)

Werden die Grundvorstellungslisten vor dem Hintergrund der Benderschen Grundvorstellungen und -verständnisse betrachtet, so fällt auf, dass sie sich sämtlich, weil sie auf stoffdidaktischen Analysen beruhen, durch allgemeine Verbindlichkeit auszeichnen und auch einen fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet durch entsprechende Umsetzung im Unterricht bekommen können. Die Verankerung in der Lebenswelt ist den Listen allerdings nicht inhärent, sie ergibt sich erst durch Verweise auf kontextbezogene Anwendungen mit teilweise auch außermathematischem Bezug, die entweder beispielhaften (wie bei Blum und Kirsch (1996)) oder allgemeinen Charakter (wie bei Malle und Malle (2003)) haben – hierin zeigt sich, dass der Grundvorstellungsbegriff bei den entsprechenden Autorinnen und Autoren von Bender unterschiedlich verwendet wird, da dieser schon einzelne Beispiele, mittels der ein Begriff in der Lebenswelt verankert wird, als Grundvorstellung und -verständnis wertet (vgl. Bender 1991a). Der Aufbau von Vorstellungen und Verständnissen im benderschen Sinn wird durch die angegebenen Grundvorstellungslisten schließlich vor allem dann möglich, wenn die genannten Punkte durch bildhafte oder weitere beschreibende verbale Darstellungen angereichert werden.

Es ist weiterhin darauf hinzuweisen, dass die Grundvorstellungslisten sich auch durch den Hintergrund der VOM HOFEschen Grundvorstellungsidee nicht vollständig erklären lassen – so bleibt eine Möglichkeit der Umsetzung in Sachzusammenhängen für einige der Grundvorstellungen erst festzustellen, insbesondere ist der Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen beziehungsweise Verinnerlichungen aber nicht in jedem Fall möglich.[188]

6.3.2. In der Geometrie

Für den Bereich der Geometrie wurden bisher kaum Grundvorstellungen formuliert, wie auch beispielsweise STRÄßER (vgl. Sträßer 2015) festgestellt hat. Auf die wenigen Arbeiten, in welchen Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen formuliert werden, kann daher sämtlich eingegangen werden. Mit Bezug auf den Flächeninhalt unterscheidet WÖRNER (2014a, S. 1328 & 2014b, S. 155f), subsumiert unter >>Grundvorstellungen<<, folgende an die Axiome des Flächeninhaltsbegriffs angelehnte Konzepte:

– Maßzahl-Konzept:
  Die Schülerinnen und Schüler erkennen den Flächeninhalt einer Figur als eine positive Maßzahl, die mit Hilfe von normierten Flächeninhaltsmaßen bestimmt wird.
– Summen-Konzept:
  Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der Flächeninhalt einer Figur sich durch die Summe der Teilfiguren ergibt, aus denen die Figur sich zusammensetzen lässt.
– Vergleichskonzept-Konzept I:
  Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass kongruenten Figuren dieselbe Maßzahl zugeordnet wird.
– Vergleichskonzept-Konzept II (Zerlegungs- und Ergänzungskonzept):
  Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass zwei Figuren flächeninhaltsgleich sind, wenn sie sich in dieselbe Anzahl von deckungsgleichen Teilfiguren zerlegen oder sich durch dieselbe Anzahl von Teilfiguren zu neuen deckungsgleichen Figuren ergänzen lassen.

WÖRNER formulierte zunächst die Axiome des fachwissenschaftlichen Flächeninhaltsbegriffs zu Leitideen um und ging von diesen Leitlinien zu Grundvorstellungen über. WÖRNERs Darlegung ihrer Grundvorstellungen wird im Rahmen ihrer empirischen Untersuchung dann in einen weiteren Kontext mit auch außermathematischem Bezug eingebettet.

Weiterhin geht OSTERMANN (2006, S. 64ff) auf Grundvorstellungen der ebenen und räumlichen Koordinatengeometrie ein, und unterscheidet insgesamt 19

[188] Beispielsweise ist der Aufbau visueller Repräsentationen für die Grundvorstellung des Differenzenquotienten als Änderungsfaktor oder der Wahrscheinlichkeit als subjektives Vertrauen nicht möglich.

Grundvorstellungen, die auch als wichtige Aspekte des Themas gelesen werden können. Um deren Charakter aufzuzeigen, werden die ersten drei dieser sogenannten Grundvorstellungen im Folgenden angegeben:

- Der kürzeste Weg zwischen einem Weg-Anfangspunkt A und einem Weg-Endpunkt B kann als orientierte Strecke, genannt $\overrightarrow{AB}$, graphisch im Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ dargestellt werden. Das geordnete Zahlenpaar bzw. -tripel kann sowohl in Spalten- als auch in Zeilenform angegeben werden.
  $\overrightarrow{AB} = (x|y)$ bzw. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bzw. $\overrightarrow{AB} = (x|y|z)$ bzw. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
  Berechnet werden kann ein Pfeil $\overrightarrow{AB}$ aus den Koordinaten des Anfangspunktes A und des Endpunktes B auf folgende Weise:
  $\overrightarrow{AB} = B - A$ („Spitze Minus Schaft-Regel")
- Addiert man zu einem Punkt A den Pfeil $\overrightarrow{AB}$, so erhält man den Endpunkt B des Pfeils $\overrightarrow{AB}$.
  $B = A + \overrightarrow{AB}$ („APPEnd-Regel" oder „Pfeil-Anhänge-Regel")
- Zwei Vektoren heißen gleich, wenn ihre Repräsentanten dieselbe Pfeillänge haben, parallel und gleich orientiert sind.

OSTERMANN verfasste ihre sogenannten Grundvorstellungen basierend auf dem österreichischen Lehrplan für die Oberstufe.

Darüber hinaus geht HATTERMANN (2015) auf die Begriffe Kreis und Orthogonale ein und nennt mit zurückhaltender Wortwahl „[m]ögliche Aspekte einer Grundvorstellung" (Hattermann 2015, S. 79). Im Folgenden werden ausschließlich die für den Kreis genannten Aspekte thematisiert (Hattermann 2015, S. 79), wobei die Aspekte zur Orthogonalen den gleichen Charakter haben:

- Implizite Gleichung:
  $x^2 + y^2 = r^2$
- Definition:
  Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die zu einem vorgegebenen Mittelpunkt den gleichen Abstand besitzen.
  Ein Kreis wird eindeutig beschrieben durch Angabe seines Mittelpunktes und eines Punktes auf der Kreislinie.
- Eigenschaften / Schüleradäquate Vorstellungen / Konstruktionsmöglichkeiten:
  Ein Kreis wird benutzt, um äquidistante Abstände abzutragen. Jeder Punkt P auf der Kreislinie besitzt den gleichen Abstand (Radius) zum Mittelpunkt M des Kreises $dist(M, P) = r$.
  Jede Strecke $\overline{MA}$, die M als Anfangspunkt besitzt und deren Endpunkt A auf der Kreislinie liegt, ist ein Radius des Kreises.

Der Punkt A einer konstanten Strecke $\overline{MA}$ „zeichnet" bei Rotation der Strecke um M eine Kreislinie.
Für einen festen Radius r und jeden Winkel φ zwischen 0 und 2π liegt der Punkt $P\ (r \cdot cos\varphi; r \cdot sin\varphi)$ auf dem Kreis der Ursprungslage mit Radius r.
Der Kreis ist eine Kurve mit konstanter Krümmung.
Gehe von einem Punkt eine kleine Strecke nach vorne und drehe dich um 1°. Gehe die gleiche Strecke nach vorne und drehe dich um 1°… dann bewegst du dich annähernd auf einem Kreis.

- Konstruktionswerkzeuge:
  Zirkel; gespannter Faden; dynamische Geometriesoftware.

HATTERMANNs „Aspekte einer Grundvorstellung" zeichnen sich dabei schon durch einige Ungenauigkeit aus. So gibt HATTERMANN einerseits die implizite Gleichung für einen Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung an, verweist aber andererseits darauf, dass der Mittelpunkt „vorgegeben" und damit zunächst beliebig sein kann. Zudem bezeichnet er als Radius einerseits den Abstand eines Punktes auf der Kreislinie zum Mittelpunkt, andererseits aber die Strecke selbst.[189]

In den oben genannten Arbeiten zur Geometrie wird der Bezeichner >>Grundvorstellungen<< jeweils mit explizitem Verweis auf VOM HOFE (1995) verwendet, von HATTERMANN aber dennoch mehr als ein Synonym zu Vorstellungen gebraucht. Dabei sind die Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff noch unter den VOM HOFEschen Grundvorstellungen zu fassen, da die Umsetzung in Sachzusammenhängen möglich ist und der Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen beziehungsweise Verinnerlichungen durch die Einbettung in solche Sachzusammenhänge auch möglich wird. Dies wiederum sollte dann auch die Fähigkeit zur Anwendung des Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur bedingen. Mit Bezug auf die Grundvorstellungen und -verständnisse nach BENDER ist zu erwähnen, dass die Verankerung in der Lebenswelt den Grundvorstellungen nicht inhärent ist, und dass, auch wenn sie sich durch einen außermathematischen Bezug ergeben kann, deswegen doch die Verwendung des Grundvorstellungsbegriffs nicht mit der BENDERschen übereinstimmt (wie auch schon in 6.3.1. angesprochen). Weiterhin lassen sich aber die sogenannten Grundvorstellungen zur ebenen und räumlichen Koordinatengeometrie sowie die Aspekte einer Grundvorstellung bei HATTERMANN nur schwer unter der VOM HOFEschen Grundvorstellungsidee fassen und ebenso schlecht vor dem Hintergrund der Grundvorstellungen und -verständnisse nach BENDER betrachten. So ist, da kaum mehr als rein inhaltliche Begriffsaspekte gegeben sind, nach VOM HOFE die Anknüpfung an bekannte

[189] Diese Ungenauigkeit ist umso irritierender, da BENDER schon darauf hingewiesen hat, dass einzelne Vorstellungen und Verständnisse auf den Formulierungen, mit denen sie kommuniziert werden, beruhen (siehe 6.2.1.).

Sach- oder Handlungszusammenhänge auch nicht implizit enthalten und schwierig zu gestalten, was Folgen für die Anwendung auf die Wirklichkeit haben kann. Ebenso fehlt nach BENDER die Verankerung in der Lebenswelt. Auch der Aufbau von inneren Repräsentationen wird erst durch eigenständige Visualisierung möglich, was den Aufbau von Vorstellungen und Verständnissen an sich im BENDERschen Sinn erschwert.

Letztlich findet sich für den Bereich der Geometrie eine Arbeit zu Grundvorstellungen zum Winkelbegriff von BÖHMER (1999). In diesem Fall wird auf VOM HOFE verwiesen, allerdings nur ein sehr offener Grundvorstellungsbegriff im Sinn von „Anschauungen, Vorstellungen, Verinnerlichungen“ (Böhmer 1999, S. 6) vorausgesetzt. Es wird keine Grundvorstellungsliste formuliert, stattdessen werden verschiedene Möglichkeiten, Grundvorstellungen auszubilden und dabei insbesondere zu beachtende Aspekte genannt – so wird auf die Verankerung in der Lebenswelt und Veranschaulichungsmittel eingegangen, auch die Verwendung des Bezeichners >>Winkel<< in der Umgangssprache ist bedacht. Insgesamt lassen sich die genannten Anregungen zum Aufbau von Grundvorstellungen zum Winkelbegriff damit sogar entsprechend der Grundvorstellungen und -verständnisse nach BENDER oder unter der VOM HOFEschen Grundvorstellungsidee als Ganzes fassen.

6.3.3. Zwischenfazit – Grundvorstellungen exemplarisch

Mit Bezug auf die betrachteten inhaltsspezifischen Grundvorstellungen aus verschiedenen mathematischen Gebieten, unter anderem der Geometrie, ist zunächst zusammenzufassen, dass der Grundvorstellungsbegriff auch von solchen Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern, die sich der Formulierung von Grundvorstellungen gewidmet haben, teilweise nur in einer intuitiven und unscharfen Form verwendet wird. Folglich verwundert es nicht, wenn Grundvorstellungslisten nur eingeschränkt in einen theoretischen Rahmen zu Grundvorstellungen passen. Solche Grundvorstellungslisten beruhen meist auf stoffdidaktischen oder fachmathematischen Betrachtungen zu Begriffen und wurden nachträglich dem Grundvorstellungsbegriff untergeordnet (was insbesondere mit Bezug auf die unter Grundvorstellungen subsumierten Begriffsaspekte deutlich wird).

Darüber hinaus ist festzustellen, dass zu nur sehr wenigen geometrischen Begriffen bisher Grundvorstellungen formuliert wurden. Es lassen sich beispielsweise die Grundvorstellungen zu Brüchen und auch jene zu Ableitung, Integral und Differenzenquotient zumindest teilweise geometrisieren und damit auch veranschaulichen. Eine solche Veranschaulichung des Begriffs wird dabei häufig als Voraussetzung zum Aufbau von inneren Repräsentationen gesehen (vgl. vom Hofe & Fast 2015). Geometrische Begriffe sind jedoch per se geometrisiert, viele geometrische Begriffe sind auch schon anschaulich – was jedoch nicht bedeutet, dass für geometrische Begriffe keine Grundvorstellungen benötigt werden. Dies machen einerseits die in 5.6. aufgeführten Fehler im Begriffsverständnis und andererseits BENDERs Verweis auf sowohl einen bildhaften als auch einen verbalen Modus von Vorstellungen (siehe 6.2.1.) deutlich. Ein Betonen der verbalen Vorstellungen darf allerdings nicht dazu führen, dass im Gegenzug jegliche Veranschaulichungen unterschlagen oder den Lernenden selbst überlassen werden.

Weiterhin kann der Mangel konkreter Grundvorstellungen zu geometrischen Begriffen darauf beruhen, dass Grundvorstellungen (und unter Grundvorstellungen subsumierte Begriffsaspekte) sich teilweise auf Leitbegriffe (die entsprechend VOLLRATH und WEIGAND über mehrere Klassenstufen hinweg von Bedeutung sind, siehe 3.1.) beziehen. Geometrische Leitbegriffe, beispielsweise Körper, Figur und Abbildung, sind jedoch viel allgemeiner und damit weniger leicht zu veranschaulichen und (mit Ausnahme der Maßbegriffe) auch nicht-definitorisch zu verbalisieren, als Schlüsselbegriffe.

Bei ULLMANN heißt es zur breiten Verwendung des Grundvorstellungsbegriffs:

> Aufgrund seiner Anschaulichkeit, Praktikabilität und weitgehenden Theoriefreiheit (vgl. [vom Hofe 1995,] S. 125 f.) hat sich das Grundvorstellungskonzept sowohl schul- als auch forschungspraktisch als ausgesprochen anschlussfähig erwiesen […].
>
> (Ullmann 2015, S. 14)

Dabei ist allerdings zu betonen, dass bei der Formulierung von Grundvorstellungen dennoch nicht der (wenn auch knappe) theoretische Rahmen vernachlässigt werden darf. Weiter weist ULLMANN darauf hin, dass ein auf den Aufbau von Grundvorstellungen zielender Unterricht nicht zu einer ausschließlichen Orientierung an Grundvorstellungslisten verkommen darf, sondern dass diese Listen für eine Verwendung im Unterricht wieder angereichert werden müssen. Diesbezüglich ist auch zu erwähnen, dass BENDER selbst, der sich theoretisch mit Grundvorstellungen und -verständnissen beschäftigt und dabei angemerkt hat, dass kein Algorithmus zur Aufstellung von Grundvorstellungen und -verständnissen entwickelt werden kann, keine Grundvorstellungslisten aufstellt. Stattdessen formuliert er einzelne mögliche Grundvorstellungen und -verständnisse und betont, wie eng der Aufbau von Grundvorstellungen und -verständnissen mit einer korrekten Sprachverwendung zusammenhängt (vgl. Bender 1991a; Bender 1991 b). An dieser Stelle ist auch an den Beitrag von BÖHMER zu erinnern, der, auch wenn oder gerade weil er keine Grundvorstellungslisten formuliert, sich besser als die anderen Vorschläge konkreter Grundvorstellungen in den gegeben theoretischen Rahmen einfügt.

Insgesamt kann somit geschlossen werden, dass die Berücksichtigung von in Grundvorstellungslisten aufgeführten Punkten mit Sicherheit dem Aufbau eines breiten Begriffsverständnisses zuträglich ist, dass jedoch ein sich an solchen Listen orientierender Unterricht nicht zwangsläufig den Aufbau von Grundvorstellungen fördert und keinesfalls die einzige Möglichkeit darstellt, Grundvorstellungen aufzubauen. Da entsprechend BENDER kein Algorithmus zur Aufstellung von Grundvorstellungen bereit steht und sich außerdem nicht jeder Begriff eignet, dazu eine Grundvorstellungsliste zu formulieren, kann das Ziel nur lauten, einen allgemein auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht zu gestalten – zu diesem Zweck wird in Kapitel 7. ein Modell als unterstützendes Werkzeug entwickelt.

6.4. Exkurs: Einbettung in die Ideen-Diskussion

Seit etwa 1970 ist in der deutschen Mathematikdidaktik eine Diskussion um Fundamentale Ideen, die auch unter anderem als >>Leitideen<<, >>Universelle Ideen<<, >>Zentrale Ideen<< oder >>Grundlegende Ideen<< bezeichnet werden, im Gange, wobei die unterschiedlichen Bezeichner nicht zwangsläufig synonym verwendet werden. Einen Überblick über die verwendeten Bezeichner gibt dabei VON DER BANK (2013) (Abbildung 87):

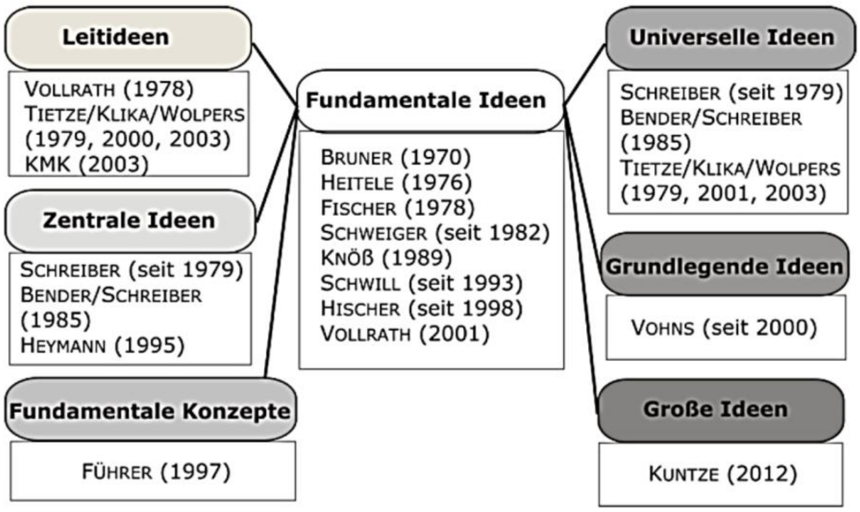


Abbildung 87: Im Rahmen der Diskussion um Fundamentale Ideen verwendete Bezeichner nach VON DER BANK (2013, S. 93)

Die Diskussion um Fundamentale Ideen widmet sich der Frage, welche Ideen dazu dienen können, den Mathematikunterricht global zu strukturieren. Die verschiedenen sich hinter >>Fundamentale Idee<< oder auf ähnliche Begriffe verweisenden Bezeichnern verbergenden Ansätze sollen im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht nachgezeichnet werden, VOHNS (2007) und VON DER BANK (2013) dienen diesbezüglich als Übersichtsarbeiten.

Die angesprochene Ideen-Diskussion berührt den Grundvorstellungsbegriff, was schon bei VOLLRATH durch eine Beschreibung der Bedeutung des (bei ihm naiv verwendeten) Bezeichners deutlich wird:

> Wenn ich im folgenden von Ideen spreche, dann meine ich damit den entscheidenden Gedanken eines Themas, den wesentlichen Kern einer Überlegung, den fruchtbaren Einfall bei der Lösung eines Problems, die leitenden Fragestellungen einer Theorie, die zentrale Aussage eines Satzes, die einem Algorithmus zugrundeliegenden Zusammenhänge und die mit Begriffsbildungen verbundenen Vorstellungen.
>
> (Vollrath 1978, S. 29)

Auch VOHNS fasst Grundvorstellungen im Sinne Lokaler Ideen und Fundamentale Ideen unter einem Bezeichner zusammen – wobei >>Fundamentale Ideen<< hier verschiedene Konzeptionen Fundamentaler Ideen bezeichnet und >>Lokale Ideen<< lokal stärker begrenzte Konzeptionen mathematischer Ideen bezeichnet[190]:

> Eine mathematische Idee bezeichnet einen entscheidenden Gedanken, den man hinter gewissen Strategien, Techniken, Denk- und Handlungsmustern auszumachen sucht, den Versuch einer Antwort auf die Frage nach dem springenden Punkt, dem Verstehen ermöglichenden Kern einer Sache.
>
> (Vohns 2010, S. 230)

Wie bei dem Grundvorstellungsbegriff im Rahmen der vorliegenden Arbeit der Ausgangspunkt die Beziehung von Begriffsbild und Begriffskonvention ist und allgemein formuliert die Verbindung von natürlichem Umfeld und Mathematik ein zentraler Aspekt ist, ist auch ein Kernpunkt der Ideen-Diskussion die Beziehung von alltäglichem und wissenschaftlichem Denken (vgl. Vohns 2005; von der Bank 2014). Diese Parallelität macht wiederum VOHNS deutlich, wobei seine These vor dem Hintergrund des in 4.5. erarbeiteten theoretischen Rahmens besonders aussagekräftig wirkt:

> Didaktisch bedeutsam kann eine mathematische Idee dann werden, wenn sie zum Nachdenken über einen konkreten schulmathematischen Gegenstand einlädt, wenn sie hilft, ihn besser oder anders oder überhaupt einmal zu verstehen sowie hinsichtlich seiner Bedeutung einzuordnen.
>
> Solche Ideen sollten insbesondere geeignet erscheinen, Lehrer(innen) ebenso wie Schüler(innen) zum Nachdenken über Kohärenzen und Differenzen anzuregen
>
> - zwischen bereits Gelerntem (Gelehrtem) und noch zu Lernendem (Lehrendem),
> - zwischen implizit Genutztem /Geahntem und explizit Thematisiertem,

[190] VOHNS hält die Begriffe der Fundamentalen und Lokalen Ideen an dieser Stelle bewusst sehr offen, um verschiedene Ansätze darunter fassen zu können.

- zwischen alltäglichen und mathematischen Denk- und Handlungsweisen.

(Vohns 2010, S. 232)

Wie schon für den Begriff Grundvorstellungen festgestellt, wird auch für Fundamentale Ideen angemerkt, dass der Begriff häufig in einer intuitiven und unscharfen Form verwendet wird und damit an alltägliche Konnotationen anknüpft (vgl. Vohns 2010). Womöglich noch stärker, als versucht wird, den Grundvorstellungsbegriff durch die Angabe fester Grundvorstellungslisten zu bändigen, gipfelt eine Beschäftigung mit Fundamentalen Ideen häufig in der Formulierung von teilweise sehr unterschiedlichen „Ideenkatalogen“ mit einem innermathematischen Schwerpunkt (vgl. von der Bank 2013). VOHNS versucht diesbezüglich, Grundvorstellungen zu formulieren, indem er Fundamentale Ideen inhaltsspezifisch konkretisiert – würde dies für die verschiedenen Ideen und verschiedenen Unterrichtsinhalte unternommen, so ist aufgrund der Varietät der bestehenden Ideenkataloge und der Nicht-Eindeutigkeit des theoretischen Ansatzes fraglich, ob die entstehenden Grundvorstellungslisten sich unter einem festen Grundvorstellungsbegriff fassen lassen würden.

VON DER BANK (2013) erweitert die Begriffsbedeutung fundamentaler Ideen und unterscheidet schließlich zwischen Inhalt, Repräsentation, Tätigkeit, Genese und „Nichtkognitiven“ Zielen als Ideenkategorien, deren Vernetzung gefordert wird, um ihren Wirkungsgrad zu erhöhen. Insbesondere kann aus dieser weiteren Sicht auf Fundamentale Ideen geschlossen werden, dass Unterricht sich nicht primär an fest formulierten Ideenkatalogen ausrichten sollte, sondern sich stattdessen allgemein an Fundamentalen Ideen orientieren und damit die Vernetzung betonen sollte. Gleichermaßen wurde bereits die Notwendigkeit von einem allgemein auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht festgestellt. Dabei basieren reichhaltige Vernetzungen zwischen Inhalten, Repräsentationen, Tätigkeiten, Genese und „Nichtkognitiven“ Zielen auch auf einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht.

6.5. Das „Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten“

Das „Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten“ wurde als ein Weg der Begriffsbildung in der sowjetischen Philosophie und Psychologie betrachtet und hat von dort auch Einzug in die Mathematikmethodik der DDR gefunden. Weil entsprechend der Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten mit Bezug auf die Integration verschiedener Kontexte das normative Moment großes Gewicht hat, wird sie in der vorliegenden Arbeit erst im Rahmen der Grundvorstellungsdiskussion angesprochen, statt schon in Kapitel 4.. Dabei wird außerdem auf den Transfer der Methode in die westliche deutschsprachige Mathematikdidaktik eingegangen.

6.5.1. Die sowjetische Philosophie und Psychologie sowie die Mathematikmethodik in der DDR[191]

Zunächst ist das Bezeichnen der Begriffsbildung durch das Aufsteigen >>vom Abstrakten zum Konkreten<< irreführend, weil dadurch eine Begriffsbildung in zwei dialektischen Schritten beschrieben wird:

> Das Denken [...] besteht einerseits im Übergang vom Sinnlich-Konkreten und Einzelnen zum Gedanklich-Abstrakten und formal Gemeinsamen, andererseits im umgekehrten Weg, im Übergang vom Abstrakten zum Sinnlich-Konkreten bei der Definition und beim Erkennen einzelner Gegenstände als zu einer bestimmten (gemeinsamen) Klasse gehörend. Sowohl Anfang als auch Ende dieses Prozesses ist das Sinnlich-Konkrete (seine Klassifizierung und Systematisierung, seine Identifizierung und Unterscheidung).
>
> (Dawydow 1977, S. 46)

Der erste Schritt dieser Begriffsbildung wird auch als empirische Begriffsbildung bezeichnet. Er schließt das Abstrahieren von wahrgenommenen Repräsentanten und das Bilden eines empirischen Begriffs basierend auf gemeinsamen Eigenschaften der Repräsentanten ein. Der zweite Schritt wird hingegen als theoretische Begriffsbildung bezeichnet. Er beinhaltet die Bestimmung der Zusammenhänge des empirischen Begriffs zu den zu Grunde liegenden Repräsentanten sowie die Bestimmung der Rolle und Funktion der Beziehung verschiedener empirischer Begriffe zueinander und damit auf das Ableiten eines theoretischen Begriffs aus dem empirischen Begriff. Begründet wird die Unterscheidung von empirischer und theoretischer Begriffsbildung damit, dass während einem empirisch gebildeten Begriffssystem Willkür und Unvollständigkeit unterstellt werden kann, weil oft keine Gründe dafür angegeben werden können, warum auf eine bestimmte Weise abstrahiert wird, die theoretische Begriffsbildung das entstehende Begriffssystem dieser möglichen Willkür und Unvollständigkeit bereinigt (vgl. Dawydow 1977 & 1982; Petrowski 1977; Rubinstein 1973; Wygotski 1985).

Auch wenn der empirische und der theoretische Begriff einige Gemeinsamkeiten mit den Begriffen Begriffsbild und Begriffskonvention haben, so unterscheiden sie sich doch von den in Kapitel 4. betrachteten Begriffstypen dahingehend, dass der empirische Begriff sich der lebensweltlichen Grundlage schon stärker enthebt und damit auch weniger subjektiven Charakter hat, als das Begriffsbild, und der theoretische Begriff über die Begriffskonvention dahingehend hinausreicht, dass er nur in Relation mit dem gesamten Begriffsnetz und dem empirischen Begriff bestehen kann und einen gewissen Prozesscharakter hat. Darüber hinaus hat der empirische Begriff rein passiv-rezeptiven Charakter, Handlungen

---

[191] Zu weiteren Ausführungen zur Mathematikmethodik in der DDR siehe REMBOWSKI (2012a & 2013).

werden dabei explizit ausgeklammert, wobei der theoretische Begriff aktiv-operativen Charakter hat und Handlungen sowie Operationen[192] somit explizit einschließt. Schließlich ist der empirische Begriff auf einen eindeutigen Kontext bezogen, während der theoretische Begriff sich auf die Integration verschiedener Kontexte bezieht (vgl. u.a. Dawydow 1977, S. 238ff & 303ff).

Die Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten wurde in der pädagogischen Psychologie des Ostens auch mit dem Mathematikunterricht als konkretem Anwendungsbezug formuliert. Entsprechend der empirischen und der theoretischen Begriffsbildung wurden für den Begriffsbildungsprozess zwei Phasen vorgeschlagen:

> a) Gewinnung von Ausgangsabstraktionen durch eigene aktive Tätigkeit der Lernenden an und mit konkreten Objekten oder deren Repräsentanten, die in spezifischer Weise pädagogisch gestaltet und geführt wird und zur Ausgliederung der grundlegenden, wesentlichsten Merkmale und Relationen im jeweiligen Lerngegenstand führt, und
>
> b) Anwendung des so gewonnen Abstrakten zur geistigen Durchdringung und Reproduktion des Konkreten, d. h. als Mittel zunehmend selbstständiger Analyse und Erklärung der Vielfalt konkreter Erscheinungen, Situationen, Anforderungen mit Hilfe des Abstrakten, durch Rückführung der konkreten Sachverhalte auf die Grundbeziehungen des jeweiligen Lerngegenstandes und deren Anreicherung und Ausdifferenzierung durch Aufdeckung und Lösung von Widersprüchen, Herstellen von Zusammenhängen usw.
>
> (Lompscher 1989, S. 71)[193]

In der zweiten Phase des Begriffsbildungsprozesses sollten genauer beispielsweise induktive und deduktive Phasen verknüpft werden sowie Grenz- und Sonderfälle von Begriffen angesprochen werden. Allgemein wurde für den Begriffsbildungsprozess weiterhin die Einbettung in Problemsituationen gefordert, welche die Schülerinnen und Schüler selbstständig individuell und kooperativ bearbeiten sollten. Dabei sollten praktische Handlungen sowie verbale Äußerungen tragendes Gewicht haben, Modelle als Gegenstand und Mittel von Lerntätigkeit zum Zuge kommen und auch nichtkognitive Ziele angesprochen werden. Ziel des Begriffsbildungsprozesses sollte, außer im propädeutischen Unterricht bis zur einschließlich fünften Klassenstufe, die Formulierung einer Definition sein (vgl. u.a. Faraponowa 1982; Fridman 1982; Hinz 1989; Jantos 1989; Lompscher 1989; Lompscher & Jantos 1984).

---

[192] >>Operation<< wird in der sowjetischen Psychologie meist wie bei BRUNER verwendet und meint einen Bezug auf formale Operationen.

[193] Auch wenn dieses Zitat aus der Zeit kurz vor dem Mauerfall stammt, so ist es doch typisch für die pädagogische Psychologie und Mathematikmethodik in der DDR.

In die Mathematikmethodik wurde die Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten vordergründig, neben einem entweder rein induktiven oder einem rein deduktiven Vorgehen, übernommen. Aus der Mathematikmethodik kamen jedoch wenige Vorschläge problemorientierten und praktischen Arbeitens (vgl. Steinhöfel, Reichhold & Frenzel 1977; Walsch 1977). Die in den Unterrichtshilfen beschriebenen und in dem Schulbuch dargebotenen Unterrichtsgänge setzen schließlich hauptsächlich eine deduktive Begriffsbildung um.

6.5.2. Entwicklungen in der westlichen deutschsprachigen Mathematikdidaktik

Eine Forschungsgruppe um DÖRFLER und PESCHEK hat die Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten in die westliche deutschsprachige Mathematikdidaktik übertragen, um sie im Rahmen eines empirischen Forschungsprojektes zu nutzen (vgl. Peschek 1985; Peschek 1988). DÖRFLER geht in seiner Charakterisierung des theoretischen Begriffs allerdings über die Mathematikmethodik der DDR dahingehend hinaus, dass Prozesshaftigkeit und selbsttätiges Handeln einen noch größeren Stellenwert einnehmen:

> Die Dinge und Situationen sind nicht an sich und durch ihre Eigenschaften Repräsentanten des th. B. [theoretischen Begriffs], sondern vermittelt über das entsprechende Handlungssystem. Die Handlungen bzw. ihre Ausführbarkeit liefern auch den Grund dafür, warum etwas ein Repräsentant des th. B. ist, und sie sind gleichzeitig eine Methode zur Überprüfung der Ausführbarkeit der Handlungen.
>
> (Dörfler 1988a, S. 34)[194]

DÖRFLER beschreibt Begriffsentwicklung dabei als „soziale Tätigkeit“ (Dörfler 1988a, S. 34), was er einerseits über die verwendeten Lernmittel und Werkzeuge und andererseits über den sozialen Rahmen, in dem Lernen stattfindet und über Lerngegenstände kommuniziert wird, begründet.

Wie genau empirische und theoretische Begriffsbildung zu verstehen sind, kann exemplarisch nachvollzogen werden – DÖRFLER (1984) verwendet zu diesem Zweck unter anderem den Kreisbegriff. Ein empirischer Begriff entsteht dabei durch Vergleich kreisförmiger Repräsentanten, und ein weiterer kreisförmiger Repräsentant kann der Klasse nur aufgrund seiner Ähnlichkeit zu den bereits bekannten Repräsentanten zugeordnet werden, Verallgemeinern ist nicht möglich. Ein theoretischer Begriff hingegen entsteht, indem selbsttätig mit Kreisen gearbeitet wird und dabei allgemeine Eigenschaften des Kreises festgestellt werden:

[194] Die hier angesprochene Beziehung von Begriff zu einem Objekt untergeordneten Repräsentanten findet sich auch im semiotischen Dreieck wieder. DÖRFLERs Ausführungen machen dabei die Besonderheit des hier vorliegenden Ansatzes zur Begriffsbildung, welche diesen im Rahmen der Grundvorstellungsdebatte insbesondere nutzbar machen, deutlich.

> Für den Kreis könnten das Herstellungshandlungen sein (mit Bindfaden und Bleistift etwa), das Drehen in sich selbst (führt zu einer anderen Beziehung, nämlich derjenigen der Homogenität, Gleichberechtigung aller Stellen des Kreises), das Rollen (Feststellung der Achse), Gehen von einem Punkt aus in verschiedene Richtungen (gleich weit oder auch zeitlich lange).
>
> (Dörfler 1984, S. 53)[195]

DÖRFLER weist allerdings darauf hin, dass Herstellungshandlungen nicht ausschließlich in einer Reproduktion vorliegender Repräsentanten, die basierend auf einer ausnahmslos ganzheitlichen Betrachtung stattfindet, bestehen dürfen. Solche reproduzierenden Herstellungshandlungen wären auch auf der Ebene des empirischen Begriffs möglich. Stattdessen müssen, laut DÖRFLER, Herstellungshandlungen über solch ganzheitliche Betrachtungen dahingehend hinausreichen, dass Eigenschaften der Repräsentanten systematisierend reflektiert werden und sich aufgrund dessen auch die Handlung an sich schematisieren lässt. Dabei merkt DÖRFLER weiterhin an, dass erst eine solche operative[196] Behandlung eine tatsächliche Verwendung eines Begriffs auch in praktischen Situationen ermöglicht (vgl. Dörfler 1988b).

[195] Hier fällt schon ein deutlicher Unterschied zu den Aspekten einer Grundvorstellung zum Kreisbegriff nach HATTERMANN auf (siehe 6.3.2.).

[196] DÖRFLER verwendet >>operativ<< in Anlehnung an PIAGET und AEBLI, er geht allerdings über PIAGET und AEBLI dahingehend hinaus, dass mathematische Operationen zu materiellen oder vorgestellten Handlungen mittels kognitiver Konstruktionen hinzukommen und nicht lediglich durch „Verallgemeinerung, Abstraktion, Verinnerlichung, Symbolisierung, Formalisierung, Schematisierung“ (Dörfler 1988b, S. 99) daraus entstehen.

7. Grundvorstellungen vor dem Hintergrund von Begriffsbild und Begriffskonvention – ein Modell

Im Folgenden wird nun, mit Rückgriff sowohl auf die bisherigen Betrachtungen zum Grundvorstellungsbegriff als auch auf die Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten ein strukturiertes und strukturierendes Modell ausgearbeitet, dass als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf *Grundvorstellungen* zielenden Unterricht gesehen werden kann und damit einen normativ-konstruktiven Maßstab für diesen liefert. Im Weiteren werden die einzelnen Dimensionen dieses Modells theoretisch untermauert und anhand jeweils eines Beispiels beschrieben:

- entlang der Dimension Prozesshaftigkeit wird unterschieden zwischen: visuell-geometrisch – konzeptuell-begrifflich – formal-begrifflich,
- entlang der Dimension Aktivität-Operativität wird unterschieden zwischen: enaktiv – ikonisch – symbolisch,
- entlang der Dimension kognitive Präferenz wird unterschieden zwischen: prädikativ – funktional.

Ebenso wird auf die übergeordneten Momente, die sich auf methodische Entscheidungen beziehen, eingegangen. In dem methodischen Entscheidungsfeld wird unterschieden zwischen explorativ – organisatorisch – reflexiv. Basierend auf dem entwickelten Modell wird letztlich reflektierend auf FREUDENTHALs Phänomenologie und BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung eingegangen.

7.1. Ein strukturiertes und strukturierendes Modell als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht

Ausgangspunkt der Beschäftigung mit Grundvorstellungen war die Suche nach einem Verbindungsglied zwischen Begriffsbild und Begriffskonvention und somit nach einem Mittel, mit welchem ein intersubjektiver Begriff erschlossen und nutzbar gemacht werden kann. Grundvorstellungen und -verständnisse wurden dabei zunächst entsprechend BENDER als Vorstellungen und Verständnisse, die geprägt sind durch ihre allgemeine Verbindlichkeit, die Verankerung in der Lebenswelt sowie den fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet, gefasst. Ein Blick auf verschiedene Grundvorstellungslisten sowie die Tatsache, dass nach BENDER kein Algorithmus zur Formulierung von Grundvorstellungen bereitgestellt werden kann, ließen dann auf die Forderung nach einem prinzipiell auf Grundvorstellungen (und -verständnissen)[197] zielenden Unterricht schließen.

[197] Grundvorstellungen schließen im Folgenden entsprechend BENDER Grundvorstellungen und -verständnisse mit ein, der Bezeichner wird sich allerdings mit Bezug auf das Modell als Werk-

Die Frage, wie ein solcher auf Grundvorstellungen zielender Unterricht aussehen kann, soll mit Rückgriff auf die in 6.5. angesprochene Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten geklärt werden. Diese Methode unterstreicht die Bedeutsamkeit einer Vernetzung von empirischem und theoretischem Begriff, was – trotz der in 6.5.1. angesprochenen Bedeutungsunterschiede – auch eine Vernetzung von Begriffsbild und Begriffskonvention impliziert. Dabei kann ein theoretischer Begriff nur in Relation mit dem gesamten Begriffsnetz und dem empirischen Begriff bestehen und erhält einen gewissen Prozesscharakter, zudem hat der theoretische Begriff aktiv-operativen Charakter – beide Punkte werden von DÖRFLER zusätzlich unterstrichen. Übertragen auf Begriffsbild und Begriffskonvention heißt das, dass die Begriffskonvention mit dem gesamten Begriffsnetz, aber auch mit den verschiedenen in einem im Begriffsbild enthaltenen persönlichen Begriffsfeld verknüpften Begriffen sowie mit den jeweiligen Bezeichnern und konkretisierenden Objekten, prozesshaft und aktiv-operativ[198] in Verbindung gesetzt und damit auch erschlossen werden soll – Prozesshaftigkeit und Aktivität-Operativität konstituieren zwei Dimensionen des entstehenden Modells.

Der prozesshafte Charakter soll sich genauer auf den Veränderungsprozess von einer ganzheitlichen (im Falle geometrischer Begriffe einer visuell-geometrischen) über eine beschreibende (eine konzeptuell-begriffliche) bis hin zu einer definitorischen (einer formal-begrifflichen) Anschauungsstufe beziehen. Der aktiv-operative Charakter kann verwirklicht werden in dem Ausgehen von selbsttätigen Handlungen (der enaktiven Repräsentationsebene), wobei möglichst mittels bildlicher Darstellungen (der ikonischen Repräsentationsebene) die Eigenschaften eines Begriffs verstanden werden sollen, was diesen mit zuvor nicht bekannten Spielregeln auflädt (auf der symbolischen Repräsentationsebene).

Vor dem Hintergrund von Vorstellungen und Verständnissen nach BENDER, der Vorstellungen als (innere) Repräsentationen von Objekten, Handlungen und Situationen, die erneut aktiviert werden können, beschreibt und ausführt, dass Verständnisse darüber hinaus das Verstehen von Sachverhalten, Äußerungen sowie auch Menschen, Handlungen und Situationen ansprechen (siehe 6.2.1.), wirkt außerdem die Berücksichtigung der kognitiven Präferenzen – prädikativ und funktional – angemessen. Denn unter Umständen erlaubt nur eine Kommunikation eines Sachverhalts entsprechend einer spezifischen kognitiven Präferenz eine (innere) Repräsentation dieses Sachverhalts, was zum Verstehen und damit auch zu einer Vernetzung von Begriffsbild und Begriffskonvention führen

zeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht auf >>Grundvorstellungen<< beschränken.

[198] Aktiv-operativ wird mit Bezug auf das Modell ausschließlich in dieser zwei Worte vereinenden Form verwendet und bezieht sich damit auf Handlungen und formale Operationen.

kann. Andererseits kann wiederum das Übersetzen in eine andere kognitive Präferenz notwendig sein, um selbst auch verstanden zu werden und zu einer Vernetzung von Begriffsbild und Begriffskonvention bei Anderen beizutragen.

Die bisher dargelegten Dimensionen beziehen sich auf ausschließlich didaktische Entscheidungsfelder. Übergeordnet sollten allerdings auch methodische Entscheidungen berücksichtigt werden. Insgesamt darf sich der entlang der didaktischen Dimensionen gestaltete Unterrichtsprozess natürlich nicht nur auf eine explorative Ebene beschränken, was sowohl einer Vernetzung von Begriffsbild und Begriffskonvention als auch einer Berücksichtigung des gesamten Begriffsnetzes zuwider laufen würde. Stattdessen sollten an verschiedenen Stellen auch organisatorische und reflexive Momente in den Unterrichtsprozess integriert werden, um damit zu einer Integration von Begriffsbild und Begriffskonvention beizutragen und auch auf das Begriffsnetz eingehen zu können.

Auf Grundvorstellungen zielender Unterricht sollte sich damit insgesamt an den Dimensionen Prozesshaftigkeit, Aktivität-Operativität und kognitive Präferenz orientieren – die Dimensionen bilden zunächst eine $3 \times 3 \times 2$-Matrix mit unterschiedlichen Merkmalskombinationen (Abbildung 88). Dabei ist allerdings zu betonen, dass, wie auch der Unterricht nicht zu einem Abarbeiten von Grundvorstellungslisten verkommen darf, der Unterricht nicht in ein Abhaken der einzelnen Merkmalskombinationen ausarten darf, zumal nicht zwangsläufig zu jedem Begriff jede Merkmalskombination existiert. Stattdessen soll der Unterricht sich entlang der Dimensionen Prozesshaftigkeit und Aktivität-Operativität entwickeln, dabei die einzelnen Ausprägungen dieser verknüpfen und beide kognitive Präferenzen berücksichtigen. Der Begriffsbildungsprozess soll somit eine Trajektorie in der Matrix beschreiben – es sollen die in der ersten Matrix noch sichtbaren Mauern eingerissen werden und die Anschauungsstufen, Repräsentationsebenen und kognitiven Präferenzen miteinander verknüpft werden (Abbildung 89). Der gesamte Begriffsbildungsprozess soll dabei durch explorative, organisatorische und reflexive Momente unterstützt werden.

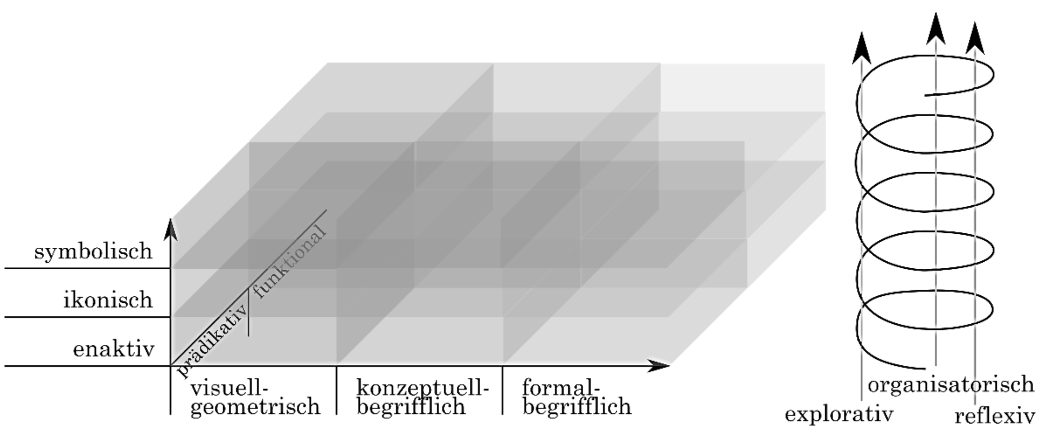


Abbildung 88: Geschachtelte Matrix als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht

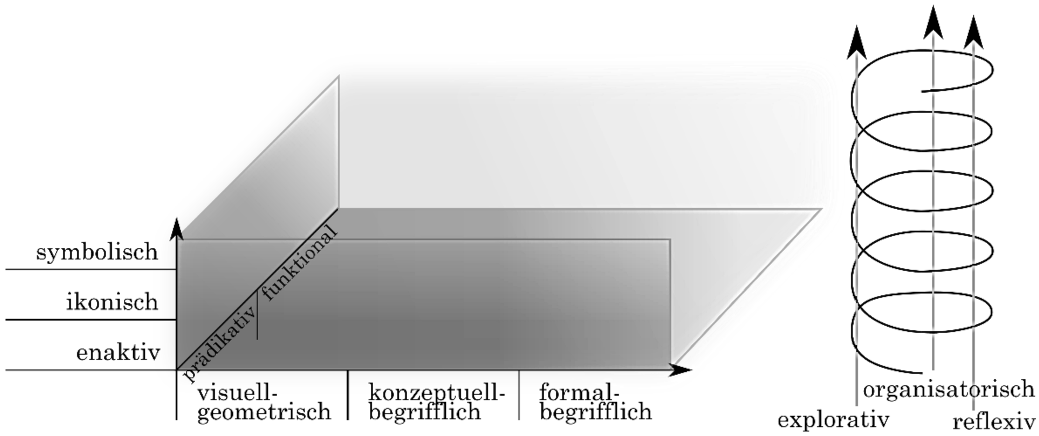


Abbildung 89: Offene Matrix als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht

An dieser Stelle soll ein letztes Mal auf die Grundvorstellungen und -verständnisse nach BENDER zurückgegangen werden und begründet werden, dass ein Unterricht, der sich an den obig beschriebenen Dimensionen orientiert, geeignet ist, Grundvorstellungen und -verständnisse im BENDERschen Sinn auszubilden. Dies beruht darauf, dass der epistemologische Kern von Begriffen zur Unterrichtsgestaltung mit dem Blickwinkel der Matrix herangezogen werden muss, weil für gegebene Inhalte inner- und außermathematische Zusammenhänge didaktisch so aufbereitet werden müssen, dass eine Entwicklung entlang der drei Dimensionen möglich wird – dies gewährleistet die von BENDER geforderte allgemeine Verbindlichkeit. Sowohl das Aufgreifen außermathematischer Zusammenhänge als auch das Ansetzen an der visuell-geometrischen Anschauungsstufe und der enaktiven Repräsentationsebene, das entsprechend den VAN HIELEs und BRUNER, auf die in 7.2.1. und 7.3.1. zurückgegriffen wird, im Sinne FREUDENTHALs Beziehungshaltigkeit das Anknüpfen an lebensweltliche Erfahrungen sowie Vorkenntnisse und vorhandene Fähigkeiten meint, ermöglichen weiterhin eine Verankerung in der Lebenswelt. Letztlich erfordert eine Entwicklung entlang der Dimensionen und eine Verknüpfung deren einzelner Ausprägungen ein wiederholtes Aufgreifen entstehender Vorstellungen und Verständnisse bei weiterer Verwendung und Weiterentwicklung der Begriffe – dies gibt ihnen dann fundamentalen Charakter für das Teilgebiet. Insgesamt erlauben der prozesshafte und aktiv-operative Charakter des Begriffsbildungsprozesses bei der Berücksichtigung der jeweils eigenen kognitiven Präferenz und den methodischen Momenten somit das Ausbilden von Vorstellungen und Verständnissen, die so tragfähig sind, dass sie erneut aktiviert werden können. Die folgenden Abschnitte dienen nun dazu, die verschiedenen Dimensionen der Matrix theoretisch zu untermauern und beispielhaft zu verdeutlichen.

7.2. Die Dimension der Prozesshaftigkeit: visuell-geometrisch – konzeptuell-begrifflich – formal-begrifflich

Es sollen nun zunächst die Dimension der Prozesshaftigkeit und deren verschiedene Ausprägungen mit Rückgriff auf die Stufen des Begriffsverständnisses nach den VAN HIELEs erläutert werden. Um eine Verwechslung mit den verschiedenen Symbolsystemen konstruktiv-geometrisch, verbal-begrifflich und formal-algebraisch nach LAMBERT zu vermeiden, soll in einem Exkurs außerdem auf diese eingegangen werden.

7.2.1. Die Dimension selbst

Die Anschauungsstufen visuell-geometrisch – konzeptuell-begrifflich – formal-begrifflich beruhen auf den Stufen des Verständnisses geometrischer Begriffe nach den VAN HIELEs (vgl. u. a. van Hiele 1959 & 1986). Diese arbeiteten in engem Bezug zu PIAGETs entwicklungspsychologischer Arbeit, und diese von einem lernpsychologischen Standpunkt kritisierend, im Laufe ihrer mathematikdidaktischen Forschung fünf Stufen des Begriffsverständnisses heraus. Dabei ist das Begriffsverständnis auf jeder Stufe Voraussetzung einer weiteren Begriffsentwicklung auf der jeweils nächsten Stufe. Die VAN HIELEschen fünf Stufen lassen sich folgendermaßen beschreiben (vgl. Filler 2011, S. 41; Fuys, Geddes & Tischler 1988, S. 5; van Hiele 1959, S. 5ff & 1986, S. 39ff):

- räumlich-anschauungsgebundenes Denken:
  Auf dieser Stufe werden Begriffe ganzheitlich wahrgenommen, verglichen und bezeichnet, einzelne Eigenschaften können jedoch nicht erkannt werden.
- geometrisch-analysierendes Denken:
  Auf dieser Stufe werden Eigenschaften von Begriffen wahrgenommen und Begriffe anhand dieser Eigenschaften beschrieben. Handlungen haben auf dieser Stufe noch ein sehr großes Gewicht.
- geometrisch-abstrahierendes Denken:
  Auf dieser Stufe werden einzelne Eigenschaften der Begriffe logisch zueinander in Beziehung gesetzt, Beziehungen zwischen Begriffen erkannt, und es sind hierarchische Über- und Unterordnungen möglich.
- geometrisch-schlussfolgerndes Denken:
  Auf dieser Stufe werden Begriffe definiert.
- strenge, abstrakte Geometrie:
  Auf dieser Stufe können gleichwertige Definitionen erkannt werden und auch Axiomensysteme aufgebaut werden.

Die erste Stufe, jene des räumlich-anschauungsgebundenen Denkens, soll der visuell-geometrischen Anschauungsstufe entsprechen, und die zweite Stufe, jene des geometrisch-analysierenden Denkens, soll mit der konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe übereinstimmen. Die dritte bis fünfte Stufe, jene des geometrisch-abstrahierenden und geometrisch-schlussfolgernden Denkens sowie der strengen, abstrakten Geometrie werden zur formal-begrifflichen Anschauungsstufe zusammengefasst. Eine solche Zusammenfassung ist legitim, da entsprechend VAN HIELE mit Bezug auf den Mathematikunterricht in der Schule nur die ersten vier Stufen überhaupt relevant sind, in der älteren der hier betrachteten Arbeiten auch nur diese unterschieden werden, und auch die vierte Stufe nicht zwangsläufig erreicht wird (vgl. van Hiele 1986, S. 47).[199]

Auf der Stufe der visuell-geometrischen Anschauung genügt ein ganzheitlicher Blick auf Begriffe, wie er auch im natürlichen Umfeld angewendet wird. Auf der Stufe der konzeptuell-begrifflichen Anschauung sollen entsprechend den VAN HIELEschen Stufen die Eigenschaften und damit auch die interne Struktur von Begriffen mit einem noch stark konkreten Bezug entdeckt, kennen und auszudrücken gelernt werden. Auf der Stufe der formal-begrifflichen Anschauung soll weiterhin abstrahierend auf die interne Struktur der Begriffe zurückgegangen werden, außerdem sollen die Beziehungen von Begriffen zueinander entdeckt sowie Begriffe in eine Begriffshierarchie eingeordnet werden. Hier können insbesondere auch Sonder- und Grenzfälle thematisiert werden. Aus einer solch systematischen Betrachtung der Begriffe kann dann auch eine Definition folgen.

Die Wahl der die Anschauungsstufen präzisierenden Bezeichner ist darin begründet, dass auf erster der nun drei Stufen mit dem ganzheitlichen Charakter bei einem geometrischen Begriff dessen visuell unmittelbar sichtbare Gestalt wahrgenommen wird. Auf der zweiten Stufe soll dann mit den Eigenschaften von Begriffen in einer beschreibenden Form umzugehen gelernt werden, erst auf der dritten Stufe soll jedoch ein formalerer Blick auf Begriffe geworfen werden – somit steht auf der zweiten und dritten Stufe jeweils eine unterschiedlich stark systematisierende Analyse der Begriffe im Mittelpunkt. Der Bezeichner Anschauung wiederum ist angelehnt an den Anschauungsraum nach HOLLAND und meint damit die Entwicklung einer kognitiven Struktur, welche den Umgang mit geometrischen Begriffen auch in realen Situationen ermöglicht (vgl. Holland 2007, S. 20).

---

[199] WEIGAND (2009a, S.120) unterscheidet nur vier Stufen des Begriffsverständnisses (intuitives, inhaltliches, integriertes und formales Begriffsverständnis), und knüpft damit an die älteren VAN HIELEschen Stufen an.
HOLLAND unterscheidet für Figuren- und Maßbegriffe drei (inhaltliches, integriertes und formales Begriffsverständnis) und für Abbildungsbegriffe vier Stufen des Begriffsverständnisses (inhaltliches, integriertes, strukturelles und formales Begriffsverständnis). Er greift dazu nicht explizit auf die VAN HIELEs zurück, seine Stufen erinnern jedoch an einzelne der VAN HIELEschen Stufen. HOLLANDs inhaltliches Begriffsverständnis erinnert dabei an die VAN HIELEsche zweite Stufe, das integrierte Begriffsverständnis würde die dritte und vierte Stufe zusammenfassen, während das formale Begriffsverständnis und die VAN HIELEsche fünfte Stufe vergleichbar sind (vgl. Holland 2007, S. 63ff & 93f). HOLLANDs für Abbildungen zusätzlich unterschiedenes strukturelles Begriffsverständnis umfasst vor allem die Kenntnis über auf Verkettungen von Abbildungen beruhende Beziehungen (vgl. Holland 2007, S. 109ff).

Da der Unterricht sich zum Aufbau von Grundvorstellungen entlang der Dimension der Prozesshaftigkeit entwickeln soll, sollen insbesondere auch die Anschauungsstufen vernetzt werden – Vernetzung heißt in diesem Fall, dass der Übergang von einer Anschauungsstufe zur folgenden unterstützt wird. Eine solche Unterstützung geschieht dabei, indem beim Übergang von einer Stufe zur nächsten fünf Phasen berücksichtigt werden:

> 1. In the first stage, that of *information*, pupils get acquainted with the working domain.
> 2. In the second stage, that of *guided orientation*, they are guided by tasks (given by the teacher, or made by themselves) with different relations of the network that has to be formed.
> 3. In the third stage, that of *explication*, they become conscious of the relations, they try to express them in words, they learn the technical language accompanying the subject matter.
> 4. In the fourth stage, that of *free orientation*, they learn by general tasks to find their own way in the network of relations.
> 5. In the fifth stage, that of *integration*, they build an overview of all they have learned of the subject, of the newly found network of relations now at their disposal.
>
> (van Hiele 1986, S. 53f)

Die Anschauungsstufen visuell-geometrisch, konzeptuell-begrifflich, formal-begrifflich und damit auch eine Möglichkeit ihrer kohärenten Vernetzung sollen nun anhand des Begriffs Würfel exemplarisch dargelegt werden. Ausgangspunkt ist hier der Würfel als Objekt – das heißt, ein oder mehrere der Lebenswelt entnommene Realisate, die bestenfalls jeder Schülerin oder jedem Schüler vorliegen und von ihr oder ihm untersucht werden können. Dies führt zunächst zu einer mittels der visuell-geometrischen Anschauungsstufe zu beantwortenden Frage – beispielsweise ob bestimmte andere, oder welche anderen, Gegenstände auch Würfel repräsentieren. Im zweiten Schritt wird dann zu einem die konzeptuell-begriffliche Anschauungsstufe erschließenden Arbeitsauftrag übergegangen, der die Berücksichtigung obiger fünf Phasen erlaubt – so können die Schülerinnen und Schüler aufgefordert werden, beispielsweise aus einem Stück Knete oder einer Kartoffel selbst einen Würfel zu formen. Dabei sollten einige Eigenschaften des Würfels, wie die gleiche Länge aller Kanten oder die rechten Winkel zwischen eine Seite begrenzenden Kanten, kennengelernt und anschließend auch auszudrücken gelernt werden. Schließlich kann im dritten Schritt die formal-begriffliche Anschauungsstufe unter Berücksichtigung der Phasen zugänglich gemacht werden – dazu kann zu einer gegebenen Kante oder Ebene ein Würfel konstruiert werden, es kann möglicherweise ein Würfelnetz hergestellt werden, und wenn projektive beziehungsweise perspektivische Darstellungen oder Koordinaten bekannt sind, kann der Würfel auch mittels dieser dargestellt oder beschrieben werden. Dabei sollte auf die Eigenschaften des Würfels zurückgegriffen und diese sollten systematisierend zusammengefasst werden. Auf dieser Stufe ist ein Einordnen des Begriffs in die Begriffshierarchie und das Betrachten von Sonder- und Grenzfällen unerlässlich und es sollte beispielsweise, falls der Begriff Quader bekannt ist, der Würfel als ein spezieller Quader erkannt werden. Zudem kann möglicherweise auch schon die Frage nach einer minimalen, zur Definition des Begriffs Würfel nötigen, Menge an Eigenschaften gestellt und der Begriff damit definiert werden.

7.2.2. Exkurs: Die Symbolsysteme nach LAMBERT: konstruktiv-geometrisch – verbal-begrifflich – formal-algebraisch

In der Tradition der epistemologischen Zugänge nach KLEIN, visuell – begrifflich – formal, unterscheidet LAMBERT (2012) drei Symbolsysteme: ein konstruktiv-geometrisches, ein verbal-begriffliches und ein formal-algebraisches. Diese Symbolsysteme unterscheiden sich schon dahingehend grundlegend von den in 7.2.1. erläuterten und auf die Stufen des Begriffsverständnisses nach den VAN HIELEs zurückgehenden Anschauungsstufen, dass sie nicht aufeinander aufbauen, sondern sich gegenseitig ergänzen. Sie bleiben im Rahmen des in der vorliegenden Arbeit entwickelten Modells als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht allerdings nachrangig. Dies ist darin begründet, dass das formal-algebraische Symbolsystem im Hinblick auf insbesondere elementare geometrische Begriffsbildungen unwesentlich ist, wohingegen das verbal-begriffliche Symbolsystem einem Begriffsbildungsprozesses, der sich entlang der Dimensionen der Prozesshaftigkeit und Aktivität-Operativität bewegt, inhärent ist, und von dem visuell-geometrischen Symbolsystem ausgegangen, auf dieses aufgebaut und zurückgegriffen wird.

Dennoch soll ein Einsatz der Symbolsysteme nach LAMBERT anhand einer Beispielaufgabe[200] dessen, die konstruiert wurde, um die drei Symbolsysteme gleichzeitig zu exemplifizieren, verdeutlicht werden:

> „X_0 sei ein Punkt auf der x-Achse und Y_0 einer auf der y-Achse (mit $(x_0|y_0) \neq 0$). Wie sieht die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{X_0Y_0}$aus?“ Formal-algebraisch steigt man so ein:
> $$k_x\colon (x-x_0)^2 + y^2 = r^2 \text{ und } k_y\colon x^2 + (y-y_0)^2 = r^2$$
> sind Kreise mit jeweils Radius r um die beiden gegebenen Punkte $X_0(x_0|0)$ bzw. $Y_0(0|y_0)$. Schnittpunkte sind diejenigen Punkte, die beide Gleichungen gleichzeitig erfüllen (VB). Gleichsetzen liefert die Gleichung:
> $$(x-x_0)^2 + y^2 = x^2 + (y-y_0)^2$$
> Ausmultiplizieren (FA, für positive Größen ist auch KG möglich) ergibt
> $$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2$$
> und Eliminieren und Umstellen
> $$-2x_0x + x_0^2 - y_0^2 = -2y_0y.$$

[200] Hier sind die Symbolsysteme mit KG, VB und FA abgekürzt.

In syntaktisch äquivalenter und schulüblicherer Form lautet die Gleichung

$$y = \frac{x_0}{y_0}x - \frac{x_0^2 - y_0^2}{2y_0} \text{ oder auch } y - \frac{1}{2}y_0 = \frac{x_0}{y_0}\left(x - \frac{x_0}{2}\right).$$

Diesen beiden kann man die Gerade jeweils ansehen, sie sind unterschiedliche formal-algebraische Symbole für die Gerade. In der ersten sehen wir Steigung und Achsenabschnitt. Spätestens bei der zweiten Gleichung sollte einem dann aber auch ins Auge springen, dass man auf die längliche Rechnung auch verzichten könnte, um zur deduzierenden Konsequenz zu gelangen: Die Gegenzahl des Kehrwertes der Steigung einer Geraden liefert die Steigung einer orthogonalen Geraden (VB). Die Steigung der Strecke ist $-\frac{y_0}{x_0}$ (KG und FA). Der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Koordinaten A und B (VB und FA). Verschiebungen in x-Richtung sind Operationen am Argument, die in y-Richtung am Wert y einer Funktion ([…] VB).

(Lambert 2012, S. 21f)

7.3. Die Dimension der Aktivität-Operativität: enaktiv – ikonisch – symbolisch

In diesem Abschnitt sollen zunächst die Dimension der Aktivität-Operativität sowie deren verschiedene Ausprägungen mit Rückgriff auf die Repräsentationsebenen nach BRUNER erläutert werden. Anschließend soll in einem Exkurs auf die Sonderrolle der ikonischen Repräsentationsebene vor dem Hintergrund von geometrischer Begriffsbildung eingegangen werden.

7.3.1. Die Dimension selbst

Die Trias enaktiv – ikonisch – symbolisch wird in der Mathematikdidaktik üblicherweise mit BRUNER in Verbindung gebracht (vgl. u. a. Wittmann 1981).[201] Dieser unterscheidet schon in seiner entwicklungspsychologischen Arbeit (wie die Ausführungen zu BRUNER in 4.3.1. zeigen) zwischen einer enaktiven, einer ikonischen und einer symbolischen Repräsentationsform, die sich in unterschiedlichen nicht trennscharfen Entwicklungsstadien aufeinander aufbauend ausprägen. Auch in BRUNERs Unterrichtstheorie (vgl. Bruner 1974) findet sich eine solche Unterscheidung zwischen drei Repräsentationsebenen:

> Jeder Wissensbereich (oder jede Problemstellung innerhalb eines solchen Wissensbereichs) kann auf dreifache Art dargeboten werden: durch eine Zahl von Handlungen, die geeignet sind, ein bestimmtes Ziel zu erreichen *(enaktive Repräsentation)*, durch eine Reihe zusammenfassender Bilder oder Graphiken, die eine bestimmte Konzeption versinnbildlichen, ohne sie ganz zu definieren *(ikonische Repräsentation)*, und durch eine Folge sym-

[201] Die hinter enaktiv – ikonisch – symbolisch stehende Idee ist schon alt und findet sich mit unterschiedlicher Präzision an verschiedenen Stellen in der Mathematikdidaktik wieder (siehe hierzu: Lambert 2012).

> bolischer oder logischer Lehrsätze, die einem symbolischen System entstammen, in dem nach Regeln oder Gesetzen Sätze formuliert und transformiert werden *(symbolische Repräsentation)*.
>
> (Bruner 1974, S. 49)

Zur Vernetzung der Repräsentationsebenen heißt es:

> […] ein Schüler, der ein hochentwickeltes Symbolverständnis besitzt, mag wohl die ersten beiden Stufen ohne Schwierigkeiten überspringen. Dabei geht man allerdings das Risiko ein, daß der Schüler nicht die Vorstellungsgabe besitzt, auf die er zurückgreifen können muß, wenn seine symbolischen Transformationen in einer Problemlöse-Situation nicht zum Ziel führen.
>
> (Bruner 1974, S. 53)

Somit ist zu betonen, dass eine enaktive und ikonische Repräsentation nicht als gewissermaßen unfertige Vorformen einer symbolischen Repräsentation gesehen werden dürfen, sondern dass die drei Repräsentationsebenen in einem Begriffsbildungsprozess unterschiedliche Aspekte eines Begriffs ausdrücken, die es zu vernetzen gilt (vgl. Lambert 2012). Die symbolische Repräsentationsebene ist dann erreicht, wenn auf der enaktiven und ikonischen Repräsentationsebene noch nicht verstandene Spielregeln verstanden sind und damit aus verwendeten Zeichen in dem gegebenen Kontext Symbole werden. Die symbolische Repräsentation selbst besteht dabei oft nur in einer Konvention oder einer Umschreibung dieser, deren Anwendungsbereich stark kommunikativ geprägt ist. Da der Unterricht sich zum Aufbau von Grundvorstellungen entlang der Dimension der Aktivität-Operativität entwickeln soll, sollen insbesondere auch die Repräsentationsebenen vernetzt werden.

Die Repräsentationsebenen enaktiv – ikonisch – symbolisch sowie eine Möglichkeit ihrer kohärenten Vernetzung sollen nun anhand des Begriffs Spiegelung exemplarisch dargelegt werden. Ausgangspunkt ist hier eine der Lebenswelt entnommene Situation: Häufig finden sich in den Umkleidekabinen von Kleidungsgeschäften Spiegel, in denen ein potentielles neues Kleidungsstück von hinten betrachtet und begutachtet werden kann. Dies führt zu der Frage, wie diese Spiegel denn angebracht sein müssen, damit eine solche Rückansicht möglich wird (vgl. hierzu auch: Lambert 2012). Ein erster Schritt zur Beantwortung dieser Frage kann mit enaktiven Handlungen getan werden – so kann durch das systematische Verschieben zweier Spiegelkacheln oder rechteckiger Kosmetikspiegel und einer (sinnvollerweise unsymmetrischen) Spielfigur sowie einen Blick über die Schulter dieser Figur erfahren werden, bei welchen Positionen der Spiegel und der Figur eine Rückansicht in einem vor der Figur stehenden Spiegel mittels eines hinter der Figur stehenden Spiegels möglich ist (Abbildung 90). Im zweiten Schritt wird dann zur ikonischen Ebene übergegangen – hier wird auf einem unter dem Spiegel und der Figur liegenden Bogen Papier der Standort des Spiegels und der Figur eingezeichnet, weiterhin kann der potentielle Standort des Spiegelbildes hinter dem Spiegel angepeilt, verortet und ebenfalls eingezeichnet werden. Der rückwärtige Spiegel kann zunächst außen vor gelassen werden, es entsteht somit eine Reduktion der Situation auf die Frage, wie denn die einfache Spiegelung funktioniert (Abbildung 91). Nun kann im dritten Schritt zur symbolischen Ebene übergegangen werden – dabei können die Spielregeln, durch welche das Urbild auf das Spiegelbild abgebildet wird, entdeckt werden (Abbildung 92). Werden solche Regeln vermutet, bietet sich ein erneuter Rückgang zur enaktiven und ikonischen Handlung, die dann schon teilweise symbolisch aufgeladen sind, an – Ziel dabei ist ein Überprüfen der vermuteten Spielregeln. Als ein weiteres Medium, welches Repräsentationen-verknüpfend wirkt, kann ein DGS dienen – dieses erlaubt, eine sehr präzise, mit konstruktiv-geometrischen Spielregeln aufgeladene, symbolische Darstellung zu erzeugen und bietet somit einen guten Rahmen, in dem vermutete Spielregeln wiederum überprüft werden können (Abbildung 93).


Abbildung 90: Enaktive Repräsentation des Problems

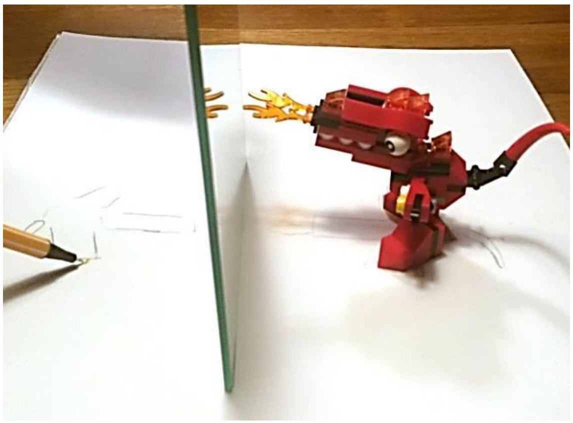


Abbildung 91: Enaktiv-ikonische Repräsentation des Problems

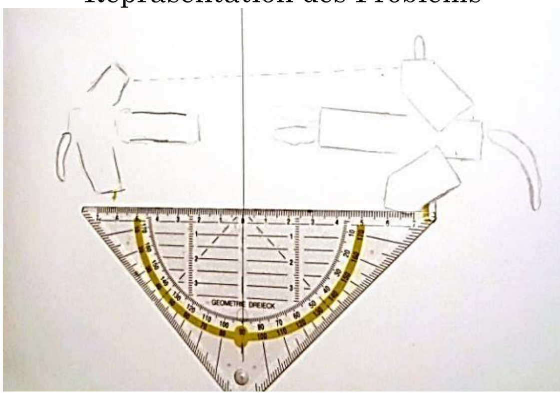


Abbildung 92: Ikonisch-symbolische Repräsentation des Problems

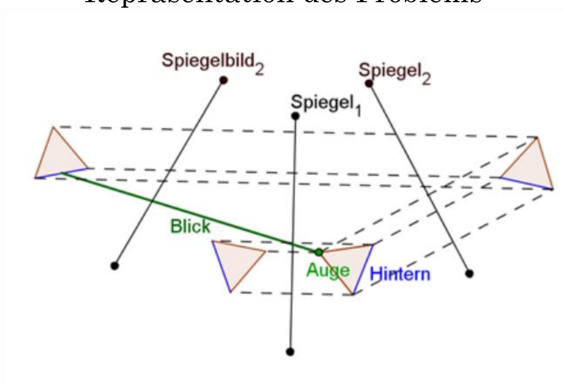


Abbildung 93: Veranschaulichung der Situation mittels eines DGS

7.3.2. Exkurs: Die ikonische Repräsentationsebene

Die ikonische Repräsentationsebene nimmt vor dem Hintergrund geometrischer Begriffsbildung eine Sonderrolle in der BRUNERschen Trias ein. Das beginnt schon damit, dass Darstellungen von Figuren leicht mit diesen identifiziert werden und nur semiotisch von ihnen unterscheidbar bleiben. Die Sonderrolle ist darüber hinaus darin begründet, dass ikonische Repräsentationen insbesondere geometrischer Objektbegriffe, die konkretisiert sind in dreidimensionalen Realisaten, gegebenenfalls implizit mit Spielregeln der Darstellung aufgeladen sind. So erfordert die Darstellung eines dreidimensionalen Realisats mittels Parallelprojektion unter anderem das Wissen über die Spielregeln, dass parallel zur Bildebene liegende Strecken maßstabsgetreu abgebildet werden, im Allgemeinen jedoch Winkel und Flächen transformiert werden. Andere Darstellungen erfordern das Wissen um andere Spielregeln.

Dementsprechend geht die Eigenproduktion ikonischer Repräsentationen geometrischer Objektbegriffe mit dreidimensionalen Realisaten über die von BRUNER genannte „Reihe zusammenfassender Bilder oder Graphiken, die eine bestimmte Konzeption versinnbildlichen, ohne sie ganz zu definieren“ hinaus – denn einerseits müssen die einen Begriff definierenden Eigenschaften in die Darstellung eingehen, andererseits können sie der Darstellung nur dann vollständig entnommen werden, wenn sie schon hineingelegt wurden. Sollen ikonische Repräsentationen geometrischer Objektbegriffe mit dreidimensionalen Realisaten im Zuge einer Vernetzung der Repräsentationsebenen eingesetzt werden, können zum einen ikonische Darstellungen, welche den Begriff nur unscharf widerspiegeln und daher nicht mit Darstellungsregeln aufgeladen sind, verwendet werden. Bei Vorhandensein eines Realisats, welches den Begriff so genau wie in nicht-idealisierter Form möglich darstellt, ist allerdings der Erkenntnisgehalt einer unscharfen Darstellung gering, sie ist von Wert nicht für die Wissensexploration, sondern vorrangig für die Wissensorganisation oder Wissensreflexion (eingebettet in die entsprechenden Aufgabentypen, siehe hierzu: 7.5.). Es können zum anderen fertige ikonische Darstellungen der enaktiven und der symbolischen Repräsentationsebene zwischengeschaltet werden, welche in der Lage sind, bestimmte Eigenschaften eines Begriffs hervorzuheben – auch solche Darstellungen müssen allerdings gelesen werden können. (Dies trifft insbesondere dann zu, wenn sie reduktiven Charakter haben, beispielsweise wenn bei einem mittels Parallelprojektion dargestellten Würfel nur drei Seiten sichtbar sind).[202] Insgesamt scheint im Fall geometrischer Objektbegriffe mit dreidimensionalen Realisaten somit eine enaktiv – symbolisch Dualität genauso tragfähig, wie wenn dieser einer ikonische Repräsentation zwischengeschaltet wäre.

Die hier angesprochene Besonderheit dreidimensionaler Darstellungen gilt nicht für die in obigem Beispiel schon angesprochenen geometrischen Abbildungen im dreidimensionalen Raum. Dies ist darin begründet, dass eine ikonische Repräsentation dieser Abbildungen sie auf ebene Abbildungen reduziert (statt die drei-

[202] Dass auch ikonische Darstellungen mit einem nicht-reduktiven Charakter schwierig zu lesen sein können, zeigt LEUDERS (2004).

dimensionale Situation wiederzugeben), wo die Spielregeln der Abbildungen offensichtlich werden. Die genannte Eigenart der Darstellung dreidimensionaler Realisate ist allerdings auch für den Volumenbegriff von Bedeutung, weil in diesem Fall eine Darstellung wiederum den dreidimensionalen Charakter eines Realisats erhalten muss.

7.4. Die Dimension der kognitiven Präferenzen: prädikativ – funktional

Die Gegenüberstellung einer prädikativen und einer funktionalen Denkweise geht zurück auf SCHWANK (vgl. Schwank 1996, 1998 & 2003). Mit der Unterscheidung von zwei verschiedenen kognitiven Präferenzen beschäftigt SCHWANK sich mit innerlich ablaufenden Prozessen, welche die durch die beiden anderen Dimensionen berührten, besser zu externalisierenden Prozesse komplementieren.[203] Prädikatives Denken meint ein Denken in Beziehungen, Begriffe werden dabei anhand von Eigenschaften von Gegenständen und Relationen zwischen verschiedenen Gegenständen gefasst und mittels des Arguments der Gleichartigkeit in einen Zusammenhang gebracht. Dabei entsteht eine statische interne Repräsentation eines Begriffs. Funktionales Denken hingegen bezieht sich auf ein Denken in Wirkungsweisen, Begriffe werden dabei anhand von Operationen mit verschiedenen Gegenständen gefasst und mittels des Arguments der Unterschiedlichkeit als Herstellungskriterium in einen Zusammenhang gebracht. So entsteht eine dynamische interne Repräsentation eines Begriffs.

SCHWANK weist allerdings darauf hin, dass sich der Unterschied zwischen einem prädikativen und einem funktionalen Zugang häufig ausschließlich im Denkprozess niederschlägt, und dass sich die dadurch entstehenden Produkte prädikativ und funktional Denkender oft nicht maßgeblich voneinander unterscheiden. Dies begründet sie damit, dass die Produkte meist statischen Charakter haben und sich die damit möglicherweise verbundene Dynamik nur prozesshaft konstituiert. Zudem seien prädikativ Denkende sprach-affiner, während bei funktional Denkenden Erzeugungsvorstellungen großes Gewicht haben, die zu Kommunikationszwecken doch in den meisten Fällen auch in Sprache übersetzt werden müssen.

Den Unterschied zwischen prädikativem und funktionalem Denken demonstriert SCHWANK meist anhand von 3 × 3-Tableaus mit einer Leerstelle rechts unten, die auch zur Bestimmung der jeweiligen kognitivem Präferenz verwendet werden können (beispielsweise jenes in Abbildung 94). Im Falle einer prädikativen Lösung wird bei dem angegebenen Tableau damit argumentiert, dass das schwarze

[203] Dies berührt die Interaktion von Bewusstsein und Unterbewusstsein in mathematischem Denken, die auch schon bei HADAMARD (in 4.4.1.) anklang (siehe hierzu auch: Schwank 1996 & 2003).

Dreieck in der oberen Zeile die längste Seite links hat, in der mittleren Zeile oben und in der unteren Zeile rechts. Weiterhin hat das graue Dreieck in der linken Spalte die längste Seite unten, in der mittleren Spalte links und in der rechten Spalte oben. Damit folgt, dass die rechte untere Figur aus einem schwarzen Dreieck mit längster Seite rechts und einem grauen Dreieck mit längster Seite oben bestehen muss. Im Falle einer funktionalen Lösung hingegen wird damit begründet, dass spaltenweise das schwarze Dreieck jeweils um 90° im Uhrzeigersinn gedreht wird, während zeilenweise das graue Dreieck jeweils um 90° ebenso im Uhrzeigersinn gedreht wird. Dementsprechend folgt dieselbe Figur, wie bei der prädikativen Lösung, für das rechte untere Feld.

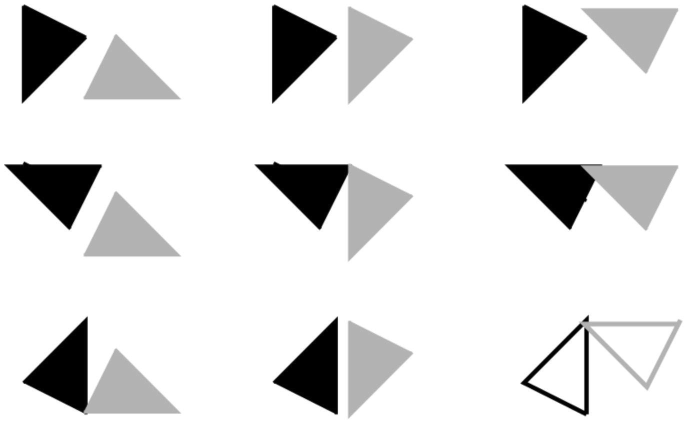


Abbildung 94: 3 × 3-Tableau zur Bestimmung der kognitiven Präferenz

Der Unterschied zwischen prädikativem und funktionalem Denken manifestiert sich aber auch in der Arbeit mit geometrischen Begriffen, wie exemplarisch anhand des Begriffs kongruent dargelegt werden soll. Ausgangspunkt ist hier die Aufforderung, herauszufinden, ob zwei gegebene Figuren kongruent sind. Prädikativ denkende Schülerinnen und Schüler würden zu diesem Zweck verschiedene Maße der gegebenen Figuren vergleichen und bei deren Übereinstimmung auf Kongruenz, bei Nicht-Übereinstimmung auf Nicht-Kongruenz schließen (Abbildung 95). Funktional denkende Schülerinnen und Schüler würden hingegen überprüfen, ob eine Figur mittels einer Abbildung auf die andere Figur abgebildet werden kann. Ist dies möglich, so würde auf Kongruenz geschlossen, andernfalls auf Nicht-Kongruenz (Abbildung 96).

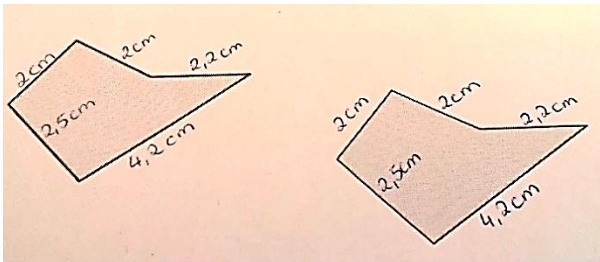


Abbildung 95: Prädikatives Überprüfen auf Kongruenz

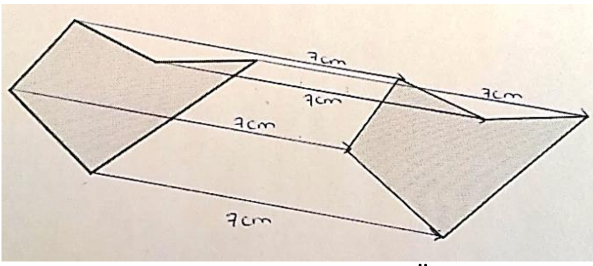


Abbildung 96: Funktionales Überprüfen auf Kongruenz

7.5. Das übergeordnete methodische Entscheidungsfeld: explorativ – organisatorisch – reflexiv

Eine Ausrichtung ausschließlich an den bisher betrachteten Dimensionen der Prozesshaftigkeit, der Aktivität-Operativität und der kognitiven Präferenzen hätte vor allem eine Berücksichtigung explorativer Momente des Wissensumgangs zur Folge, organisatorische und reflexive Momente würden höchstens implizit beachtet. Dies würde sowohl einer Vernetzung von Begriffsbild und Begriffskonvention als auch einer Berücksichtigung des gesamten Begriffsnetzes zuwider laufen. Daher muss explizit in einem methodischen Entscheidungsfeld zwischen explorativem, organisatorischem und reflexivem Wissensumgang unterschieden werden, und alle drei Arten des Wissensumgangs müssen bei der Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht berücksichtigt werden.

Die methodische Trennung zwischen einem explorativen, einem organisatorischen und einem reflexiven Merkmal des Wissensumgangs entstammt SJUTS (vgl. Sjuts 1999 & 2001). Diese Unterscheidung der drei Merkmale des Wissensumgangs bezieht sich auf den durch spezielle Aufgabentypen angeregten Wissensaufbau, somit wird der äußere Charakter einer Aufgabe mit den durch die drei Dimensionen angesprochenen (und in 7.2. bis 7.4. thematisierten) besser zu externalisierenden beziehungsweise stärker internalisiert ablaufenden Prozessen verknüpft. SJUTS entwickelte die genannten Merkmale des Wissensumgangs vor dem Hintergrund einer kognitiv-konstruktivistischen Didaktik:

> Die kognitiv-konstruktivistische Perspektive von Unterricht favorisiert den Diskurs. Er erfolgt, indem die Lernenden ihre Wissenskonstrukte mittels der ihnen möglichen Artikulations- und Repräsentationsformen offenlegen, und zeichnet sich durch ein dialogisches Vorgehen aus. Der Diskurs ist gruppendynamisch nicht herrschaftsfrei. Aber die Entscheidungsautorität wird nicht mehr (allein) durch die Lehrperson verkörpert, sondern durch die Qualität der Argumente. Das solchermaßen diskursive Ringen um Vorstellungen und Darstellungen zielt auf Verständigung und Verstehen.
>
> (Sjuts 1999, S. 63)

Diese kognitiv-konstruktivistische Perspektive macht die Merkmale des Wissensumgangs zu einem sinnvollen Instrument, um die verschiedenen Anschauungsstufen, die auf den VAN HIELEschen Stufen basieren, die verschiedenen Repräsentationsebenen nach BRUNER und beide kognitiven Präferenzen nach SCHWANK anzusprechen. Insbesondere kann auf der jeweils eigenen Anschauungsstufe, mit der eigenen Repräsentationsebene und kognitiven Präferenz gearbeitet werden, anders begründete Folgerungen müssen jedoch nachvollzogen werden und es kann auch die Progression zu einer anderen Anschauungsstufe oder Repräsentationsebene provoziert werden. Dabei spielen die Kommunikation über Mathematik und auch die Verwendung von Fachsprache eine zentrale Rolle. Vornehmlich durch die organisatorischen und reflexiven Momente können kognitive Konflikte entstehen, aber bedingt durch die Aufgabenformate oft auch selbst gelöst werden.

Explorativer Wissensumgang kann dabei heuristisch, divergent oder auch beziehungshaltig geprägt sein. Insgesamt greifen explorative Aufgaben das Vorwissen der Lernenden auf und regen zum Formulieren von Ideen und Auskundschaften von Lösungen an – bei heuristischen Aufgaben können verschiedene kontextunabhängige Strategien angewendet werden, divergente Aufgaben zeichnen sich durch eine Vielfalt möglicher Lösungswege aus, und bei beziehungshaltigen Aufgaben liegt die Betonung, im Sinne FREUDENTHALs Beziehungshaltigkeit, auf der Verknüpfung von Innerfachlichem gegebenenfalls auch mit Außerfachlichem. Organisatorischer Wissensumgang kann weiterhin eine texterschließende, eine expositorische oder eine syntaktische Prägung haben. Im Ganzen ist das Anliegen organisatorischer Aufgaben eine Arbeit mit Texten, Worten und Zeichen – bei texterschließenden Aufgaben sollen Texte erschlossen und bei expositorischen Aufgaben diese unter Berücksichtigung eigener Reaktionen verarbeitet werden, syntaktische Aufgaben sind dagegen auf der Ebene von Worten und Zeichen angesiedelt und widmen sich unter anderem der Aushandlung von Sprech- und Schreibweisen. Reflexiver Wissensumgang kann außerdem fehleranalytisch, diskursiv oder evaluativ geprägt sein. Insgesamt greifen reflexive Aufgaben auf schon bearbeitete Aufgaben oder Thematiken zurück – bei fehleranalytischen Aufgaben werden konkrete Fehler untersucht, bei diskursiven Aufgaben werden Äußerungen Anderer verglichen, hinterfragt und zu dem eigenen Wissen in Verbindung gesetzt, während evaluative Aufgaben sich eigenen Lern-, Denk- und Verstehensvorgängen widmen.

Die Merkmale des Wissensumgangs, explorativ – organisatorisch – reflexiv, sollen nun anhand der Begriffe Volumen beziehungsweise Oberflächeninhalt exemplarisch dargelegt werden. Dazu wird zu jedem Merkmal des Wissensumgangs jeweils eine Aufgabe mit Bezug auf einen der genannten Begriffe angegeben.

– Aufgabe „explorativ“ (vgl. Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 22)

Auf dem Bild sind die Verpackungen einiger Süßigkeiten zu sehen. Überlegt, wie man das Volumen dieser Verpackungen berechnen kann. Haltet eure Überlegungen schriftlich fest.

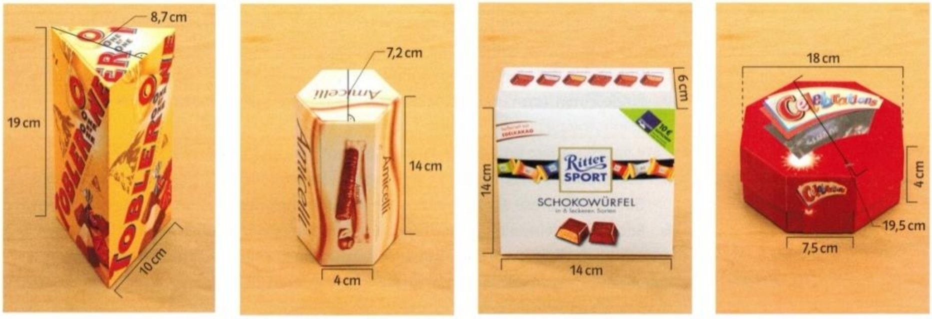


Abbildung 97: Aufgabe „explorativ“ (Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 22)

– Aufgabe „organisatorisch“ (vgl. Das Mathematikbuch 8, Ausgabe N, S. 51)

Der italienische Mathematiker Bonaventura Cavalieri (etwa 1598 bis 1647) hat das folgende Prinzip entdeckt und bewiesen: Zwei Körper, die auf gleicher Höhe geschnitten immer die gleiche Fläche haben, besitzen gleiches Volumen. Erkläre, wie der Satz von Cavalieri hilft, das Volumen des folgenden Prismas zu bestimmen.

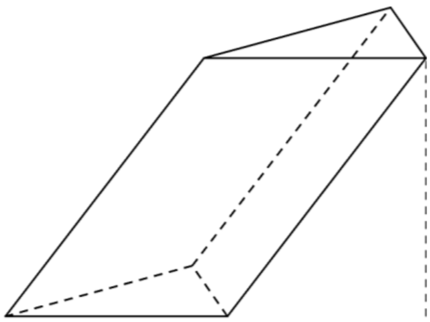
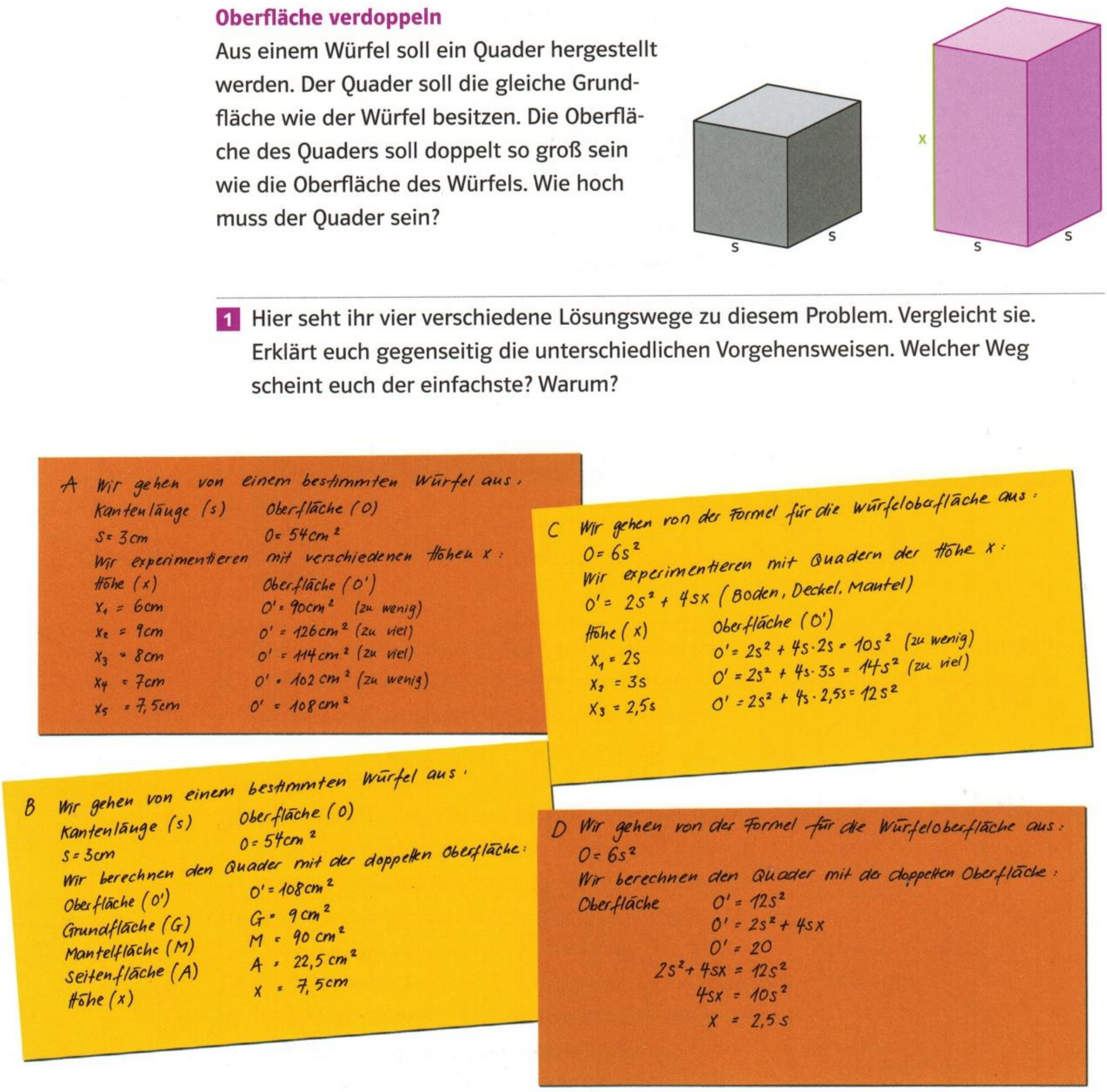


Abbildung 98: Aufgabe „organisatorisch“

– Aufgabe „reflexiv“ (aus: Das Mathematikbuch 8, Ausgabe N, S. 52)



Oberfläche verdoppeln
Aus einem Würfel soll ein Quader hergestellt werden. Der Quader soll die gleiche Grundfläche wie der Würfel besitzen. Die Oberfläche des Quaders soll doppelt so groß sein wie die Oberfläche des Würfels. Wie hoch muss der Quader sein?

1 Hier seht ihr vier verschiedene Lösungswege zu diesem Problem. Vergleicht sie. Erklärt euch gegenseitig die unterschiedlichen Vorgehensweisen. Welcher Weg scheint euch der einfachste? Warum?

A Wir gehen von einem bestimmten Würfel aus:
Kantenlänge (s) Oberfläche (O)
$s = 3\,cm$ $O = 54\,cm^2$
Wir experimentieren mit verschiedenen Höhen x:
Höhe (x) Oberfläche (O')
$x_1 = 6\,cm$ $O' = 90\,cm^2$ (zu wenig)
$x_2 = 9\,cm$ $O' = 126\,cm^2$ (zu viel)
$x_3 = 8\,cm$ $O' = 114\,cm^2$ (zu viel)
$x_4 = 7\,cm$ $O' = 102\,cm^2$ (zu wenig)
$x_5 = 7{,}5\,cm$ $O' = 108\,cm^2$

C Wir gehen von der Formel für die Würfeloberfläche aus:
$O = 6s^2$
Wir experimentieren mit Quadern der Höhe x:
$O' = 2s^2 + 4sx$ (Boden, Deckel, Mantel)
Höhe (x) Oberfläche (O')
$x_1 = 2s$ $O' = 2s^2 + 4s \cdot 2s = 10s^2$ (zu wenig)
$x_2 = 3s$ $O' = 2s^2 + 4s \cdot 3s = 14s^2$ (zu viel)
$x_3 = 2{,}5s$ $O' = 2s^2 + 4s \cdot 2{,}5s = 12s^2$

B Wir gehen von einem bestimmten Würfel aus:
Kantenlänge (s) Oberfläche (O)
$s = 3\,cm$ $O = 54\,cm^2$
Wir berechnen den Quader mit der doppelten Oberfläche:
Oberfläche (O') $O' = 108\,cm^2$
Grundfläche (G) $G = 9\,cm^2$
Mantelfläche (M) $M = 90\,cm^2$
Seitenfläche (A) $A = 22{,}5\,cm^2$
Höhe (x) $x = 7{,}5\,cm$

D Wir gehen von der Formel für die Würfeloberfläche aus:
$O = 6s^2$
Wir berechnen den Quader mit der doppelten Oberfläche:
Oberfläche $O' = 12s^2$
$O' = 2s^2 + 4sx$
$O' = 2O$
$2s^2 + 4sx = 12s^2$
$4sx = 10s^2$
$x = 2{,}5s$

Abbildung 99: Aufgabe „reflexiv“ (Das Mathematikbuch 8, Ausgabe N, S. 52)

Bei der ersten Aufgabe handelt es sich um eine explorative Aufgabe, weil die Schülerinnen und Schüler Möglichkeiten zur Berechnung des Volumens eines Prismas entdecken sollen. Weil die Aufgabe sehr offen ist, besteht auch die Möglichkeit, dass verschiedene Strategien angewendet und verschiedene Lösungswege entwickelt werden, deren Güte dann diskutiert werden kann. Zudem ist durch die Verpackungen eine Vernetzung von Inner- und Außerfachlichem gegeben, die besonderen Wert bekommt, wenn ermittelte Volumina mit der wirklichen Füllmenge in Beziehung gesetzt werden. Die zweite Aufgabe ist eine organisatorische Aufgabe, weil zunächst das angegebene Cavalierische Prinzip nachvollzogen und sich anschließend mit diesem Prinzip in Bezug auf die Volumenbestimmung des angegebenen Prismas auseinander gesetzt werden muss sowie eigene Gedanken dargelegt werden müssen. Dabei kann es sinnvoll sein, zur Bezeichnung einzelner Flächen oder Strecken des Prismas Namen und Zeichen festzulegen. Bei der dritten Aufgabe handelt es sich schließlich um eine reflexive Aufgabe, weil die verschiedenen angegebenen Lösungswege gegenübergestellt und kommentiert werden sollen. Zur Beantwortung der Frage, welcher Weg der subjektiv einfachste ist, kann es außerdem notwendig sein, auf eigene Lernvorgänge zurückzublicken.

7.6. FREUDENTHALs Phänomenologie vor dem Hintergrund der Grundvorstellungsdiskussion

Wie in 4.4.4. bereits angesprochen, appelliert FREUDENTHAL in seiner „Phänomenologie“, zum Aufbau von mentalen Objekten von Phänomenen auszugehen, und gegebenenfalls auch im späteren Verlauf der Beschäftigung mit einem Begriff zu Phänomenen zurückzugehen. In diesem Sinne lässt sich die FREUDENTHALsche Phänomenologie (1983) gut vor dem Hintergrund der Grundvorstellungsdiskussion betrachten. Die FREUDENTHALschen Phänomene unterscheiden sich schon deshalb grundlegend von den verschiedenen Grundvorstellungslisten, die im Zuge der Grundvorstellungsdiskussion genannt werden und in 6.3. erwähnt wurden, weil sie nicht in der Form einer abhakbaren Liste präsentiert werden. Stattdessen können sie zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht mittels des in 7.1. entwickelten Modells herangezogen werden.

Um einen etwas konkreteren Blick auf ein Phänomen im FREUDENTHALschen Sinn zu werfen, wird im Folgenden dessen phänomenologischer Weg zum Erfahren von Prismen betrachtet:

> Let us take the case of a – not necessarily triangular – prism. Twelve-year olds, and even older ones, do not lack the vocabulary [verschiedene Bezeichner] but rather the mathematical ability to describe this class of surfaces. Supplying the child with a description bears witness to a lack of didactical understanding, but the flight into the network is no more justifiable. One should rather exploit the fact that they are surface structures of solids, and this is done most efficiently by constructing the solids themselves, from clay or potatoes. This then is the way towards a conceptual analysis of the prism as a class of surfaces. It starts with modelling from clay, or cutting out of a potato, a disc, which can be irregularly bounded at its sides. In order to arrive at a prism, one remodels the sides: cutting away pieces, perpendicularly through the disc, in order to get a right prism. This construction implies a conceptual description: congruent base and top polygons connected by rectangular walls. (The parallelism of the edges – in the usual approach the primary element – is now a consequence.) Piling up prisms of the same kind or sawing parallel to the base and top side produces new prisms. These parallel cross-sections are congruent polygons related to each other by right or skew translations – a re-

> lation that leads to a new definition of prism – a right one if it is moved perpendicularly to its own plane. At a later stage this conceptual analysis leads to the definition of the solid prism as the Cartesian product of a planar polygon and a line-segment, or even an infinite line.
>
> (Freudenthal 1983, S. 299f)

Ein solch forschender Unterricht kann, entsprechend FREUDENTHAL, seinen Ausgangspunkt in einzelnen Fragen haben – für den Begriff Würfel beispielsweise „Wie erscheint ein Würfel, wenn man ihn längs einer Raumdiagonale betrachtet?“ oder mit Bezug auf den Begriff Spiegelung „Warum vertauscht ein Spiegel rechts und links und nicht oben und unten?“ (Freudenthal 1973b, S. 377f).

FREUDENTHALs Beschreibung legt den prozesshaften und aktiv-operativen Charakter des von ihm präferierten Vorgehens offen – von einer visuell-geometrischen wird mittels einer konzeptuell-begrifflichen eine formal-begriffliche Anschauungsstufe erreicht, dabei wird von enaktiven Repräsentationen ausgegangen und direkt eine symbolische Repräsentation erarbeitet – die ikonische Repräsentation bleibt allerdings außen vor.[204] Das selbstständige Arbeiten erlaubt zudem die Berücksichtigung der jeweils eigenen kognitiven Präferenz, der explorative Charakter ist dem genannten Vorgehen inhärent, aber auch organisatorische und reflexive Fragestellungen drängen sich durch das Formulieren von Beschreibungen und Definitionen sowie weiterführende Aufgabenstellungen, die auch auf untergeordnete Phänomene bezogen sein können, auf.

Die Art des obigen FREUDENTHALschen Zitats macht aber auch den Charakter seines gesamten Werkes deutlich – so bezeichnet FREUDENTHAL dieses selbst als „chaotic“ (Freudenthal 1983, S. ix), und tatsächlich hat es oft den Charakter eines Brainstorming. Somit muss festgehalten werden, dass die FREUDENTHALsche Phänomenologie gute Ideen für einen auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht enthält, diese Ideen aber in eigene sowohl lokalere als auch globalere Unterrichtsgestaltungen eingebettet werden müssen. Damit sind sie weniger zugänglich als Grundvorstellungslisten, was wohl auch die Popularität dieser Listen erklärt.

7.7. BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung vor dem Hintergrund der Grundvorstellungsdiskussion

BENDER und SCHREIBERs „Operative Genese der Geometrie“ (vgl. Bender & Schreiber 1985) knüpft dem Wesen nach an FREUDENTHALs Phänomenologie an. BENDER und SCHREIBER gehen, mit dem Ausgangspunkt ebenfalls in Phänomenen, allerdings über FREUDENTHALs Phänomenologie dahingehend hinaus, dass

[204] Zu der Besonderheit der ikonischen Repräsentation mit Bezug auf Objektbegriffe mit dreidimensionalen Realisaten siehe 7.3.2..

sie einen Zweckgedanken in den Mittelpunkt stellen. Laut BENDER (vgl. Bender 1991a) ist mit dem in der Operativen Genese der Geometrie dargelegten Prinzip der operativen Begriffsbildung[205] eine Möglichkeit, Grundvorstellungen ausgehend von echten Anwendungen aufzubauen, gegeben. Entsprechend des BENDER-schen Tenors bezüglich Grundvorstellungen werden diese nicht listenförmig formuliert, sondern stattdessen ein auf Sachanalysen basierender Weg der Begriffsbildung für die Geometrie entworfen. Dieser kann zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht mittels des in 7.1. entwickelten Modells herangezogen werden.

Die Grundidee des Prinzips der operativen Begriffsbildung besteht darin, dass Realisate hergestellt werden sollen, die einen gewissen praktischen Zweck erfüllen. Dieser Zweck als Ausgangspunkt weist auf bestimmte Funktionen hin, für deren Erfüllung das Objekt möglichst gut geeignet sein soll. Dadurch wird die Entwicklung geeigneter Formen gefordert, die in das Objekt, als Realisat, hineingesehen werden können und die andererseits darin näherungsweise verwirklicht werden. In den Worten BENDER und SCHREIBERs:

> […] Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, zumeist Homogenitätsanforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe.
>
> (Bender & Schreiber 1985, S. 26)

Visualisiert werden kann BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung in folgendem Schema (Abbildung 100):

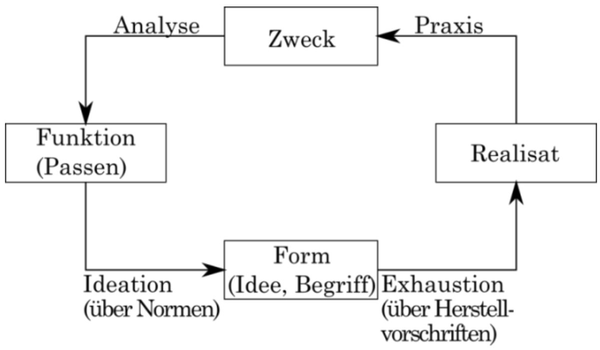


Abbildung 100: Schema zum Prinzip der operativen Begriffsbildung nach BENDER und SCHREIBER (1985, S. 27)[206]

---

[205] BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung unterscheidet sich dabei wesentlich von dem auf PIAGET basierenden operativen Prinzip. Wie sich in diesem Abschnitt zeigen wird, bezieht sich BENDER und SCHREIBERs Prinzip auf die „Entwicklung von Handlungsvorschriften aus Zweckanalysen, Herstellung und Gebrauch" statt auf „Verinnerlichung von Handlungen und Organisation in Gruppierungen" (Bender und Schreiber 1985, S. 260).

[206] In BENDER und SCHREIBERs Schema werden unter Form auch Idee und Begriff gefasst. Idee meint dabei einen gewissermaßen unscharfen Begriff und ist nicht im Sinne einer Universellen

Um einen etwas konkreteren Blick auf das Prinzip der operativen Begriffsbildung zu werfen, soll dieses nun auf den Begriff Würfel angewendet werden (vgl. Bender & Schreiber 1985, S. 26). Der Spielwürfel hat den Zweck, als Zufallsgenerator bei Spielen verwendet zu werden. Genauer soll er verschiedene mögliche Ergebnisse mit je gleicher Wahrscheinlichkeit ausgeben und dabei einfach zu handhaben sein, das meint sowohl gut Rollen als auch auf jeder möglichen Seite gut zum Liegen kommen und leicht ablesbar sein. Dieser Zweck wird erfüllt von Polyedern mit rechten Winkeln und hoher Symmetrie, die außerdem abgerundete Kanten, eine ebene Grundfläche und eine parallel dazu liegende Deckfläche haben. Falls sechs mögliche Ausgänge erwünscht sind, werden die Bedingungen nur von der Form des elementargeometrischen Würfels, also des Hexaeders, erfüllt. Diese Form muss nun mittels eines Realisats angenähert werden. Dies kann im Unterricht entweder durch Drücken einer Knetkugel, Schneiden einer Kartoffel oder Feilen eines Stücks Speckstein geschehen. Allerdings kann, begründet durch praktische Überlegungen, ebenso geometrisiertes Material zum Einsatz kommen. Wenn mit den unterschiedlichen Materialien auch unterschiedliche Handlungen durchgeführt werden, ist das Ziel doch jeweils die Annäherung von gleichlangen Kanten, rechten Winkeln und Ebenen – der Begriff des Würfels führt damit auf Grundbegriffe zurück.

Werden, wie von BENDER und SCHREIBER empfohlen, auch andere Stationen (als der Zweck) als Startpunkte des Begriffsbildungskreislaufs verwendet oder an einzelnen Stationen Verzweigungen zu anderen Kreisläufen unternommen und wird zu bereits behandelten Punkten zurückgekehrt, so können ein Begriffsnetz und auch Vernetzungen im Begriffsfeld aufgebaut werden – BENDER und SCHREIBER erwähnen allerdings, dass zeitweise der Aufbau des Begriffsnetzes im Vordergrund, und damit vor dem Kreislauf, stehen muss. Ein Ziel von BENDER und SCHREIBER lautet dabei explizit, an Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler anzuknüpfen und diese Vorerfahrungen zu ordnen. So werden, um auf das Beispiel des Würfels zurückzugehen, die Bedingungen, denen ein Spielwürfel genügen soll, im Fall von erwünschten vier, acht, zwölf oder zwanzig (oder einer beliebigen anderen Anzahl?) möglichen Ausgängen erfüllt von der Form eines anderen platonischen Körpers – dies setzt insbesondere den elementargeometrischen Würfel zu dem alltäglichen Spielwürfel in Beziehung.

Idee oder Zentralen Idee nach BENDER und SCHREIBER (zur Ideendiskussion: siehe 6.4.) aufzufassen. >>Idee<< wird dabei einerseits mit alltäglicher Prägung verwendet, Ideen wirken aber andererseits den Universellen und Zentralen Ideen noch untergeordnet.
Begriff meint weiterhin einen rein geometrischen Begriff. Alltägliche Begriffe und auch beispielsweise stochastische Begriffe ergeben sich erst im Wechselspiel von Zweck, Funktion und Form. Es folgt diese Möglichkeit der Unterordnung geometrischer Begriffe, im Gegensatz zu Begriffen aus anderen Kontexten, unter eine Station des Kreislaufs daraus, dass BENDER und SCHREIBER ihren Begriffsbildungskreislauf eigens für das Gebiet der Geometrie ausgearbeitet haben. Diese Sonderstellung geometrischer Begriffe legitimiert damit wiederum eine eigene Betrachtung von Grundvorstellungen für das Gebiet der Geometrie.

BENDER und SCHREIBER weisen darüber hinaus darauf hin, dass der Begriffsbildungskreislauf auf unterschiedlichen Formalisierungsniveaus durchlaufen werden sollte, was den prozesshaften Charakter ihres Vorgehens noch verstärkt. Während auf einem ersten Niveau im Sinne einer visuell-geometrischen Anschauungsstufe das Phänomen in ganzheitlicher Form im Mittelpunkt stehen kann, wobei schon Zweckaspekte thematisiert werden können, können auf zweitem Niveau im Sinne einer konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe die Begriffe genauer analysiert und in die Objekte hineingesehen werden. Auf drittem Niveau kann dann im Sinne einer formal-begrifflichen Anschauungsstufe das Begriffssystem logisch abgerundet werden. Es kann insgesamt von enaktiven Repräsentationen ausgegangen, möglicherweise auch darauf zurückgegangen, und eine symbolische Repräsentation erarbeitet werden, die ikonische Repräsentation ist wiederum kein notwendiger Bestandteil des Begriffsbildungskreislaufs – sie kann allerdings, insbesondere bei einem mehrmaligen Durchlaufen des Kreislaufs hinzugezogen werden und ein Mittel sein, mit dem der Begriff genauer analysiert werden kann. Wie schon bei FREUDENTHAL erlaubt auch bei BENDER und SCHREIBER das selbstständige Arbeiten weiterhin die Berücksichtigung der jeweils eigenen kognitiven Präferenz. Der explorative Charakter ist dem genannten Vorgehen wiederum inhärent, aber noch stärker als bei FREUDENTHAL drängen sich durch mögliche Verzweigungen, die bei einem Durchlaufen des Begriffsbildungskreislaufes gegangen werden können, oder durch mehrmaliges Durchlaufen dessen organisatorische und reflexive Fragestellungen auf.

7.8. Zwischenfazit – Grundvorstellungen

Mit Rückgriff auf die Grundvorstellungen nach BENDER, nach einem Blick auf verschiedene Grundvorstellungslisten und aufgrund der Tatsache, dass nach BENDER kein Algorithmus zur Formulierung von Grundvorstellungen bereitgestellt werden kann, wurde die Frage, wie ein auf Grundvorstellungen zielender Unterricht aussehen kann, durch Konstruktion eines Modells beantwortet. Dazu wurde zurückgegriffen auf die Methode des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten. Die einzelnen Dimensionen des Modells beziehungsweise die übergeordneten Momente wurden durch Rückgriff auf die VAN HIELEs, BRUNER, SCHWANK beziehungsweise SJUTS erläutert. Das entwickelte Modell kann als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht dienen. Damit ist Lehrpersonen einerseits eine Brille gegeben, ein Blick durch welche sie beim Aufbau von Grundvorstellungen unterstützt. Andererseits verneint diese Brille die grundsätzliche Existenz von Grundvorstellungslisten zu beliebigen Begriffen, welche eine einfach zu befolgende Maßgabe darstellen würden.

Die einzelnen Dimensionen des Modells und das methodische Entscheidungsfeld wurden exemplarisch verdeutlicht, die mit Rückgriff auf FREUDENTHAL sowie

BENDER und SCHREIBER genannten Beispiele dienen als übergeordnete Beispiele für auf Grundvorstellungen zielende Unterrichtssequenzen. Sowohl die FREUDENTHALsche Phänomenologie als auch BENDER und SCHREIBERs Operative Genese der Geometrie enthalten auch für viele weitere, insbesondere geometrische beziehungsweise ausschließlich geometrische Begriffe konkrete Anregungen für solche Unterrichtssequenzen. Mit BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung ist darüber hinaus ein auf zusätzliche geometrische Begriffe anwendbarer Leitfaden zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht gegeben, der einem Blick durch die Brille des entwickelten Modells standhält.

Da allerdings ein unabhängig von einem Schulbuch komplett selbstständig gestalteter Unterricht, insbesondere aus zeitlichen Gründen, selten ist, soll im Folgenden ein abschließender Blick in Schulbücher geworfen werden. Bei dieser Schulbuchanalyse stellt die Frage, inwieweit ein gegebenes Werk mit Bezug auf einen Begriff einen auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht ermöglicht, den Schwerpunkt dar. Zusätzlich sollen Vorschläge, wie ein auf dem Schulbuch basierender Unterricht im Hinblick auf die Ausbildung von Grundvorstellungen angereichert werden kann, auch mit Rückgriff auf das in diesem Kapitel entwickelte Modell, gemacht werden.

8. Ein Blick in Schulbücher

In den bisherigen Kapiteln wurde Begriffsbildung sowohl aus einer semiotischen als auch aus einer philosophisch-psychologischen Perspektive betrachtet, und Grundvorstellungen wurden als Verbindungsglied von Begriffsbild und Begriffskonvention und damit als ein Mittel, mit welchem ein intersubjektiver Begriff erschlossen und nutzbar gemacht werden kann, untersucht. Dabei wurde ein Modell als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht entwickelt. Abschließend soll nun gezeigt werden, wie die entwickelte Theorie praxisrelevant angewendet werden kann. Die Theorie soll damit prototypisch umschrieben werden. Zu diesem Zweck wird ein Blick in Schulbücher, exemplarisch in die Werke Lambacher Schweizer und Das Mathematikbuch, geworfen. Daher werden diese beiden Schulbuchreihen zunächst kurz vorgestellt. Es sollen beispielhaft die Begriffe Würfel und Achsenspiegelung betrachtet werden, weswegen weiterhin auf deren Behandlung im Mathematikunterricht im Saarland entsprechend der Lehrpläne eingegangen wird. Schließlich wird sich der konkreten Behandlung der Begriffe in den angesprochenen Schulbuchreihen gewidmet, und es werden Vorschläge, wie ein auf diesen Schulbuchreihen basierender Unterricht verbessert werden kann, angebracht.

8.1. Die Schulbuchreihen Lambacher Schweizer und Das Mathematikbuch

Wenn die Behandlung spezifischer Inhalte im Mathematikunterricht betrachtet wird, ist der Blick auf das entsprechende Schulbuch unerlässlich. So bestätigt REZAT (2009, S. 51ff) die alltägliche Feststellung, dass das eingeführte Schulbuch die Unterrichtsvorbereitung sowohl mit Bezug auf inhaltliche als auch mit Bezug auf methodische Fragen prägt und dabei auch zur Strukturierung der Lerninhalte beiträgt. Das Schulbuch wird dabei sowohl explizit verwendet, als dass auch Unterrichtsinhalte sich implizit daran orientieren. Demnach kann nicht bestritten werden, dass der Aufbau einer Schulbuchreihe an sich und die Umsetzung einzelner Themen den Unterricht maßgeblich prägen. Aus diesem Grund wird eine allgemeine Betrachtung der gewählten Schulbuchreihen vorangestellt, bevor sich konkreter den gewählten Begriffen zugewendet wird.

Bei der Schulbuchreihe Lambacher Schweizer handelt es sich um ein Werk, das auf eine lange Geschichte zurückblickt (vgl. Stark 2011). Kurz nach dem Ende des zweiten Weltkrieges, in den Jahren 1946 und 1947, wurden die ersten Lambacher Schweizer-Hefte herausgegeben. Im Jahr 1952 folgte dann die erste Gesamtausgabe, seit den 1990er Jahren gibt es bundeslandspezifische Ausgaben. Die jüngste Ausgabe des Lambacher Schweizer wurde strukturell grundlegend überarbeitet. Als Strukturelemente kamen beispielsweise „Auftaktseiten", „Seiten zum Wiederholen – Vertiefen – Vernetzen" und „Trainingsrunden" (Stark

2011, S. 21) hinzu.[207] Diese jüngste Ausgabe wurde dabei bisher für alle Bundesländer, außer für das Saarland, veröffentlicht (vgl. Ernst Klett Verlag). Die Ausgabe für das Saarland wurde erstmals 2001 herausgegeben. Das Buch ist am Lehrplan orientiert und enthält – konservativ strukturiert – mehrere Themenblöcke (z.B. für Klassenstufe 6 „Geometrische Körper und Rauminhalte"), die wiederum unterteilt sind in Unterthemen (z.B. „Geometrische Körper, Ecken, Kanten, Flächen", „Symmetrische Körper", „Abwicklungen", ...). Die einzelnen Unterthemen enthalten jeweils wenige Einführungsaufgaben, anschließend eine Erklärung oder Definition sowie in einigen Fällen einen Merkkasten. Dem folgen Beispiele und daraufhin wiederum Aufgaben.[208] Die Themenblöcke abschließend finden sich einzelne Themenseiten (z.B. „Basteln mit geometrischen Körpern"), weiterhin ein Rückblick und Aufgaben zum Üben und Wiederholen.

Bei der Reihe Das Mathematikbuch handelt es sich demgegenüber um ein für Schulbuchverhältnisse sehr junges Werk. Das Mathematikbuch ist eine Adaption des Schweizer Zahlenbuchs, dessen erster Band 1999 veröffentlicht wurde. Der erste Band des deutschen Werkes wurde dann 2008 herausgegeben. Das Buch liegt in drei verschiedenen Fassungen vor, die sich an verschiedenen Lehrplänen orientieren. Es kann allerdings flexibel an den Unterricht angepasst werden, da es – im Sinne einer konstruktivistischen Didaktik – doppelseitige Lernumgebungen zu verschiedenen anwendungsorientierten (z.B. für Klassenstufe 5 „Päckchen schnüren") und innermathematischen (z.B. für Klassenstufe 6 „Platonische Körper") Themen enthält. Zusätzlich kann in einem Arbeitsheft das Gelernte vertieft, vernetzt und erweitert werden. Das Mathematikbuch legt dabei Wert auf aktiv-entdeckendes Lernen, die Verwendung von Anschauungsmitteln und betont außerdem den sozialen Aspekt von Lernen, die Lernumgebungen erlauben weiterhin differenzierenden Unterricht (vgl. u.a. Das Mathematikbuch 5, Begleitband, Ausgabe N).

8.2. Die Begriffe Würfel und Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie im Mathematikunterricht

Als exemplarisch zu betrachtende Begriffe sind hier Würfel und Achsenspiegelung ausgewählt. Beide Bezeichner und mögliche Begriffsausprägungen sind schon aus dem Alltag bekannt beziehungsweise werden auch dort verwendet. Der Begriff Würfel ist außerdem, wie Kapitel 2. deutlich gemacht hat, mit Blick auf das Begriffsfeld ein sehr gehaltvoller Begriff. Er eignet sich, wie in 7.2.1. schon gezeigt wurde, gut für einen prozesshaften, die Anschauungsstufen visuell-

[207] Einige der neuen Strukturelemente finden sich in ähnlicher Form in der Schulbuchreihe Neue Wege.
[208] Der Aufbau der neueren Ausgaben für die anderen Bundesländer unterscheidet sich nur bedingt von diesem Aufbau. Dabei ersetzen sogenannte Lerneinheiten, die auch offenere Anregungen und diesen folgend die Erklärungen beinhalten, den Einstieg mittels der Einführungsaufgaben (siehe z.B. Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Rheinland-Pfalz).

geometrisch – konzeptuell-begrifflich – formal-begrifflich vernetzenden Unterricht. Der Begriff Achsenspiegelung gehört als Abbildungsbegriff zu einer anderen Begriffsklasse, als der Begriff Würfel. Er eignet sich, wie in 7.3.1. dargelegt wurde, im Gegensatz zu Würfel, gut für einen aktiv-operativen, die Repräsentationsebenen enaktiv – ikonisch – symbolisch vernetzenden Unterricht. Beide Begriffe erlauben eine Beachtung der kognitiven Präferenzen prädikativ und funktional, wobei ein funktionaler Zugang im Vergleich zum Würfel bei der Achsenspiegelung naheliegender ist – der Würfelbegriff kann gut prädikativ erfahren werden, ein funktionaler Zugang ist ungewöhnlich, im Fall der Achsenspiegelung kann allerdings eine ursprünglich prädikativ zu fassende Situation, bei der Urbild und Spiegelbild gleichzeitig vorhanden sind, durch einen einsichtigen funktionalen Zugang bei der Konstruktion eines Spiegelbildes angereichert werden. Weiterhin erlauben beide Begriffe die Berücksichtigung des explorativen, organisatorischen und reflexiven Merkmals des Wissensumgangs. Die Betrachtung von weiteren, neben den beiden genannten Beispielen, wäre sicherlich interessant, ist aber im Rahmen der vorliegenden Arbeit, bei der die Schulbuchanalyse ohnehin exemplarischen Charakter hat, nicht weiter zielführend.

Im Mathematikunterricht der Grundschule sollen für die Begriffe Würfel und Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie schon Grundlagen gelegt werden. Mit Bezug auf den Würfelbegriff sollen entsprechend dem Kernlehrplan für die Grundschule im Saarland (Ministerium für Bildung, Familie, Frauen und Kultur 2009) die Schülerinnen und Schüler schon in Klassenstufen 1 und 2 würfel-, rollen- und kugelförmige Gegenstände unter anderem nach ihrer Form sortieren. In Klassenstufe 3 sollen dann verschiedene Körper untersucht und anhand ihrer Eigenschaften beschrieben und verglichen sowie in der Umwelt lokalisiert werden. Es sollen Modelle hergestellt sowie Netze erkannt, hergestellt und gezeichnet werden. In der vierten Klassenstufe soll auf einem etwas höheren Niveau weitestgehend auf die Inhalte der dritten Klassenstufe zurückgegangen werden. Der Mathematikunterricht der fünften Klassenstufe (vgl. Ministerium für Bildung und Kultur Saarland 2014a) widmet sich zunächst weitestgehend geometrischen Begriffen in der Ebene, diese sollen allerdings auch an sich in der Umwelt befindlichen Körpern verortet werden. In der sechsten Klassenstufe (vgl. Ministerium für Bildung und Kultur Saarland 2014b) soll dann zur räumlichen Geometrie zurückgegangen werden, auf dieser Klassenstufe liegt der Schwerpunkt der dort traditionell noch propädeutischen unterrichtlichen Arbeit mit geometrischen Körpern. Dabei sollen die Körper mit Hilfe von Fachbezeichnern beschrieben, Kantenmodelle hergestellt und Netze gezeichnet werden. Der Würfel soll insbesondere auch als Unterbegriff des Quaders thematisiert und sowohl dessen Schrägbild gezeichnet als auch die Berechnung des Volumens behandelt werden.

Mit Bezug auf den Begriff Achsenspiegelung ist zunächst auf dessen Nähe zum Begriff der Achsensymmetrie hinzuweisen. Wie ELSCHENBROICH (2015) ausführt, werden die beiden Begriffe auch in Schulbüchern meist nicht trennscharf verwendet. Gleichermaßen gerät auch die Verwendung von Spiegelachse und Symmetrieachse sowie achsengespiegelt und achsensymmetrisch häufig durcheinander. Es ist aber beispielsweise eine Beschreibung einer Figur als achsensymmetrisch, wenn sie durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden kann, möglich (vgl. Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 68) – dies macht auch eine Unterscheidung der Begriffe Achsensymmetrie und Achsenspiegelung möglich. Aufgrund der Nähe der Begriffe Achsenspiegelung und Achsensymmetrie zueinander sowie der gemeinsamen oder zeitnahen Behandlung der Begriffe entsprechend Lehrplänen oder in Schulbüchern werden im Folgenden jedoch beide Begriffe gemeinsam betrachtet.

Mit Bezug auf die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie sollen schon in Klassenstufen 1 und 2 (Ministerium für Bildung, Familie, Frauen und Kultur 2009) symmetrische Abbildungen als solche erkannt und fortgesetzt sowie Figuren auf Achsensymmetrie untersucht und eigene achsensymmetrische Figuren hergestellt werden.[209] In Klassenstufen 3 und 4 sollen dann auf einem etwas höheren Niveau die Inhalte der ersten und zweiten Klassenstufe wieder aufgegriffen werden. Auf der sechsten Klassenstufe (Ministerium für Bildung und Kultur Saarland 2014b) liegt auch bezüglich der Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie der Schwerpunkt der unterrichtlichen Arbeit. Dabei soll der Begriff der Achsensymmetrie formalisiert, aber auch jener der Spiegelung verwendet werden. Es sollen wiederum Figuren auf Achsensymmetrie untersucht und achsensymmetrische Figuren hergestellt, aber auch konkreter Punkte an Geraden gespiegelt werden. Ein abbildungsgeometrischer Zugang soll allerdings explizit außen vor bleiben. In der siebten Klassenstufe (Ministerium für Bildung und Kultur Saarland 2014c) soll dann im Rahmen des Themas „Kongruenz“ auf Achsenspiegelungen zurückgegangen werden. Dabei sollen diese auch, insbesondere durch Verwendung eines DGS, dynamisiert werden.

8.3. Die Begriffe in den Schulbüchern

Im Folgenden sollen nun die Schulbuchausschnitte aus Lambacher Schweizer und Das Mathematikbuch, welche sich auf die Begriffe Würfel und Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie beziehen, untersucht werden. Von Interesse ist dabei einerseits, ob an das Begriffsbild von Schülerinnen und Schülern, und damit an das darin enthaltene persönliche Begriffsfeld als Bestandteil eines allgemeinen Begriffsfeldes, angeknüpft wird – das meint, ob verschiedene Begriffe sowie die diese bezeichnenden Bezeichner und konkretisierenden Objekte,

[209] Dies macht deutlich, dass die saarländischen Lehrpläne den Begriff der Achsensymmetrie als grundlegender als jenen der Achsenspiegelung ansehen.

auch aus dem lebensweltlichen Umfeld, und insgesamt verschiedene Kontexte angesprochen werden. Denn auch wenn die Begriffe schon im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert werden sollten, so zeigt doch die in Kapitel 5. dargelegte Umfrage die Präsenz unterschiedlicher Kontexte (neben dem elementargeometrischen) in Schülerantworten auch aus höheren gymnasialen Klassenstufen. Von Interesse ist andererseits schwerpunktmäßig, ob die verschiedenen sich in dem Modell als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht findenden Dimensionen, beziehungsweise die diese Dimensionen konstituierenden Merkmale, und die übergeordneten methodischen Momente berücksichtigt werden.

8.3.1. Der Begriff Würfel im Lambacher Schweizer

Im Lambacher Schweizer wird der Begriff Würfel im Band für die fünfte Klassenstufe im Rahmen der geometrischen Körper unter der Überschrift „Geometrische Körper, Quader, Würfel“ (Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8, S. 164f) im Vorfeld der Behandlung geometrischer Figuren kurz angesprochen. Lehrplangemäß liegt auf der sechsten Klassenstufe der Schwerpunkt der Arbeit mit geometrischen Körpern. Dabei werden zunächst die Körper an sich untersucht, dann wird auf Symmetrieeigenschaften, Körpernetze, das Zeichnen von Schrägbildern und das Volumen sowie den Oberflächeninhalt eingegangen (Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 106ff), wobei der Würfel jeweils eine große Rolle spielt.[210]

Verschiedene nicht-geometrische Kontexte, in denen der Würfel und die anderen thematisierten Körper auftreten, werden in den Bänden für beide Klassenstufen nur in jeweils einer Einführungsaufgabe, in denen zu den Körpern Gegenstände genannt werden sollen, welche die entsprechende Form haben, thematisiert.[211] Bei dieser Aufgabenstellung ist das Objekt zentral, verschiedene Begriffe und Bezeichner spielen nur implizit eine Rolle.

Mit Bezug auf die drei Anschauungsstufen aufbauend auf den van Hieleschen Stufen wird in beiden Bänden von einer visuell-geometrischen Anschauungsstufe, das heißt einer ganzheitlichen Sicht auf die Körper, ausgegangen, die sich findet, wenn die Körper in alltäglichen Gegenständen oder zusammengesetzten Körpern erkannt werden sollen.[212] Dann wird allerdings schnell, noch in der Einführung, zu der konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe übergegangen, wenn

---

[210] Es werden im Folgenden nur Beispielaufgaben aus den Unterthemen „Geometrische Körper, Ecken, Kanten, Flächen“, „Symmetrische Körper“ und „Abwicklungen“ angegeben. Solche zum Zeichnen von Schrägbildern bleiben außen vor, weil dort das Hauptanliegen das Kennenlernen von Spielregeln der Darstellung ist (siehe: 7.3.2.). Solche zu Volumen und Oberflächeninhalt bleiben außen vor, weil dort die genannten Maßbegriffe im Mittelpunkt stehen.
[211] Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8, S. 164 Nr. 2 & S. 165 Nr. 3
Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 106 Nr. 1, 2
[212] Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8, S. 164 Nr. 2 & S. 165 Nr. 3, 5
Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 106 Nr. 1, 2 & S. 107 Nr. 6

Eigenschaften der Körper untersucht und die Körper mittels ihrer Eigenschaften beschrieben werden sollen.[213] Auch der Schritt zur formal-begriffliche Anschauungsstufe geschieht schnell, wenn die Beziehungen verschiedener Eigenschaften der Körper zueinander entdeckt werden sollen.[214] Diese formal-begriffliche Anschauungsstufe geht allerdings nicht soweit, dass die Körper mittels einer über Beschreibungen hinausgehenden Definition gefasst werden.

Hinsichtlich der Repräsentationsebenen nach BRUNER ist festzustellen, dass in verschiedenen Aufgabenstellungen Handlungen oder bildliche Darstellungen eine Rolle spielen.[215] Es geschieht jedoch selten eine aufsteigende Vernetzung der Repräsentationsebenen, wie sie durch die Trias enaktiv – ikonisch – symbolisch angesprochen wird,[216] da in den meisten Fällen die Spielregeln, welche den Handlungen oder Bildern zu Grunde liegen, schon auf den Einführungsseiten angegeben werden.

Bezüglich der kognitiven Präferenzen nach SCHWANK ist eine Ausgewogenheit des prädikativen und des funktionalen Zugangs wünschenswert. Es lassen sich allerdings in der Einführung zu Unterthemen des Buches teilweise noch funktionale Beschreibungen finden,[217] die Aufgabenstellungen sind jedoch aufgrund der verwendeten statischen Sprache prädikativ gefasst.[218] Da die beiden kognitiven Präferenzen nach SCHWANK sehr an die geschriebene und gesprochene Sprache gebunden sind, kann eine durch ein Schulbuch angesprochene kognitive Präferenz hauptsächlich durch die Wortwahl in dem Buch festgestellt werden – weil prädikatives Denken allerdings sprach-affiner ist (siehe: 7.4.), lassen sich viele Aufgabenstellungen grundsätzlich besser prädikativ fassen und erfassen, das funktionale Denken kann sich dann erst im Bearbeitungsprozess zeigen.

Das explorative Merkmal des Wissensumgangs[219] findet sich ausschließlich in Aufgaben zum Unterthema „Abwicklungen",[220] gleiches gilt für das reflexive Merkmal.[221] Wissensorganisatorische Aufgaben finden sich mit Bezug auf den Würfelbegriff nicht. Das bei der hohen Gesamtzahl an Aufgaben insgesamt ge-

---

[213] Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8, S. 165 Erklärung, Merkkasten, Nr. 4
Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 106 Erklärung, Beispiele, S. 107 Nr. 4, 5, 8
[214] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 107 Nr. 7 & S. 109 Nr. 5, 6, 8
[215] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 109 Nr. 3, 4, 5, 6 & S. 110 Nr. 4, 5
[216] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 110 Nr. 1, 2, 3
[217] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 108 & S. 110
[218] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 109 & S. 111
[219] Insbesondere mit Bezug auf die Merkmale des Wissensumgangs ergibt sich die Zuordnung einer Aufgabe zu einem Merkmal auch durch die Einbettung der Aufgabe in den Unterrichtsprozess als Ganzes – wenn eine Aufgabe, die in dem Schulbuch der Einführung folgt, vor diese geschoben wird, kann sie beispielsweise explorativen Charakter erhalten. Die Aufgaben sind hier allerdings entsprechend der Dramaturgie des Buches und vor dem Hintergrund des durch das Schulbuch bereitgestellten Vorwissens eingeordnet.
[220] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 110 Nr. 1, 2, S. 111 Nr. 7, 8, 9 & S. 112 Nr. 10, 11, 12, 13
[221] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 111 Nr. 4, 9

ringe Gewicht explorativer, organisatorischer und reflexiver Aufgaben lässt sich damit begründen, dass in vielen Aufgaben die Inhalte aus der Einführung lediglich angewendet werden sollen. Bei diesen Aufgaben handelt es sich somit um Übungsaufgaben, denen allerdings durch die Struktur des Buches nicht explizit der Charakter solcher gegeben wird.

Zusammenfassend lässt sich somit bemerken, dass durch den Aufbau des Schulbuches, welches Erklärungen, möglicherweise Merkkästen und Beispiele direkt zu Beginn eines Themas präsentiert, mit Bezug auf die geometrischen Körper die visuell-geometrische Anschauungsstufe nur geringes Gewicht hat. Auch eine Vernetzung der Repräsentationsebenen, eine Ausgewogenheit der beiden kognitiven Präferenzen sowie die Merkmale des Wissensumgangs sind nur bedingt vertreten. Das gehaltvollste Unterthema insgesamt ist dabei „Abwicklungen". Ein insbesondere die Vernetzung der Repräsentationsebenen, die Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen und die Merkmale des Wissensumgangs berücksichtigender Begriffsbildungsprozess des Begriffs Würfel an sich bleibt allerdings außen vor.

8.3.2. Der Begriff Würfel in Das Mathematikbuch

In Das Mathematikbuch wird der Begriff Würfel im Band für die fünfte Klassenstufe in den Lernumgebungen zum Bauen von Körpern aus Würfeln, zu Würfelspielen, dem Verschnüren von Päckchen sowie zum Volumen (Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 74f, 78f, 84f & 90f) angesprochen. Im Band für die sechste Klassenstufe findet sich die einzige Lernumgebung, „Platonische Körper", die sich gezielt Entdeckungen an geometrischen Körpern widmet, außerdem auch eine Lernumgebung zu Würfelgebäuden (Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 50f & S. 74f). Im Band für die siebte Klassenstufe wird schließlich in einer Lernumgebung auf verschiedene Würfelansichten im Sinne einer „Kopfgeometrie" eingegangen (Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 28f), im Band für die achte Klassenstufe spielt der Würfel in einer Lernumgebung zum Tetraeder eine untergeordnete Rolle (Das Mathematikbuch 8, Ausgabe N, S. 8f).[222]

Verschiedene nicht-geometrische Kontexte, in denen der Würfel auftritt, werden im Band für Klassenstufe 5 in der Lernumgebung zum Volumen in Form von Gegenständen bestimmter Größenordnung thematisiert.[223] Dabei ist das Objekt zentral, Begriffe und Bezeichner spielen nur implizit eine Rolle. Weiterhin wird als nicht-geometrischer Kontext, in dem der Würfel relevant ist, im Band für Klassenstufe 5 in der Lernumgebung zu Würfelspielen (welche sich direkt hinter zwei Lernumgebungen zu Würfel und Quader befindet) der Alltag beziehungs-

[222] Es werden nur konkrete Beispielaufgaben aus der Lernumgebung zu platonischen Körpern und zur Kopfgeometrie angegeben, da in den anderen genannten Lernumgebungen das Entdecken der Körper / des Würfels keine Rolle spielt.
[223] Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 90

weise die Stochastik[224] thematisiert. Im Band für Klassenstufe 7 wird mit Bezug auf die Würfelansichten der Spielwürfel erneut angesprochen. Somit ist der alltägliche beziehungsweise stochastische Begriff zentral, aber auch Bezeichner und Objekt spielen eine Rolle.[225]

Mit Bezug auf die Anschauungsstufen aufbauend auf den VAN HIELEschen Stufen wird in Klassenstufen 5 und 6 außerhalb der Lernumgebung zu platonischen Körpern ein visuell-geometrischer Blick auf den Würfel geworfen, weil er als Ganzes betrachtet wird, ohne dass auf weitere Eigenschaften eingegangen wird. In der Lernumgebung zu platonischen Körpern wird allerdings direkt, noch in der ersten Aufgabe, zur konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe übergegangen, wenn die Eigenschaften der Körper untersucht und diskutiert werden sollen.[226] Diese konzeptuell-begriffliche Anschauungsstufe wird in der zweiten Aufgabe dann, im Sinne einer Systematisierung, vertieft.[227] In der fünften Aufgabe wird schließlich, reflexiv, die formal-begriffliche Anschauungsstufe erschlossen, da verschiedene Eigenschaften der Körper berücksichtigt werden müssen.[228] In Klassenstufe 7 wird zunächst auf die visuell-geometrische Anschauungsstufe zurückgegangen, diese aber schon ab der ersten Aufgabe mit der konzeptuell-begrifflichen oder auch formal-begrifflichen Anschauungsstufe vernetzt.[229] Die formal-begriffliche Anschauungsstufe geht allerdings wiederum nicht soweit, dass die Körper mittels einer über Beschreibungen hinausgehenden Definition gefasst werden.

Hinsichtlich der Repräsentationsebenen nach BRUNER ist festzustellen, dass in der Lernumgebung zu platonischen Körpern Handlungen im Sinne des Baus eines Kantenmodells eine Rolle spielen, dass diesen jedoch schon gewisse Spielregeln zu Grunde liegen.[230] Da die Spielregeln allerdings selbstständig erarbeitet werden müssen, kann auch argumentiert werden, dass mittels der enaktiven Repräsentation die symbolische Repräsentation gefestigt wird und damit beide Repräsentationsebenen vernetzt werden. In der Lernumgebung zur Kopfgeometrie wird ein Würfel geflochten, die Vernetzung dieser enaktiven Repräsentation mit der ikonischen und symbolischen Repräsentationsebene geschieht allerdings höchstens mittels der dazu geforderten Erklärung.[231] Sämtliche ikonische Darstellungen sind zudem schon symbolisch aufgeladen.

---

[224] Der Kontext ist in diesem Fall nicht als ausschließlich alltäglich oder stochastisch einzuordnen, weil einerseits das Spiel im Mittelpunkt steht, andererseits aber auch schon elementare stochastische Überlegungen angestellt werden.
[225] Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 78f
[226] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 50 Nr. 1
[227] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 50 Nr. 2
[228] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 51 Nr. 5
[229] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 28 Nr. 1, 2, 3, 4, 5
[230] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 51 Nr. 3, 4
[231] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 28 Nr. 1

Bezüglich der kognitiven Präferenzen nach SCHWANK sind die Aufgabenstellungen in der Lernumgebung zu platonischen Körpern aufgrund der verwendeten statischen Sprache prädikativ gefasst. Auch die Aufgabenstellungen in der Lernumgebung zur Kopfgeometrie haben oft prädikativen Charakter, wobei das Anliegen der Lernumgebung insgesamt funktional geprägt ist. Es ist allerdings wie in 8.3.1. darauf hinzuweisen, dass sich Aufgabenstellungen besser prädikativ fassen lassen und funktionales Denken dennoch bei der Bearbeitung zum Vorschein kommen kann.

Die Lernumgebungen zu platonischen Körpern und zur Kopfgeometrie enthalten schließlich explorative,[232] organisatorische[233] und reflexive[234] Aufgaben. In einigen Aufgaben sind dabei Aspekte unterschiedlicher Merkmale des Wissensumgangs miteinander vernetzt.

Die zu den betrachteten Lernumgebungen gehörenden Aufgaben im Arbeitsheft (Das Mathematikbuch 6, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 41f; Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 47ff) erfordern einen konzeptuell-begrifflichen Blick, symbolisches Arbeiten und verwenden eine prädikativ geprägte Sprache. Dabei sind Aufgaben zum explorativen,[235] organisatorischen[236] und reflexiven[237] Merkmal des Wissensumgangs enthalten.

Zusammenfassend lässt sich damit feststellen, dass mit Bezug auf platonische Körper und Kopfgeometrie von einer visuell-geometrischen Anschauungsstufe ausgehend die konzeptuell-begriffliche und auch die formal-begriffliche Anschauungsstufe erschlossen werden, sowie dass die unterschiedlichen Merkmale des Wissensumgangs ausgeprägt sind. Eine Vernetzung der Repräsentationsebenen und insbesondere eine Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen sind allerdings nur bedingt vertreten. Ein die Anschauungsstufen, die Merkmale des Wissensumgangs und bis zu einem gewissen Grad auch die Repräsentationsebenen vernetzender Begriffsbildungsprozess des Begriffs Würfel wird damit möglich, eine Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen bleibt allerdings stärker zu fokussieren.

[232] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 50 Nr. 1 & S. 51 Nr. 3, 4, 5
Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 28 Nr. 1, 3
[233] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 50 Nr. 2 & S. 51 Nr. 4, 5
Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 28 Nr. 1, 2
[234] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 51 Nr. 5
Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 29 Nr. 4, 5
[235] Das Mathematikbuch 6, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 41 Nr. 1 & S. 42 Nr. 2
Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 47 Nr. 2 & S. 48 Nr. 4
[236] Das Mathematikbuch 6, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 41 Nr. 1 & S. 42 Nr. 2
Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 47 Nr. 3
[237] Das Mathematikbuch 6, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 41 Nr. 1
Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 47 Nr. 3

8.3.3. Die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie im Lambacher Schweizer

Der Lambacher Schweizer spricht den Begriff Achsensymmetrie im Band für die sechste Klassenstufe unter der Überschrift „Symmetrische Körper" im Rahmen der Behandlung der geometrischen Körper implizit an (Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 108f). Auf der siebten Klassenstufe liegt der Schwerpunkt der Arbeit mit Achsenspiegelungen beziehungsweise Achsensymmetrie, wobei sich diesen dann zunächst abbildungsgeometrisch genähert wird. Es werden Achsenspiegelungen untersucht, anschließend wird auf Achsensymmetrie zurückgegangen und es werden außerdem gezielt achsensymmetrische Dreiecke angesprochen (Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64ff). Insgesamt werden die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie somit in voneinander verschiedenen Unterkapiteln der Schulbuchreihe behandelt und auch deren Beziehung zueinander wird deutlich ausgedrückt.[238]

Außermathematische Kontexte mit Bezug auf die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie finden sich hauptsächlich in den Unterkapiteln zu symmetrischen Körpern und Achsensymmetrie, dort werden in den Bänden für beide Klassenstufen in den Einführungsaufgaben, in dem Band für Klassenstufe 6 auch in einer weiterführenden Aufgabe, symmetrische Körper beziehungsweise Figuren angegeben, deren Symmetrieachse gefunden werden soll.[239] Außerdem werden mit Bezug auf Achsenspiegelungen und achsensymmetrische Dreiecke ganz knapp ein Spiegel und das Falten einer Serviette angesprochen.[240] Es bleibt der mathematische Begriff mit all seinen Facetten dabei allerdings zentral.

In dem Band für Klassenstufe 6 wird insgesamt ein visuell-geometrischer Blick auf die Symmetrien von Körpern geworfen, der auch eine ganzheitliche Betrachtung von Achsensymmetrien mit sich bringt. In dem Band für Klassenstufe 7 wird in den ersten beiden Einführungsaufgaben zu Achsenspiegelungen dieser visuell-geometrische Blickwinkel übernommen. Schon in der dritten Einführungsaufgabe wird allerdings zu einer konzeptuell-begrifflichen Sicht übergegangen, wenn eine Figur gespiegelt und deren Bild und Urbild miteinander in Beziehung gesetzt werden sollen.[241] Eine formal-begriffliche Anschauungsstufe wird dann angesprochen, wenn anhand verschiedener Eigenschaften der Spiegelung gefolgert werden muss.[242] Dieser formal-begriffliche Blick schließt konstruktive und abgrenzende Beschreibungen ein,[243] das formal-begriffliche Arbeiten geht

[238] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 68 Merkkasten
[239] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 108 & S. 109, Nr. 3
Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 68 Nr. 1, 2
[240] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64 Nr. 2 & S. 75 Nr. 1
[241] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64 Nr. 1, 2, 3
[242] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 67 Nr. 19, S. 69 Nr. 7, 9, 10, 11, 12 & S. 76 Nr. 7
[243] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64 Erklärung & S. 68, Merkkasten

allerdings nicht soweit, dass Achsenspiegelung mittels einer über eine konstruktive Beschreibung hinausgehenden Definition gefasst wird.

Weiterhin spielen in dem Band für Klassenstufe 6 Handlungen und bildliche Darstellungen eine Rolle,[244] es kann jedoch nicht von einer aufsteigenden Vernetzung der Repräsentationsebenen gesprochen werden, da die Spielregeln in der ganzheitlichen Form, in der sie angewendet werden sollen, schon in der Einführung gegeben werden. In dem Band für Klassenstufe 7 tritt hingegen in jeweils einem Fall in der Einführung eine aufsteigende Vernetzung von enaktiver und symbolischer Darstellung[245] beziehungsweise ikonischer und symbolischer Darstellung[246] auf. Davon abgesehen ist das gesamte Themengebiet natürlich sehr zeichnungsgeladen, doch bei diesen Zeichnungen handelt es sich meist nicht mehr um ikonische Darstellungen, da ihnen schon Spielregeln zu Grunde liegen.

Es finden sich darüber hinaus, im Gegensatz zu den mit Bezug auf Würfel betrachteten Schulbuchausschnitten, in dem Band für Klassenstufe 7 mit Bezug auf das Unterkapitel Achsenspiegelungen noch einige funktionale Beschreibungen. Auch in diesem Kapitel sind mit Fragen nach Eigenschaften der Spiegelungen aber ebenso prädikativ besser zu fassende Aspekte angesprochen.[247] Sowohl in dem Band für Klassenstufe 6 als auch in den Unterkapiteln aus dem Band für Klassenstufe 7 mit Bezug auf Achsensymmetrie sind jedoch prädikative Beschreibungen deutlich in der Überzahl.[248]

Letztlich findet sich in dem Band für Klassenstufe 6 eine einzige explorativ-organisatorische Aufgabe,[249] andere wissensexplorative oder -organisatorische beziehungsweise wissensreflexive Aufgaben treten dort allerdings nicht auf. In dem Band für Klassenstufe 7 werden hingegen explorative[250] und reflexive[251] Aufgaben vorgefunden, eindeutig wissensorganisatorische Aufgaben sind hingegen in diesem Fall nicht gegeben. Auch hier kann das verhältnismäßig geringe Gewicht von Aufgaben zu den drei Merkmalen des Wissensumgangs darin begründet sein, dass viele Aufgaben lediglich aus der Anwendung von Inhalten aus der Einführung bestehen und somit Übungsaufgaben sind.

Zusammenfassend lässt sich somit feststellen, dass in beiden betrachteten Klassenstufen von einer visuell-geometrischen Anschauungsstufe zu einer konzeptuell-begrifflichen und formal-begrifflichen Anschauungsstufe übergegangen wird. Im Verhältnis zu der hohen Gesamtzahl an Aufgaben finden sich jedoch nur ver-

[244] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 76 Nr. 3, 4, 6
[245] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 75 Nr. 1
[246] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64 Nr. 3
[247] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64-67
[248] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 68-69, 75-76
[249] Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 76 Nr. 6
[250] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 67 Nr. 19 & S. 69 Nr. 7, 12
[251] Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 67 Nr. 19, S. 69 Nr. 10 & S. 76 Nr. 7, 8

hältnismäßig wenige Aufgaben, welche die Repräsentationsebenen vernetzen sowie die Merkmale des Wissensumgangs berücksichtigen. Auch eine Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen kann nur für eines der Unterthemen festgestellt werden. Ein die Vernetzung der Repräsentationsebenen, die Merkmale des Wissensumgangs und im Allgemeinen auch eine Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen berücksichtigender Begriffsbildungsprozess der Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie bleibt daher außen vor.

8.3.4. Die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie in Das Mathematikbuch

Das Mathematikbuch thematisiert den Begriff Achsensymmetrie im Rahmen auch anderer Symmetriebegriffe im Band für die fünfte Klassenstufe in einer Lernumgebung zu Ornamenten (Das Mathematikbuch 5, S. 6f). In dem Band für die sechste Klassenstufe wird mit einer Lernumgebung zu dem gleichen Thema daran angeknüpft, außerdem wird der Begriff in einer Lernumgebung zum Geobrett angesprochen (Das Mathematikbuch 6, S. 6f & S. 16f). In dem Band für die siebte Klassenstufe werden in einer weiteren Lernumgebung Symmetrien als Thema fortgeführt (Das Mathematikbuch 7, S. 48f), in dem Band für die achte Klassenstufe spielen Spiegelungen in einer Lernumgebung zu Funktionen dann eine untergeordnete Rolle (Das Mathematikbuch 8, S. 46f). Insgesamt liegt der Schwerpunkt somit auf dem Begriff Achsensymmetrie, der Begriff Achsenspiegelung spielt nur implizit eine Rolle.

Ein außermathematischer Kontext, in welchem Achsensymmetrien relevant sind, ist im Band für Klassenstufe 5 mit Ornamenten gegeben, außerdem kommen Spiegel zum Einsatz.[252] In dem Band für Klassenstufe 7 werden weiterhin Fallschirmformationen, Kunstwerke und ein Schmetterling angesprochen.[253] Dabei bleibt der mathematische Begriff mit all seinen Facetten zentral, aber auch ein alltäglicher (unpräziserer) Begriff wird implizit thematisiert.

In den Bänden für Klassenstufen 5 und 6 werden Symmetrien insgesamt aus einer der visuell-geometrischen Anschauungsstufe entsprechenden Perspektive betrachtet, geometrische Figuren und implizit auch Bild und Urbild werden immer als Ganzes gesehen. In dem Band für Klassenstufe 7 wird zunächst dieser visuell-geometrische Blickwinkel übernommen, schon mit der ersten und zweiten Aufgabe wird allerdings zur konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe übergegangen, wenn beschrieben werden soll, wie eine symmetrische Figur erzeugt werden kann.[254] Es wird schließlich aber auch eine formal-begriffliche Anschauungsstufe ermöglicht, wenn nur mittels eines in Beziehung Setzens von Eigenschaften verschiedener Symmetrien gefolgert werden kann.[255] Im Band für die

[252] Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 6f
[253] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 48f
[254] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 48 Nr. 1, 2
[255] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 49 Nr. 6, 8

achte Klassenstufe wird die formal-begriffliche Anschauungsstufe vorausgesetzt. Diese geht allerdings nicht soweit, dass Achsensymmetrie mittels einer über Beschreibungen hinausgehenden Definition gefasst wird.

Weiterhin wird in der Lernumgebung zu Ornamenten in Klassenstufe 5 enaktiv gearbeitet.[256] Daran wird in gleichnamiger Lernumgebung in Klassenstufe 6 mit enaktivem sowie ikonischem Arbeiten angeknüpft, wobei in einer ganzheitlichen Form schon auf Spielregeln hingewiesen wird.[257] In der Lernumgebung zum Geobrett wird wiederum enaktiv und ikonisch, mit einem Ansatz zum Symbolischen, gearbeitet.[258] In Klassenstufe 7 wird schließlich von der enaktiven und der ikonischen Repräsentationsebene zur symbolischen Repräsentationsebene übergegangen.[259] Insgesamt kann, da das Schulbuch die anzuwendenden Spielregeln nicht fertig aufbereitet liefert, somit von einer aufsteigenden Vernetzung der Repräsentationsebenen über die Klassenstufen hinweg gesprochen werden.

Es treten darüber hinaus in den Bänden für Klassenstufen 5 und 6 sowohl funktionale als auch prädikative Beschreibungen auf, da einerseits Eigenschaften und andererseits Prozesse, die bei deren Produktion oder Überprüfung zum Einsatz kommen, angesprochen werden. In dem Band für Klassenstufe 7 geschieht dann gleichzeitig mit dem Übergang von der visuell-geometrischen zur konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe auch eine stärkere Betonung des prädikativen Zugangs, die sich in dem Band für Klassenstufe 8 fortsetzt.

Letztlich finden sich in den Bänden für Klassenstufen 5 und 6 explorative Aufgaben,[260] organisatorische und reflexive Aufgaben sind allerdings nicht enthalten. In dem Band für Klassenstufe 7 sind schließlich explorativ-organisatorische[261] sowie explorativ-reflexive[262] Aufgaben enthalten.

Von jenen zu den betrachteten Lernumgebungen gehörenden Aufgaben im Arbeitsheft beziehen sich nur solche für Klassenstufe 7 (Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 82ff) auf Symmetrie. Sie erfordern einen konzeptuell-begrifflichen Blick, sprechen zunächst noch die ikonische, dann aber hauptsächlich die symbolische Repräsentationsebene an, verwenden eine stärker prädikativ geprägte Sprache und enthalten Aufgaben zum explorativen,[263] organisatorischen[264] sowie reflexiven[265] Merkmal des Wissensumgangs.

---

[256] Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 6 Nr. 1, 2
[257] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 7 Nr. 4, 5
[258] Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 17 Nr. 6, 7
[259] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 48 Nr. 1, 2
[260] Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 6 Nr. 1, 2
Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 7 Nr. 4, 5 & S. 17 Nr. 6, 7
[261] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 48 Nr. 1, 3
[262] Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 48 Nr. 2, 6, 7, 8
[263] Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 82 Nr. 1, 2 & S. 84 Nr. 6
[264] Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 82 Nr. 1, 2, S. 83 Nr. 5 & S. 84 Nr. 6

Zusammenfassend lässt sich somit feststellen, dass in Klassenstufen 5 bis 8 von einer visuell-geometrischen zu einer konzeptuell-begrifflichen Anschauungsstufe übergegangen wird. Dabei werden, über die Klassenstufen hinweg, die Repräsentationsebenen enaktiv – ikonisch – symbolisch miteinander vernetzt sowie die verschiedenen Merkmale des Wissensumgangs angesprochen. Während in Klassenstufen 5 und 6 noch eine Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen festgestellt werden kann, wird in Klassenstufe 7 stärker der prädikative Zugang angesprochen. Ein die Anschauungsstufen, die Repräsentationsebenen, die Merkmale des Wissensumgangs und bis zu einem gewissen Grad auch die kognitiven Präferenzen vernetzender Begriffsbildungsprozess des Begriffs Spiegelung wird damit möglich.

8.3.5. Zwischenfazit – die Begriffe in den Schulbüchern

Insgesamt fällt auf, dass im Lambacher Schweizer sowohl mit Bezug auf den Begriff Würfel als auch mit Bezug auf die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie nur in einem geringen Ausmaß Kontexte neben dem elementargeometrischen berücksichtigt sind. Zudem kommt, bei der gegebenen hohen Gesamtanzahl an Aufgaben, ein Arbeiten auf der visuell-geometrischen Anschauungsstufe sehr kurz. Nur wenige Aufgaben sprechen überhaupt die enaktive oder ikonische Repräsentationsebene an, eine aufsteigende Vernetzung der verschiedenen Repräsentationsebenen ist noch seltener. Weiterhin findet sich in verhältnismäßig wenigen Aufgabenstellungen eine funktionale Wortwahl, und auch die verschiedenen Arten des Wissensumgangs sind selten vertreten. Hier spiegelt sich somit wider, dass viele der im Lambacher Schweizer enthaltenen Aufgaben Übungsaufgaben sind, denen allerdings durch die Struktur des Buches nicht explizit der Charakter solcher gegeben wird.

Es zeigt sich, dass in Das Mathematikbuch, auch hier mit Bezug auf die betrachteten Begriffe insgesamt, Kontexte neben dem elementargeometrischen wiederum nachrangig sind. Spiralcurricular betrachtet werden jedoch die visuell-geometrische, die konzeptuell-begriffliche und die formal-begriffliche Anschauungsstufe vernetzt. Zudem fällt auf, dass mit Bezug auf den Würfelbegriff die unterschiedlichen Repräsentationsebenen angesprochen werden, deren Vernetzung jedoch nicht sehr ausgeprägt ist, während mit Bezug auf den Begriff Achsensymmetrie spiralcurricular betrachtet von einer aufsteigenden Vernetzung der verschiedenen Repräsentationsebenen gesprochen werden kann. Es findet sich mit Bezug auf den Würfelbegriff ebenso wenig funktionale Wortwahl, während mit Bezug auf den Begriff Achsensymmetrie zumindest in den Bänden für Klassenstufen 5 und 6 eine Ausgewogenheit der kognitiven Präferenzen festgestellt werden kann. Darüber hinaus sind mit Bezug auf beide Begriffe Aufgaben zu den verschiedenen Arten des Wissensumgangs relativ breit gestreut.

[265] Das Mathematikbuch 7, Arbeitsheft, Ausgabe N, S. 83 Nr. 4, 5 & S. 84 Nr. 6

Somit eignet sich der Lambacher Schweizer mit seinem Aufbau eher schlecht für ein auf Grundvorstellungen zielendes Unterrichten der Begriffe Würfel und Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie. Insbesondere die in den Unterkapiteln jeweils nur kurze Einführungsphase, gemeinsam mit der zu einem frühen Zeitpunkt gegebenen Erklärung, verhindert eine ausgeprägte Vernetzung der verschiedenen Anschauungsstufen, Repräsentationsebenen und kognitiven Präferenzen. Zudem steht dieser Aufbau einem zumindest echt explorativen und organisatorischen Arbeiten zuwider.

Demgegenüber eignen sich die in Das Mathematikbuch enthaltenen Lernumgebungen deutlich besser für ein auf Grundvorstellungen zielendes Unterrichten. Es wird insbesondere mit Bezug auf den Begriff Achsensymmetrie deutlich, dass die Möglichkeit der Vernetzung der verschiedenen Anschauungsstufen, Repräsentationsebenen, kognitiven Präferenzen und Arten des Wissensumgangs gegeben ist. Eine stärkere Berücksichtigung des funktionalen Zugangs und auch anderer Kontexte als des elementargeometrischen ist allerdings auch mit Bezug auf den Begriff Achsensymmetrie wünschenswert.

8.4. Verbesserungsvorschläge

Aufgrund der Ausführungen in 8.3.5. sollen mit Bezug auf die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie die diese ansprechenden Lernumgebungen in Das Mathematikbuch als ein Ausgangspunkt, ausgehend von welchem ein auf Grundvorstellungen zielender Mathematikunterricht gestaltet werden kann, dienen. Hinsichtlich dieser sollen lediglich Vorschläge zur stärkeren Berücksichtigung des funktionalen Zugangs und von Kontexten außerhalb des elementargeometrischen angebracht werden. Im Zuge dessen wird auch für eine explizite Berücksichtigung des Spiegelungsbegriffs neben dem Symmetriebegriff plädiert.

Da die kognitiven Präferenzen sehr sprachgebunden sind, kann eine bedachte Wortwahl schon eine stärkere Berücksichtigung des funktionalen Zugangs bedingen. So lautet beispielsweise eine Aufgabenstellung zur Achsen- und Punktsymmetrie bei Kunstwerken: „Stelle bei diesen Bildern fest, ob sie achsensymmetrisch, punktsymmetrisch, beides oder keines von beidem sind“ (Das Mathematikbuch 7, S. 49 Nr. 6). Stärker funktional geprägt kann formuliert werden: „Stelle fest, ob in diese Bilder eine Symmetrieachse, ein Symmetriepunkt, beides oder keines von beidem gelegt werden kann“. Auch wenn eine solch funktional geprägte Ausdrucksweise mit Bezug auf den Symmetriebegriff möglich ist, so eignet sich doch der Spiegelungsbegriff besser dazu, Sachverhalte funktional zu fassen. So könnte für obige Aufgabe bezugnehmend auf den Spiegelungsbegriff formuliert werden: „Stelle fest, ob diese Bilder durch eine Achsenspiegelung, eine Punktspiegelung, beides oder keines von beidem auf sich selbst abgebildet werden können“ – hier ist der dynamische Charakter greifbarer, als mit Bezug auf den Symmetriebegriff.[266] Dabei sollten Schülerinnen und Schülern jeweils Aufgabenbearbeitungen entsprechend ihrer eigenen kognitiven Präferenz zugestanden werden, kommunikativ sollte aber auch die jeweils andere Präferenz vermittelt werden.

Mit Bezug auf weitere Kontexte ist vor allem die Berücksichtigung eines alltäglichen Kontextes wünschenswert, weil der Bezeichner von vornherein mit der alltäglichen Bedeutung aufgeladen ist – mit Bezug auf einen solchen alltäglichen Kontext kann auch der Spiegelungsbegriff erarbeitet werden. Zu diesem Zweck bietet sich die Gestaltung von Unterrichtssequenzen an, die sich, ausgehend von der Einbettung von Phänomenen in Problemkontexte, dem Spiegel im täglichen Leben widmen (vgl. Lambert 2015a & 2015b, Wittmann 1987). So könnte die in 7.3.1. angesprochene Frage, wie denn Spiegel in Umkleidekabinen angebracht sein müssen, damit eine Rückansicht möglich wird, gestellt werden – im Zuge der Beantwortung dieser Frage können auch die Spielregeln der einfachen Spiegelung erarbeitet werden, und der Symmetriebegriff kann zum Spiegelungsbegriff in Beziehung gesetzt werden. Es kann weiterhin untersucht werden, welche Höhe ein Spiegel haben muss, damit eine Person sich vollständig sehen kann, und ob diese Höhe von der Entfernung der Person zum Spiegel abhängt. Darüber hinaus erlauben Hohlspiegel vielfältige Entdeckungen, angefangen von der Frage, weshalb bei Spiegelung an einem Löffel das Spiegelbild auf dem Kopf steht, bis hin zu den Anwendungen eines Parabolspiegels. Bei einem von solchen Phänomenen ausgehenden entdeckenden Unterricht drängen sich schließlich die verschiedenen Anschauungsstufen, Repräsentationsebenen, kognitiven Präferenzen und Arten des Wissensumgangs von vornherein auf. Um Spiegelungen im täglichen Leben zu untersuchen, bietet sich allerdings das Prinzip der operativen Begriffsbildung nicht an, weil bei Zweckanalysen geometrischer Abbildungen häufig deren Werkzeugcharakter betont wird, was die Vorstellung realer Bewegungen in den Vordergrund rückt, dabei jedoch zu Fehlvorstellungen führen kann (vgl. Bender & Schreiber 1985; Bender 1982).

Auch mit Bezug auf den Würfelbegriff können die diesen ansprechenden Lernumgebungen in Das Mathematikbuch als ein Ausgangspunkt für einen auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht herangezogen werden. Dabei sind allerdings Unterrichtssequenzen, welche die Repräsentationsebenen stärker vernetzen, die kognitiven Präferenzen ausgewogen ansprechen und auch weitere Kontexte berücksichtigen, unerlässlich. Zu diesem Zweck bietet es sich an, sich,

---

[266] Auch wenn, wie ELSCHENBROICH (2015) deutlich macht, der Symmetriebegriff und der Abbildungsbegriff sowie die zur Kommunikation darüber verwendeten Bezeichner klar voneinander zu trennen sind, so bietet es sich doch an, zur Berücksichtigung der kognitiven Präferenzen beide Begriffe in derselben Unterrichtssequenz nebeneinander zu verwenden. Eine rein stoffdidaktisch begründete Vorgehensweise und das didaktische Modell, welches als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht dienen kann, widersprechen sich mit Bezug auf die Begriffe Achsenspiegelung beziehungsweise Achsensymmetrie somit.

ausgehend von Phänomenen, dem Würfel im täglichen Leben zu widmen. So könnte, wie in 7.2.1. angesprochen, der Würfel zunächst in der Umwelt lokalisiert werden, bevor zu dessen Herstellung übergegangen wird. Noch gehaltvoller als ein rein phänomenologisches Arbeiten kann für den Fall des Würfels allerdings, entsprechend BENDER und SCHREIBERs Prinzip der operativen Begriffsbildung, ein Ausgehen von Phänomenen mit einem Zweckgedanken im Mittelpunkt sein. So könnte, wie in 7.7. angesprochen, ausgehend von dem Zweck, als Zufallsgenerator bei Spielen zu dienen, oder als praktisches Sitzmöbel eingesetzt zu werden, mittels der Funktion eine geeignete Form ermittelt werden, die dann als Realisat hergestellt wird. Bei einem solchen zweckfokussierten entdeckenden Unterricht drängen sich, wie auch in 7.7. erwähnt, schließlich die verschiedenen Anschauungsstufen, Repräsentationsebenen, kognitiven Präferenzen und Arten des Wissensumgangs von vornherein auf.

Somit kann zusammengefasst werden, dass ein auf Grundvorstellungen zielender Unterricht basierend auf guten Schulbüchern möglich ist. Dabei müssen, mit Hilfe des Werkzeugs zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht, die Lücken der Schulbücher erkannt werden. Wenn dies geschehen ist, können Unterrichtssequenzen, die ausgehen von Phänomenen in Problemkontexten und gegebenenfalls stärker zweckorientiert sind, zur Anreicherung des Unterrichts herangezogen werden.

Es soll außerdem darauf hingewiesen werden, dass Fachzeitschriften[267] zum Mathematikunterricht zusätzliche Anregungen für einen auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht enthalten – zu nennen sind hier exemplarisch mit Bezug auf den Begriffsbildungsprozess des Spiegelungs- beziehungsweise Symmetriebegriffs die Beiträge von KIRSCHE (1996)[268], KROLL und KROLL (1996) sowie RICHTER und SCHNEIDER (2010) und mit Bezug auf den Begriffsbildungsprozess des Würfelbegriffs die Beiträge von BENDEL und SCHMIDT (2004) sowie LAUBER (1997). Beiträge in entsprechenden Zeitschriften legen außerdem den Gehalt der Begriffe für weiterführende Unterrichtssequenzen dar – so kann das umgebende Begriffsnetz fokussiert werden (für die Spiegelung bzw. Symmetrie: vgl. Schupp 1996; für den Würfel: vgl. Besuden 1994; Schmidt 2015). Weiterhin können Abbildungen (vgl. Führich & Nimz 2002a) und Körper (vgl. Buchholz 1991; Vehling & Schmidt 2013) analytisch betrachtet werden. Es kann zu komplexeren Abbildungen wie der Spiegelung an einem Kreis übergegangen werden (vgl. Führich & Nimz 2002b), und es können topologische oder kulturhistorische Aspekte von Körpern angesprochen werden (vgl. Gerecke 1991). Viele der insbesondere grundlegenderen Beiträge zum Begriffsbildungsprozess berücksichtigen dabei eine auf-

[267] Gesichtet wurden hier exemplarisch die Ausgaben von „Der Mathematikunterricht“ und „mathematik lehren“ der Jahre 1990 bis 2015.
[268] Auch wenn dieser Beitrag sich auf den Unterricht in der Primarstufe bezieht, können viele Anregungen in der Sekundarstufe I umgesetzt werden.

steigende Vernetzung der verschiedenen Anschauungsstufen und Repräsentationsebenen und erlauben, die kognitiven Präferenzen und Arten des Wissensumgangs einzubeziehen. Dennoch sind die Beiträge auch kritisch zu hinterfragen.

9. Schlussbetrachtung

9.1. Fazit

In der vorliegenden Arbeit wurde mittels einer zunächst betont semiotischen Perspektive auf Begriffsbildung das Modell des Begriffsfeldes erarbeitet (in 1.), welches zunächst exemplarisch anhand des Würfelbegriffs verdeutlicht und im Zuge dessen auch legitimiert wurde (in 2.), bevor die Möglichkeit der Übertragung der beispielhaften Betrachtungen begründet wurde (in 3.). Anschließend wurde die semiotische Perspektive zu einer philosophisch-psychologischen Perspektive in Beziehung gesetzt, und die Begriffe des Begriffsbildes und der Begriffskonvention wurden geprägt, wobei Begriffsbild und Begriffskonvention im Begriffsfeld lokalisiert werden konnten (in 4.). Auch mögliche Begriffsbilder von Schülerinnen und Schülern wurden exemplifiziert, wobei Grundlage dessen eine Umfrage zum Würfelbegriff war (in 5.). Schließlich wurden, als ein Mittel, von Begriffsbildern ausgehend Begriffskonventionen zu erschließen und nutzbar zu machen, Grundvorstellungen angesprochen (in 6.). Basierend darauf wurde ein Modell ausgearbeitet, das als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht dienen kann (in 7.). Letztlich wurde vor dem Hintergrund der theoretischen Grundlegung der Arbeit mit Bezug auf zwei Begriffe ein Blick in zwei unterschiedliche Schulbuchreihen geworfen und damit gezeigt, wie die Theorie praxisrelevant angewendet werden kann (in 8.). Die Arbeit ermöglicht es damit, den sich gegenseitig sinnvoll ergänzenden Charakter einer Vielfalt an theoretischen Ansätzen zur Begriffsbildung offenzulegen und beispielhaft zu verdeutlichen.

Das Modell des Begriffsfeldes wurde dabei für den Bereich Geometrie ausgearbeitet und für die Geometrie exemplifiziert. In Folge dessen wurden auch Begriffsbild, Begriffskonvention und Grundvorstellungen mit Bezug auf Geometrie diskutiert und für diesen Bereich exemplarisch verdeutlicht. Als Gründe für die Schwerpunktsetzung auf Geometrie wurden die Alltagsnähe der Geometrie, die darin bedingte Vermischung der Vorstellungen zu alltäglichen beziehungsweise geometrischen Begriffen und die darauf basierende besondere Anschaulichkeit der konkretisierenden Objekte genannt. Diesbezüglich kommt der Geometrie eine Sonderrolle zu. Arithmetische und mehr noch algebraische Begriffe sind alltagsferner als geometrische in dem Sinn, dass meist kein alltägliches Pendant dazu existiert, zudem zeichnen sie sich meist nicht durch eine besondere Anschaulichkeit aus. Wenn solche arithmetischen und algebraischen Begriffe im Alltag verwendet werden, dann häufig erst, nachdem sie mit ihrer mathematischen Bedeutung aus dem Mathematikunterricht dorthin übertragen wurden – wie dies für die Beispielbegriffe Addition, Summe, Term, Gleichung, Primzahl, Bruch und Variable überlegt werden kann. Triangulationsbrüche im semiotischen Dreieck sind in einigen Fällen dennoch denkbar – so kann der Bezeichner

Summe sowohl einen Term (z.B. 2 + 3) als auch den Wert des Termes (z.B. 5) bezeichnen. Das Modell des Begriffsfeldes lässt sich daher auf arithmetische und algebraische Begriffe übertragen, ist für diese Begriffe aber in vielen Fällen weniger fruchtbar, als für elementargeometrische Begriffe. Für den Bereich der Stochastik scheint das Modell wiederum ertragreicher, da stochastische Begriffe im Alltag oft eine andere Bedeutung als in der Stochastik haben und Begriffe aus anderen mathematischen Gebieten in der Stochastik häufig mit neuen Bedeutungen aufgeladen werden (z.B. Ergebnis, Ereignis, Zufall, Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte). Die Begriffe Begriffsbild und Begriffskonvention lassen sich allerdings, ohne Berücksichtigung des semiotischen Unterbaus, problemlos auch auf arithmetische und algebraische Begriffe übertragen, wie Untersuchungen im Umfeld von TALL und VINNER (siehe 4.1.) gezeigt haben. Auch der Begriff der Grundvorstellungen kann, so wie er in der vorliegenden Arbeit gefasst wird (mit Ausnahme BENDER und SCHREIBERs Prinzips der operativen Begriffsbildung als einer Umsetzungsmöglichkeit), auf andere mathematische Gebiete übertragen werden – wie insbesondere Überlegungen bezüglich der einzelnen Dimensionen des Modells als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht zeigen (vgl. Bruner 1974, Lambert 2012, Sjuts 1999 & 2001, van Hiele 1986). Da ein, wenn auch nur bedingter, Verlust des semiotischen Unterbaus allerdings einen Zerfall des theoretischen Gebäudes an sich zur Folge hätte, weil das Begriffsfeld als verbindendes Element von Begriffsbild und Begriffskonvention entfiele und dementsprechend auch Grundvorstellungen als Verbindungsglied schwieriger zu fassen wären, möchte das vorliegende Modell sich vorerst ausschließlich auf den Bereich der Geometrie beziehen – es bleibt zukünftiger Forschung vorbehalten, eine Möglichkeit der Übertragung in die Arithmetik und Algebra zu finden und den möglichen Transfer in die Stochastik nachzuweisen.

Auch eine Übertragung des Modells auf eine Meta-Ebene, zur Beschreibung der Begriffsbildung von Begriffsbildung, ist denkbar. So gibt es entsprechend verschiedener Theorien zur Begriffsbildung verschiedene Begriffe der Begriffsbildung, die aus verschiedenen, zugegebenermaßen äußerst abstrakten Objekten, die sich wohl widerspiegeln in Beobachtungen oder Untersuchungen von Begriffsbildungsprozessen, abstrahiert werden. Dementsprechend entsteht ein Begriffsfeld von Begriffsbildung. Die Existenz unterschiedlicher Begriffsbilder von Begriffsbildung, basierend auf unterschiedlichem Vorwissen (naiv, oder Theorien, die durch eine eigene Interessengrundlage bestimmt sind, umfassend), ist dann evident. Eine Begriffskonvention von Begriffsbildung kann allerdings nur einem speziellen Paradigma entstammen und ist selbst innerhalb einzelner Wissenschaften alles andere als eindeutig. Dementsprechend müssen auch normative Grundvorstellungen von Begriffsbildung paradigmengebunden sein. Es ist allerdings unmittelbar kein Grund ersichtlich, warum das Modell als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht – auf einer höheren Ebene – nicht auch auf Begriffsbildung von Begriffsbildung übertragbar wäre. Dabei wäre ein Berücksichtigen der Dimensionen des Modells sowie der übergeordneten Momente möglichweise dem sehr verwissenschaftlichten typischen Rahmen des Lernens über Begriffsbildung zuträglich.

Im Hinblick auf die Grundlagen des Begriffsfeldes scheint letztlich ein Kommentar zu der mit Bezug auf WITTENBERG angesprochenen inhaltlichen Auffassung der Mathematik angemessen, entsprechend der mathematische Begriffe, wie in 4.4.2. erwähnt, eineindeutig sind. Das Modell des Begriffsfeldes steht daher klar nicht auf dem Boden dieser inhaltlichen Auffassung – dennoch wirkt das zu einem elementargeometrischen Begriff gehörende semiotische Dreieck jeweils, als sei es einer solchen inhaltlichen Auffassung entsprungen. Dies ist darin begründet, dass im Sinne eines propädeutischen Geometrieunterrichts von der Umwelt der Lernenden ausgegangen wird und elementargeometrische Begriffe demnach lokal betrachtet in Objekten der euklidischen Geometrie konkretisiert gesehen werden.[269] Da jedoch im semiotischen Dreieck Begriff und Objekt unterschieden werden, ist das Modell des Begriffsfeldes ebenso bei einer auf nicht-euklidische Geometrien erweiterten Betrachtung gültig. Auch WITTENBERG (1957) weist dabei schon darauf hin, dass im Begriffsbildungsprozess nicht auf jegliche inhaltliche Auffassung verzichtet werden kann.

9.2. Einige Möglichkeiten für zukünftige Forschung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Organisation und Reflexion verschiedener Forschungsansätze zur Begriffsbildung, die in der langen Tradition der deutschsprachigen Mathematikdidaktik relevant sind. So wurde hauptsächlich auf Literatur aus der deutschsprachigen Mathematikdidaktik, oder auf solche aus Bezugswissenschaften, die in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik breit zitiert wurde, zurückgegriffen – diese Relevanz auch für die deutschsprachige Mathematikdidaktik sowie die Nähe zu Werken mit langer Tradition begründen dabei auch das Anknüpfen an TALL und VINNER. Allerdings soll nun, abschließend, auf das weitere Umfeld mathematikdidaktischer Arbeiten, neben dem bereits genannten, welches andere Bereiche als Geometrie abdeckt, verwiesen werden. Eine Betrachtung dessen wäre vor dem Hintergrund der vorliegenden Arbeit mit Sicherheit interessant, muss aber zukünftiger Forschung vorbehalten bleiben.

So ist die Einbettung der vorliegenden Arbeit in die vielen unterschiedlichen Ansätze der Forschung zur Begriffsbildung auf internationaler Ebene, beziehungsweise die Berücksichtigung internationaler Forschungsergebnisse zur Begriffsbildung, sicherlich lohnenswert. Dabei kann auf weitere Arbeiten, die im Umfeld von TALL und VINNERs Concept Image und Concept Definition, teilweise mit Be-

---

[269] Dass ein solches Vorgehen auch über den propädeutischen Unterricht hinausgehend legitim ist, betont WITTMANN (1987).

zug auf den Unterricht in der Sekundarstufe II oder an der Universität, entstanden sind, eingegangen werden (vgl. Harel, Selden & Selden 2006), und diese können in Bezug auf die vorliegenden Arbeit ausgewertet werden. Namhafte Didaktiker auf internationaler Ebene, die keinesfalls unterschlagen werden dürften, sind dabei RICHARD SKEMP (siehe insbesondere: Skemp 1987) und EPHRAIM FISCHBEIN (für Literaturhinweise siehe: Tall 1999). Mit Bezug auf semiotische Grundlagen und Querbezüge insbesondere zur Philosophie bleibt außerdem CHARLES OGDEN und IVOR RICHARDs (1952) Werk zwangsläufig zu berücksichtigen. Bei der Betrachtung von Werken, welche im Original in englischer (oder einer anderen außer der deutschen) Sprache veröffentlicht wurden und die sich insbesondere noch nicht in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik bewährt haben, sind allerdings bei der Rezeption mögliche Bedeutungsverschiebungen zu bedenken.[270]

Weiterhin kann die vorliegende Arbeit als Grundlage einer Untersuchung verschiedener Epochen der Mathematikdidaktik, mit Bezug auf die jeweiligen Vorschläge und unterrichtspraktischen Umsetzungen zum Begriffsbildungsprozess, dienen. Dabei sind mit dem Begriffsfeld, dem Begriffsbild, der Begriffskonvention und dem Modell als Werkzeug zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht Brillen gegeben, durch welche die jeweiligen Arbeiten betrachtet werden können. Dass es in unterschiedlichen mathematikdidaktischen Epochen große Unterschiede hinsichtlich der Positionen zur Begriffsbildung und der damit verbundenen Ziele dieser gab, zeigt für die Reformbewegung im Umfeld der Meraner Vorschläge von 1905 und die Phase der mengentheoretischen Fundierung der Mathematikmethodik in der DDR exemplarisch REMBOWSKI (2013) – die in dem genannten Beitrag dargelegten Untersuchungen bleiben allerdings noch genauer durch die Brillen der vorliegenden Arbeit zu betrachten und durch Untersuchungen weiterer mathematikdidaktischer Epochen zu ergänzen.

Die vorliegende Arbeit an sich kann darüber hinaus Grundlage weiterer empirischer Untersuchungen zum Verständnis geometrischer (und möglicherweise auch außergeometrischer) Begriffe werden. Anknüpfend an die Untersuchung in 5.5. wäre es lohnend, das konkrete Zusammenspiel von Begriff, Bezeichner und Objekt in Begriffsbildern zu untersuchen. Zudem bietet es sich beispielsweise an, vor dem Hintergrund der vorliegenden Arbeit den schon in 0.1. angesprochenen Ansatz SCHACHTs für qualitative Untersuchungen individueller geometrischer Begriffsbildungsprozesse nutzbar zu machen.

[270] Dass solche Bedeutungsverschiebungen nicht immer berücksichtigt werden, zeigt beispielsweise der Widerspruch zwischen VOM HOFE (1995) und PREDIGER (2008) mit Bezug auf die Gegenüberstellung von Concept Image und Concept Definition mit Grundvorstellungen (siehe hierzu: 6.2.3.).

Schließlich sollte Begriffsbildung nicht isoliert betrachtet werden, stattdessen spielen auch die Querverbindungen zu anderen mathematikdidaktischen Themen, beispielsweise Beweisen, Begründen, Argumentieren, … eine Rolle. In diesem Begriffsnetz können weitere Theorieknoten, in steter Relation zu dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten Theorieknoten zur Begriffsbildung, ausgearbeitet werden, wobei ein konsistentes und kohärentes Netz entstehen sollte. Die weitere Theoriebildung wirkt dann zurück auf die hier entwickelte Theorie zur Begriffsbildung und kann somit wiederum zu einer Weiterentwicklung dieser beitragen – Theoriebildung hat kein Ende.

10. Anhang

10.1. Schülerantworten

10.1.1. Klassenstufe 5

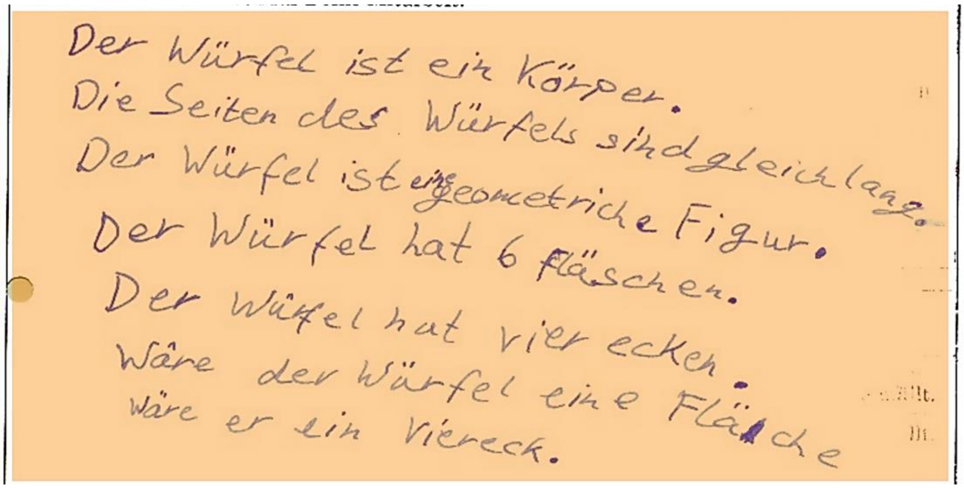

Der Würfel ist ein Körper.
Die Seiten des Würfels sindgleichlang.
Der Würfel ist eingeometriche Figur.
Der Würfel hat 6 fläschen.
Der Würfel hat vier ecken.
Wäre der Würfel eine Fläche
wäre er ein Viereck.

Abbildung 101: Schülerantwort A 5.2_22 – Kontext „elementargeometrisch“

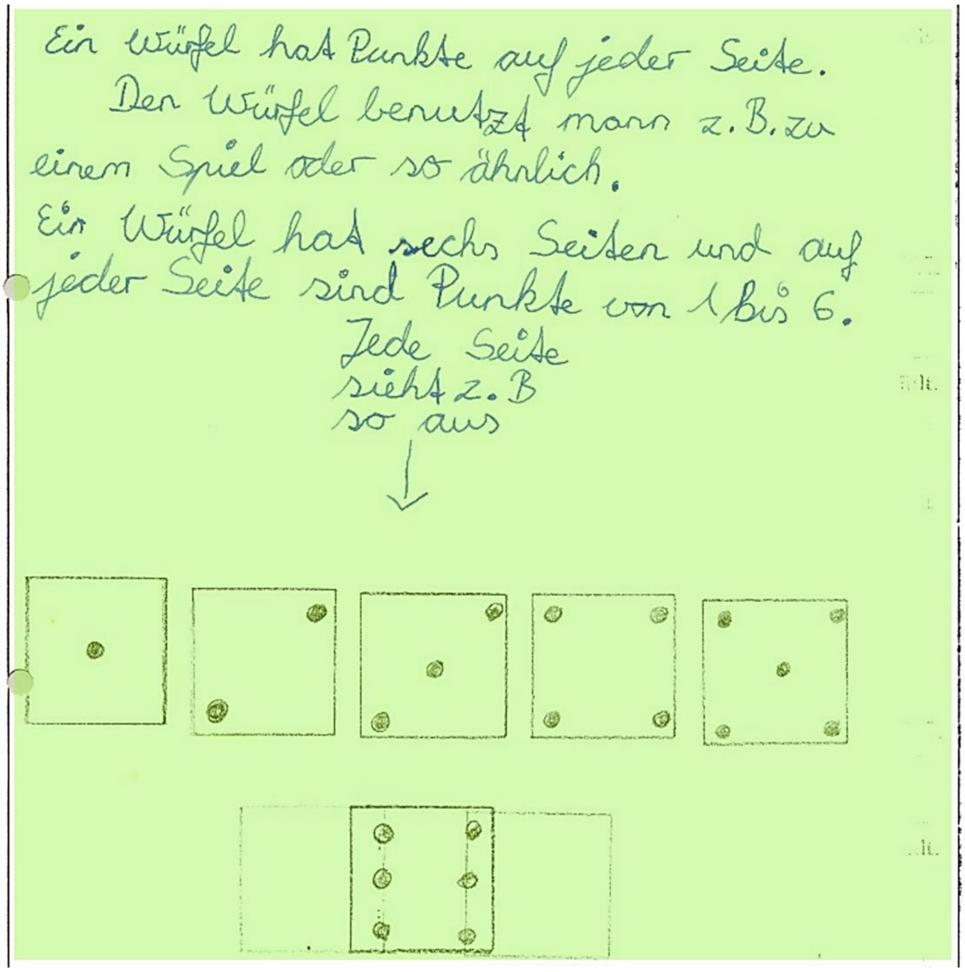

Ein Würfel hat Punkte auf jeder Seite.
Den Würfel benutzt mann z.B. zu
einem Spiel oder so ähnlich.
Ein Würfel hat sechs Seiten und auf
jeder Seite sind Punkte von 1 bis 6.
Jede Seite
sieht z.B
so aus

Abbildung 102: Schülerantwort B 5.2_9 – Kontext „alltäglich“

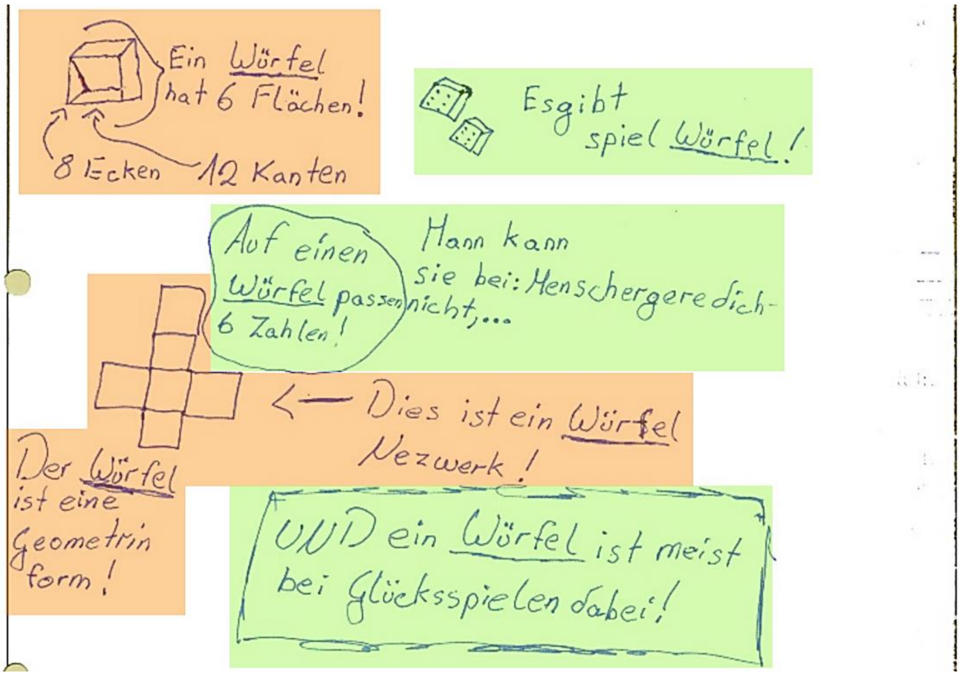


Abbildung 103: Schülerantwort B 5.1_20 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich“

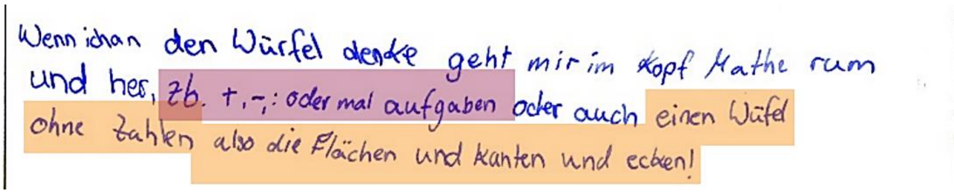


Abbildung 104: Schülerantwort A 5.1_24 –
Kontexte „elementargeometrisch & arithmetisch“

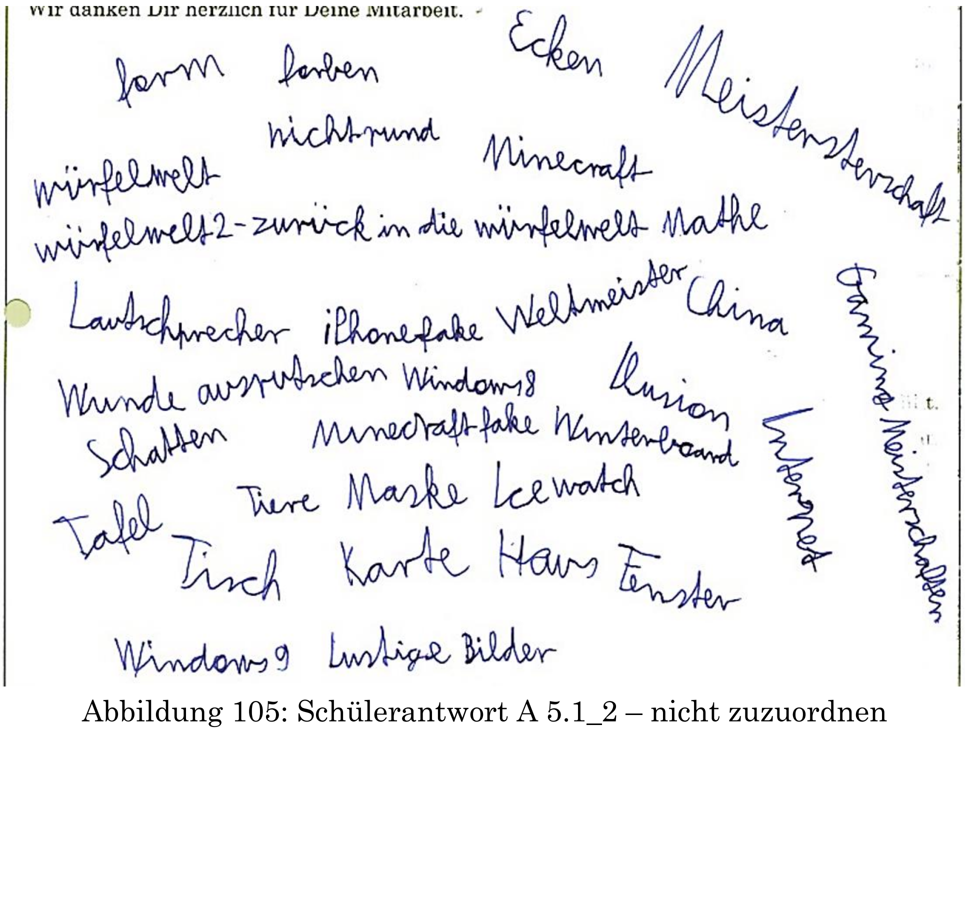


Abbildung 105: Schülerantwort A 5.1_2 – nicht zuzuordnen

10.1.2. Klassenstufe 7

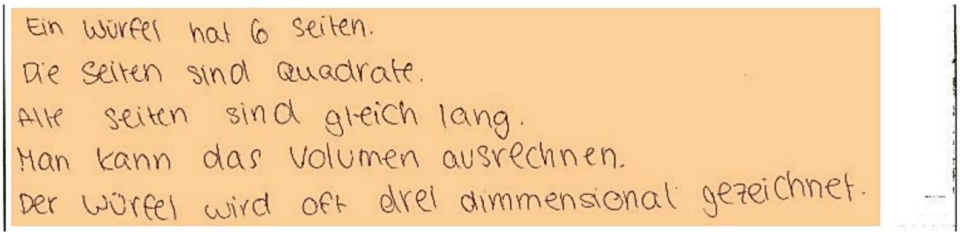

Ein Würfel hat 6 Seiten.
Die Seiten sind Quadrate.
Alle Seiten sind gleich lang.
Man kann das Volumen ausrechnen.
Der Würfel wird oft drei dimmensional gezeichnet.

Abbildung 106: Schülerantwort A 7.2_17 – Kontext „elementargeometrisch“

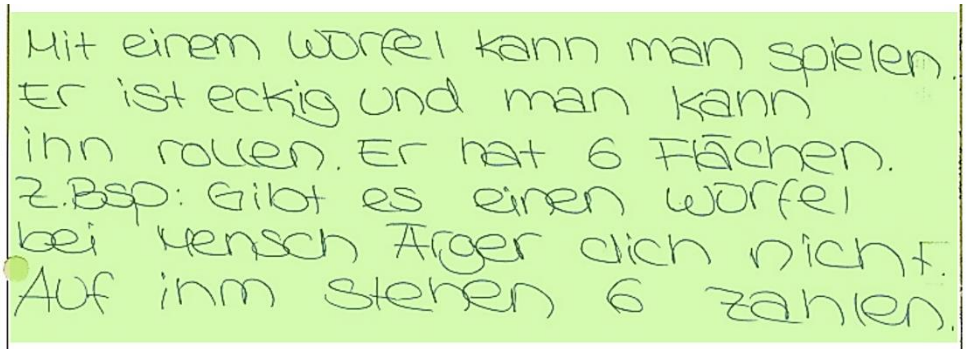

Mit einem Würfel kann man spielen.
Er ist eckig und man kann
ihn rollen. Er hat 6 Flächen.
Z.Bsp: Gibt es einen Würfel
bei Mensch Ärger dich nicht.
Auf ihm stehen 6 Zahlen.

Abbildung 107: Schülerantwort B 7.2_10 – Kontext „alltäglich“

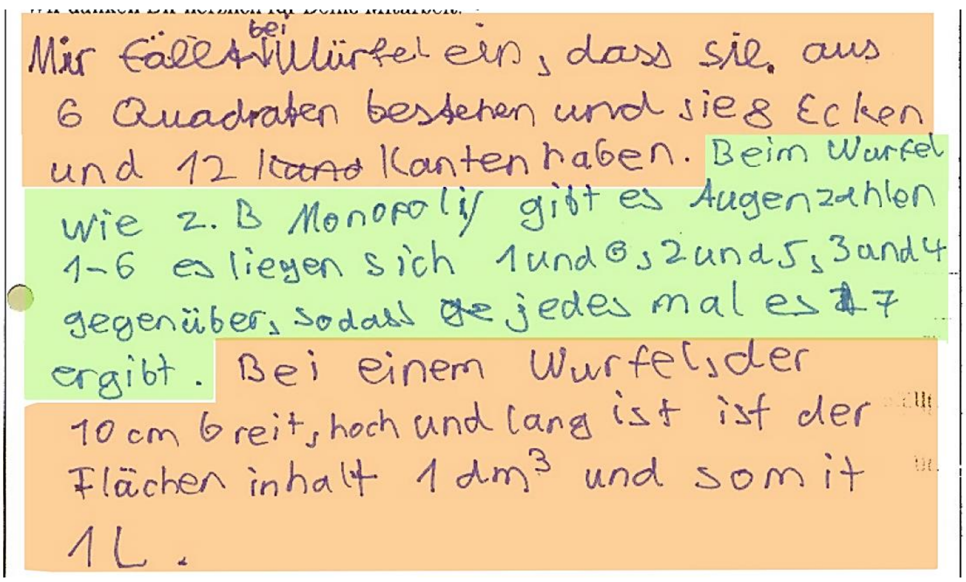

Mir fällt bei Würfel ein, dass sie aus
6 Quadraten bestehen und sie 8 Ecken
und 12 ~~Kand~~ Kanten haben. Beim Würfel
wie z. B Monopoly gibt es Augenzahlen
1-6 es liegen sich 1 und 6, 2 und 5, 3 and 4
gegenüber, sodass ~~ge~~ jedes mal es 7
ergibt. Bei einem Würfel, der
10 cm breit, hoch und lang ist ist der
Flächen inhalt 1 dm^3 und somit
1 L.

Abbildung 108: Schülerantwort A 7.1_6 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich“

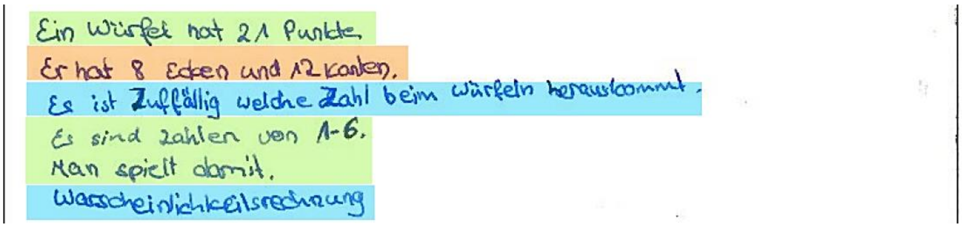

Ein Würfel hat 21 Punkte.
Er hat 8 Ecken und 12 Kanten.
Es ist Zufällig welche Zahl beim würfeln herauskommt.
Es sind Zahlen von 1-6.
Man spielt damit.
Wasscheinlichkeitsrechnung

Abbildung 109: Schülerantwort A 7.2_1 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich & stochastisch“

10.1.3. Klassenstufe 8

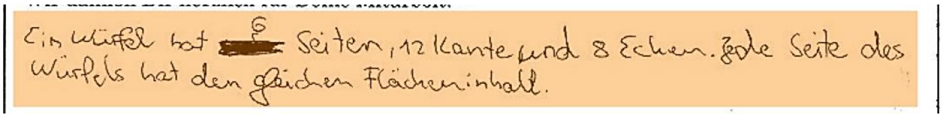

Ein Würfel hat [redacted] 6 Seiten, 12 Kante und 8 Ecken. Jede Seite des Würfels hat den gleichen Flächeninhalt.

Abbildung 110: Schülerantwort A 8.1_10 – Kontext „elementargeometrisch“

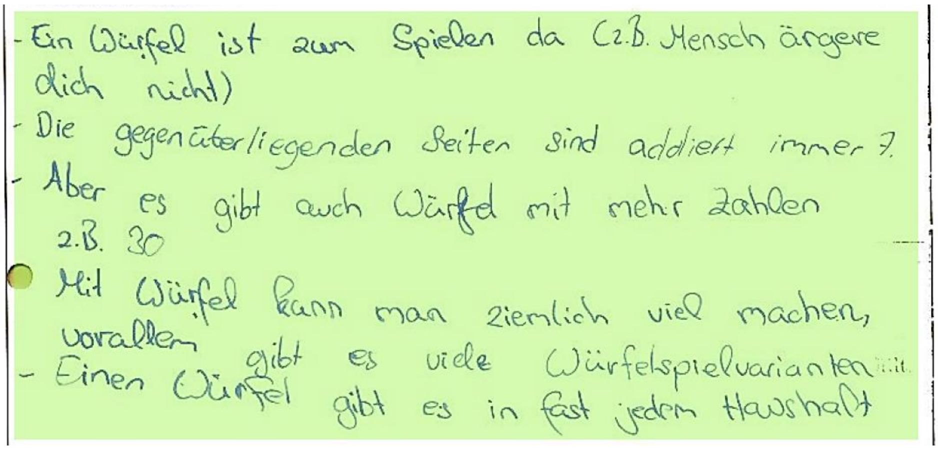

- Ein Würfel ist zum Spielen da (z.B. Mensch ärgere dich nicht)
- Die gegenüberliegenden Seiten sind addiert immer 7.
- Aber es gibt auch Würfel mit mehr Zahlen z.B. 30
- Mit Würfel kann man ziemlich viel machen, vorallem gibt es viele Würfelspielvarianten
- Einen Würfel gibt es in fast jedem Haushalt

Abbildung 111: Schülerantwort B 8.1_11 – Kontext „alltäglich“

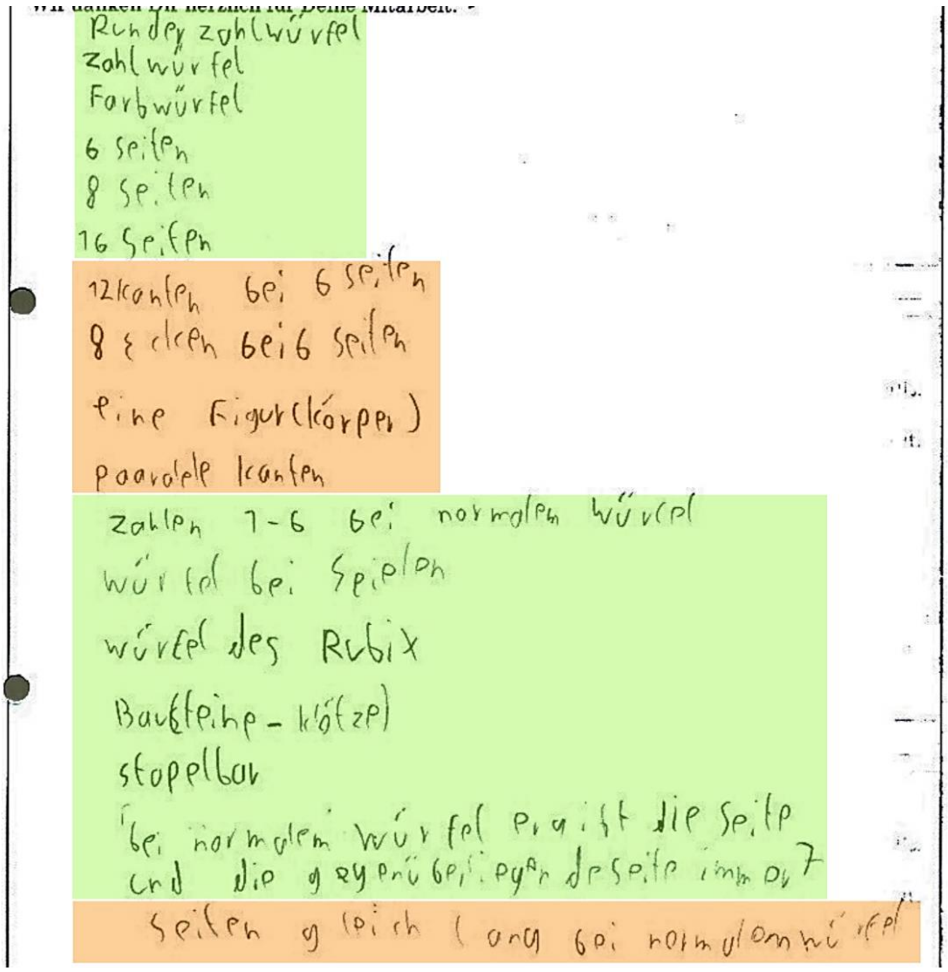
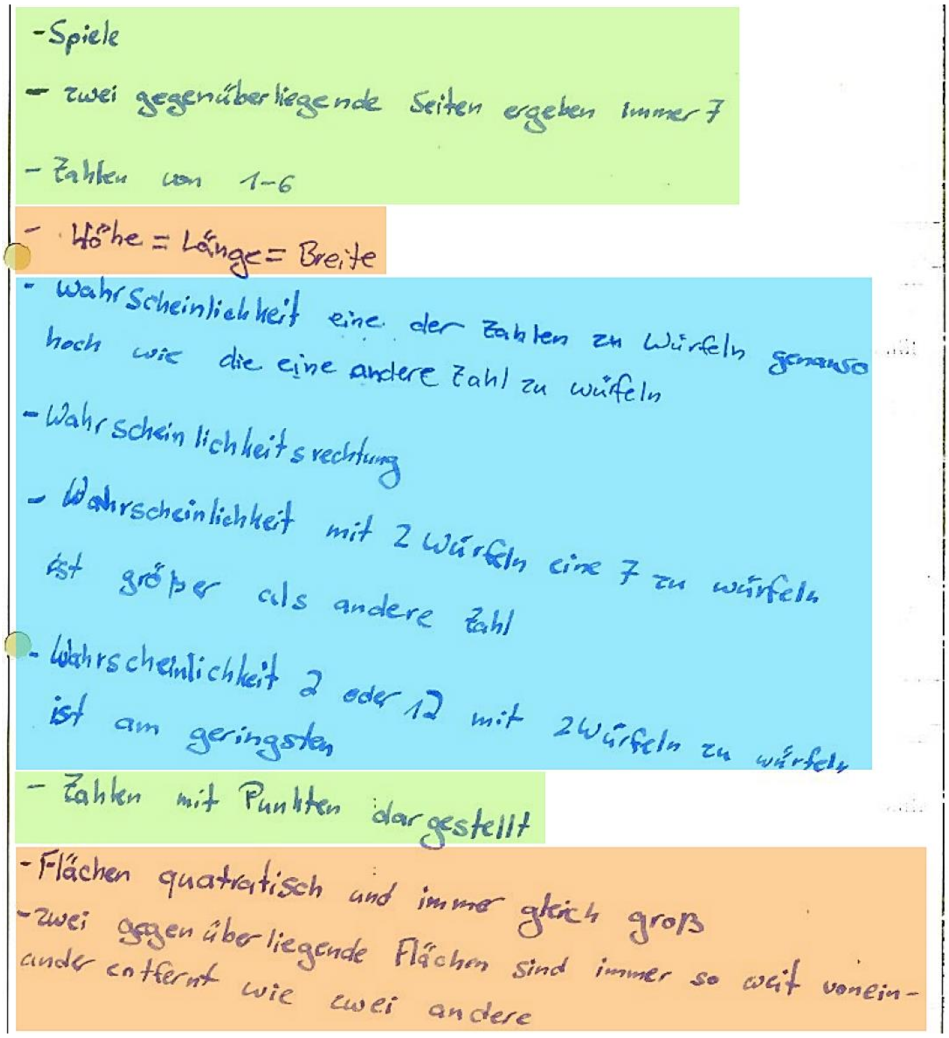

Runder zahlwürfel
zahlwürfel
Farbwürfel
6 seiten
8 seiten
16 seiten
12 kanten bei 6 seiten
8 ecken bei 6 seiten
eine Figur (körper)
paralele kanten
zahlen 1-6 bei normalen würfel
würfel bei spielen
würfel des Rubix
Baustein - klötze
stapelbar
bei normalem würfel ergibt die seite und die gegenüberliegende seite immer 7
seiten gleich lang bei normalem würfel

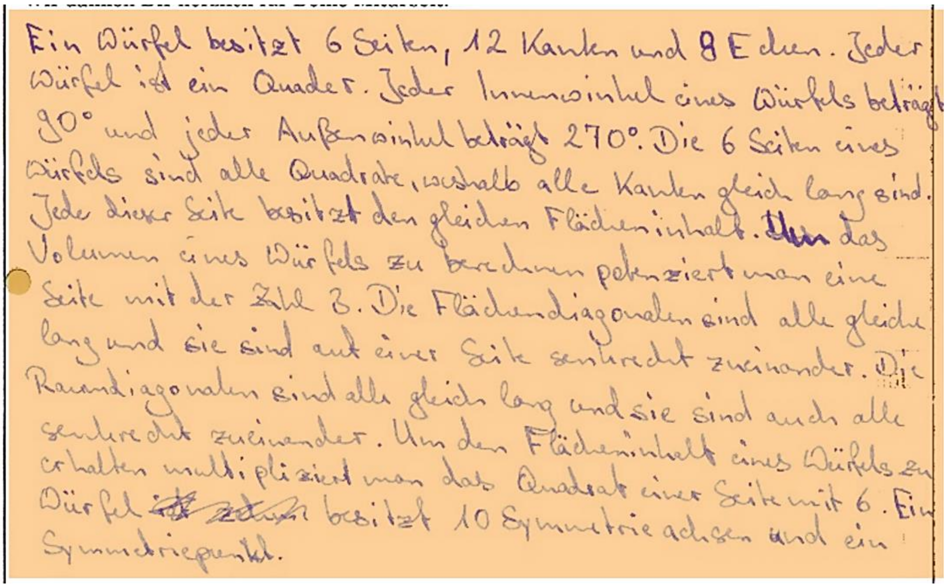
Abbildung 112: Schülerantwort A 8.2_10 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich“



- Spiele
- zwei gegenüberliegende Seiten ergeben immer 7
- Zahlen von 1-6
- Höhe = Länge = Breite
- Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen zu würfeln genauso hoch wie die eine andere Zahl zu würfeln
- Wahrscheinlichkeitsrechnung
- Wahrscheinlichkeit mit 2 Würfeln eine 7 zu würfeln ist größer als andere Zahl
- Wahrscheinlichkeit 2 oder 12 mit 2 Würfeln zu würfeln ist am geringsten
- Zahlen mit Punkten dargestellt
- Flächen quatratisch und immer gleich groß
- zwei gegenüberliegende Flächen sind immer so weit voneinander entfernt wie zwei andere

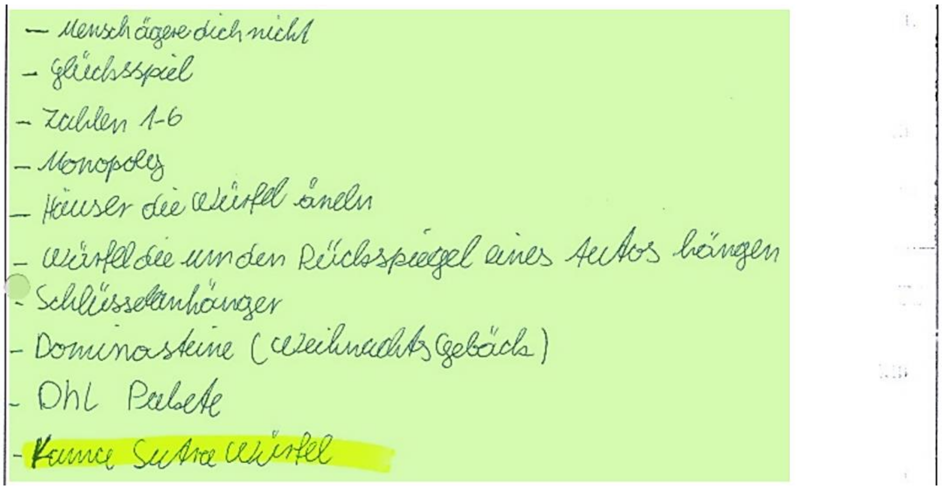
Abbildung 113: Schülerantwort B 8.2_1 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich & stochastisch“

10.1.4. Klassenstufe 10



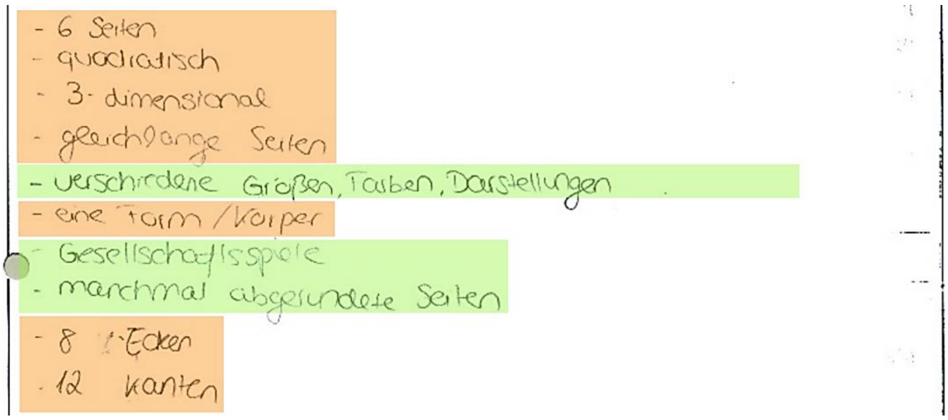
Ein Würfel besitzt 6 Seiten, 12 Kanten und 8 Ecken. Jeder Würfel ist ein Quader. Jeder Innenwinkel eines Würfels beträgt 90° und jeder Außenwinkel beträgt 270°. Die 6 Seiten eines Würfels sind alle Quadrate, weshalb alle Kanten gleich lang sind. Jede dieser Seite besitzt den gleichen Flächeninhalt. ~~Um~~ Um das Volumen eines Würfels zu berechnen potenziert man eine Seite mit der Zahl 3. Die Flächendiagonalen sind alle gleich lang und sie sind auf einer Seite senkrecht zueinander. Die Raumdiagonalen sind alle gleich lang und sie sind auch alle senkrecht zueinander. Um den Flächeninhalt eines Würfels zu erhalten multipliziert man das Quadrat einer Seite mit 6. Ein Würfel ~~ist zehn~~ besitzt 10 Symmetrieachsen und ein Symmetriepunkt.

Abbildung 114: Schülerantwort B 10.2_10 – Kontext „elementargeometrisch“



- Mensch ärgere dich nicht
- Glücksspiel
- Zahlen 1-6
- Monopoly
- Häuser die Würfel ähneln
- Würfel die um den Rückspiegel eines Autos hängen
- Schlüsselanhänger
- Dominosteine (Weihnachts Gebäck)
- Ohl Palete
- Kama Sutra Würfel

Abbildung 115: Schülerantwort A 10.2_15 – Kontext „elementargeometrisch“



- 6 Seiten
- quadratisch
- 3-dimensional
- gleichlange Seiten
- verschiedene Größen, Farben, Darstellungen
- eine Form / Körper
- Gesellschaftsspiele
- manchmal abgerundete Seiten
- 8 Ecken
- 12 kanten

Abbildung 116: Schülerantwort A 10.1_11 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich“

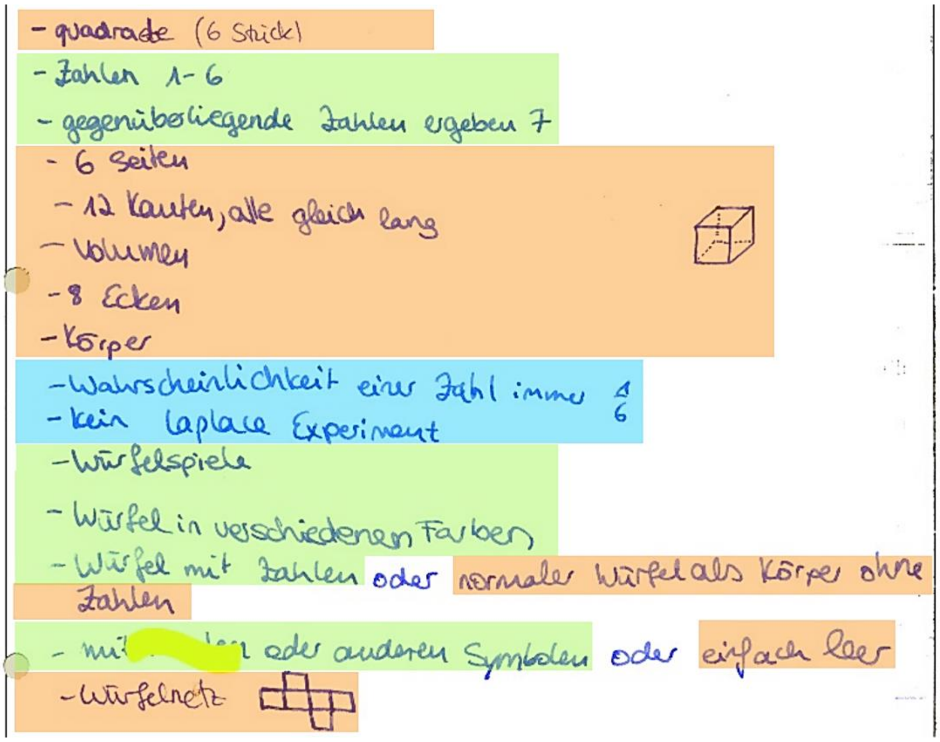


Abbildung 117: Schülerantwort A 10.2_16 –
Kontexte „elementargeometrisch & alltäglich & stochastisch“

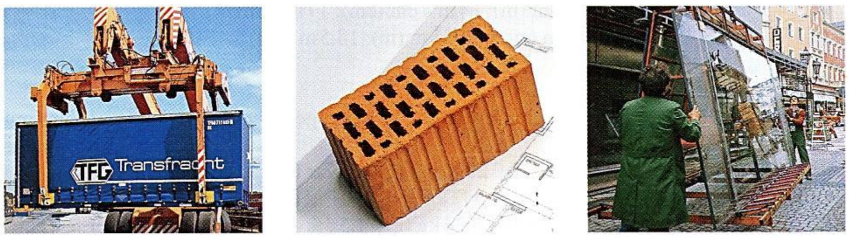
10.2. Schulbuchausschnitte

10.2.1. Lambacher Schweizer 5

VI Geometrische Figuren

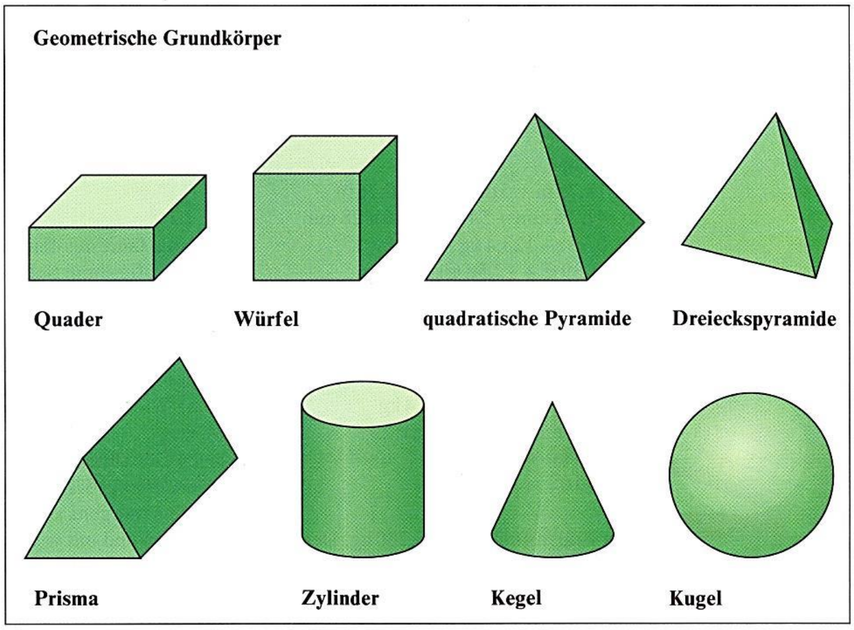
1 Geometrische Körper, Quader, Würfel

1



a) Hier siehst du die Fotos eines großen Containers, eines roten Ziegelsteins und einer zerbrechlichen Fensterscheibe. Welche geometrische Form haben diese Gegenstände?
b) Für die Geometrie sind bei Körpern nur bestimmte Eigenschaften wichtig. Welche der folgenden Wörter beschreiben Eigenschaften, die für die Erkennung der Form der Körper von Bedeutung sind?
Grün, rund, zerbrechlich, weich, eckig, durchsichtig, hart, groß, hölzern, sechsflächig, hohl, klein, schwer, glatt.

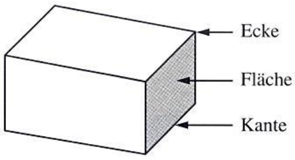
2
Nenne zu jedem der geometrischen **Körper** im Kasten Gegenstände aus dem Alltag oder der Umgebung, die diese Form haben.

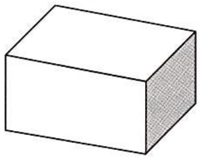


164

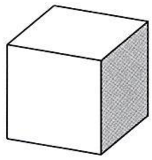
Abbildung 118: Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8, S. 164

Geometrische Körper werden von **Flächen** begrenzt.
Aneinander stoßende Flächen bilden eine **Kante**.
Aneinander stoßende Kanten bilden eine **Ecke**.





Ein **Quader** hat
6 Flächen (oben, unten, vorn, hinten, rechts, links),
8 Ecken (je 4 oben und unten),
12 Kanten, davon je 4 gleich lang.



Ein **Würfel** hat
6 Flächen,
8 Ecken,
12 gleich lange Kanten.

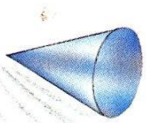
Der Würfel ist ein spezieller Quader, nämlich ein Quader mit gleich langen Kanten.

Aufgaben

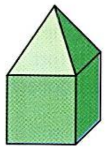
Grundkörper

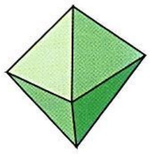
3
Welche Form haben diese Gegenstände? Gib jeweils den entsprechenden geometrischen Grundkörper an.

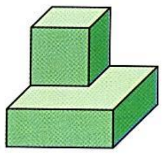
4
Untersuche Würfel, Quader, Zylinder, Pyramide, Kegel und Kugel:
a) An welche Körper kannst du ein Lineal fest anlegen?
In jede Richtung?
b) Welche Körper können fest auf dem Tisch stehen? Welche können rollen?
Welche rollen nur geradeaus?
Welche rollen in einem Kreis?

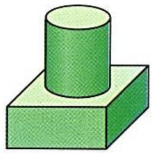


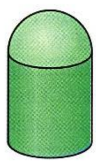
5
Aus welchen Grundkörpern sind diese Körper zusammengesetzt?

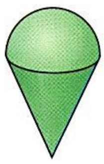
a)


b)


c)


d)


e)


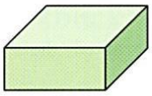
f)


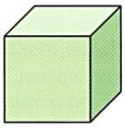
165

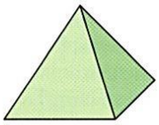
Abbildung 119: Lambacher Schweizer 5, Saarland – G8, S. 165

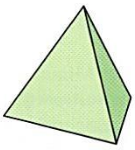
10.2.2. Lambacher Schweizer 6

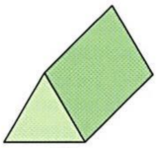
IV Geometrische Körper und Rauminhalte

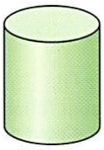

Quader

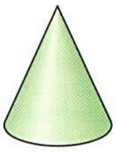

Würfel

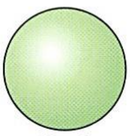

quadratische Pyramide


Dreieckspyramide


Prisma

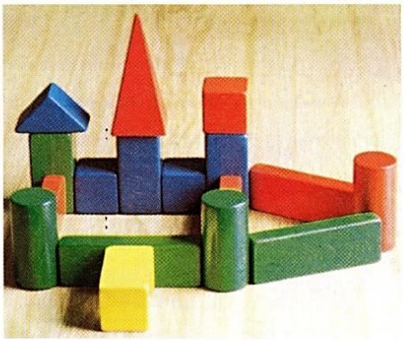

Zylinder


Kegel


Kugel

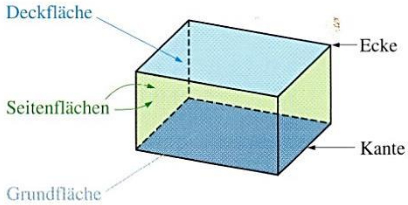
1 Geometrische Körper, Ecken, Kanten, Flächen

1
Die kleine Simone hat mit Bauklötzen eine Burg gebaut. Welche geometrischen Körper hat sie verwendet?



2
Nenne zu jedem der auf dem Rand abgebildeten geometrischen Körper Gegenstände, die diese Form haben.

3
Welche der geometrischen Körper haben
a) nur ebene Flächen,
b) nur gerade (nur gebogene) Kanten,
c) nur eine (keine) Ecke?



Geometrische Körper werden von **Flächen** begrenzt. Entsprechend ihrer Lage unterscheidet man **Grundfläche**, **Seitenfläche** und **Deckfläche**. Die Seitenflächen bilden zusammen den **Mantel**, alle Flächen zusammen die **Oberfläche** des Körpers.
Aneinander stoßende Flächen bilden eine **Kante**. Aneinander stoßende Kanten bilden eine **Ecke**.
Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, heißen **Polyeder** (oder Vielflächner).
Hat ein Polyeder keine Löcher und hängen alle Kanten zusammen, so gilt die

Euler'sche Polyederformel (nach Leonhard Euler, 1707–1783)
Die Zahl e der Ecken und die Zahl f der Flächen ist um 2 größer als die Zahl k der Kanten: **$e + f = k + 2$.**

Beispiel 1
Wie viele Flächen, Ecken, Kanten hat ein Quader?
Welche Kanten sind gleich lang?
Wie liegen diese zueinander?
Denke auch an verdeckte Kanten und Flächen.
Lösung:
6 Flächen (Grundfläche, Deckfläche und 4 Seitenflächen)
8 Ecken (je 4 oben und unten)
12 Kanten, davon je 4 gleich lang und zueinander parallel.

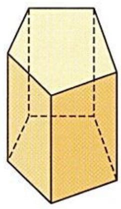
Beispiel 2
Beschreibe die Form der Flächen
a) eines Würfels,
b) einer Dreieckspyramide,
c) eines Zylinders.
Lösung:
a) 6 Quadrate gleicher Größe
b) Grundfläche: Dreieck
Seitenflächen: 3 Dreiecke
Eine Deckfläche gibt es nicht.
c) Grund- und Deckfläche: Kreis
Eine Seitenfläche (zugleich der Mantel): ein Rechteck.

106

Abbildung 120: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 106

Geometrische Körper, Ecken, Kanten, Flächen

Aufgaben

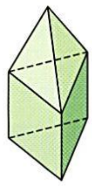


4
Nenne einen geometrischen Körper
a) mit nur einer Fläche,
b) mit nur einer Kante,
c) mit Kanten, aber ohne Ecken,
d) mit einer Kante und einer Ecke,
e) mit fünf Ecken und acht Kanten.

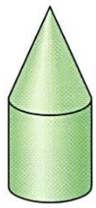
5
Beschreibe die Form der Flächen
a) eines Quaders,
b) einer quadratischen Pyramide,
c) eines Prismas wie hier auf dem Rand.

6
Aus welchen Grundkörpern sind diese Körper zusammengesetzt?

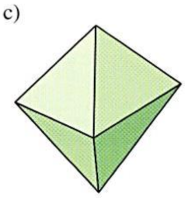
a)



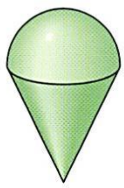
b)



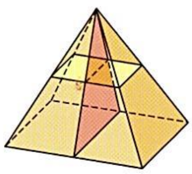
c)



d)



7



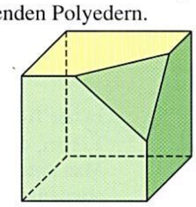
a) Legt man parallel zur Grundfläche einen Schnitt durch eine quadratische Pyramide, so hat die Schnittfläche die Form eines Quadrats. Beschreibe die entsprechenden Schnittflächen bei
(1) einem Quader,
(2) einem Zylinder,
(3) einem Kegel.
b) Beschreibe für Quader und Zylinder ebenso die möglichen Formen der Schnittflächen bei einem Schnitt senkrecht zur Grundfläche.
c) Welche Form hat ein Schnitt durch eine Kugel? Gilt das für jede Lage des Schnitts?

8
Fülle im Heft die Tabelle aus. Überprüfe an ihr die Euler'sche Polyederformel.

	e	f	k
Quader			
quadratische Pyramide			
Dreieckspyramide			
Prisma			

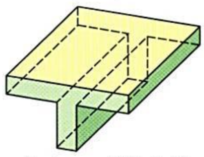
9
Überprüfe die Euler'sche Polyederformel an den folgenden Polyedern.

a)



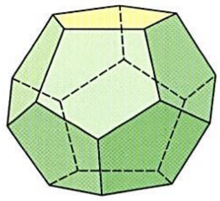
Würfel mit „abgesägter" Kante

*b)



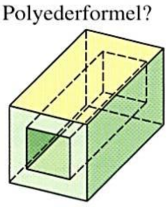
Prisma mit einem „T" als Grundfläche

*c)



Ein Dodekaeder (= Zwölfflächner)

10
Gilt auch für das „Vierkantrohr" die Euler'sche Polyederformel?

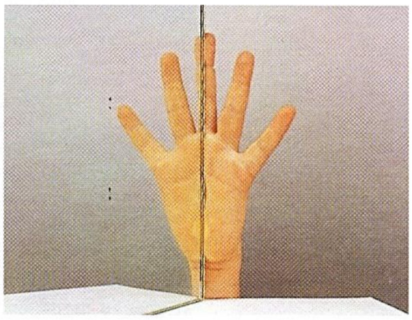


107

Abbildung 121: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 107

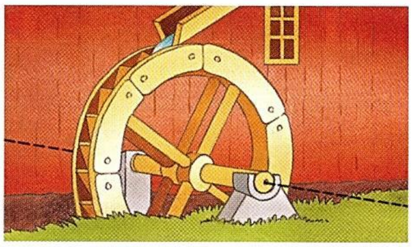
2 Symmetrische Körper

1
Für das Foto wurde auf den Mittelfinger einer Hand ein Spiegel gestellt.
Was unterscheidet die beiden Hälften dieser „Hand“ von deiner Hand?



2
Die Haushaltsgegenstände auf dem Rand kann man sich so zerschnitten denken, dass zwei spiegelbildliche Hälften entstehen.
Nenne weitere solche Gegenstände. Gib auch die Lage der Schnittebene an.
Gibt es eventuell mehrere solcher Ebenen?

In der Technik, in der Natur und auch in der Geometrie findet man häufig Gegenstände oder Körper, die besonders regelmäßig sind.
Man unterscheidet dabei
ebenensymmetrische Körper und **drehsymmetrische Körper**.



Statt „Drehung“ sagt man auch „Rotation“.

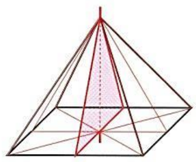
Die **Symmetrieebene** zerlegt den Körper (das Flugzeug) in zwei spiegelbildliche Hälften.

Bei Drehung um eine **Drehachse** (die keine ganze Umdrehung ist) kommt der Körper (das Mühlrad) mit sich selbst zur Deckung.

Beispiel 1
Bestimme alle Symmetrien der Schiffsschraube.

Lösung: Drehsymmetrisch, nicht ebenensymmetrisch.

Beispiel 2
Bestimme alle Symmetrien einer quadratischen Pyramide. Gib die Lage der Symmetrieebenen und Drehachsen an.
Lösung:
Ebenensymmetrisch mit 4 Symmetrieebenen; drehsymmetrisch, die Drehachse geht durch die Spitze und ist senkrecht zur Grundfläche.



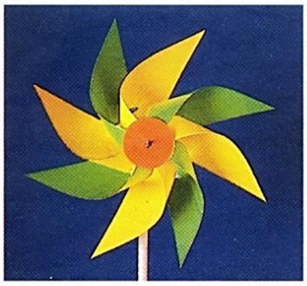
108

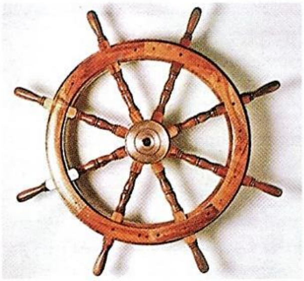
Abbildung 122: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 108

Symmetrische Körper

Aufgaben

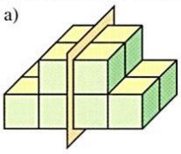
3
Untersuche die Gegenstände auf Symmetrie.



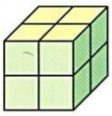


4
Baue, wenn möglich, die Körper aus Würfeln nach. Deute die Symmetrieebenen durch ein Blatt Papier an. Wie viele Symmetrieebenen findest du jeweils?

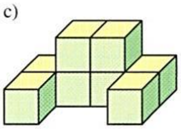
a)



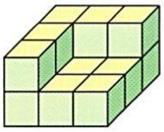
b)

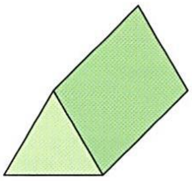


c)

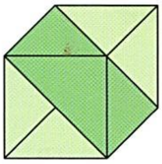


d)

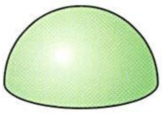




5
Bestimme alle Symmetrieebenen und alle Drehachsen
a) eines Quaders,
b) des Prismas auf dem Rand.

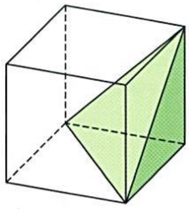


6
a) Welche Ebenen sind Symmetrieebenen eines Würfels? Probiere es an einem Kantenmodell eines Würfels aus.
b) Ein Würfel hat insgesamt 13 Drehachsen. Beschreibe ihre Lage.



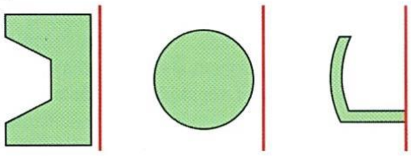
7
Untersuche auf Symmetrie:
a) Kegel b) Zylinder
c) Halbkugel, wie hier auf dem Rand

***8**
Von einem Würfel wurde eine Ecke abgeschnitten.



Bestimme alle Symmetrien dieser Ecke.

9



Wenn du die Flächen um die Achsen drehst, erhältst du drehsymmetrische Körper. Nenne Gegenstände, die die gleiche Form haben.

10
a) Welcher der Knoten ist ebenensymmetrisch, welcher drehsymmetrisch?
Schifferknoten:

„Altweiberknoten“

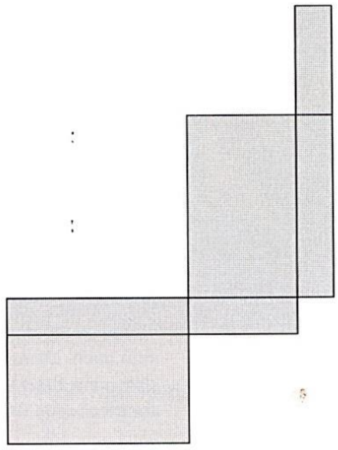
b) Knüpfe mit einer möglichst dicken Schnur beide Knoten, ziehe sie fest. Probiere, welche Knoten sich dann schneller wieder lösen lässt.

109

Abbildung 123: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 109

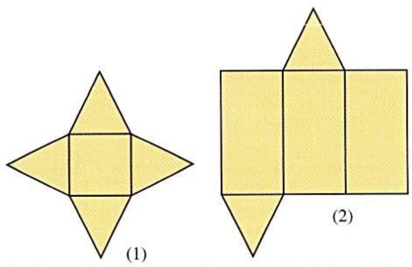
3 Abwicklungen

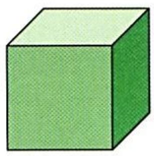
1
a) Lege eine Streichholzschachtel auf dein Heft und umfahre die unten liegende Fläche mit dem Bleistift. Kippe die Schachtel um eine Kante und umfahre die jetzt unten liegende Fläche.
Setze das fort, bis du jede Fläche der Schachtel genau einmal umfahren hast. Du erhältst die **Abwicklung** des Quaders.
b) Wie musst du die Streichholzschachtel bewegen, damit eine Abwicklung wie im Bild entsteht?



2
Schneide die offene Innenschachtel deiner Streichholzschachtel mit möglichst wenigen Schnitten so auf, dass du alle Flächen auf der Tischfläche ausbreiten kannst. Vergleiche mit der Abwicklung eines ganzen Quaders.

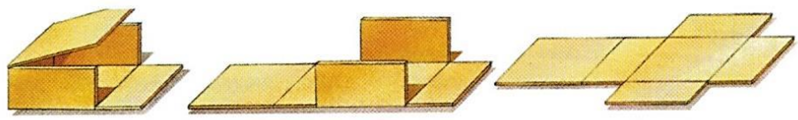
3
a) Von welchen Körpern ist im Bild eine Abwicklung dargestellt?
b) Zeichne die Abwicklungen vergrößert auf einen Karton und baue damit die entsprechenden Körper.

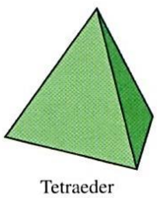




Würfel

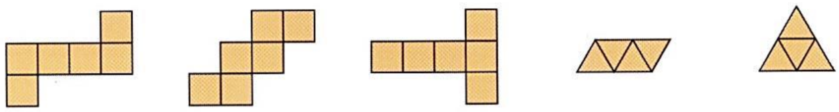
Wird die Oberfläche eines geometrischen Körpers aufgeschnitten und in einer Ebene ausgebreitet, so erhält man eine Abwicklung des Körpers:





Tetraeder

Von manchen Körpern kann man verschiedene Abwicklungen erzeugen:
Würfel (1) (2) (3) Tetraeder (1) (2)



110

Abbildung 124: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 110

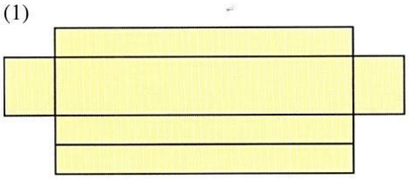
Aufgaben

*Statt Abwicklungen eines Quaders kann man auch **Netz** des Quaders sagen.*

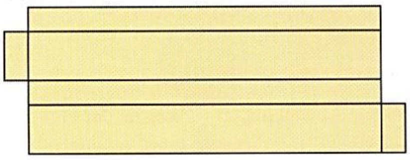
Quader

4
Welche Figur ist die Abwicklung eines Quaders?

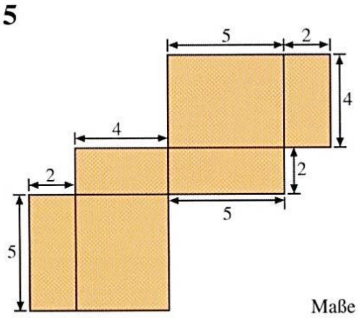
(1)



(2)



5



Maße in cm

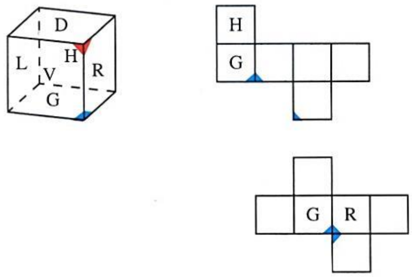
a) Übertrage die Abwicklung des Quaders auf ein Stück Karton.
b) Schneide die Abwicklung aus und stelle daraus einen Quader her.

6
Zeichne jeweils zwei verschiedene Abwicklungen eines Quaders mit den Kantenlängen:
a) 3,5 cm; 2 cm und 1,5 cm
b) 2 cm; 1 cm und 3 cm

7
Wie groß muss ein rechteckiges Stück Karton mindestens sein, damit eine Abwicklung eines Quaders mit den Kantenlängen 4 cm; 2 cm und 1 cm darauf passt?

Würfel

8



a) Übertrage beide Abwicklungen des Würfels in dein Heft. Darin sind zwei Flächen des Würfels markiert.
Trage ebenso die übrigen Flächen des Würfels ein.
b) Die blaue Ecke des Würfels ist in den Abwicklungen eingetragen. Markiere ebenso die rote Ecke.

9
Welche der Abwicklungen gehören zu den Würfeln? Gegenüberliegende Flächen an den Würfeln haben die gleiche Farbe.

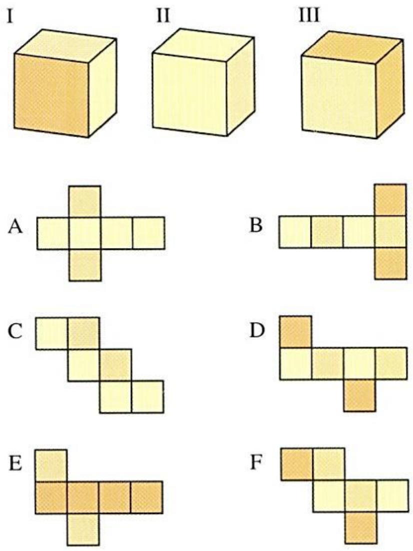
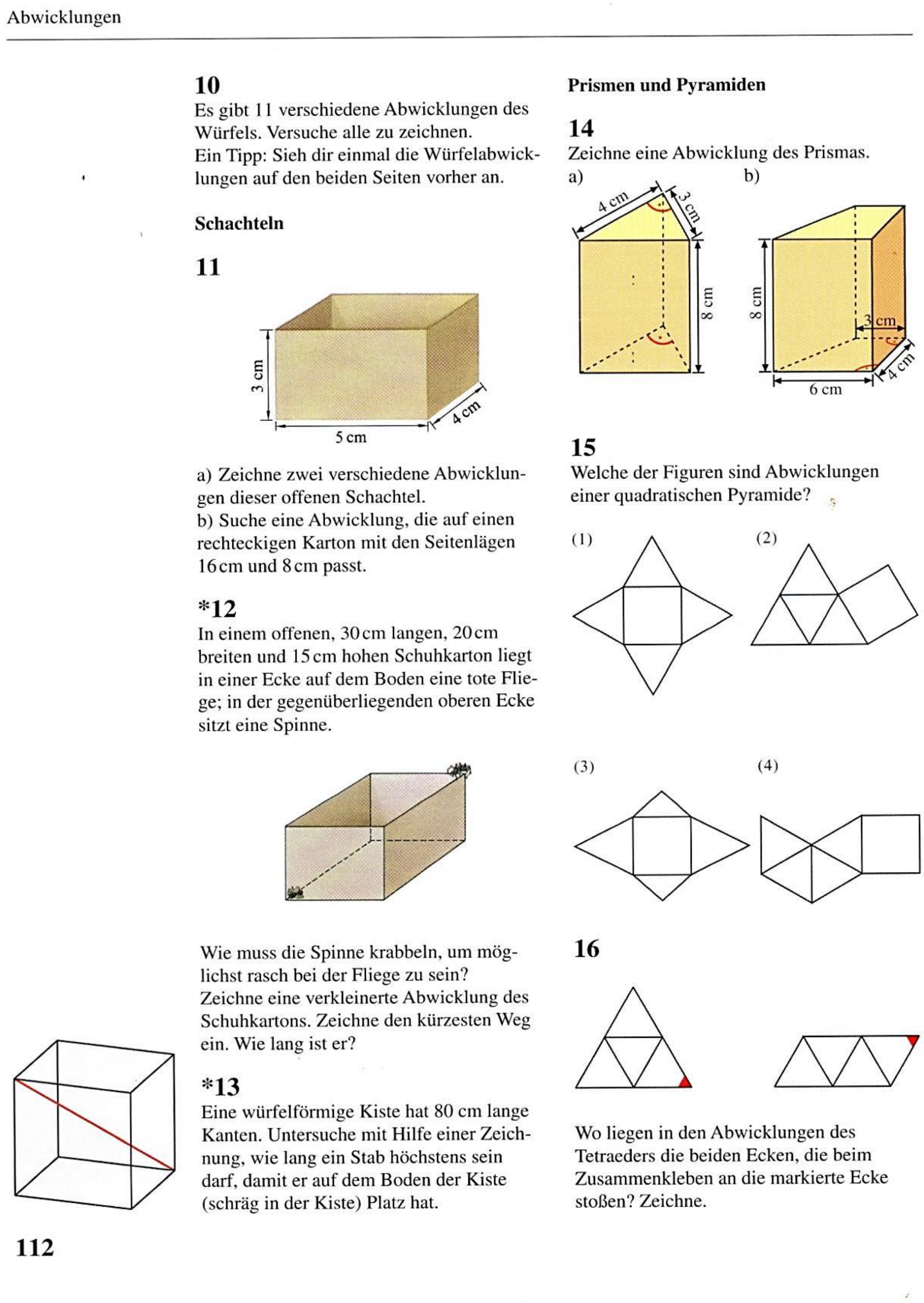


Abbildung 125: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 111



Abwicklungen

10
Es gibt 11 verschiedene Abwicklungen des Würfels. Versuche alle zu zeichnen.
Ein Tipp: Sieh dir einmal die Würfelabwicklungen auf den beiden Seiten vorher an.

Schachteln

11

a) Zeichne zwei verschiedene Abwicklungen dieser offenen Schachtel.
b) Suche eine Abwicklung, die auf einen rechteckigen Karton mit den Seitenlägen 16 cm und 8 cm passt.

***12**
In einem offenen, 30 cm langen, 20 cm breiten und 15 cm hohen Schuhkarton liegt in einer Ecke auf dem Boden eine tote Fliege; in der gegenüberliegenden oberen Ecke sitzt eine Spinne.

Wie muss die Spinne krabbeln, um möglichst rasch bei der Fliege zu sein? Zeichne eine verkleinerte Abwicklung des Schuhkartons. Zeichne den kürzesten Weg ein. Wie lang ist er?

***13**
Eine würfelförmige Kiste hat 80 cm lange Kanten. Untersuche mit Hilfe einer Zeichnung, wie lang ein Stab höchstens sein darf, damit er auf dem Boden der Kiste (schräg in der Kiste) Platz hat.

Prismen und Pyramiden

14
Zeichne eine Abwicklung des Prismas.
a) b)

15
Welche der Figuren sind Abwicklungen einer quadratischen Pyramide?

(1) (2)

(3) (4)

16

Wo liegen in den Abwicklungen des Tetraeders die beiden Ecken, die beim Zusammenkleben an die markierte Ecke stoßen? Zeichne.

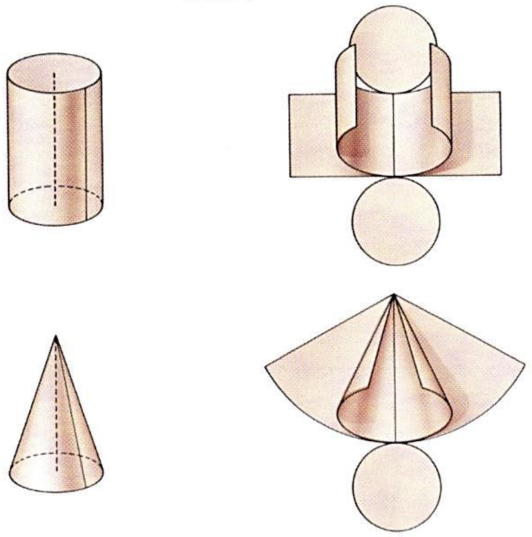
112

Abbildung 126: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 112

Zylinder und Kegel

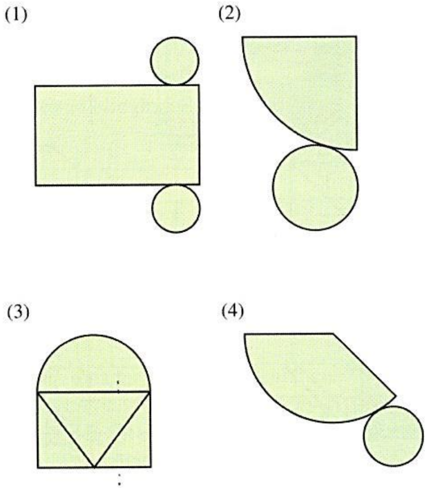
17

Auch Zylinder und Kegel kann man abwickeln. Welche Form haben Grund- und Deckfläche, welche Form die Mantelfläche?

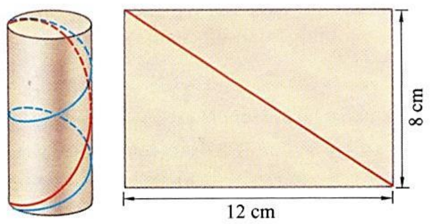


18

Welche Figuren stellen eine Abwicklung eines Zylinders, welche eines Kegels dar? Welche Figuren sind keine Abwicklungen?

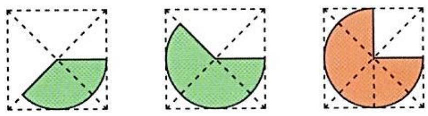


*19



Die rote Schraubenlinie windet sich einmal, die blaue zweimal um den Zylinder. Ist die blaue Linie doppelt so lang wie die rote? Zeichne die Abwicklung der Mantelfläche und trage die Schraubenlinien ein. Miss nach.

20

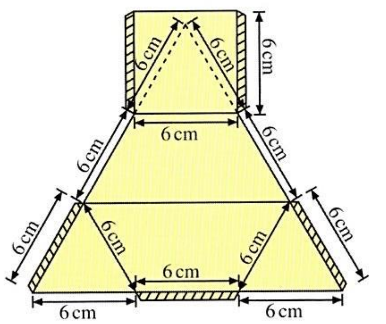


Dies sind die Mantelflächen von drei Kegeln. Zeichne sie vergrößert auf Karton und schneide sie aus.
Vergleiche die Höhen der drei Kegel.

Knobelecke

21

Übertrage die Abwicklung zweimal auf Karton, schneide sie aus und klebe sie mit Hilfe der Falze zu jeweils einem Körper zusammen.



Versuche die beiden Körper so aneinander zu setzen, dass ein Tetraeder entsteht.

113

Abbildung 127: Lambacher Schweizer 6, Saarland – G8, S. 113

10.2.3. Lambacher Schweizer 7

III Symmetrie

1 Achsenspiegelungen

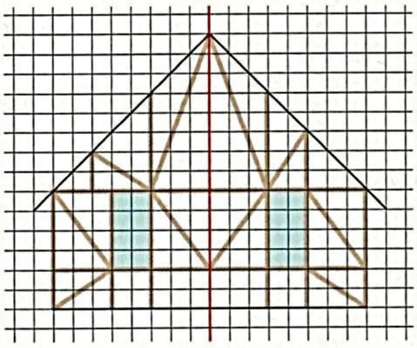


Fig. 1

Fig. 2

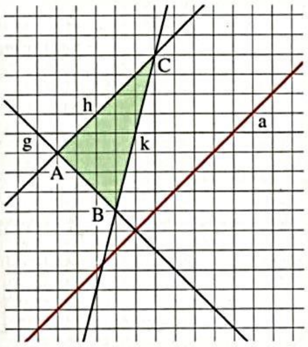


Fig. 3

1 Florian hat bei einem Ausflug die linke Hälfte des Giebels eines Fachwerkhauses gezeichnet und dann zu Hause den Rest symmetrisch ergänzt (Fig. 1). Ihm sind dabei zwei Fehler unterlaufen. Suche sie.

2 a) Vor einem Spiegel liegt eine aufgeklappte Taschenuhr. Dagmar kann sie nur im Spiegel sehen (Fig. 2). Wie spät ist es?
b) Wie drehen sich die Zeiger der Uhr im Original? Wie drehen sie sich im Spiegelbild?

3 Übertrage Fig. 3 in dein Heft. Spiegele das Dreieck ABC und damit auch die Geraden g, h und k an der Geraden a.
Vergleiche das Dreieck und die Geraden mit ihren Bildern.

Bei einer **Achsenspiegelung** wird jedem Punkt P ein Bildpunkt P′ zugeordnet.
Liegt P nicht auf der Spiegelachse, so gilt:
1. PP′ ist senkrecht zur **Spiegelachse** a.
2. P und P′ haben denselben Abstand von der Achse a.

Die Punkte auf der Spiegelachse werden auf sich selbst abgebildet. Man nennt sie daher auch **Fixpunkte**.

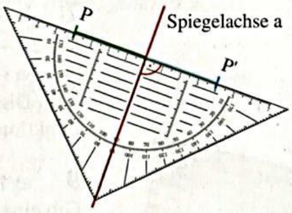


Fig. 4

Vergleicht man Figuren und Bildfiguren bei Achsenspiegelungen, so stellt man fest:

Eigenschaften von Achsenspiegelungen:
Eine Strecke und ihre Bildstrecke sind gleich lang.
Ein Winkel und sein Bildwinkel sind gleich groß.
Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.

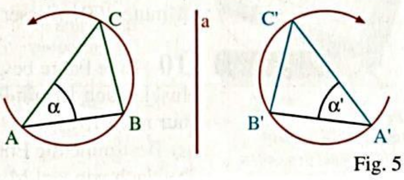


Fig. 5

64

Abbildung 128: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 64

Wird ein Punkt an einer Achse a gespiegelt, so ist PP′ senkrecht zu a. Damit wird in Fig. 1 die Gerade g = PP′ auf die Gerade P′P = g abgebildet.
Man nennt solche Geraden, die auf sich abgebildet werden, **Fixgeraden.**
Alle zur Achse senkrechten Geraden und die Achse selbst sind Fixgeraden der Achsenspiegelung.

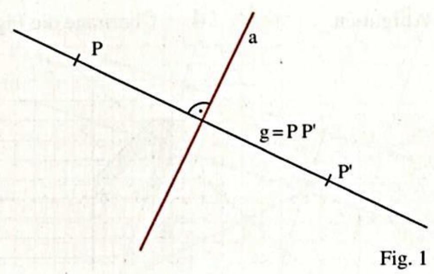


Fig. 1

Beispiel 1 Spiegelbilder zeichnen
Das Dreieck PQR soll an der Achse a gespiegelt werden.
Lösung (Fig. 2):
1. Zeichne durch P, Q, R jeweils die Senkrechte zu a.
2. Trage auf den Senkrechten für jeden Punkt noch einmal den Abstand des Punktes von der Achse a ab.
3. Zeichne das Bilddreieck P′Q′R′.

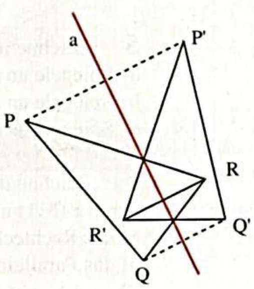


Fig. 2

Um den Kreis zu spiegeln, genügt es, seinen Mittelpunkt zu spiegeln. Der Kreis und sein Spiegelbild haben denselben Radius.

Beispiel 2
Spiegele den Kreis an der Achse a.
Lösung: Fig. 3.

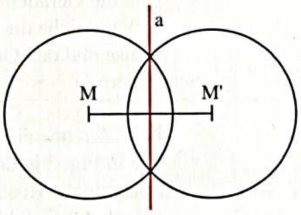


Fig. 3

Beispiel 3 Spiegelachse zeichnen
Zeichne eine Spiegelachse a so, dass bei Spiegelung an a
a) der Punkt E auf den Punkt F (E ≠ F),
b) die Gerade g auf die Gerade h (g ≠ h; g und h nicht parallel) nicht abgebildet wird.
Lösung:
a) Die Spiegelachse muss durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$ und senkrecht zu ihr verlaufen (Fig. 4).
b) Die Spiegelachse muss durch den Schnittpunkt von g und h verlaufen und den Winkel zwischen g und h halbieren. Da es zwei Schnittwinkel gibt, gibt es zwei Spiegelachsen a_1 und a_2 (Fig. 5).

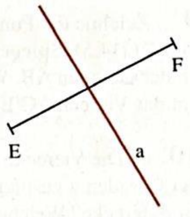


Fig. 4

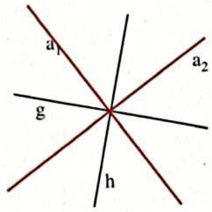


Fig. 5

Beispiel 4
Gibt es zu Fig. 6 eine Achse a, so dass bei Spiegelung an a der Punkt A auf C und zugleich B auf D abgebildet wird?
Lösung:
Bei Spiegelung an a_1 wird A auf C, bei Spiegelung an a_2 wird B auf D abgebildet.
Da $a_1 \neq a_2$, gibt es keine gemeinsame Spiegelachse a.

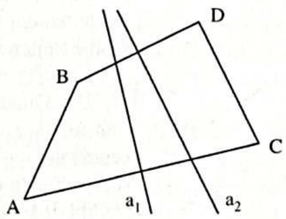
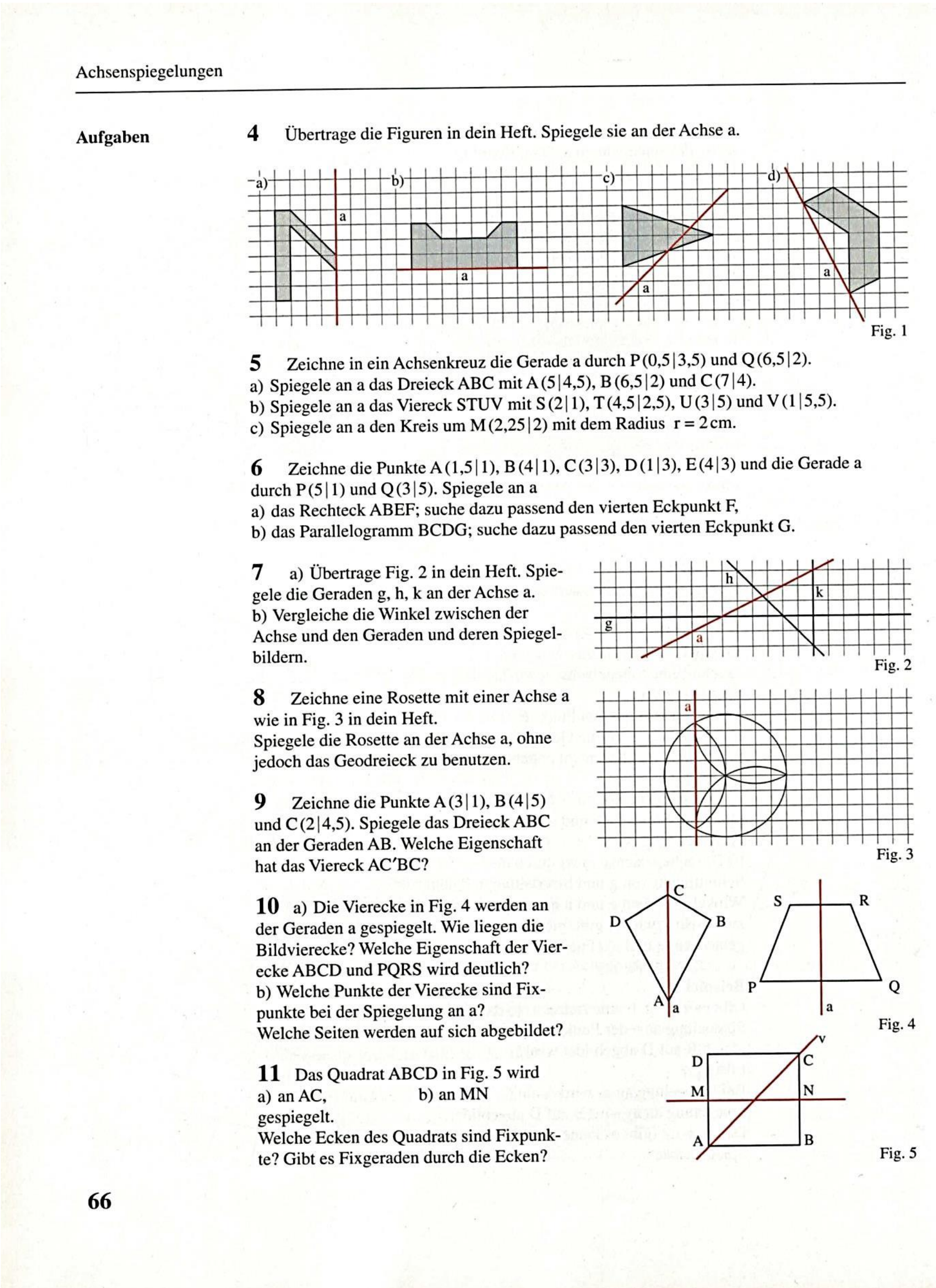


Fig. 6

65

Abbildung 129: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 65



Achsenspiegelungen

Aufgaben

4 Übertrage die Figuren in dein Heft. Spiegele sie an der Achse a.

Fig. 1

5 Zeichne in ein Achsenkreuz die Gerade a durch P(0,5|3,5) und Q(6,5|2).
a) Spiegele an a das Dreieck ABC mit A(5|4,5), B(6,5|2) und C(7|4).
b) Spiegele an a das Viereck STUV mit S(2|1), T(4,5|2,5), U(3|5) und V(1|5,5).
c) Spiegele an a den Kreis um M(2,25|2) mit dem Radius r = 2 cm.

6 Zeichne die Punkte A(1,5|1), B(4|1), C(3|3), D(1|3), E(4|3) und die Gerade a durch P(5|1) und Q(3|5). Spiegele an a
a) das Rechteck ABEF; suche dazu passend den vierten Eckpunkt F,
b) das Parallelogramm BCDG; suche dazu passend den vierten Eckpunkt G.

7 a) Übertrage Fig. 2 in dein Heft. Spiegele die Geraden g, h, k an der Achse a.
b) Vergleiche die Winkel zwischen der Achse und den Geraden und deren Spiegelbildern.

Fig. 2

8 Zeichne eine Rosette mit einer Achse a wie in Fig. 3 in dein Heft.
Spiegele die Rosette an der Achse a, ohne jedoch das Geodreieck zu benutzen.

9 Zeichne die Punkte A(3|1), B(4|5) und C(2|4,5). Spiegele das Dreieck ABC an der Geraden AB. Welche Eigenschaft hat das Viereck AC′BC?

Fig. 3

10 a) Die Vierecke in Fig. 4 werden an der Geraden a gespiegelt. Wie liegen die Bildvierecke? Welche Eigenschaft der Vierecke ABCD und PQRS wird deutlich?
b) Welche Punkte der Vierecke sind Fixpunkte bei der Spiegelung an a?
Welche Seiten werden auf sich abgebildet?

Fig. 4

11 Das Quadrat ABCD in Fig. 5 wird
a) an AC, b) an MN
gespiegelt.
Welche Ecken des Quadrats sind Fixpunkte? Gibt es Fixgeraden durch die Ecken?

Fig. 5

66

Abbildung 130: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 66

12 a) Welche der Punkte in Fig. 1 sind Fixpunkte der Spiegelung an a?
b) Welche der Geraden sind Fixgeraden der Spiegelung an a?

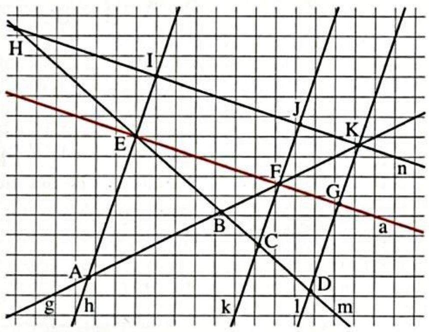


Fig. 1

13 Bestimme passend zu Punkt und Bildpunkt die Spiegelachse a. Schreibe dazu zwei Punkte von a auf.
a) P(2|6); P′(6|2) b) Q(0|2); Q′(8|6)
c) R(3|1); R′(1|7) d) S(2|4); S′(8|1)

14 Übertrage Fig. 2 in dein Heft.
a) Spiegele das Sechseck so, dass A′ der Bildpunkt von A ist.
b) Spiegele das Sechseck so, dass sich als Bild ein aufrechtes „L" ergibt.

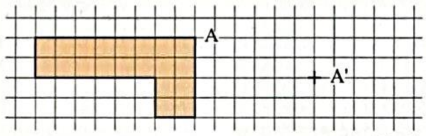


Fig. 2

15 Zeichne
a) ein Quadrat ABCD,
b) ein Rechteck ABCD, das kein Quadrat ist,
c) ein Parallelogramm ABCD, das kein Rechteck ist.
Spiegele jeweils das Viereck ABCD so, dass A auf C (A auf B) fällt. Wird dabei das Viereck auf sich selbst abgebildet?

16 Zeichne die Geraden AB und CD. Zeichne dann Spiegelachsen so, dass AB auf CD abgebildet wird.
a) A(0|3); B(5|0); C(3,5|3,5); D(6|2)
b) A(0|0); B(8|6); C(3|7); D(5|0)

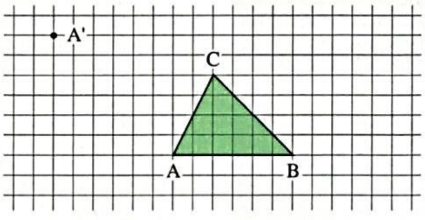


Fig. 3

17 Übertrage Fig. 3 in dein Heft. Das Dreieck ABC soll so gespiegelt werden, dass A′ der Bildpunkt von A ist. Zeichne die Spiegelachse und spiegele das Dreieck an ihr.

18 In Fig. 4 sind a eine Gerade, P und Q zwei nicht auf a liegende Punkte. P′ ist der Bildpunkt von P bei Spiegelungen an a. Wie kann man den Bildpunkt Q′ nur mit dem Geodreieck ohne Verwendung der cm-Einteilung bestimmen?

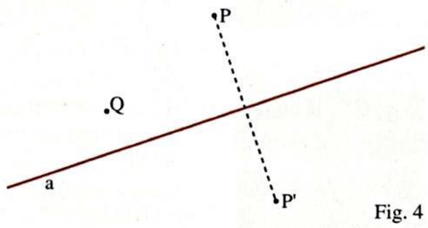


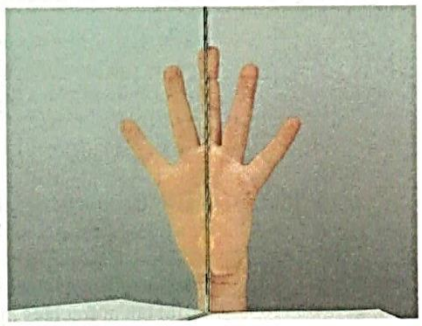
Fig. 4

***19** a) Gegeben sind die vier Ecken A, B, C, D eines Vierecks. Gibt es stets eine Gerade a so, dass durch Spiegelung an a die Punkte A auf B und C auf D abgebildet werden? Wenn nein, wie müssen die Punkte A, B, C, D zueinander liegen, damit es doch möglich ist?
b) Gegeben sind vier Geraden e, f, g, h durch die Seiten eines Vierecks. Gibt es stets eine Gerade a so, dass durch Spiegelung an a die Geraden e auf f und g auf h abgebildet werden? Wenn nein, wie müssen die Geraden e, f, g, h zueinander liegen, damit es doch möglich ist?

Abbildung 131: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 67

2 Achsensymmetrie

1 Für das Foto wurde auf den Mittelfinger einer Hand ein Spiegel gestellt.
Was unterscheidet die beiden Hälften dieser so entstehenden „Hand“ von deiner Hand?

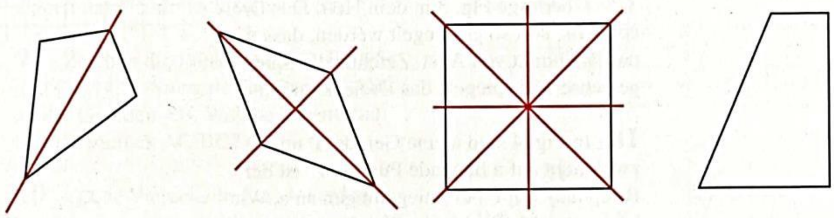


2 Kann man die auf dem Rand stehenden Zeichen verschiedener Automarken so spiegeln, dass sich dabei das Zeichen insgesamt nicht ändert?
Gib dazu jeweils auch die Lage der Spiegelachse an.

Figuren oder Muster sind häufig regelmäßig. Eine besondere Art von Regelmäßigkeit besteht, wenn z. B. durch Falten zwei Teile der Figur zur Deckung gebracht werden können. Dann gibt es auch eine Achsenspiegelung, die die Figur auf sich selbst abbildet.

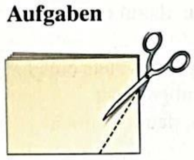
> Figuren, die durch eine Achsenspiegelung auf sich selbst abgebildet werden können, nennt man **achsensymmetrisch**.
> Die Achse der Spiegelung nennt man auch **Symmetrieachse** der Figur.

Beispiel



a)	b)	c)	d)
achsensymmetrisch mit 1 Achse	achsensymmetrisch mit 2 Achsen	achsensymmetrisch mit 4 Achsen	nicht achsensymmetrisch

Aufgaben



3 Falte ein Blatt Papier zweimal wie auf dem Rand gezeigt. Schneide die Ecke ab, falte sie auseinander. Beschreibe, was du erhältst.
Wie viele Symmetrieachsen hat die Figur?

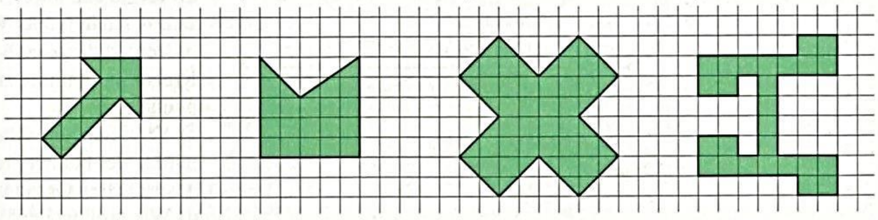
4 a) Zeichne ein Rechteck mit $a = 5\,\text{cm}$ und $b = 3\,\text{cm}$. Trage alle Symmetrieachsen ein.
b) Zeichne einen Kreis mit $r = 3\,\text{cm}$. Trage mehrere Symmetrieachsen ein.

68

Abbildung 132: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 68

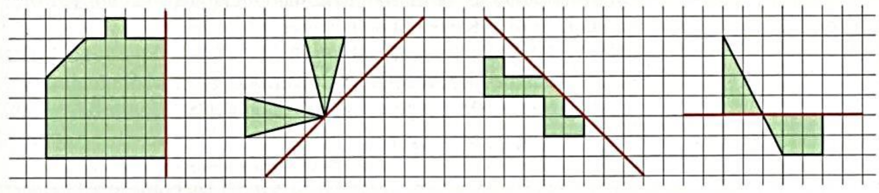
5 a) Zeichne die Strecke $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$. Zeige, dass die Strecke achsensymmetrisch ist, indem du Symmetrieachsen bestimmst. Wie liegt die Achse zur Strecke?
b) Zeichne einen Winkel von 76°. Zeige, dass der Winkel achsensymmetrisch ist, indem du die Symmetrieachse bestimmst. Wie liegt die Achse zum Winkel?

6 Welche Figuren sind achsensymmetrisch? Übertrage die Figuren in dein Heft und trage alle Symmetrieachsen ein.
a) b) c) d)



7 a) Zeichne ein Dreieck mit einer Symmetrieachse und eines mit drei Symmetrieachsen. Gibt es auch Dreiecke mit nur zwei Symmetrieachsen?
b) Das Parallelogramm in Beispiel b) hat zwei Symmetrieachsen. Welche besondere Eigenschaft hat dieses Parallelogramm? Gibt es Parallelogramme ohne Symmetrieachsen bzw. mit genau einer Symmetrieachse? Zeichne.

8 Übertrage in dein Heft. Ergänze zu achsensymmetrischen Figuren.
a) b) c) d)



9 Gegeben sind die Punkte A (3|4), B (7|3) und C (4|8). Ergänze die Punkte durch einen Punkt D so, dass sich eine achsensymmetrische Figur ergibt. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Gib jeweils die Symmetrieachse an.

10 a) Zeichne die drei Punkte A (0|0), B (4|2)) und C (2|4). Füge einen weiteren Punkt P so hinzu, dass die vier Punkte eine achsensymmetrische Figur bilden.
b) Zeige: Man kann den drei Punkten aus a) zwei Punkte P und Q auf mehrere Arten so hinzufügen, dass die fünf Punkte eine achsensymmetrische Figur bilden.

11 Zeichne zwei Kreise, die sich in zwei Punkten schneiden. Zeichne zu der Figur Symmetrieachsen, wenn die Kreise
a) verschiedene Radien,
b) denselben Radius haben.

***12** Übertrage die Figur in dein Heft. Ergänze sie so, dass eine sowohl zu g als auch zu h symmetrische Figur entsteht.

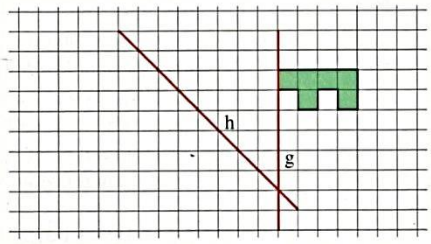
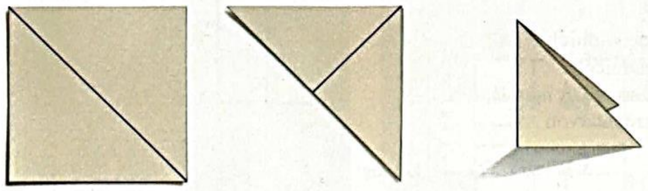


Abbildung 133: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 69

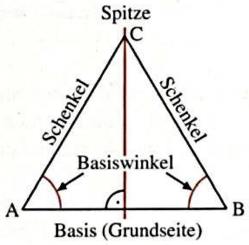
4 Achsensymmetrie bei Dreiecken

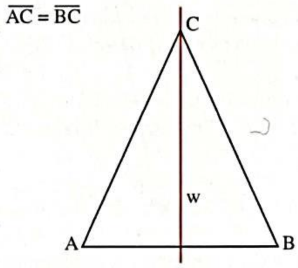


1 Servietten sind meist quadratisch. Wenn man sie an einer Diagonalen faltet, erhält man ein Dreieck. Faltet man dieses Dreieck geschickt, dann kann man die Serviette aufstellen. Welche besonderen Eigenschaften hat dieses Dreieck?

Ein achsensymmetrisches Dreieck besitzt mindestens zwei gleich lange Seiten.
Dreiecke mit mindestens zwei gleich langen Seiten nennt man **gleichschenklig**; die beiden gleich langen Seiten heißen **Schenkel**.
Achsensymmetrische Dreiecke sind gleichschenklige Dreiecke.
Bei einem achsensymmetrischen Dreieck ist die Symmetrieachse gleichzeitig die Mittelsenkrechte der Basis und die Winkelhalbierende des Winkels an der Spitze.

Bezeichnungen an einem gleichschenkligen Dreieck

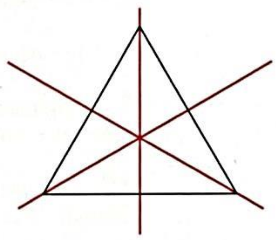




Jedes gleichschenklige Dreieck ist auch achsensymmetrisch, denn:
Die Winkelhalbierende w durch die Dreiecksspitze ist Symmetrieachse der beiden Schenkel. Spiegelt man an ihr den einen Schenkel, so erhält man den anderen; damit wird die eine Ecke des Dreiecks auf die andere abgebildet. Die Winkelhalbierende ist also auch Symmetrieachse des Dreiecks.

Da ein gleichschenkliges Dreieck achsensymmetrisch ist, sind die beiden Basiswinkel gleich groß.

Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitig**.
Gleichseitige Dreiecke besitzen drei Symmetrieachsen.
Deshalb sind in einem gleichseitigen Dreieck alle Winkel gleich groß.



Achsensymmetrische Dreiecke sind gleichschenklig. Gleichschenklige Dreiecke sind achsensymmetrisch, ihre Basiswinkel sind gleich groß.

75

Abbildung 134: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 75

Jeder Punkt P, der von zwei Punkten A und B den gleichen Abstand besitzt, liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$, denn:

1. Das Dreieck ABP ist gleichschenklig und seine Spitze ist P.
2. Die Winkelhalbierende w durch P ist Symmetrieachse des Dreiecks.
3. Spiegelt man A an w, so erhält man B, d. h.: w ist Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$.

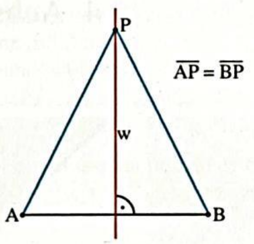


Fig. 1

Beispiel

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit folgenden Eigenschaften:
Die Basis $\overline{AB}$ ist 2,5 cm lang.
Die Basiswinkel sind 45° groß.

Lösung:

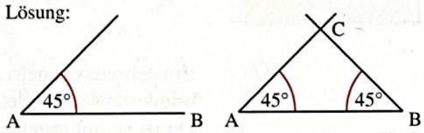
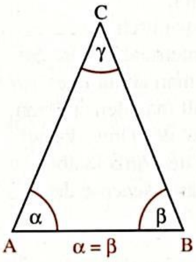


Fig. 2

Aufgaben

2 Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{AB}$, den Basiswinkeln α und β und dem Winkel γ an der Spitze C:
a) $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$ und $\alpha = 50°$ b) $\overline{AC} = 4\,\text{cm}$ und $\gamma = 130°$ c) $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$ und $\gamma = 60°$.

3 Zeichne 3 verschiedene gleichschenklige Dreiecke, deren Basis 7 cm groß ist.



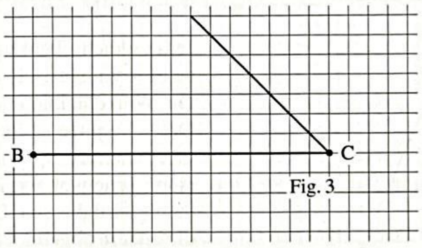


Fig. 3

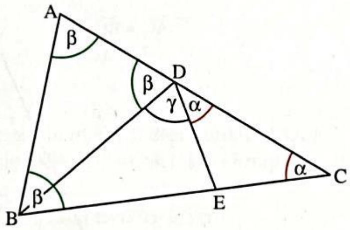


Fig. 4

4 Übertrage Fig. 3 in dein Heft. Vervollständige die Zeichnung so, dass du ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $\overline{BC}$ erhältst.

5 Gib ohne zu messen an, welche Strecken in Fig. 4 gleich lang sind.

6 In einem Dreieck ABC ist $\alpha = \beta$ ($\gamma = \beta$; $\alpha = \gamma$). Welche Seiten sind gleich lang?

7 Jörg sagt: „Ich habe ein gleichseitiges Dreieck mit drei verschieden großen Winkeln gezeichnet." Was meinst du dazu?

***8** Marion sagt: „Jedes Dreieck mit zwei Symmetrieachsen ist ein gleichseitiges Dreieck." Hat sie Recht? Begründe deine Antwort.

***9** Ein gleichschenkliges Dreieck hat den Umfang 18 cm. Berechne die Seitenlängen eines solchen Dreiecks, wenn
a) jeder Schenkel doppelt so lang ist wie die Basis,
b) die Basis um 4 cm länger ist als jeder Schenkel.

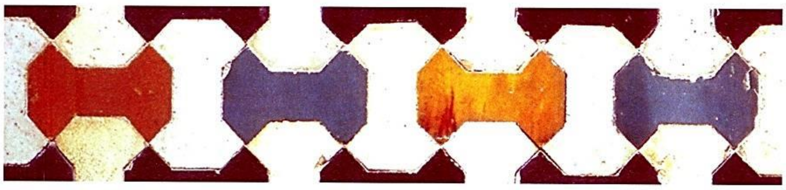
76

Abbildung 135: Lambacher Schweizer 7, Saarland – G8, S. 76

10.2.4. Das Mathematikbuch 5

1 Ornamente

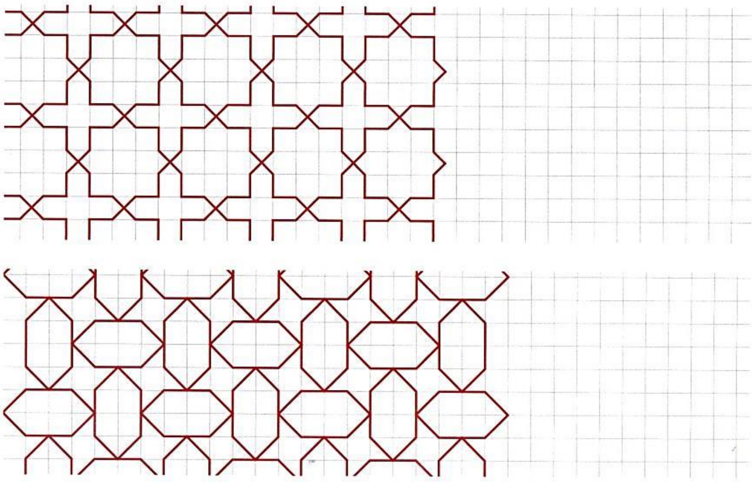
Ornamente sind Verzierungen in der Kunst und an Gebäuden. Sie enthalten viele Regelmäßigkeiten, die du hier erkunden kannst.



Das Muster ist Teil einer Wand in der Alhambra, Granada (Spanien), 13. Jh.

1

a. Nimm ein kariertes Papier, zeichne die Ornamente ab und setze sie fort.



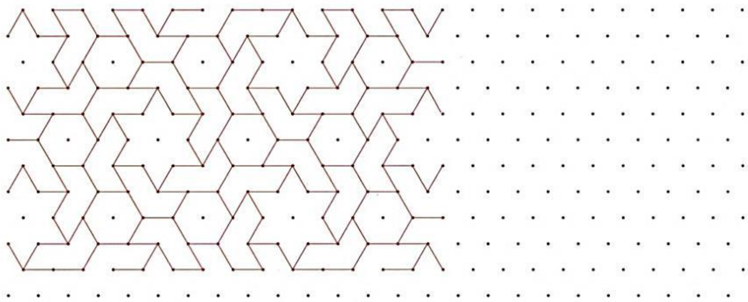
b. In diesen Ornamenten sind viele Symmetrien zu entdecken.
Wo kannst du einen Spiegel oder ein Spiegelpaar (Spiegelbuch) hinstellen, ohne das Muster zu verändern?

L *Geometrische Formen wahrnehmen und Symmetrien entdecken.*
Ornamente untersuchen und selbst herstellen.

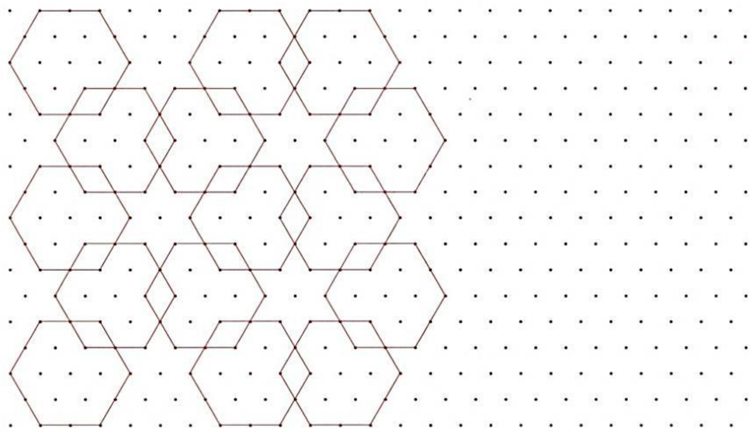
Abbildung 136: Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 6

2 Hier siehst du zwei Beispiele auf Punktpapier. Lege ein durchsichtiges Papier oder eine Folie darauf und zeichne das Muster nach. Du kannst die Folie bewegen und sie mit dem Muster auf verschiedene Arten zur Deckung bringen.
Beschreibe deine Entdeckungen.

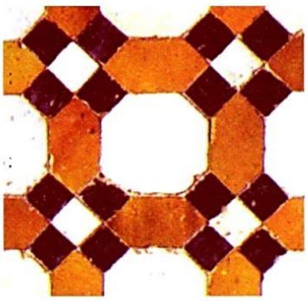
a.

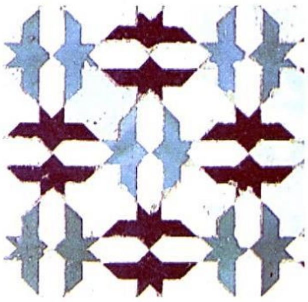


b.



3 Zeichne diese Ornamente auf kariertes Papier.





4 Erfinde eigene Ornamente und zeichne den Anfang auf kariertes Papier oder auf Punktpapier (Kopiervorlage). Lass deine Nachbarin oder deinen Nachbarn weiterzeichnen.

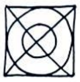
6 | 7

Abbildung 137: Das Mathematikbuch 5, Ausgabe N, S. 7

10.2.5. Das Mathematikbuch 6

1 Ornamente

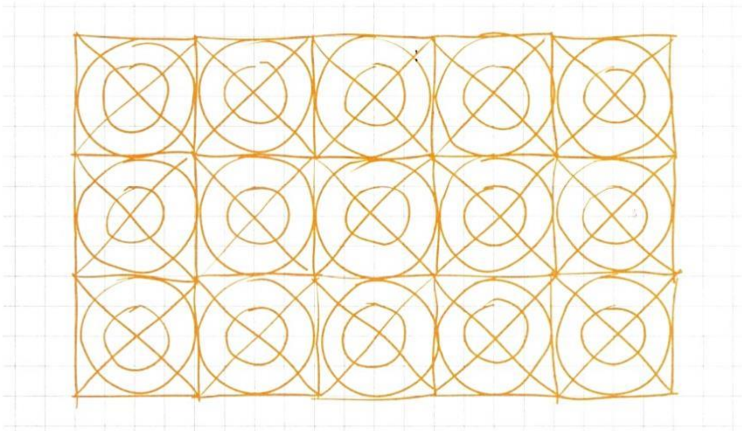
Ornamente sind gar nicht schwer zu erzeugen.



Grundmuster

Vom Entwurf zur exakten Zeichnung

1 Hier siehst du den Entwurf für ein Ornament auf kariertem Papier.



Zu Beispiel 3

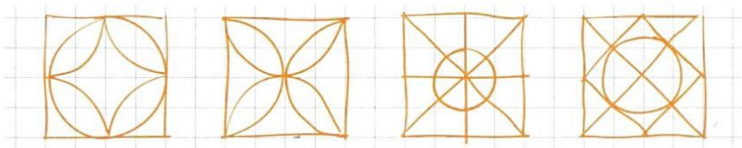
a. Zeichne das Ornament exakt mit Zirkel und Geodreieck auf Karopapier. Lasse das Ornament mehrmals kopieren.

b. Nimm verschiedene Farben. Denke dir eine Regel aus:
Beispiel 1: Ich male jedes Grundmuster gleich aus.
Beispiel 2: Ich nehme für jedes Grundmuster zwei Farben. Ich male jedes zweite Grundmuster gleich aus.
Beispiel 3: Ich nehme vier Farben. Ich brauche für jedes Grundmuster diese vier Farben und male es immer wieder anders aus.
Stelle eine eigene Regel auf und male das Ornament entsprechend aus.

c. Vergleiche dein Ornament mit den Ornamenten deiner Mitschülerinnen und Mitschüler. Welche Regel haben sie sich ausgedacht? Finden sie auch deine Regel heraus?

Zur Erinnerung
Die geradlinige Verbindung zweier **Punkte** heißt **Strecke**.

2 Entwirf von Hand ein eigenes Ornament auf kariertem Papier. Zeichne dieses anschließend exakt mit dem Zirkel. Stelle eine Regel für die Farben auf. Hier siehst du einige Entwürfe:



Ein **gleichseitiges Dreieck** hat drei gleich lange Seiten.

3 Erfinde andere Ornamente mit neuen Grundformen, zum Beispiel mit Rechtecken oder gleichseitigen Dreiecken (Kopiervorlage Punktraster). Stelle eine Regel für die Farben auf und male die Ornamente entsprechend aus.

L *Regelmäßige Muster exakt zeichnen und nach Regeln färben.*
Aus Grundmustern neue Muster und ganze Ornamente zusammensetzen.

Abbildung 138: Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 6

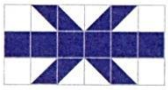
Ornamente aus Grundmustern zusammensetzen

4 Hier siehst du ein quadratisches Grundmuster.

a. Schneide mehrere Grundmuster aus (Kopiervorlage Ornamente 1).

b. Du kannst zwei Teile zu einem Paar zusammensetzen, zum Beispiel:

Tipp
Ihr könnt im Klassenzimmer ein großes Plakat aufhängen und die Paare aufkleben. Wer noch ein neues findet, ergänzt es. So könnt ihr mit der Zeit alle Möglichkeiten finden.



symmetrisches Paar

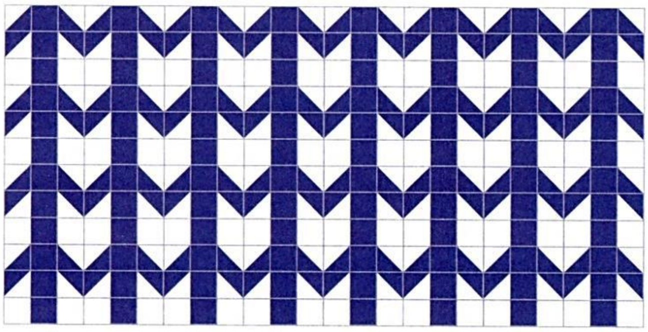
oder

nicht symmetrisches Paar

Lege zwei oder drei Teile auf verschiedene Arten nebeneinander. Zeichne die zusammengesetzten Muster auf kariertes Papier.

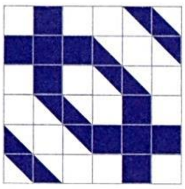
c. Setze vier Teile zu einem Quadrat zusammen. Zeichne es auf kariertes Papier. Welche Muster sind symmetrisch?

d. Lege oder zeichne mit dem Grundmuster ein Ornament nach einer bestimmten Regel. Hier siehst du ein Beispiel:



e. Vergleicht eure Ornamente. Welche Ornamente sind symmetrisch, welche nicht?

5 Schneide mehrere Grundmuster aus (Kopiervorlage Ornamente 2 und 3).



a. Setze immer vier Grundmuster zu einem Quadrat zusammen. Zeichne die verschiedenen Quadrate auf kariertes Papier.

b. Füge die beiden Grundmuster nach eigenen Regeln zu Ornamenten mit und ohne Symmetrieachsen zusammen.

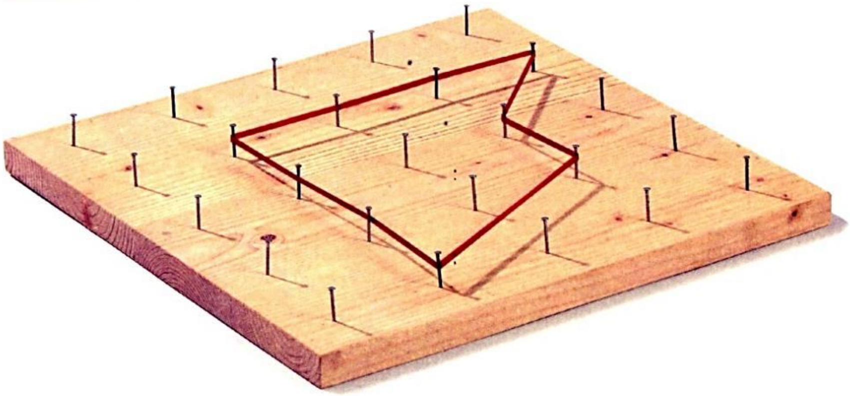
c. Vergleicht eure Ornamente. Welche haben Symmetrieachsen, welche nicht?

6 | 7

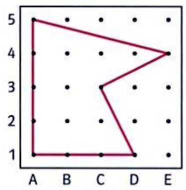
Abbildung 139: Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 7

6 Geobrett

Haben Nägel eine Adresse?

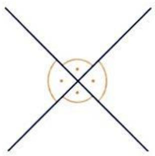


Die Nägel können folgendermaßen mit Koordinaten bezeichnet werden:

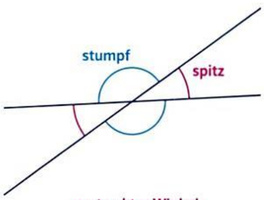


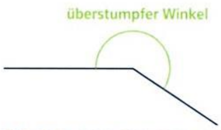
Die Eckpunkte dieser Figur haben die Koordinaten: A1; D1; C3; E4; A5

rechte Winkel
Zwei Geraden, die senkrecht aufeinander stehen, bilden vier rechte Winkel.



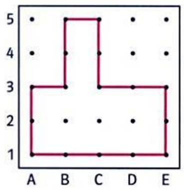
spitze und stumpfe Winkel
Zwei Geraden, die nicht senkrecht aufeinander stehen, bilden zwei spitze und zwei stumpfe Winkel.



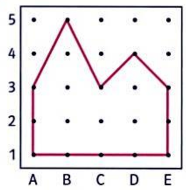


1 Beschreibe folgende Figuren mit Koordinaten:

a.



b.



2 Spanne folgende Figuren oder zeichne sie auf (Kopiervorlage Geobrett):
a. B1 – C1 – C2 – D2 – D1 – E1 – E4 – C4 – C5 – A5 – A4 – B4 – B1
b. B1 – D1 – D2 – E2 – D3 – E3 – D4 – E4 – C5 – A4 – B4 – A3 – B3 – A2 – B2 – B1

3 Stellt euch weitere Aufgaben wie in 1 und 2.

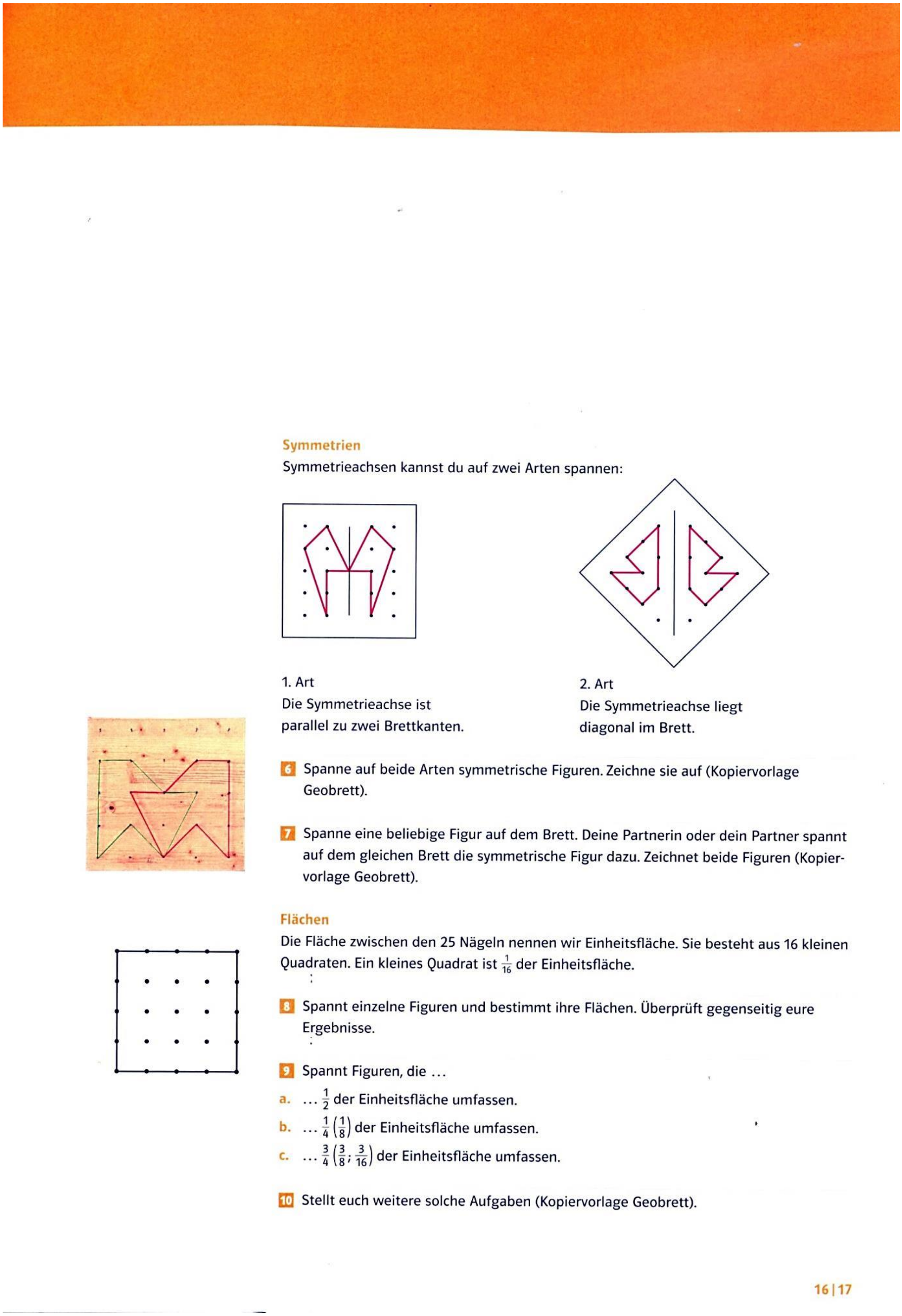
Winkel

4 Welche Winkel der Figuren in den Aufgaben 1 bis 3 sind spitz, welche stumpf, welche überstumpf und welche sind rechte Winkel?

5 Spannt Figuren und beschreibt sie mit Koordinaten.
a. Figuren, die innen oder außen nur rechte Winkel haben.
b. Figuren, die innen nur spitze Winkel haben.
c. Figuren, die innen nur stumpfe Winkel haben.
d. Figuren, bei denen alle Winkel gleich groß sind.
Welche Arten von Figuren findest du bei den verschiedenen Teilaufgaben? Kannst du begründen, warum bestimmte Figurenarten nicht auftreten?

L *Punkte mit Koordinaten bezeichnen. Winkelarten kennen lernen.*
Symmetrische Figuren spannen und zeichnen. Bruchteile von Flächen spannen und zeichnen.

Abbildung 140: Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 16



Symmetrien

Symmetrieachsen kannst du auf zwei Arten spannen:

1. Art
Die Symmetrieachse ist parallel zu zwei Brettkanten.

2. Art
Die Symmetrieachse liegt diagonal im Brett.

6 Spanne auf beide Arten symmetrische Figuren. Zeichne sie auf (Kopiervorlage Geobrett).

7 Spanne eine beliebige Figur auf dem Brett. Deine Partnerin oder dein Partner spannt auf dem gleichen Brett die symmetrische Figur dazu. Zeichnet beide Figuren (Kopiervorlage Geobrett).

Flächen

Die Fläche zwischen den 25 Nägeln nennen wir Einheitsfläche. Sie besteht aus 16 kleinen Quadraten. Ein kleines Quadrat ist $\frac{1}{16}$ der Einheitsfläche.

8 Spannt einzelne Figuren und bestimmt ihre Flächen. Überprüft gegenseitig eure Ergebnisse.

9 Spannt Figuren, die …

a. … $\frac{1}{2}$ der Einheitsfläche umfassen.

b. … $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)$ der Einheitsfläche umfassen.

c. … $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{8}; \frac{3}{16}\right)$ der Einheitsfläche umfassen.

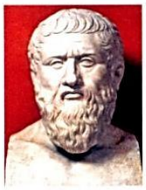
10 Stellt euch weitere solche Aufgaben (Kopiervorlage Geobrett).

16 | 17

Abbildung 141: Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 17

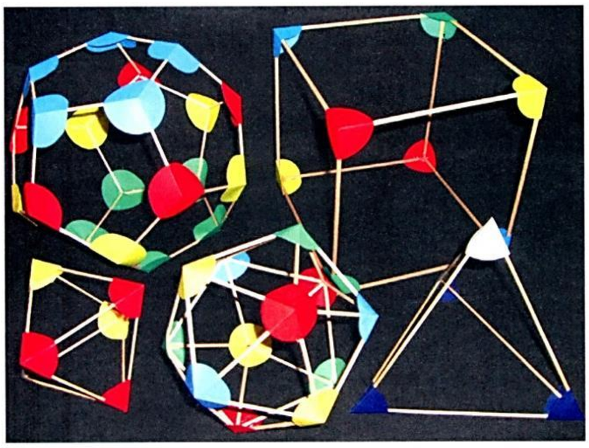
23 Platonische Körper

Die platonischen Körper, benannt nach dem griechischen Philosophen Platon, werden seit frühester Zeit von den Menschen bewundert.
Was ist das Besondere an diesen Körpern? Gibt es wirklich nur fünf platonische Körper?



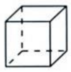
Platon (427 – 348 v. Chr.) lebte in Athen, war ein Schüler von Sokrates und einer der einflussreichsten griechischen Philosophen. Platon unternahm verschiedene große Reisen, unter anderem nach Ägypten und Sizilien. Er gründete die Akademie in Athen. Unter seinen Schriften sind auch einige mit mathematisch-philosophischem Inhalt.
Die nach ihm benannten Körper wurden erstmalig von den Pythagoreern untersucht und von Platon ausführlich beschrieben.

Hier siehst du Kantenmodelle der platonischen Körper, die aus dünnen Holzstäben und „Eckenhütchen" aus Tonpapier gebaut wurden.



1 Welche besonderen Eigenschaften haben die platonischen Körper? Was fällt euch auf? Diskutiert, was ihr herausgefunden habt.

2 Beschreibe die fünf platonischen Körper nun im Einzelnen. Gehe dabei näher auf die Anzahl und Form der Seitenflächen ein und gib jeweils die Anzahl der Flächen an, die an einer Ecke zusammenstoßen. Übertrage die Tabelle in dein Heft.

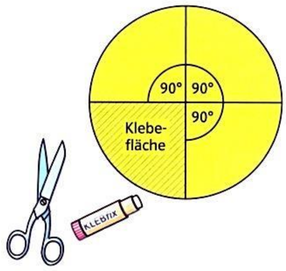
Körper	Anzahl und Form der Seitenflächen	Anzahl der an jeder Ecke zusammenstoßenden Flächen
 Tetraeder		
 Würfel (Hexaeder)	6 Quadrate	3 Quadrate
 Oktaeder		
 Dodekaeder		
 Ikosaeder		

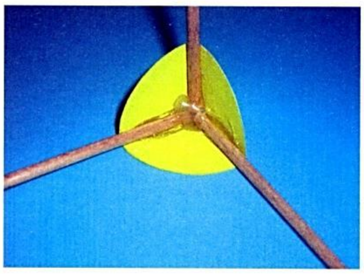
L *Platonische Körper, Beziehungen zwischen Winkeln, Ecken, Kanten und Flächen. Körper bauen.*

Abbildung 142: Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 50

Platon hatte die Idee, dass die Materie aus vier Grundelementen – Feuer, Erde, Luft und Wasser – besteht.
Nach seinen Vorstellungen sollten die kleinsten Bausteine (Atome) der Grundelemente die Gestalt der platonischen Körper haben, und zwar die Feueratome die Gestalt des Tetraeders, die Erdatome die Gestalt des Würfels, die Luftatome die des Oktaeders und die Wasseratome die Gestalt des Ikosaeders. Das Dodekaeder hat Platon dem Weltall zugeordnet. Jede der zwölf Seitenflächen entspricht einem der zwölf Sternbilder.

3 Carina und Christian möchten mit dem Bau eines Würfels beginnen. Sie haben ihre Idee zum Bau der dazugehörigen „Eckenhütchen" in einer Zeichnung dargestellt:





Beschreibt ihre Überlegung. Schaut euch auch das fertige Eckenhütchen genau an.

a. Wie viele solcher Eckenhütchen und wie viele Holzstäbe brauchen die beiden?

b. Zeichnet nun die Baupläne für die Eckenhütchen eines Tetraeders und eines Oktaeders in euer Heft. Überlegt euch, in wie viele Teile ihr die Kreisscheiben für die Eckenhütchen aufteilen müsst und wie groß hier die Winkel sind. Gebt jeweils die Anzahl der benötigten Eckenhütchen und Holzstäbe an.

c. Sucht euch nun einen der einfacheren platonischen Körper aus (Tetraeder, Würfel oder Oktaeder) und baut das Kantenmodell des Körpers.

4

a. Zeichnet die entsprechenden Eckenhütchen-Baupläne für das Dodekaeder und das Ikosaeder. Beschreibt, was ihr euch überlegt habt und gebt die benötigten Baumaterialien an.

b. Baut nun das Kantenmodell eines Dodekaeders oder eines Ikosaeders.

5 Gibt es wirklich nur fünf platonische Körper?

a. Kann es noch weitere platonische Körper geben, die von gleichseitigen Dreiecken begrenzt sind?

b. Könnte man eines Tages neue platonische Körper entdecken, die von Quadraten, regelmäßigen Fünfecken oder vielleicht sogar von regelmäßigen Sechsecken begrenzt sind? Erläutert eure Überlegungen sorgfältig.

50 | 51

Abbildung 143: Das Mathematikbuch 6, Ausgabe N, S. 51

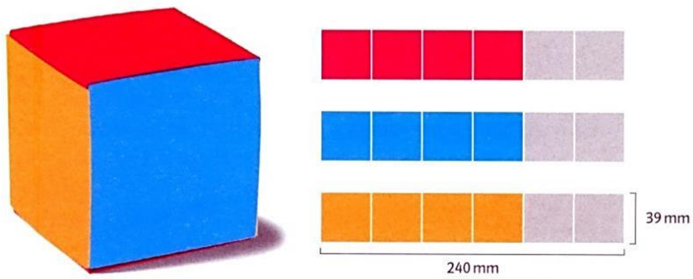
10.2.6. Das Mathematikbuch 7

12 Kopfgeometrie

Kannst du gut im Kopf rechnen?
Hier kannst du trainieren, dir Gegenstände im Kopf vorzustellen und sie dabei auch zu bewegen.

Flechtwürfel

1 Du kannst aus drei Papierstreifen nur durch Falten und Flechten, aber ohne zu kleben, einen Würfel herstellen.

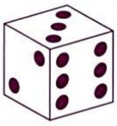


Maße der Streifen

Erkläre jemandem, wie du geflochten hast.

Augensummen

Bei einem Spielwürfel beträgt die Augensumme gegenüberliegender Flächen immer 7.



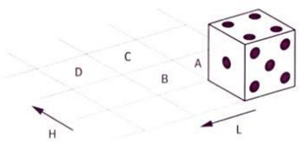
2

a. Von einem Würfel kann man gleichzeitig nur drei Seitenflächen sehen. Welches ist die kleinste, welches die größte Augensumme, die man beim Würfel links auf einen Blick erfassen kann?
b. Begründe, weshalb die Augensumme 8 nicht auf einen Blick erfasst werden kann.
c. Welche Summen sind auf einen Blick sichtbar?

Würfel kippen

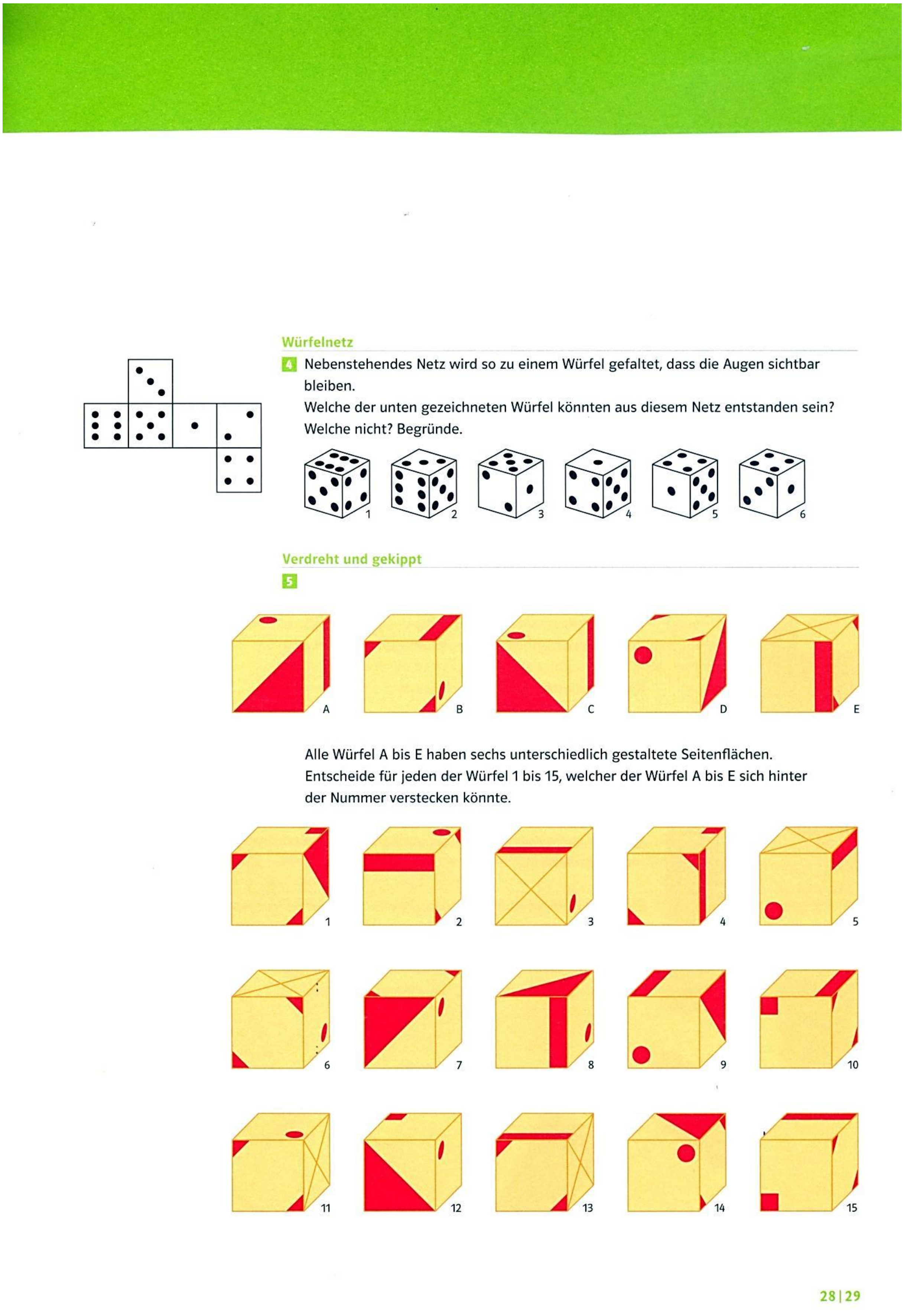
3 Der Würfel wird aus seiner Startlage um eine Kante auf das mit A bezeichnete Gitterquadrat gekippt.

a. Wie viele Augen sind nun oben?
b. Dann geht es weiter über B, C bis zum Feld D. Welche Augenzahl ist nun oben?
c. Wähle andere Wege im Gitter nach D. Liegt bei D immer die gleiche Zahl oben?
d. Führt man vier Kippbewegungen nach links und dann vier nach hinten aus (abgekürzt LLLLHHHH), steht der Würfel wieder wie beim Start. Es gibt auch andere Wege, bei denen der Würfel am Schluss wieder so wie beim Start steht. Suche solche Wege, die aus 4, 6 oder 8 Kippbewegungen bestehen.



L *Das Raumvorstellungsvermögen trainieren.*

Abbildung 144: Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 28



Würfelnetz

4 Nebenstehendes Netz wird so zu einem Würfel gefaltet, dass die Augen sichtbar bleiben.
Welche der unten gezeichneten Würfel könnten aus diesem Netz entstanden sein? Welche nicht? Begründe.

1 2 3 4 5 6

Verdreht und gekippt

5

A B C D E

Alle Würfel A bis E haben sechs unterschiedlich gestaltete Seitenflächen.
Entscheide für jeden der Würfel 1 bis 15, welcher der Würfel A bis E sich hinter der Nummer verstecken könnte.

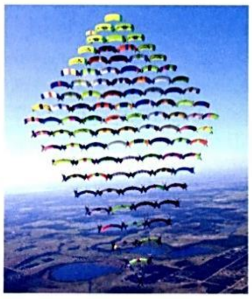
1 2 3 4 5
6 7 8 9 10
11 12 13 14 15

28 | 29

Abbildung 145: Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 29

22 Schmetterling und Propeller

Du kannst viele Gegenstände in zwei symmetrische Teile zerlegen. Legst du an die gedachte Trennlinie einen Spiegel, so siehst du mithilfe des Spiegels den ganzen Gegenstand.



Im linken Bild sieht man 100 geöffnete Fallschirme, die eine sogenannte Kappenformation bilden – alle Fallschirmspringer haben ihre Fallschirme (Kappen) geöffnet. Im rechten Bild sind 200 Fallschirmspringer in einer sogenannten Großformation zu sehen. Sie halten sich in der Luft aneinander fest und erzeugen so schöne Bilder am Himmel.

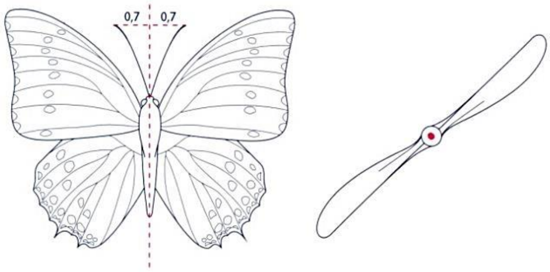
1
- a. Kannst du in diesen Fotos Symmetrien entdecken? Wie ist es, wenn du die Farben nicht beachtest?
- b. Versucht, euch auf dem Schulhof ähnlich aufzustellen wie die Fallschirmspringer.
- c. Denkt euch eigene Anordnungen aus und stellt sie im Schulhof nach. Beschreibt, wie ihr vorgehen müsst und welche Symmetrien ihr so erzeugt habt.

2 Kannst du selbst symmetrische Figuren zeichnen? Manche Figuren haben mehr als nur eine Symmetrieachse, gelingt dir auch das Zeichnen solcher Figuren?

Ist ein Propeller symmetrisch?

Das Bild eines Schmetterlings ist achsensymmetrisch.
Aber wie steht es mit dem Bild eines Propellers?

Statt mit einem Spiegel kann man Achsensymmetrie auch mithilfe einer eingezeichneten Symmetrieachse überprüfen.



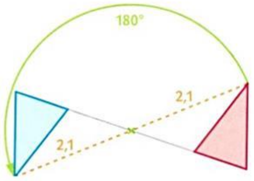
3 Durch welche Bewegung vertauschen die beiden Flügel des Propellers ihre Plätze?

4 Erfinde andere Figuren, die „propellersymmetrisch" sind.

L *Achsen- und Punktsymmetrie wahrnehmen, unterscheiden und erzeugen.*

Abbildung 146: Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 48

Sind Spielkarten symmetrisch?

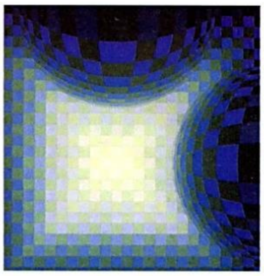


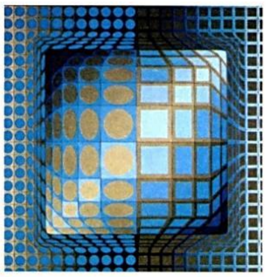
Viele Spielkarten sind in der gleichen Art symmetrisch wie das Bild eines Propellers. Diese Art von Symmetrie heißt **Punktsymmetrie**. Das Zentrum heißt **Symmetriepunkt** oder **Symmetriezentrum**. Nach einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt sieht das Bild wieder gleich aus.

5
a. Was unterscheidet die beiden Karten?
b. Welche ist richtig?
c. Was stimmt an der anderen nicht?

Achsensymmetrie und Punktsymmetrie

Diese vier Bilder hat der aus Ungarn stammende französische Maler Victor Vasarely gemalt. Viele seiner Bilder hat er streng nach geometrischen Regeln konstruiert. Dabei spielen Symmetrien eine große Rolle.





6 Stelle bei diesen Bildern fest, ob sie achsensymmetrisch, punktsymmetrisch, beides oder keines von beidem sind.

7 Zeichne die inneren vier Quadrate des letzten Bildes vergrößert nach. Färbe sie so, dass die Darstellung achsensymmetrisch wird.

8 Zeichne ein eigenes Bild mit Kreisen und Quadraten so, dass
a. es punktsymmetrisch wird.
b. es sowohl achsen- als auch punktsymmetrisch wird.

Online-Link
700171-2201
Alle Bilder der Seite

Abbildung 147: Das Mathematikbuch 7, Ausgabe N, S. 49

Literaturverzeichnis

Aebli, H. (1971) Zum Geleit. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 7-9). Stuttgart: Ernst Klett.

Akinwunmi, K. (2012) *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster. Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Band 8.* Wiesbaden: Springer.

Anglin, J. (1973) Introduction. In: J. Bruner & J. Anglin (Hrsg.): *Beyond the information given. Studies in the psychology of knowing* (S. xiiv-xxiv). New York: Norton & Company.

Bauersfeld, H. (1983) Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: H. Bauersfeld et al (Hrsg.): *Lernen und Lehren von Mathematik. Analysen zum Unterrichtshandeln II* (S. 1-56). Köln: Aulis.

Beilin, H. (1983) The New Functionalism and Piaget's Program. In: E. Scholnick (Hrsg.): *New Trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget's Theory?* (S. 3-40). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Bendel, N. & Schmidt, G. (2004) Förderung der Raumanschauung im Geometrieunterricht der Orientierungsstufe – Ist der Computer ein willkommenes Werkzeug? *Der Mathematikunterricht, 50.1-2,* 29-46.

Bender, P. (1982) Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 14.1,* 9-24.

Bender, P. (1991a) Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen. In: H. Postel, W. Blum & A. Kirsch (Hrsg.): *Mathematik lehren und lernen: Festschrift für Heinz Griesel* (S. 48-60). Hannover: Schroedel.

Bender, P. (1991b) Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 44/4,* 238-243.

Bender, P. & Jahnke, H. N. (1992) Intuition and rigor in mathematics instruction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 92.7,* 259-311.

Bender, P. & Schreiber, A. (1985) *Operative Genese der Geometrie.* Wien: Hölder-Pichler-Tempsky.

Besuden, H. (1994) Operieren mit Gummibändern. Ebene Schnitte an geometrischen Körpern. *mathematik lehren, 67,* 11-15.

Bibliographisches Institut GmbH. (2013) *Psychologie, die.* http://www.duden.de/rechtschreibung/Psychologie. (abgerufen 19.07.2015)

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008) Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68.1,* 19-35.

Blum, W. & Kirsch, A. (1979) Zur Konzeption des Analysisunterrichts in Grundkursen. *Der Mathematikunterricht, 25.3,* 6-24.

Blum, W. & Kirsch, A. (1996) Die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. *mathematik lehren, 78,* 60-65.

Blum, W. & Törner, G. (1983) *Didaktik der Analysis. Moderne Mathematik in elementarer Darstellung.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Böhmer, P. (1999) Vermittlung einer Grundvorstellung über Winkel im Unterricht. *Der Mathematikunterricht, 45.4,* 5-15.

Borromeo Ferri, R. (2004) *Mathematische Denkstile. Ergebnisse einer empirischen Studie.* Hildesheim: Franzbecker.

Brandom, R. (2000) *Expressive Vernunft. Begründung, Repräsentation und diskursive Festlegung.* Frankfurt: Suhrkamp.

Brandt, R. (1998) Transzendentale Ästhetik, §§1-3 (A19/B33-A30/B45). In: G. Mohr & M. Willaschek (Hrsg.): *Immanuel Kant. Kritik der reinen Vernunft* (S. 81-106). Berlin: Akademie-Verlag.

Bromme, R. & Steinbring, H. (1990) Die epistemologische Struktur mathematischen Wissens im Unterrichtsprozeß. In: R. Bromme, F. Seeger & H. Steinbring (Hrsg.): *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler* (S. 151-229). Köln: Aulis.

Bronstein, I. et al (2000) *Taschenbuch der Mathematik.* Frankfurt: Harri Deutsch.

Bruner, J. (1966a) On Cognitive Growth. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studies in Cognitive Growth* (S. 1-29). New York: John Wiley & Sons.

Bruner, J. (1966b) On Cognitive Growth II. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studies in Cognitive Growth* (S. 30-67). New York: John Wiley & Sons.

Bruner, J. (1971a – Erstausg. 1966)[271] Ein Überblick. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 377-385). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. (1971b – Erstausg. 1966) Über die Invarianz von Flüssigkeiten. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 223-249). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. (1971c – Erstausg. 1966) Über kognitive Entwicklung. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 21-53). Stuttgart: Ernst Klett.

[271] Für die Werke der in Kapitel 4. betrachteten Philosophen und Psychologen ist jeweils zusätzlich das Jahr der Erstausgabe angegeben.

Bruner, J. (1971d – Erstausg. 1966) Über kognitive Entwicklung II. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 55-96). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. & Kenney, H. (1971a – Erstausg. 1966) Über Beziehungsbegriffe. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 207-222). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. & Kenney, H. (1971b – Erstausg. 1966) Über das Ordnen in mehreren Dimensionen. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 191-205). Stuttgart: Ernst Klett.

Bruner, J. (1974 – Erstausg. 1966) *Entwurf einer Unterrichtstheorie.* Berlin: Berlin Verlag.

Bruner, J. & Goodnow, J. (1986) Preface to the 1986 Edition. In: J. Bruner, J. Goodnow & A. Austin: *A Study of Thinking* (S.ix-xv). New Brunswick: Transaction Books.

Bruner, J., Goodnow, J. & Austin, G. (1986 – Erstausg. 1956) *A Study of Thinking*. New Brunswick: Transaction Books.

Buchholz, I. (1991) Zur vektorgeometrischen Behandlung der Platonischen Körper. *Der Mathematikunterricht, 37.4,* 30-44.

Cassirer, E. (2010a – Erstausg. 1923) *Philosophie der symbolischen Formen. Erster Teil. Die Sprache*. Hamburg: Felix Meiner.

Cassirer, E. (2010b – Erstausg. 1924) *Philosophie der symbolischen Formen. Zweiter Teil. Das mythische Denken*. Hamburg: Felix Meiner.

Cassirer, E. (2010c – Erstausg. 1929) *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis*. Hamburg: Felix Meiner.

Cleff, T. (2008) *Deskriptive Statistik und moderne Datenanalyse. Eine computergestützte Einführung mit Excel, SPSS und STATA.* Wiesbaden: Gabler.

Dawydow, W. (1977) *Arten der Verallgemeinerung im Unterricht.* Berlin: Volk und Wissen.

Dawydow, W. (1982) Inhalt und Struktur der Lerntätigkeit. In: W. Dawydow, J. Lompscher & A. Markowa (Hrsg.): *Ausbildung der Lerntätigkeit bei Schülern* (S. 14-27). Berlin: Volk und Wissen.

Dörfler, W. (1984) Qualität mathematischer Begriffe und Visualisierung. In: H. Kautschitsch & W. Metzler (Hrsg.): *Anschauung als Anregung zum mathematischen Tun. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Band 9.* (S. 44-64). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.

Dörfler, W. (1988a) Begriff als Tätigkeitsstruktur – Zur Unterscheidung vom empirischem und theoretischem Begriff. In: P. Bender (Hrsg.): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 29-36). Berlin: Cornelsen.

Dörfler, W. (1988b) Die Genese mathematischer Objekte und Operationen aus Handlungen als kognitive Konstruktion. In: W. Dörfler (Hrsg.): *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Band 16.* (S. 55-125). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.

Eco, U. (1977) *Zeichen. Einführung in einen Begriff und seine Geschichte.* Frankfurt: Suhrkamp.

Edelmann, W. (2000) *Lernpsychologie.* Weinheim: Beltz.

Elschenbroich, H.-J. (2015) Anmerkungen zum Aufbau eines dynamischen Grundverständnisses von Symmetrie und Spiegelungen. In: A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Raumgeometrie. Vorträge auf der 31. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 12. bis 14. September 2014 in Saarbrücken* (S. 71-84). Hildesheim: Franzbecker.

Ernst Klett Verlag. http://www.klett.de. (abgerufen 15.11.2015)

Faraponowa, E. (1982) Zur Rolle der Modellierung bei der Ausbildung verallgemeinerter Handlungsverfahren beim Lösen technischer Aufgaben. In: W. Dawydow, J. Lompscher & A. Markowa (Hrsg.): *Ausbildung der Lerntätigkeit bei Schülern* (S. 120-130). Berlin: Volk und Wissen.

Fatke, R. (2003) Einführung. In: R. Fatke (Hrsg.): *Jean Piaget. Meine Theorie der geistigen Entwicklung* (S. 7-37).Weinheim: Beltz.

Filler, A. (2011) *Zusammenfassende Notizen zu der Vorlesung Didaktik der Elementargeometrie.* http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/did_elemgeo-skript.pdf. (abgerufen 03.06.2014)

Fischer, A. (2010) Schwierigkeiten beim diagrammatischen Schließen – eine Fallstudie. In: G. Kadunz (Hrsg.): *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 83-108). Hildesheim: Franzbecker.

Flick, U. (2007) *Qualitative Sozialforschung. Eine Einführung.* Reinbek: Rowohlt.

Förster, E. (1998) Die Vorreden. In: G. Mohr & M. Willaschek (Hrsg.): *Immanuel Kant. Kritik der reinen Vernunft* (S. 37-55). Berlin: Akademie-Verlag.

Frege, G. (1964 – Erstausg. 1879) Begriffsschrift. In: I. Angelelli (Hrsg.): *Begriffsschrift und andere Aufsätze* (S. 1-88). Hildesheim: Georg Olms.

Frege, G. (1971a) Ausführungen über Sinn und Bedeutung. In: G. Gabriel (Hrsg.): *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß* (S. 25-34). Hamburg: Felix Meiner.

Frege, G. (1971b) Einleitung in die Logik. In: G. Gabriel (Hrsg.): *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß* (S. 74-91). Hamburg: Felix Meiner.

Frege, G. (1971c) Logik. In: G. Gabriel (Hrsg.): *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß* (S. 35-73). Hamburg: Felix Meiner.

Frege, G. (1971d) Logik in der Mathematik. In: G. Gabriel (Hrsg.): *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß* (S. 92-165). Hamburg: Felix Meiner.

Frege, G. (1971e) Logische Allgemeinheit. In: G. Gabriel (Hrsg.): *Schriften zur Logik und Sprachphilosophie. Aus dem Nachlaß* (S. 166-171). Hamburg: Felix Meiner.

Frege, G. (2002a – Erstausg. 1891) Funktion und Begriff. In: M. Textor (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion – Begriff – Bedeutung* (S. 2-22). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2002b – Erstausg. 1892) Über Begriff und Gegenstand. In: M. Textor (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion – Begriff – Bedeutung* (S. 47-60). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2002c –Erstausg. 1882) Über die wissenschaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift. In: M. Textor (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion – Begriff – Bedeutung* (S. 70-76). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2002d – Erstausg. 1892) Über Sinn und Bedeutung. In: M. Textor (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion – Begriff – Bedeutung* (S. 23-46). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2002e – Erstausg. 1904) Was ist eine Funktion? In: M. Textor (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion – Begriff – Bedeutung* (S. 61-69). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2003a – Erstausg. 1918) Der Gedanke – eine logische Untersuchung. In: G. Patzig (Hrsg.): *Logische Untersuchungen* (S. 35-62). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2003b – Erstausg. 1918) Die Verneinung – eine logische Untersuchung. In: G. Patzig (Hrsg.): *Logische Untersuchungen* (S. 63-83). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Frege, G. (2003c – Erstausg. 1919) Logische Untersuchung – Dritter Teil: Gedankengefüge. In: G. Patzig (Hrsg.): *Logische Untersuchungen* (S. 25-37). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Freudenthal, H. (1973a) *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1.* Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1973b) *Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2.* Stuttgart: Klett.

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Fridman, L. (1982) Modellierung der Lerntätigkeit. In: W. Dawydow, J. Lompscher & A. Markowa (Hrsg.): *Ausbildung der Lerntätigkeit bei Schülern* (S. 106-119). Berlin: Volk und Wissen.

Führer, L. (1999) *Didaktik der Mathematik, Teil 2.* Unveröffentlichtes Skript zur Vorlesung am Institut für Didaktik der Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main im Wintersemester 1999/2000.

Führer, L. (2002) *Didaktik der Mathematik I. Didaktik der Geometrie.* Unveröffentlichtes Skript zur Vorlesung am Institut für Didaktik der Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main im Sommersemester 2002.

Führich, A. & Nimz, H. (2002a) Spiegelungen an Geraden in analytischer Formulierung. *Der Mathematikunterricht, 48.6,* 4-21.

Führich, A. & Nimz, H. (2002b) Spiegelungen an Kreisen und stereographische Projektion. *Der Mathematikunterricht, 48.6,* 22-45.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1988) *The van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gaab, K. (2015) Begriffe im Geometrieunterricht der ‚Hauptschule'. In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S.107-127). Wiesbaden: Springer.

Gerecke, W. (1991) Platonische Körper – Eine Unterrichtsreihe in Klasse 10. *Der Mathematikunterricht, 37.4,* 17-29.

Griesel, H. (1971a) Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1971. Vorträge auf der 5. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. April 1971 in Bayreuth* (S. 72-81). Hannover: Schroedel.

Griesel, H. (1971b) *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band 2.* Hannover: Schroedel.

Griesel, H. (1973) *Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band 1.* Hannover: Schroedel.

Griesel, H. (1996) Grundvorstellungen zu Größen. *mathematik lehren, 78,* 15-19.

Grondin, J. (1994) *Immanuel Kant zur Einführung*. Hamburg: Junius.

Hadamard, J. (1945) *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* New York: Dover Publications.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J. (2006) Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectives. In: A. Gutierrez & P. Boero (Hrsg.): *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future. PME 1976-2006* (S. 147-172). Rotterdam: Sense Publishers.

Hattermann, M. (2015) Grundvorstellungsumbrüche beim Übergang zur 3D-Geometrie. In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen* *und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 75-86). Wiesbaden: Springer.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996) Brüche haben viele Gesichter. *mathematik lehren, 78,* 20-48.

Hinz, G. (1989) Befähigung zum Erkennen und Lösen von Problemen. In: J. Lompscher (Hrsg.): *Psychologische Analysen der Lerntätigkeit* (S. 137-181). Berlin: Volk und Wissen.

Hischer, H. (2012) *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur – Funktion – Zahl.* Wiesbaden: Spektrum.

Hischer, H. & Lambert, A. (2002) Begriffs-Bildung und Computeralgebra. In: H. Hischer: *Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht* (S. 138.167). Hildesheim: Franzbecker.

Holland, G. (1988) *Geometrie in der Sekundarstufe. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Band 9.* Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.

Holland, G. (2007) *Geometrie in der Sekundarstufe. Entdecken – Konstruieren – Deduzieren.* Hildesheim: Franzbecker.

Jahnke, T. (2005) *Zur Authentizität von Mathematikaufgaben.* http://www7.math.uni-potsdam.de:8080/prof/o_didaktik/aa/Publ/vortr. (abgerufen 20.10.2015)

Jantos, W. (1989) Kooperation und Kommunikation in der Lerntätigkeit. In: J. Lompscher (Hrsg.): *Psychologische Analysen der Lerntätigkeit* (S. 91-136). Berlin: Volk und Wissen.

Jellinek, W. (1926) *Staatskunde. II. Band. 2. Heft. Verfassung und Verwaltung des Reichs und der Länder.* Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Kadunz, G. (2011) Sagen und Zeigen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011. Vorträge auf der 45. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 21.02.2011 bis 25.02.2011 in Freiburg* (S. 447-450). Münster: WTM.

Kadunz, G. (2012) Zeichen und Visualisierung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2012 bis 09.03.2012 in Weingarten* (S. 425-428). Münster: WTM.

Kadunz, G. & Sträßer, R. (2009) *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I.* Hildesheim: Franzbecker.

Kant, I. (2004 – Erstausg. 1781) Kritik der reinen Vernunft. In: G. Mohr (Hrsg.): *Theoretische Philosophie. Text und Kommentar. Band 1. Kritik der reinen Vernunft.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Kirsche, P. (1996) Zum Herstellen spiegelsymmetrischer und punktsymmetrischer Figuren im Unterricht der Primarstufe. *Der Mathematikunterricht, 42.2,* 5-13.

Kleine, M. (2007) Analyse von Grundvorstellungen – Möglichkeiten und Grenzen –. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3.2007 in Berlin* (S. 183-186). Hildesheim: Franzbecker.

Klieme, E., Neubrand, M. & Lüdtke, O. (2001) Mathematische Grundbildung: Testkonzeption und Ergebnisse. In: J. Baumert et al (Hrsg.): *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich* (S. 141-190). Opladen: Leske + Budrich.

Klix, F. (1984) Über Wissensrepräsentation im menschlichen Gedächtnis. In: F. Klix (Hrsg.): *Gedächtnis, Wissen, Wissensnutzung* (S. 9-73). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Klix, F. (1991) Wissensrepräsentation und geistige Leistungsfähigkeit im Lichte neuer Forschungsergebnisse der Kognitiven Psychologie. In: F. Klix, E. Roth & E. van der Meer (Hrsg.): *Kognitive Prozesse und geistige Leistung* (S. 1-29). Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.

KMK. (2004) *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003.* München: Wolters Kluwer.

Kroll, A. & Kroll, W. (1996) Bauen und Spiegeln. *mathematik lehren, 77,* 9-13.

Kunzmann, P., Burkard, F.-P. & Wiedmann, F. (1991) *dtv-Atlas Philosophie*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Lakoff, G. (1987) *Women, Fire, and Dangerous Things. What Categories Reveal about the Mind.* Chicago: The University of Chicago Press.

Lambert, A. (2003) Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: P. Bender, W. Herget, H.-G. Weigand & T. Weth (Hrsg.): *Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Jahrestagung des AK MU&I in der GDM* (S. 91-104). Hildesheim: Franzbecker.

Lambert, A. (2012) Was soll das bedeuten? Enaktiv – ikonisch – symbolisch. In: A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 28. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09. bis 11. September 2011 in Marktbreit* (S. 5-32). Hildesheim: Franzbecker.

Lambert, A. (2014) *Variablenaspekte.* Unveröffentlichte Dateien zur Vorlesung Didaktik II: Funktionaler Zusammenhang des Lehrstuhls für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität des Saarlandes im Wintersemester 2014/15.

Lambert, A. (2015a) *Didaktische Begleittheorien – oder: Warum Füllgraphen doch authentisch sind.* Vortrag auf der 32. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie vom 11.09.2015 - 13.09.2015 in Saarbrücken mit dem Schwerpunkt Von Phänomenen zu Begriffen und Strukturen. Saarbrücken.

Lambert, A. (2015b) *Vom Phänomen zur Theorie – am Beispiel Spiegel und Spiegelung.* Unveröffentlichte Dateien zur Vorlesung Didaktik II: Raum und Form des Lehrstuhls für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität des Saarlandes im Sommersemester 2015.

Lauber, E. (1997) Wohnen in Würfelhäusern. *mathematik lehren, 80,* 12-15.

Leuders, T. (2004) Raumgeometrie: Ein Unterricht mit Kernideen. *Der Mathematikunterricht, 50.1-2,* 5-28.

Lompscher, J. (1989) Die Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten. In: J. Lompscher (Hrsg.): *Psychologische Analysen der Lerntätigkeit* (S. 51-90). Berlin: Volk und Wissen.

Lompscher, J. & Jantos, W. (1984) Die Ausbildung von Vorstellungen und Begriffen. In: J. Lompscher (Hrsg.): *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 101-126). Berlin: Volk und Wissen.

Maier, R. et al (1949) *Verordnung Nr. 1054 der Landesregierung zur Durchführung des Wahlgesetzes zum ersten Bundestag und zur ersten Bundesversammlung der Bundesrepublik Deutschland vom 30. Juni 1949.* http://www.verfassungen.de/de/bw/wuerttemberg-baden/wuertt-b-bundeswahlgesetz49.htm. (abgerufen 11.10. 2015)

Maier, H. & Schweiger, F. (1999) *Mathematik und Sprache. Zum Verstehen und Verwenden von Fachsprache im Mathematikunterricht. Mathematik für Schule und Praxis. Band 4.* Wien: ÖBV & HPT.

Malle, G. (1993) *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig: Vieweg.

Malle, G. (2000) Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren, 103,* 8-11.

Malle, G. (2003) Vorstellungen zum Differenzenquotienten fördern. *mathematik lehren, 118,* 57-62.

Malle, G. & Malle, S. (2003) Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *mathematik lehren, 118,* 52-56.

Mayring, P. (2002) *Einführung in die Qualitative Sozialforschung.* Weinheim: Beltz.

Meyer, M. (2010) Wörter und ihr Gebrauch – Analyse von Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht. In: G. Kadunz (Hrsg.): *Sprache und Zeichen. Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik* (S. 49-80). Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M. (2013) Begriffsbildung durch Entdecken und Begründen. In: M. Meyer, E. Müller-Hill & I. Witzke (Hrsg.): *Wissenschaftlichkeit und Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik. Festschrift anlässlich des sechzigsten Geburtstages von Horst Struve* (S. 57-88). Hildesheim: Franzbecker.

Meyer, M. (2015) *Vom Satz zum Begriff. Philosophisch-logische Perspektiven auf das Entdecken, Prüfen und Begründen im Mathematikunterricht. Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Band 18.* Wiesbaden: Springer.

Mitchell, J. & Lapata, M. (2008) *Vector-based Models of Semantic Composition. Proceedings of the 46th Annual Meeting of the Association for Computational Linguistics: Human Language Technologies.* https://www.aclweb.org/anthology/P/P08/. (abgerufen 01.09. 2015)

Mohr, G. & Willaschek, M. (1998) Einleitung: Kants Kritik der reinen Vernunft. In: G. Mohr & M. Willaschek (Hrsg.): *Immanuel Kant. Kritik der reinen Vernunft* (S. 5-36). Berlin: Akademie-Verlag.

Müller-Benedict, V. (2006) *Grundkurs Statistik in den Sozialwissenschaften. Eine leicht verständliche, anwendungsorientierte Einführung in das sozialwissenschaftlich notwendige statistische Wissen.* Wiesbaden: VS.

Müller-Hill, E. (2015) Semiotische Rekonstruktion empirischer Schülerauffassungen von Geometrie und spezielle Hürden für den Übergang vom propädeutischen zum weiterführenden Geometrieunterricht. In: G. Kadunz (Hrsg.): *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 89-110). Heidelberg: Springer.

Murphy, G. (2004) *The big book of concepts.* Cambridge: The MIT Press.

Neubrand, M. & Neubrand, J. (2007) Geometrie: Was sollen Hauptschüler darüber wissen? Beispiele für die Vernetzung praxisorientierten Grundwissens. *Lernchancen, 55,* 28-31.

Ogden, C. & Richards, I. (1952) *The Meaning of Meaning. A Study of The Influence of Language upon Thought and of The Science of Symbolism. Tenth Edition (Second Impression).* London: Routledge & Kegan.

Olson, D. (1971 – Erstausg. 1966) Über begriffliche Strategien. In: J. Bruner, R. Olver & P. Greenfield (Hrsg.): *Studien zur kognitiven Entwicklung* (S. 171-190). Stuttgart: Ernst Klett.

Ostermann, I. (2006) *Grundvorstellungen in der ebenen und räumlichen Koordinatengeometrie – Gegenüberstellung vom traditionellem und computergestütztem Mathematikunterricht.* Dissertation, Fakultät für Mathematik, Wien.

Otte, M. (1994) *Das Formale, das Soziale und das Subjektive. Eine Einführung in die Philosophie und Didaktik der Mathematik.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Padberg, F. (1989) *Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik. Band 11.* Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag.

Padberg, F. (1996) *Didaktik der Arithmetik.* Heidelberg: Spektrum.

Padberg, F. (2009) *Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung.* Heidelberg: Spektrum.

Paetzold, H. (1993) *Ernst Cassirer zur Einführung*. Hamburg: Junius.

Patzig, G. (2003) Einleitung. In: G. Patzig (Hrsg.): *Logische Untersuchungen* (S. 5-33). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Peschek, W. (1985) Veränderungen kognitiver Strukturen durch Aufbau von Handlungsvorstellungen. In: W. Dörfler & R. Fischer (Hrsg.): *Empirische Untersuchungen zum Lehren und Lernen von Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Band 10.* (S. 215-246). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.

Peschek, W. (1988) Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht – Das EFQUIM-Projekt. In: W. Dörfler (Hrsg.): *Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik. Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt. Band 16.* (S. 11-54). Wien: Hölder-Pichler-Temsky.

Petrowski, A. (1977) *Entwicklungspsychologie und pädagogische Psychologie.* Berlin: Volk und Wissen

Piaget, J. (1974a – Erstausg. 1965) *Weisheit und Illusionen der Philosophie*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Piaget, J. (1974b) Lebendige Entwicklung. *Zeitschrift für Pädagogik,* 20, 1-6.

Piaget, J. (2000 – Erstausg. 1947) *Psychologie der Intelligenz*. Stuttgart: Klett-Cotta.

Piaget, J. (2003 – Erstausg. 1981) Meine Theorie der geistigen Entwicklung. In: R. Fatke (Hrsg.): *Jean Piaget. Meine Theorie der geistigen Entwicklung* (S. 39-156). Weinheim: Beltz.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1972) *Die Psychologie des Kindes*. Olten: Walter-Verlag.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1973a) *Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen. Teil I.* Düsseldorf: Pädagogischer Verlag Schwann.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1973b) *Die Entwicklung der elementaren logischen Strukturen. Teil II.* Düsseldorf: PädagogischerVerlag Schwann.

Poincaré, H. (1913) *The Foundations of Science. Science and Hypothesis. The Value of Science. Science and Method.* Lancaster: The Science Press.

Prediger, S. (2008) The relevance of didactic categories for analyzing obstacles in conceptual change. Revisiting the case of multiplication of fractions. *Learning and Instruction, 18(1),* 3-17.

Prediger, S. (2015) Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 643-662). Berlin: Springer.

Raatzsch, R. (2008) *Ludwig Wittgenstein zur Einführung*. Hamburg: Junius.

Rembowski, V. (2012a) Begriffsbildung – hinter der Mauer? In: M. Ludwig & M. Kleine (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012. Vorträge auf der 46. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 05.03.2012 bis 09.03.2012 in Weingarten. Band 2* (S. 693-696). Münster: WTM.

Rembowski, V. (2012b) The Concept of Concept in Mathematics Education. *ICME-12: Preconference Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, TSG 37: Theoretical Issues in Mathematics Education, Seoul, Korea,* 7112-7121.

Rembowski, V. (2013) Begriffsbildung – „Los von Euklid!“ und wieder zurück? In: A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.): *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 3-62). Hildesheim: Franzbecker.

Rembowski, V. (2014) Begriffsbilder und -konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel? In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 963-966). Münster: WTM.

Rembowski, V. (2015a) Begriffsbilder und -konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel? In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 129-154). Wiesbaden: Springer.

Rembowski, V. (2015b) Concept Image und Concept Definition der Mathematikdidaktik von „Concept Image and Concept Definition in Mathematics“. In: U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrsg.): *Verfügbare digitale Werkzeuge im Mathematikunterricht richtig nutzen. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 23.-25.09.2011 in Soest* (im Druck). Hildesheim: Franzbecker.

Rezat, S. (2009) *Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen.* Wiesbaden: Vieweg + Teubner.

Richter, K. & Schneider, C. (2010) Symmetrien spielerisch erkunden. Freie Arbeit mit integrierter Diagnose und Lerntagebuch. *mathematik lehren, 161,* 22-42.

Rosch, E. (1975) Cognitive Representations of Semantic Categories. *Journal of Experimental Psychology*: *General, 104.3,* 192-233.

Rosch, E. (1977) Human Categorization. In: N. Warren (Hrsg.): *Studies in Cross-cultural Psychology. Volume 1* (S. 1-49). London: Academic Press.

Rosch, E. (1978) Principles of Categorization. In: E. Rosch & B. Loyd (Hrsg.): *Cognition and Categorization* (S. 27-48). New York: Halsted.

Rosch, E. (1983) Prototype Classification and Logical Classification. In: E. Scholnick (Hrsg.): *New Trends in Conceptual Representation: Challenges to Piaget's Theory?* (S. 73-110). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Rosch, E. & Mervis, C. (1975) Family Resemblances: Studies in the Internal Structures of Categories. *Cognitive Psychology, 7,* 573-605.

Rosch, J. (2015) Eine Fallstudie zum Verstehen von Algebra im Mathematikunterricht. In: G. Kadunz (Hrsg.): *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 111-133). Heidelberg: Springer.

Rösken, R. & Rolka, B. (2007) Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast,* 3, 181-204.

Royce, J. (1913) Introduction. In: H. Poincaré: *The Foundations of Science. Science and Hypothesis. The Value of Science. Science and Method* (S. 9-30). Lancaster: The Science Press.

Rubinstein, S. (1973) *Grundlagen der allgemeinen Psychologie.* Berlin: Volk und Wissen.

Sahlgren, M. (2006) *The Word-Space Model. Using distributional analysis to represent syntagmatic and paradigmatic relations between words in high-dimensional vector spaces.* PhD thesis, Department of Linguistics, Stockholm University.

Schacht, F. (2012) *Mathematische Begriffsbildung zwischen Implizitem und Explizitem. Individuelle Begriffsbildungsprozesse zum Muster- und Variablenbegriff. Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts. Band 4.* Wiesbaden: Springer.

Schmidt, R. (2015) Schnitte durch Würfel, Kugel und Kegel. *mathematik lehren, 190,* 26-31.

Schupp, H. (1996) Symmetrisieren durch Iterieren. *Der Mathematikunterricht, 42.2,* 16-19.

Schreiber, A. (2011) *Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung.* Berlin: Logos.

Schwank, I. (1996) Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 28.6,* 168-183.

Schwank, I. (1998) *Kognitive Mathematik.* http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/kognitive-mathematik.htm. (abgerufen: 11.09.2015)

Schwank, I. (2003) Einführung in prädikatives und funktionales Denken. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 35.3,* 70-78.

Seel, G. (1998) Die Einleitung in die Analytik der Grundsätze, der Schematismus und die obersten Grundsätze (A130/B169-A158/B197). In: G. Mohr & M. Willaschek (Hrsg.): *Immanuel Kant. Kritik der reinen Vernunft* (S. 217-246). Berlin: Akademie-Verlag.

Seel, N. (2000) *Psychologie des Lernens.* München: Ernst Reinhardt.

Sjuts, J. (1999) *Mathematik als Werkzeug zur Wissensrepräsentation. Theoretische Einordnung, konzeptionelle Abgrenzung und interpretative Auswertung eines kognitions- und konstruktivismustheoriegeleiteten Mathematikunterrichts. Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik Nr. 35.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Sjuts, J. (2001) Aufgabenstellungen zum Umgang mit Wissen(srepräsentationen). *Der Mathematikunterricht, 47.1,* 47-60.

Skemp, R. (1987) *The Psychology of Learning Mathematics. Expanded American Edition.* Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Stark, J. (2011) *65 Jahre Lambacher Schweizer. Ein Klassiker – immer auf der Höhe der Zeit.* Stuttgart: Klett.

Steinhöfel, W., Reichhold, K. & Frenzel, L. (1977) Zur Behandlung von Begriffen im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule, 15,* 647-654.

Sträßer, R. (2015) Grundbegriffe, Grundvorstellungen und Nutzungen der Geometrie. In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 1-11). Wiesbaden: Springer.

Takaya, K. (2013) *Jerome Bruner. Developing a Sense of the Possible.* Dordrecht: Springer.

Tall, D. (1986) Constructing the Concept Image of a Tangent. *Proceedings of the Eleventh International Conference for Psychology of Mathematics Education, III,* 69-75.

Tall, D. (1999) *Efraim Fischbein, 1920-1998, Founder President of PME. A Tribute.* https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1999b-fischbein-tribute.pdf. (abgerufen 29.09.2015)

Tall, D. (2003) *Concept Image and Concept Definition.* http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/concept-image. (abgerufen: 10.06.2013)

Tall, D. (2006) A Theory of Mathematical Growth Through Embodiment, Symbolism and Proof. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg, 11,* 195–215.

Tall, D. (2007) *A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof.* homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/three-worlds. (abgerufen 11.06.2013)

Tall, D. & Mejia-Ramos, J. (2010) The Long-Term Cognitive Development of Reasoning and Proof. In: G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Hrsg.): *Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives* (S. 137-150). New York: Springer.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151-169.

Textor, M. (2007) Einleitung. In: M. Textor (Hrsg.): *Gottlob Frege. Funktion – Begriff – Bedeutung* (S. IX-XLVI). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Turney, P. & Pantel, P. (2010) From Frequency to Meaning: Vector Space Models of Semantics. *Journal of Artificial Intelligence Research, 37,* 144-188.

Ubuz, B. (Hrsg.) (2011) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Ankara: PME.

Ullmann, P. (2015) Grundvorstellungen zur Schulgeometrie. „Situated Cognition“ in der Geometriedidaktik. In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 13-28). Wiesbaden: Springer.

Van Hiele, P. (1959) *Development and Learning Process. A study of some aspects of Piaget's psychology in relation with the didactics of mathematics.* Groningen: Wolters.

Van Hiele, P. (1986) *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education.* London: Academic Press.

Vehling, R. & Schmidt, G. (2013) Eine Reise durch den Würfel – Eine Objektstudie zur Förderung der Raumanschauung von der Grundschule bis zum Abitur. *Der Mathematikunterricht, 59.3,* 27-38.

Vinner, S. (1982) Conflicts between definitions and intuitions – the case of the tangent. In: A. Vermandel (Hrsg.): *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (S. 24-28). Antwerpen: PME.

Vinner, S. (1991) The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall (Hrsg.): *Advanced mathematical thinking* (S. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989) Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20.4,* 356-366.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980) Concept image and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In: R. Karplus (Hrsg.): *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (S. 177-184). Berkeley: PME.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1982) Basic geometric concepts – definitions and images. In: A. Vermandel (Hrsg.): *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematical Education* (S. 18-23). Antwerpen: PME.

Vohns, A. (2005) Fundamentale Ideen und Grundvorstellungen: Versuch einer konstruktiven Zusammenführung am Beispiel der Addition von Brüchen. *Journal für Mathematikdidaktik, 26,* 52-79.

Vohns, A. (2007) *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips.* Norderstedt: Books on Demand.

Vohns, A. (2010) Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. *Journal für Mathematikdidaktik, 31,* 227-255.

Vollrath, H.-J. (1978) Rettet die Ideen! *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 31.8,* 449-455.

Vollrath, H.-J. (1984) *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett.

Vollrath, H.-J. (1989) Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10,* 3-37.

Vollrath, H.-J. (Hrsg.) (1999) Praktische Winkelmessung – Ein Thema für offenen Mathematikunterricht. *Der Mathematikunterricht, 45.4.*

Vom Hofe, R. (1995) *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte.* Heidelberg: Spektrum.

Vom Hofe, R. (2003) Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren, 118,* 4-8.

Vom Hofe, R. & Fast, V. (2015) Geometrische Darstellungen als Vorstellungsgrundlage für algebraische Operationen am Beispiel der negativen Zahlen. In: M. Ludwig, A. Filler & A. Lambert (Hrsg.): *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik* (S. 43-55). Wiesbaden: Springer.

Von der Bank, M.-C. (2013) Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In: A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.): *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83-124). Hildesheim: Franzbecker.

Von der Bank, M.-C. (2014) Fundamentale Ideen – (Weiter)Entwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung. In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1271-1274). Münster: WTM-Verlag.

Walsch, W. (1977) *Methodik Mathematikunterricht.* Berlin: Volk und Wissen.

Walz, G. et al (2001) *Lexikon der Mathematik. Zweiter Band. Eig bis Inn.* Heidelberg: Spektrum.

Weigand, H.-G. (2009a) Begriffslernen und Begriffslehren. In: H.-G. Weigand (Hrsg.): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 99-122). Heidelberg: Spektrum.

Weigand, H.-G. (2009b) Ziele des Geometrieunterrichts. In: H.-G. Weigand (Hrsg.): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 13-33). Heidelberg: Spektrum.

Weigand, H.-G. & Sträßer, R. (2011) Grußwort der GDM anlässlich der feierlichen Eröffnung des Kompetenzzentrums „Hochschuldidaktik Mathematik" an den Universitäten Paderborn und Kassel, Paderborn, 20.1.2011. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 91,* 53.

Weigand, H.-G. (2015) Begriffsbildung. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S.255-278). Berlin: Springer.

Weis, V. (1970) Aufgaben empirischer Forschung innerhalb der Didaktik der Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1970. Vorträge auf der 4. Bundestagung für Didaktik der Mathematik vom 1.-3. April 1970 in Köln* (S. 216-227). Hannover: Schroedel.

Widdows, D. (2015) *The Semantic Vectors Package.* https://github.com/semanticvectors/semanticvectors/wiki. (abgerufen 01.09.2015)

Widdows, D. & Cohen, T. (2010) *The Semantic Vectors Package: New Algorithms and Public Tools for Distributional Semantics. Proceedings of the Fourth IEEE International Conference on Semantic Computing (IEEE ICSC2010).* http://www.puttypeg.net/papers/. (abgerufen 01.09.2015)

Widdows, D. & Ferraro, K. (2008) *Semantic Vectors: A Scalable Open Source Package and Online Technology Management Application. Proceedings of the Sixth International Conference on Language Resources and Evaluation (LREC 2008).* http://www.puttypeg.net/papers/. (abgerufen 01.09.2015)

Winter, H. (1983) Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik, 4.3,* 175-204.

Winter, H. (1996) Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *DMV Mitteilungen, 2/96,* 35-41.

Wittenberg, A. (1957) *Vom Denken in Begriffen.* Basel: Birkhäuser.

Wittgenstein, L. (1963 – Erstausg. 1921) *Tractatus logico-philosophicus. Logisch-philosophische Abhandlung.* Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1967 – Erstausg. 1953) *Philosophische Untersuchungen.* Frankfurt: Suhrkamp.

Wittmann, E. (1981) *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Braunschweig: Vieweg.

Wittmann, E. (1987) *Elementargeometrie und Wirklichkeit. Einführung in geometrisches Denken.* Braunschweig: Vieweg.

Wörner, D. (2014a) Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie. In: J. Roth & J. Ames (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014* (S. 1327-1330). Münster: WTM-Verlag.

Wörner, D. (2014b) Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – oder Wie groß ist die Antarktis? In: E.-M. Plackner & D. Wörner (Hrsg.): *Grundlagen fördern. Materialien für den Mathematikunterricht 2* (S. 151-186). Hildesheim: Franzbecker.

Wygotski, L. (1985) *Arbeiten zu theoretischen und methodologischen Problemen der Psychologie. Ausgewählte Schriften. Band 1.* Köln: Pahl-Rugenstein.

Lehrplanverzeichnis

Ministerium für Bildung, Familie, Frauen und Kultur (2009) *Kernlehrplan Mathematik Grundschule.* http://www.saarland.de/7309.htm. (abgerufen 18.09.2015)

Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft Saarland (2004) *Achtjähriges Gymnasium. Lehrplan Mathematik für die Klassenstufe 8.* http://www.saarland.de/7050.htm. (abgerufen 22.07.2014)

Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft Saarland (2005) *Achtjähriges Gymnasium. Lehrplan Mathematik für die Klassenstufe 9.* http://www.saarland.de/7050.htm. (abgerufen 22.07.2014)

Ministerium für Bildung und Kultur Saarland. (2014a) *Lehrplan Mathematik Gymnasium Klassenstufe 5.* http://www.saarland.de/7050.htm. (abgerufen 22.07.2014)

Ministerium für Bildung und Kultur Saarland. (2014b) *Lehrplan Mathematik Gymnasium Klassenstufe 6.* http://www.saarland.de/7050.htm. (abgerufen 22.07.2014)

Ministerium für Bildung und Kultur Saarland. (2014c) *Lehrplan Mathematik Gymnasium Klassenstufe 7 – Erprobungsphase.* http://www.saarland.de/7050.htm. (abgerufen 22.07.2014)

Schulbuchverzeichnis

Das Mathematikbuch 5. Ausgabe N. (2008) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Das Mathematikbuch 5. Begleitband. (2008) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Das Mathematikbuch 6. Ausgabe N. (2009) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Das Mathematikbuch 6. Arbeitsheft. Ausgabe N. (2009) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Das Mathematikbuch 7. Ausgabe N. (2010) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Das Mathematikbuch 7. Arbeitsheft. Ausgabe N. (2010) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Das Mathematikbuch 8. Ausgabe N. (2010) Von: W. Affolter et al. Bearbeitet von: I. Behnke et al. Stuttgart: Klett.

Lambacher Schweizer 6. Mathematik für Gymnasien. Rheinland-Pfalz. (2006) Von: M. Baum et al. Bearbeitet von: B. Barzel et al. Stuttgart: Klett.

Lambacher Schweizer 5. Saarland – G8. (2001) Von: A. Schmid & I. Weidig. Bearbeitet von: A. Müller et al. Stuttgart: Klett.

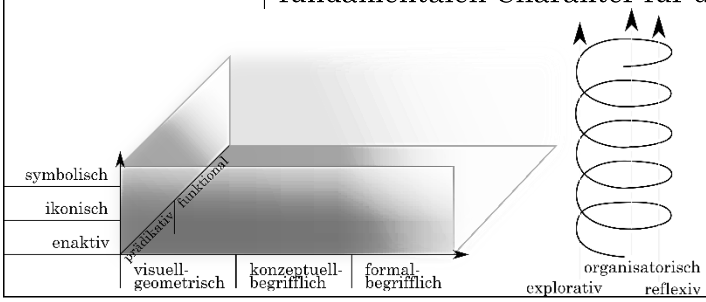
Lambacher Schweizer 6. Saarland – G8. (2002) Von: A. Schmid & I. Weidig. Bearbeitet von: A. Müller et al. Stuttgart: Klett.

Lambacher Schweizer 7. Saarland – G8. (2003) Von: A. Schmid & I. Weidig. Bearbeitet von: A. Müller et al. Stuttgart: Klett.

Mathematik. Neue Wege 5. Saarland. Arbeitsbuch für Gymnasien. (2009) Von: A. Lergenmüller & G. Schmidt. Bearbeitet von: D. Eichhorn. Braunschweig: Schroedel.

Glossar

Begriff	gegeben durch seinen Begriffsinhalt oder -umfang, abstrakt
Bezeichner	der Begriffsnamen oder das Begriffswort
Objekt	repräsentiert den Begriff in (s)einem Anwendungskontext, eine Entität möglicherweise auch abstrakter Natur, die unter den Begriff fällt
Realisat	für die Geometrie ein unter ein Objekt fallender konkreter Repräsentant
Bezeichnung	Zuordnung eines Bezeichners zu einem gegebenen Begriff
Bedeutung	Zuordnung eines Begriffs zu einem gegebenen Bezeichner
Konkretisierung	Zuordnung eines Objekts zu einem gegebenen Begriff
Abstrahierung	Zuordnung eines Begriffs zu einem gegebenen Objekt
Interpretanten	Mittel zum Erschließen eines Begriffs entlang der Relationen der Bedeutung oder der Abstrahierung
Begriffsnetz	spiegelt die Beziehungen eines Begriffs zu neben-, über- und untergeordneten Begriffen wider
Begriffsfeld	besteht aus sich überlagernden und dabei wechselwirkenden Triangulationsbrüchen im semiotischen Dreieck, darstellbar in Form des semiotischen Dreiecksprismas
Begriffsbild	angelehnt an Tall und Vinners Concept Image, zeichnet sich aus durch folgende Eigenschaften: • subjektiv, intuitiv • synthetisch, induktiv gebildet • gebunden an Bezeichner und konkrete Objekte • unscharf • unbegrenzt, sich ständig in Entwicklung befindend • kann affektiv geprägt sein und Handlungen beinhalten
Begriffs-konvention	angelehnt an Tall und Vinners Concept Definition, zeichnet sich aus durch folgende Eigenschaften: • intersubjektiv • analytisch, deduktiv gebildet • unabhängig von Bezeichnern und konkreten Objekten • eindeutig (in Oberklasse und spezifischen Merkmalen) • klar begrenzt • blendet den Menschen aus
Grund-vorstellungen	Vorstellungen und Verständnisse, die geprägt sind durch ihre allgemeine Verbindlichkeit, die Verankerung in der Lebenswelt sowie den fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet, normativ-konstruktiver Charakter, zur Gestaltung von einem auf Grundvorstellungen zielenden Unterricht kann nebenstehendes Modell herangezogen werden



Index