Fundamentale Ideen der Mathematik

Weiterentwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung

Marie-Christine von der Bank

Dissertation

zur Erlangung des Grades
der Doktorin der Naturwissenschaften
der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultäten
der Universität des Saarlandes

Juli 2016

Tag des Kolloquiums:	18.10.2016
Dekan:	Prof. Dr. Frank-Olaf Schreyer
Prüfungsausschuss:	Vorsitzender
	Prof. Dr. Henryk Zähle
	Berichterstatter
	Prof. Dr. Anselm Lambert
	Prof. Dr. Wilfried Herget
	Prof. Dr. Guido Pinkernell
	Akademischer Mitarbeiter
	Apl.-Prof. Dr. Michael Bildhauer

Kurzfassung

Konzeptionen Fundamentaler Ideen der Mathematik drücken seit ihrer erstmaligen Formulierung durch BRUNER 1960 den Wunsch aus, Mathematikunterricht an wenigen zentralen Aspekten von Mathematik zu orientieren, die reichhaltig miteinander vernetzt eine Rekonstruktion von Mathematik im Unterricht ermöglichen. Somit sollen Stofffülle und Stoffisolierung verhindert werden.

Ausgehend von einer Analyse der deutschen mathematikdidaktischen Forschungstradition wird eine Theorie Fundamentaler Ideen vorgestellt, die bereits bestehende Konzepte in verschiedene Ideenkategorien zusammenführt und ergänzt. Sie beschreiben Mathematik sowohl als Prozess durch Prozess-, Tätigkeits- und Schnittstellenideen als auch als Produkt durch Theorie-, Begriffs- und Inhaltsideen. Zudem werden mit den Persönlichkeitsideen Bereiche der Persönlichkeit (individuelle Denkweisen und Einstellungen zum Forschen) in den Blick genommen, die von großen Mathematikern (z.B. POINCARÉ und HADAMARD) als wesentlich für den mathematischen Forschungsprozess herausgestellt wurden.

Die vorgestellte Theorie ist für den Einsatz im Mathematikunterricht zunächst zu komplex. Durch eine unterrichtspragmatische Reduktion werden die Ideenkategorien zusammengefasst und konkretisiert. Somit entsteht als strukturiertes und strukturierendes Analysewerkzeug der Vernetzungspentagraph. Dieser kann zur Analyse von Unterrichtsmaterial auf dort vorhandene oder ausgelassene Fundamentale Ideen und Vernetzungen zwischen ihnen eingesetzt werden.

Abstract

Since Bruner first devoloped the concept of fundamental ideas in 1960, these have always referred to the request that topics in mathematics classroom could be focussing on some central aspects of mathematics that are highly connected and therefore allow the reconstruction of the mathematical field in school education. As a consequence an overload as well as an isolation of contents should be prevented.

Based on an analysis of previous research in mathematical didactics, this research work will present a theory of fundamental ideas that brings together and complements previous concepts. The resulting theory includes both the process side of mathematics with the so-called „Prozess-“ , „Tätigkeits-“ and „Schnittstellenideen“ and the its product side with the so-called „Theorie-“, Begriffs-“ and „Inhaltsideen“. Furthermore the so-called „Persönlichkeitsideen“ refer to the importance of ideas relating to the personality of the researcher (his or her individual mindset and attitudes towards the research) like they were named by prominent mathematical researchers (e.g. POINCARÉ and HADAMARD).

For an implementation on mathematical education in schools, the presented theory is far too complex. Consequently it needs to be reduced and concretised to its core relevant to teaching mathematics. The result is a structured an structuring model, called „Vernetzungspentagraph“, which may serve as an instrument for analysing textbooks of fundamental ideas and connections between them.

Danksagung

An der Entstehung dieser Arbeiten haben vielen Menschen einen Anteil, denen ich zu tiefst danken möchte. Allen voran meinem Doktorvater Professor Dr. Anselm Lambert. Lieber Anselm, vielen Dank für die Chance, die du mir gegeben hast, von dir zu lernen und für die Freiheiten, die du mir gewährt hast, meinen eigenen Weg zu finden. Ich danke dir, für alle Diskussionen, die meinen Blick für eine Mathematikdidaktik, welche die Reichhaltigkeit von Mathematik in den Mathematikunterricht transportiert und die dort agierenden Personen ernst nimmt, geöffnet haben.

Für die Gelegenheit den aktuellen Stand meine Arbeit vorzustellen, möchte ich mich auch bei den Teilnehmenden des Oberseminars Südwest bedanken. Die vielen konstruktiven Rückmelden und Diskussion haben mir stets geholfen, meine Arbeit weiterzuentwickeln. Hier gilt mein besonderer Dank Professor Dr. Lutz Führer, der mir durch kürzere und längere Gespräche und Mailwechsel half, meinen Standpunkt im Labyrinth der Fundamentalen Ideen zu lokalisieren.

Auch möchte ich mich beim gesamten Lehrstuhl-Team in Saarbrücken für alle erhellenden und auch erheiternden Gespräche bedanken. Danke, für die wohltuend entspannte Atmosphäre, in der ich mich auch als „Externe“ ☺ immer heimisch gefühlt habe.

Ich bedanke mich ganz herzlich bei Katharina Kaßeböhmer, Marianne Röhl-Schüller, Dr. Thomas Keich und Patrick Lenz für das Korrekturlesen meiner Arbeit. Danke, für Eure Mühe und die investierte Zeit aber vor allem, vielen Dank für Eure „Schonungslosigkeit“!

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie. Lieber Thomas, ich danke dir dafür, dass du mich immer ermutigt hast, diesen Weg zu gehen und mich vor allem in letzter Zeit zusammengehalten hast.

Liebe Mama, lieber Papa, diese Arbeit ist Euch für all Eure Liebe und Unterstützung gewidmet.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei Schroedel und Schöningh der Westermann Verlagsgruppe sowie den Fotoagenturen Picture-Alliance Frankfurt (www.picture-alliance.com) und aks-images Berlin (www.aks-images.de) für die Abdruckgenehmigung der Auszüge verschiedener Schulbücher und der dort enthaltenen Fotografien bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung i

Abstract iii

Danksagung v

1 Einführender Überblick 1

Teil I Theorien Fundamentaler Ideen 15

2 Standardisierte Fundamentale Ideen? 15
2.1 Kompetenzen und Leitideen – Bildungsstandards in Deutschland 15
2.1.1 Das Entstehungsumfeld der Bildungsstandards 15
2.1.2 Grundlagen der Bildungsstandards im Fach Mathematik 22
2.1.3 Bausteine der Bildungsstandards im Fach Mathematik und deren Problematik als Fundamentale Ideen 27
2.2 Andere Länder – andere Ideen 31
2.3 Andere Zeiten – gleiche Ideen? 33

3 Fundamentale Ideen im historischen Wandel 37
3.1 Ein Anfang: JEROME BRUNER 39
3.2 Elements of mathematics, Basic ideas und Mutterstrukturen 44
3.2.1 Exemplarische mathematische Sichtweisen 45
3.2.2 Mathematische und kognitionspsychologische Ideen 48
3.2.3 Umsetzung der Reformen in der Schule 57
3.3 JEROME BRUNER: Ein Abschluss 68
3.4 Zwischenfazit 71
3.5 Fachdidaktische Diskussion(en) Fundamentaler Ideen 73
3.5.1 Ideen: mehr als nur Strukturen 78
3.5.2 Zwei Ur-Theorien und ihre Rezeptionen 92
3.5.3 Auswahl bereichsspezifischer Kataloge 105
3.5.4 Ein analytischer Zugriff auf Fundamentale Ideen 125
3.6 Zwischenfazit 131

Teil II Eine Theorie für den Mathematikunterricht 135

4 Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen 135
4.1 Fundamental Ideas und Fundamentale Ideen 135
4.2 Neue Ideen im Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik ... 150
4.2.1 Exkurs: Potentiale des erweiterten Spannungsverhältnisses 155
4.2.2 Einordnung der Ideenkategorien in das erweitere Spannungsverhältnis ... 156
4.3 Die Seite Mathematik 161
4.3.1 Die Kategorie der Theorieideen 161
4.3.2 Die Kategorie der Begriffsideen 179
4.3.3 Die Kategorie der Inhaltsideen 186
4.4 Das Zusammenspiel 190
4.4.1 Die Kategorie der Prozessideen 191
4.4.2 Die Kategorie der Schnittstellenideen 194

4.4.3 Die Kategorie der Tätigkeitsideen 197
4.5 Die Seite Welt/Mensch 201
4.6 Zwischenfazit 221

Teil III Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht 223

5 Unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen 223
5.1 Fundamentale Ideen, Vernetzungen und Mathematikunterricht 223
5.2 Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie 227
5.2.1 Herleitung der Knoten 228
5.2.2 Allgemeine Bemerkungen zur Bedeutung der Kanten 242

6 Exemplarische Anwendung des Vernetzungspentagraphen 247
6.1 Fundamentale Ideen als Instrumente zur Analyse von Schulbüchern 247
6.2 Methodische Vorbemerkung 248
6.3 Schulbuchanalyse mit dem Vernetzungspentagraphen 252
6.3.1 Quadratische Gleichungen im Mathematikunterricht 253
6.3.2 Die Schulbuchreihe „Mathematik Neue Wege" 255
6.3.3 Quadratische Gleichungen im Schulbuch „Mathematik Neue Wege 9" 256
6.3.4 Einige Vorschläge zur reichhaltigeren Füllung der Knoten und Kanten 276
6.4 Scaffolding als Zwischenfazit 280

7 Schlussbetrachtungen 283
7.1 Zusammenfassung und Fazit 283
7.2 Einige Möglichkeiten für zukünftige Forschung 287

8 Anhang 291
8.1 Vorwort 291
8.2 Abschnitt 4.1 293
8.3 Abschnitt 4.2 303
8.4 Abschnitt 4.3 313
8.5 Abschnitt 4.4 324
8.6 Check-Up 329

Literatur 331

Abbildungsverzeichnis 345

1 Einführender Überblick

Fundamentale Ideen beschäftigen die (mathematikdidaktische) Forschung seit der Veröffentlichung des Buchs „The Process of Education“ von JEROME BRUNER[1] (Bruner 1960) explizit - und implizit schon viele Jahre länger. Fundamentale Ideen werden dabei beschrieben als zentrale Aspekte von Mathematik, anhand derer Mathematik besonders gut gelernt werden kann und soll, da sie ein valides Bild von Mathematik im Mathematikunterricht widerspiegeln können. BRUNER konkretisierte seine Vorstellungen Fundamentaler Ideen nicht weiter und warf somit für die Mathematik und den Mathematikunterricht eine grundsätzliche (1.) und eine anwendungsorientierte (2.) Frage auf, mit denen sich die Mathematikdidaktik seitdem, meist mit Betonung auf der ersten, beschäftigt:

a) Was sind die Fundamentalen Ideen der Mathematik?
b) Wie können Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht nutzbar gemacht werden?

Die Fragen liegen auf unterschiedlichen Ebenen. Die erste Frage zielt auf eine wissenschaftlich fundierte Entwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen ab. Diese Theorie sollte im Sinne einer logischen Begriffsbildung klären, was unter einer Fundamentalen Idee zu verstehen ist. Zum anderen sollte diese Theorie konkrete Beispiele solcher als fundamental erachteter Ideen liefern. Hier geht es also um mathematikdidaktische Grundlagenforschung.

Die zweite Frage zielt auf angewandte Forschung ab. Im Sinne, dass Mathematikdidaktik - mit den Worten von ERICH WITTMANN - eine „design science“ ist, gilt es, Konzepte zu entwickeln, die im Mathematikunterricht Anwendung finden können. Für Fundamentale Ideen bedeutet dies konkret: Eine am wissenschaftlichen Diskurs gemessene Theorie Fundamentaler Ideen gilt es unterrichtspragmatisch zu reduzieren und somit Möglichkeiten zu schaffen, sie im Mathematikunterricht einzubringen.

Die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ist, auf beide Fragen zu antworten und somit sowohl ein theoretisch motiviertes als auch ein unterrichtspragmatisches Modell Fundamentaler Ideen in den mathematikdidaktischen Diskurs einzubringen.

Angeregt wurde diese Arbeit durch den hohen Stellenwert, der aktuell einer Orientierung an Fundamentalen Ideen auf bundesdeutscher Ebene zugesprochen wird. Sie strukturieren (in ausgedünnter Gestalt) seit 2003 als sogenannte „Leit-

[1] In der vorliegenden Arbeit ist bei der Erstnennung eines Autors dessen Vor- und Nachname genannt. Zur besseren Lesbarkeit wird bei allen weiteren Nennungen auf den Vornamen verzichtet.

ideen“ und „Kompetenzen“ die bundesweit verbindlichen Bildungsstandards im Fach Mathematik (KMK 2003).

Ein Vergleich der inhaltlichen Leitideen und allgemeinen Kompetenzen der Bildungsstandards mit den Fundamentalen Ideen, wie sie traditionell in der Mathematikdidaktik diskutiert werden, zeigt schnell, dass erstgenannte wichtige Aspekte von Mathematik und des Mathematiktreibens ausblenden. Beispielsweise fehlen in den bundesdeutschen Bildungsstandards mathematische Begriffe und einige innermathematische Tätigkeiten. Auch die im Rahmen der vorliegenden Arbeit sogenannten „Nichtkognitiven“ Aspekte von Mathematik wie Kreativität und Intuition bleiben unberücksichtigt. Kapitel 2 der vorliegenden Arbeit liefert einen Überblick über die Bausteine und Konzeption der deutschen Bildungsstandards. Kontrastiert werden diese dann mit ihrem österreichischen Pendant, welches den Bereich mathematischer Begriffe explizit berücksichtigt und zumindest implizit auch „Nichtkognitive“ Bereiche wie Kreativität inkludiert. Dass auch deutsche Curricula[2] Mathematik schon breiter verankert hatten, zeigt ein Blick in die Preußischen Lehrpläne von 1925. Im Zeichen der Meraner Reform sprechen sie einer Orientierung des Mathematikunterrichts an zentralen Aspekten von Mathematik eine entscheidende Bedeutung zu.

Bezugnehmend auf die aktuellen Bildungsstandards entstanden einige Arbeiten, welche die Reichhaltigkeit der deutschen mathematikdidaktischen Forschungstradition zur Theorie Fundamentaler Ideen nutzen, um Auslassungen in den bundesdeutschen Leitideen und Kompetenzen aufzuzeigen. Beispielsweise legte ANDREAS VOHNS 2007 seine Dissertation vor, in der er die Leitideen und Kompetenzen auf ihre Wirksamkeit als Fundamentale Ideen untersuchte und einen ersten Anstoß zur Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen hin zur Analyse von konkreten Unterrichtsinhalten mittels Fundamentaler Ideen gab. Dabei sah er zum einen die Leitideen der KMK als Fundamentale Ideen an und ergänzte zum anderen seine Ideenkollektion mit weiteren Ideenkandidaten, die er der fachdidaktischen Tradition entnahm. VOHNS eröffnete damit eine Möglichkeit, Fundamentale Ideen für die Unterrichtsgestaltung zu nutzen, und gab somit einen Impuls zur Beantwortung der zweiten oben gestellten Frage. Auch ganz aktuell beschäftigt er sich mit der Thematik Fundamentaler Ideen und veröffentlichte im Journal für Mathematik-Didaktik einen Übersichtsartikel, welcher den aktuellen Forschungsstand zur Thematik der Fundamentalen Ideen repräsentieren soll (Vohns 2016) – der ob des beschränkten Platzes in einer Zeitschrift jedoch Lücken aufweist.

---

[2] Mit diesem Bezeichner ist in der vorliegenden Arbeit die Gesamtheit von institutionalisierten Curricula, Lehrplänen, Richtlinien etc. für den Mathematikunterricht gemeint. Der Bezeichner Curriculum wurde gewählt, da er im Forschungsumfeld Fundamentaler Ideen gängig ist.

Auch in seinen Arbeiten zeichnen die verwendeten Fundamentalen Ideen noch kein umfängliches Bild von Mathematik für und im schulischen Unterricht ab. Beispielweise fehlen dort weiterhin „Nichtkognitive“ Aspekte. Dies ist u.a. auf die bei VOHNS ausgelassene Diskussion des philosophisch geprägten Begriffs der englischen „idea“, wie ihn BRUNER zur Definition von „fundamental ideas“ benutzte (s.u.), zurückzuführen.

Diese aktuellen Akzentuierungen Fundamentaler Ideen in der mathematikdidaktischen Forschung und bei der Planung und Gestaltung von Curricula, welche die angerissenen Probleme beinhalten, machen eine erneute, weiter vertiefende Auseinandersetzung mit der Thematik der Fundamentalen Ideen lohnenswert. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Entwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen, die unterrichtsrelevante Aspekte von Mathematik enthält und in der bereits bestehende Theorien Fundamentaler Ideen diskursiv aufgehoben sind. Die Synthese von bereits vorhandenen, sich gegenseitig ergänzenden Theorien macht die hier ausgearbeitete Theorie ganzheitlicher und auch reichhaltiger als bisherige Theorien Fundamentaler Ideen.

Zur Absicherung der hier vorgestellten Theorie Fundamentaler Ideen dienen methodisch - in den Worten von SUSANNE PREDIGER - „Vernetzung und Argumentation“ statt „Empirie“. PREDIGER hält zum Verhältnis beider theoriebildender Prozesse in einem Handbuchbeitrag fest:

> Theoriebildung umfasst [...] nicht nur empirische Arbeiten, sondern bedient sich auch der geisteswissenschaftlichen Methoden der Hermeneutik, Geschichte, Mathematik und der Epistemologie. Dabei wird (trotz der gängigen Bezeichnung *Analyse*) nicht nur analysiert, denn es werden insbesondere auch neue Gegenstände geschaffen, also restrukturierend *konstruiert* [...]
>
> (Prediger 2015, S. 655-656)[3]

Zur Theoriebildung in der vorliegenden Arbeit wird also weitestgehend hermeneutisch vorgegangen durch reflektierende, diskutierende und integrierende Zusammenführung bereits bestehender Arbeiten. Dabei werden Arbeiten zu Fundamentalen Ideen und allgemein dem Ideenbegriff aus den Bereichen Mathematik und Mathematikdidaktik sowie Philosophie und Kognitionspsychologie berücksichtigt. Die somit entwickelte Theorie stellt in PREDIGERs Einteilung sodann eine „Vernetzung bestehender Theorien durch Integrieren, Synthetisieren oder Kombinieren von Theorieelementen“ dar (Prediger 2015, S. 657).

In der vorliegenden Arbeit wird daher zunächst die Forschungstradition in ihrer historischen Entwicklung aufgearbeitet (Kapitel 3). Zunächst werden die kognitionspsychologischen Arbeiten von BRUNER und JEAN PIAGET. Vor allem die Arbeit von PIAGET, in der er kognitionspsychologische Strukturen mit dem mathe-

[3] Alle textlichen Markierungen innerhalb von Zitaten sind den jeweiligen Originalen entnommen.

matischen Gruppenbegriff beschrieb, hatte Einfluss auf die Vorstellung Fundamentaler Ideen. Die Gleichsetzung kognitionspsychologischer und mathematischer Strukturen, in denen die Fundamentalen Ideen der Mathematik gefunden zu sein schienen, war eine Ursache der Einführung der Strukturmathematik ab Mitte der 1960er Jahre in den Schulen. Dabei kann konstatiert werden, dass zunächst abstrakte mathematische Begriffe wie beispielsweise „Menge, Struktur und Abbildung“[4] als Fundamentale Ideen angesehen wurden und mit dieser Legitimierung Einzug in den Mathematikunterricht fanden.

Als Gegenströmung zu dieser Entwicklung sind die, ab Mitte der 1970er bis in die Mitte der 1980er veröffentlichten, mathematikdidaktischen Arbeiten zum Thema Fundamentale Ideen zu charakterisieren. Sie stellten vornehmlich mathematische Tätigkeiten statt mathematischer Strukturen als fundamental heraus und nutzen Fundamentale Ideen als Mittel zur Abkehr von der Strukturmathematik.

In diesem Zuge entstehen Arbeiten, die den Begriff der Fundamentalen Ideen systematisch im Sinne einer logischen und prototypischen Begriffsbildung erschließen. Diese beiden Prozesse beeinflussen sich wechselseitig und präzisieren somit einerseits den Begriff der Fundamentalen Ideen und andererseits, welche Erwartungen an Fundamentale Ideen in Bezug auf den Mathematikunterricht gestellt werden. Im Mathematikunterricht sollen Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip für Unterrichtsinhalte dienen und somit zur Bekämpfung von Stofffülle und -isolation beitragen.

Im Sinne der Einteilung mathematikdidaktischer Theoriebildung von PREDIGER (Prediger 2015) hat die Theoriebildung Fundamentaler Ideen, wie sie in der Mathematikdidaktik Tradition hat, demnach normative und präskriptive Funktion, indem sie das Ziel der Bekämpfung von Stofffülle und –isolation für den Mathematikunterricht begründet festlegt und Fundamentale Ideen als Mittel zur Erzielung von Stoffbündelung und –vernetzung entwickelt.

Zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen geben die meisten Arbeiten einen Katalog mit Kriterien an, die Fundamentale Ideen erfüllen müssen. Auffällig dabei ist, dass sich diese Kriterien auf Vernetzungen beziehen. Von Fundamentalen Ideen wird verlangt, dass sie Vernetzungen zwischen mathematischen Inhalten untereinander, zwischen mathematischen Inhalten und deren Genese und zwischen Mathematik und Alltagswelt ermöglichen. Fundamentale Ideen

[4] Diese Begriffe werden von HANS GEORG STEINER als für den Mathematikunterricht wesentlich herausgestellt (Steiner 1964/65). Wenn diese in der vorliegenden Arbeit als Schlagworte für die Neuerungen während der Phase der Strukturmathematik genannt werden, sind stets auch andere Aspekte wie die Mutterstrukturen der BOURBAKI-Gruppe und weitere zentrale Begriffe wie beispielsweise Aussageformen und Gruppen sowie logisch-deduktive Folgerungen mitgedacht. Vgl. Kapitel 3.

bilden demnach einen Kern von Mathematik, aus dem die ganze Breite dieser Wissenschaft bedeutsam rekonstruierbar ist.

Herrscht auf Seiten der logischen Begriffsbildung noch weitestgehend Einigkeit über die Definition Fundamentaler Ideen, so differieren die genannten Prototypen der einzelnen Autoren stark. Diese Tatsache ist sicherlich auch einem „kollektiven“, dem historischen Kontext geschuldeten, wissenschaftlichen und bildungspolitischen Zeitgeist geschuldet, da die einzelnen Arbeiten teilweise durch Jahrzehnte zeitlich getrennt sind. So betonen Arbeiten aus der Zeit der Strukturmathematik eher abstrakte mathematische Begriffe, während aktuellere Arbeiten, die im Zuge der Kompetenzorientierung entstanden sind, eher mathematische Tätigkeiten als fundamental erachten.

Aber eine gemeinsame Entstehungszeit ist keine notwendige Bedingung für Ideengleichheit. Betrachtet man nämlich zwei wegweisende Arbeiten aus den 1980er Jahren, so fällt auf, dass diese ebenfalls sehr unterschiedliche Ideenkataloge entwickeln. Gemeint sind die Arbeiten von ALFRED SCHREIBER in Zusammenarbeit mit PETER BENDER (Bender/Schreiber 1985) und die Arbeiten von FRITZ SCHWEIGER (Schweiger 1982). Sie geben folgende Ideen als Prototypen für Fundamentale Ideen an.

(Bender/Schreiber 1985)	(Schweiger 1982)
Prozeduren: Exhaustion, Iteration, Reduktion, Abbildung, Algorithmus *Eigenschaften*: Quantität, Kontinuität, Optimalität, Invarianz, Unendlich *Komponenten von Begriffsbildungsprozessen*: Ideation, Abstraktion, Repräsentation, Raum, Einheit	Linearisierung, einfache Strukturen, Bifurkation, Ähnlichkeit, Stabilität, Unabhängigkeit von Störungen, Kraft des Formalen, Erweiterndes Umdefinieren, Dualität

Abbildung 1 Vergleich der Universellen Ideen aus (Bender/Schreiber 1985) mit den Fundamentalen Ideen aus (Schweiger 1982)[5]: Prototypenkataloge mit und ohne Kategorisierung

Die Unterschiedlichkeit verdeutlicht, dass Kataloge Fundamentaler Ideen stets auch eine individuelle Note tragen können. In ihnen kommt somit immer auch zum Ausdruck, welche Aspekte von Mathematik für den jeweiligen Autor und für mögliche Anwendungssituationen, für die der Katalog formuliert wurde, besonders bedeutsam sind.[6]

[5] Da in der vorliegenden Arbeit Tabellen und Graphiken gleiche Ziele verfolgen, werden sie gemeinsam als Abbildungen bezeichnet und in einem Verzeichnis zusammengefasst.

[6] BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER formulieren ihre Kataloge zwar für die gesamte Mathematik, fokussieren allerdings unterschiedliche Teilgebiete. BENDER/SCHREIBER beziehen sich auf die

Mit der in der vorliegenden Arbeit verfolgten Zielsetzung der Entwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen, die unterrichtsrelevante Aspekte von Mathematik breiter fasst als bisherige Theorien, scheint es kaum sinnvoll, einen weiteren stark reduzierten Katalog Fundamentaler Ideen vorzulegen. Stattdessen wird die Theorie Fundamentaler Ideen als eine Brücke zwischen der Wissenschaft Mathematik und dem Schulfach Mathematik angesehen. Im Mathematikunterricht sollen Fundamentale Ideen der begründeten und begründbaren Stoffauswahl dienen, um, wie gefordert, der Stofffülle und -isolation vorzubeugen.

Damit ist zunächst zu klären, was in dieser Arbeit unter Fundamentalen Ideen verstanden werden soll und welche Aspekte von Mathematik zu berücksichtigen sind (Kapitel 4). Das hier vorherrschende Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen lässt sich wie folgt zusammenfassen:

Fundamentale Ideen sind für die Mathematik und das Mathematiktreiben zentrale Aspekte wie Inhalte, Handlungen und Einstellungen. Ihr Zusammenspiel macht das Wesen der Mathematik aus. Im Mathematikunterricht dienen sie der begründeten Stoffauswahl und der Vernetzung von unterrichtsrelevanten Aspekten von Mathematik wie Inhalten, Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und den Aspekten, welche die Person des Schülers betreffen.

Dieses Verständnis Fundamentaler Ideen ist weiter als die bisherigen Begriffsexplikationen, da es neben Inhalten und Handlungen, die sich beispielsweise auch schon bei BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER finden, auch Einstellungen umfasst. Die Öffnung des Begriffs ist aus der Intention BRUNERs, die sich hinter dem durch die Philosophie des Pragmatismus von CHARLES SANDER PEIRCE und JOHN DEWEY geprägten englischen Begriff „idea“ verbirgt, hergeleitet. Dazu wird in der vorliegenden Arbeit gezeigt, dass der deutsche Begriff der Idee sich nur unzureichend mit dem englischen „idea“ deckt. Diese Begriffsdifferenz ist bis heute in der deutschen mathematikdidaktischen Forschung kaum berücksichtigt worden.

Durch diese Öffnung des Begriffs Fundamentale Idee ist eine breitere Aufnahme von Aspekten, die für Mathematik ganz wesentlich sind, in der bisherigen Forschungstradition allerdings noch nicht in ihrer Gesamtheit diskutiert wurden, angestrebt. Eine knappe Übersicht solcher Aspekte legte 2012 ANSELM LAMBERT - in einem Diskussionsanstoß - vor. Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte

Geometrie und SCHWEIGER nennt die Ideen „Bifurkation“ und „Unabhängigkeit von Störungen“ mit Blick auf die Analysis.

Theorie Fundamentaler Ideen nutzt das von ihm vorgelegte Fragment als Basis. Es gliedert sich in folgende Ideenkategorien[7]:

- *Inhaltsideen*: Zahl, Maß, Raum und Form, Funktion, Zufall;
- *Schnittstellenideen*: Kommunizieren, Modellieren, Argumentieren, Problemlösen, Darstellen, Fragen;
- *Begriffsideen*: Objekte, Netze, Ordnungen, Charakterisierungen;
- *Prozessideen*: Strategien, Heuristiken, Handlungen;
- *Tätigkeitsideen*: Approximieren (insbesondere Optimieren), Algorithmisieren, Dualisieren, Vernetzen, Ordnen, Strukturieren, Formalisieren, Exaktifizieren, Passen, Verallgemeinern, Deduzieren;[8]
- *Theorieideen*: Gebiete, Erkenntnis- und Begründungskulturen, Systeme und Sprache.

Weiterhin betont LAMBERT, dass besonders der Bereich „Nichtkognitiver“ Ziele des Mathematikunterrichts von aktuellen Theorien Fundamentaler Ideen „nur unzureichend erfasst“ wird - insbesondere fordert er, eine mathematiktypische Beharrlichkeit in den Ideenkatalog aufzunehmen und somit in einer Theorie Fundamentaler Ideen zu etablieren (Lambert 2012a, S. 4).[9] In der vorliegenden Arbeit wird die Ideenkategorie der Persönlichkeitsideen obigem Ideenkatalog hinzugefügt, die Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und eben auch Beharrlichkeit umfasst.[10] Obwohl die genannten Ideenkategorien auf den ersten Blick in der Diskussion Fundamentaler Ideen neu scheinen, werden sie schon länger (häufig implizit) mitgedacht. Auch die Persönlichkeitsideen lassen sich in der Tradition der Ideenforschung nachweisen. Eine Ausarbeitung und theoretische Fundierung des obigen Ideenkatalogs wird in Kapitel 4 vorgenommen. Diese stellt den Beitrag der vorliegenden Arbeit zum wissenschaftlichen Diskurs im Sinne der Beantwortung der ersten oben gestellten Frage dar.

---

[7] Da die von LAMBERT vorgeschlagenen Kategorien zu einer Gliederung des Oberbegriffs „Fundamentale Ideen“ beitragen sollen, wird der Bezeichner „Idee“ in der vorliegenden Arbeit auch für die Unterkategorien verwendet.

[8] Dies sind eher innermathematische Tätigkeiten, die in der Auflistung von mathematisch nach meta-mathematisch geordnet sind.

[9] „Nichtkognitive“ Ziele des Mathematikunterrichts werden zwar in Präambeln einiger Lehrpläne erwähnt, in bildungspolitischen Debatten jedoch häufig ausgeblendet. Diese Problematik wird in (Führer 2009, besonders S. 26 ff.) kritisch diskutiert. Zwei Beispiele für die explizite Berücksichtigung von Aspekten wie „Kreativität“ bzw. „Anstrengungsbereitschaft“ und „Ausdauer“ sind die saarländischen kompetenzorientierten Lehrpläne für das 8-jährige Gymnasium und der saarländische Lehrplan für die Fachoberschule (MBK 2014, S. 8) bzw. (MBKW 2006, S. 3). Im österreichischen Pendant der deutschen Bildungsstandards wird Mathematik ebenfalls als „Schule des Denkens, die Phantasie anregt und Kreativität fördert“ beschrieben (BMUKK 2004, S. 1).

[10] Die hier genannten Persönlichkeitsideen weichen von denen in (von der Bank 2013) ab. Damals wurden Interesse, Bereitschaft und Freude, Werthaltung, Kreativität und Geschmack sowie Motorik genannt. Diese Veränderung ist als Weiterentwicklung der Theorie Fundamentaler Ideen im Wechselspiel ihrer logischen und prototypischen Begriffsbildung zu verstehen, vgl. Kapitel 4.5.

Als zweite wesentliche Frage wurde oben aufgeworfen, wie Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht wirksam werden können. In dieser Forschungsrichtung liegen neben der schon erwähnten Dissertation von VOHNS nur sehr vereinzelt weitere explizite Vorschläge vor, die sich zumeist auf die unterrichtliche Ausarbeitung einer Fundamentalen Idee beziehen.[11] SCHREIBER bemerkt 2011 in einem Rückblick auf die Rolle Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht:

> Die nun schon vor einem halben Jahrhundert begonnene Diskussion um Bruners Prinzip der „fundamentalen Ideen“ hat, wenn überhaupt, letztlich wohl nur bescheidene Auswirkungen auf den tatsächlichen Mathematik-Unterricht gezeigt. Wir treffen gegenwärtig im gesellschaftlichen und bildungspolitischen Umfeld, in der Pädagogik und in den Didaktiken der Schulfächer auf ganz anders ausgerichtete Kräfte und Tendenzen und *last but not least* in der Lehrerschaft auf praktische Sorgen und Nöte, angesichts derer ein so diskursives und ideenarchäologisch tief grabendes Unternehmen zwangsläufig in den Hintergrund tritt.
>
> (Schreiber 2011, S. 91)

Will man sich mit dieser pessimistischen Sichtweise nicht zufrieden geben, ergibt sich aus ihr eine weitere Frage: Warum ist es bisher nicht gelungen, Fundamentale Ideen in den Mathematikunterricht zu transportieren?

SCHREIBER selbst gibt implizit eine Antwort, die auch in der vorliegenden Arbeit vertreten wird: Es ist bisher nicht gelungen, komplexe Theorien Fundamentaler Ideen unterrichtspragmatisch zu reduzieren, um aus ihnen ein praxisnahes, händelbares Modell zu gewinnen und dieses zusätzlich methodisch so transparent aufzubereiten, dass es von Lehrern[12] genutzt werden kann.

Der Diskursbeitrag der vorliegenden Arbeit zur Beantwortung der zweiten oben gestellten wesentlichen Frage besteht nun darin, die hier entwickelte Theorie Fundamentaler Ideen auf einen unterrichtspragmatischen Kern zu reduzieren und danach die Nutzbarkeit des somit entstandenen Modells im Sinne einer prototypischen Anwendung praxisnah zu demonstrieren.

Dazu wird in Kapitel 5 zunächst der „Vernetzungspentagraph“ entwickelt, der als Analysewerkzeug für den Mathematikunterricht konzipiert ist und, als didaktische Brille des Lehrers, zur Untersuchung vorhandener Unterrichtsmaterialien (beispielsweise in Schulbüchern) auf dort enthaltene Fundamentale Ideen und Vernetzungen zwischen ihnen genutzt werden kann. Er stellt die angesprochene unterrichtspragmatische Reduktion der durch die Ideenkategorien ent-

---

[11] Exemplarisch sei auf die Ausarbeitung der Fundamentalen Idee „Optimieren“ in (Schupp 1992) verwiesen.

[12] Im Rahmen dieser Arbeit wird zur besseren Lesbarkeit im Sinne des generischen Maskulinums stets nur ein Geschlecht genannt. Die Autorin weist darauf hin, dass an den jeweiligen Stellen stets an alle Geschlechter gedacht wurde.

standenen Theorie dar. Als unterrichtspragmatischen Kern dieser Theorie bringt die vorliegende Arbeit

Inhalte – Aktivitäten – Repräsentationen – (historische) Genese – Person

in den Diskurs ein. Die Reduktion vollzieht sich durch Kombination, Zusammenfassung und Konkretisierung der einzelnen Ideen zu den Knoten des folgenden Vernetzungspentagraphen.

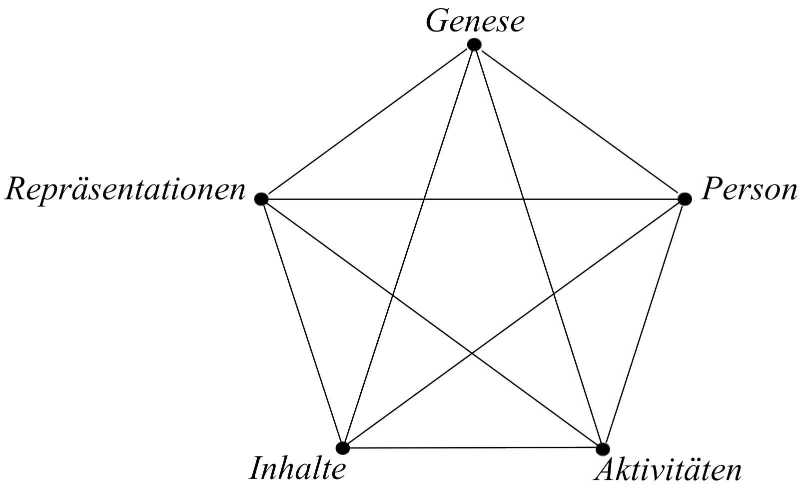


Abbildung 2 Der Vernetzungspentagraph

Nach dieser Reduktion umfasst der Knoten „*Inhalte*“ Objekte, Ordnungen, Charakterisierungen und Beweise aus den Gebieten der Schulmathematik (Analysis, Algebra und Arithmetik, Geometrie, Stochastik und Diskrete Mathematik[13]). Der Knoten „*Aktivitäten*“ fasst Schnittstellenideen, Tätigkeitsideen und Konkretisierungen von Prozessideen zusammen. Darstellungsformen von Inhalten und Objekten und die damit verbundenen Aspekte von Begriffsbildung fallen unter den Knoten „*Repräsentationen*“. Historische Entwicklungen von Inhalten und Darstellungsformen, aber auch historisch bedingte Sprachausprägungen und Begründungskulturen werden im Knoten „*Genese*“ berücksichtigt. Im Knoten „*Person*“ sind die Persönlichkeitsideen aufgehoben.

Zudem birgt der Vernetzungspentagraph, wie sein Bezeichner schon andeutet, das Potential, Vernetzungsmöglichkeiten im Mathematikunterricht aufzuzeigen. Mithilfe der Kanten des Vernetzungspentagraphen kann analysiert werden, welche Vernetzungen ein Unterrichtarrangement zwischen den einzelnen Knoten

[13] Diskrete Mathematik konnte sich zwar noch nicht dauerhaft im Mathematikunterricht etablieren, diskrete Inhalte spielen aber im Mathematikunterricht dennoch eine Rolle beispielsweise bei diskreten Approximationsalgorithmen wie dem HERON-Verfahren. Sie sollten an solchen Stellen auch bewusst thematisiert werden. Um diskrete Inhalte schon bei der unterrichtsvorbereitenden Planung berücksichtigen zu können, wird die Diskrete Mathematik in der vorliegenden Arbeit ebenfalls zu den Gebieten der Schulmathematik gezählt und im Knoten „Inhalte“ des Vernetzungspentagraphen integriert.

liefert. Je mehr Kanten sich dabei füllen, umso vielfältiger sind die einzelnen Aspekte von Mathematikunterricht miteinander verwoben.

Der Vernetzungspentagraph stellt den Diskursbeitrag der vorliegenden Arbeit zur Entwicklung eines praxistauglichen Modells aus einer Theorie Fundamentaler Ideen dar, dessen Reichweite aber noch praxisorientiert auszuloten ist.

Da Unterrichtsrealität (besonders im Mathematikunterricht) inhaltlich, didaktisch und methodisch durch Schulbücher beeinflusst ist, wird der Vernetzungspentagraph im Sinne einer prototypischen Anwendung in Kapitel 6 als didaktische Brille zur Analyse eines Schulbuchkapitels genutzt.

Um die Wirkweise des Vernetzungspentagraphen so zu erläutern, dass er künftig auch von Lehrern und Lehramtsstudierenden eingesetzt werden kann, wird zu seiner Demonstration auf die Methode „Cognitive Apprenticeship" von ALLAN COLLINS, JOHN SEELY BROWN und SUSAN NEWMAN zurückgegriffen (Collins/Brown/Newman 1989). Dabei handelt es sich um eine Art der Wissensweitergabe, die Elemente einer beruflichen Ausbildung auf kognitive Lernprozesse überträgt. Aus der beruflichen Bildung übernehmen die Autoren u.a. die Herangehensweise eines Meisters („expert") an ein Problem, die vom Lehrling („noviz") zunächst ganz genau, auch unter Anweisungen des Meisters, beobachtet wird. Dieser Prozess, von den Autoren „modelling" genannt, wird auch hier genutzt. Dabei gilt es, den Vernetzungspentagraphen begründet anzuwenden, in dem Sinne, dass leitende Gedanken und verwendete Strategien offengelegt werden. Somit werden die mit Hilfe des Vernetzungspentagraphen gewonnen Erkenntnisse einem wissenschaftlich praxisorientierten Diskurs zugänglich gemacht.

Inhaltlich wird er am Beispiel des Kapitels zum Thema „Quadratische Gleichungen" im Schulbuch „Mathematik Neue Wege 9 Arbeitsbuch für Gymnasien" des Schroedel Verlags genutzt. Diese Schulbuchreihe stellt ein interessantes Einsatzfeld für die Anwendung des Vernetzungspentagraphen dar, da sie durch die aktuelle „Neue Aufgabenkultur" geprägt wurde und diese wiederum mitgeprägt hat.

Die Analyse erfolgt dabei zweifach. Zum einen „füllen" sich die Knoten des Vernetzungspentagraphen mit den im Schulbuch vorhandenen Inhalten, Repräsentationen und deren Genese, den angeregten Aktivitäten und den angestrebten Zielen, welche die Person des Schülers betreffen. Zum anderen werden über seine Kanten vorhandene und fehlende Vernetzungen zwischen seinen Knoten sichtbar. Sind beispielsweise bei einem inhaltlichen Schwerpunkt besonders Aspekte von Begriffsbildung, verschiedene Repräsentationsmodi etc. berücksichtigt, besteht eine Vernetzung von Inhalt und dessen Repräsentation.

Der Vernetzungspentagraph bildet also, der Einteilung von PREDIGER folgend, ein deskriptives Element mathematikdidaktischer Theoriebildung, da er zur differenzierten Wahrnehmung und Beschreibung Fundamentaler Ideen in konkretem Unterrichtsmaterial dient.

Er liefert darüberhinaus auch einen normativ-konstruktiven Maßstab für einen an Fundamentalen Ideen orientierten Mathematikunterricht. Das Anwendungspotential des Vernetzungspentagraphen in dieser Richtung wird zum Abschluss der vorliegenden Arbeit demonstriert, wenn, ausgehend von festgestellten Auslassungen im Schulbuch, Vorschläge zur Gestaltung einer Lernumgebung unterbreitet werden, welche die Knoten des Vernetzungspentagraphen und seine Kanten reichhaltiger füllt.

Zusammenfassend visualisiert folgende Abbildung das Vorgehen der vorliegenden Arbeit.

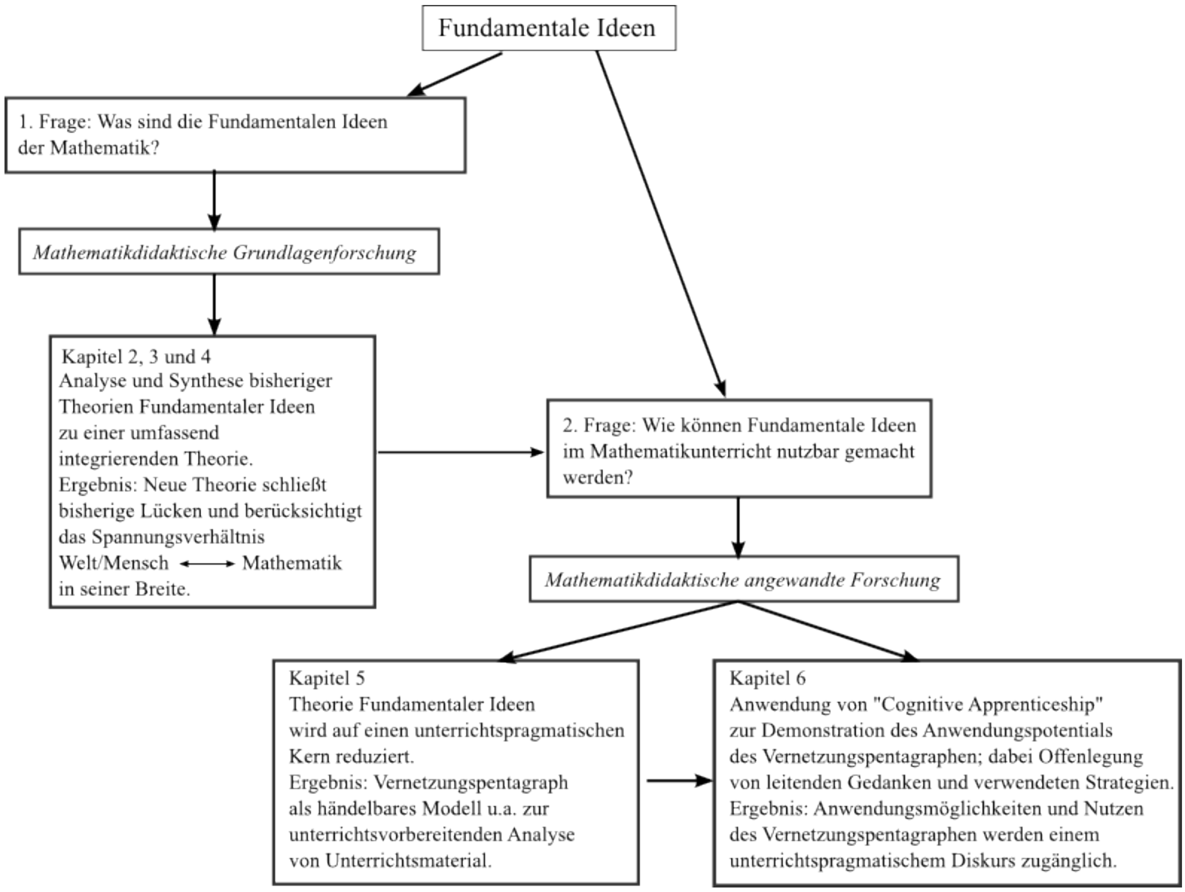


Abbildung 3 Vorgehen der vorliegenden Arbeit

Vorab sollen noch zwei Bemerkungen zur Orientierung innerhalb der vorliegenden Arbeit gegeben werden:

Die erste Bemerkung bezieht sich auf die Analyse[14] der in Kapitel 3 vorgestellten bisherigen Theorien Fundamentaler Ideen und der Zusammenführung der dort

[14] Sofern nicht anders gekennzeichnet, ist in einer Analyse in der vorliegenden Arbeit auch stets eine Synthese inbegriffen.

herausgearbeiteten Aspekte Fundamentaler Ideen in Kapitel 4. Die Thematik der Fundamentalen Ideen ist durch eine Vielzahl an Forschungsarbeiten, deren Aufarbeitung ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist, sehr komplex (vgl. Abbildung 15 auf Seite 76). Die inhaltliche Chronologie der vorliegenden Arbeit lässt sich durch folgendes Diagramm beschreiben, welches dem Leser einen ersten Überblick liefern soll. Für die einzelnen Ideenkategorien ist dabei jeweils dargestellt, in welchen Kapiteln (und somit in welchen Entwicklungszusammenhängen Fundamentaler Ideen) sie implizit bzw. explizit vorkommen. Die Unterscheidung zwischen implizitem bzw. explizitem Auftreten wird durch gestrichelte bzw. durchgezogene Pfeile visualisiert.

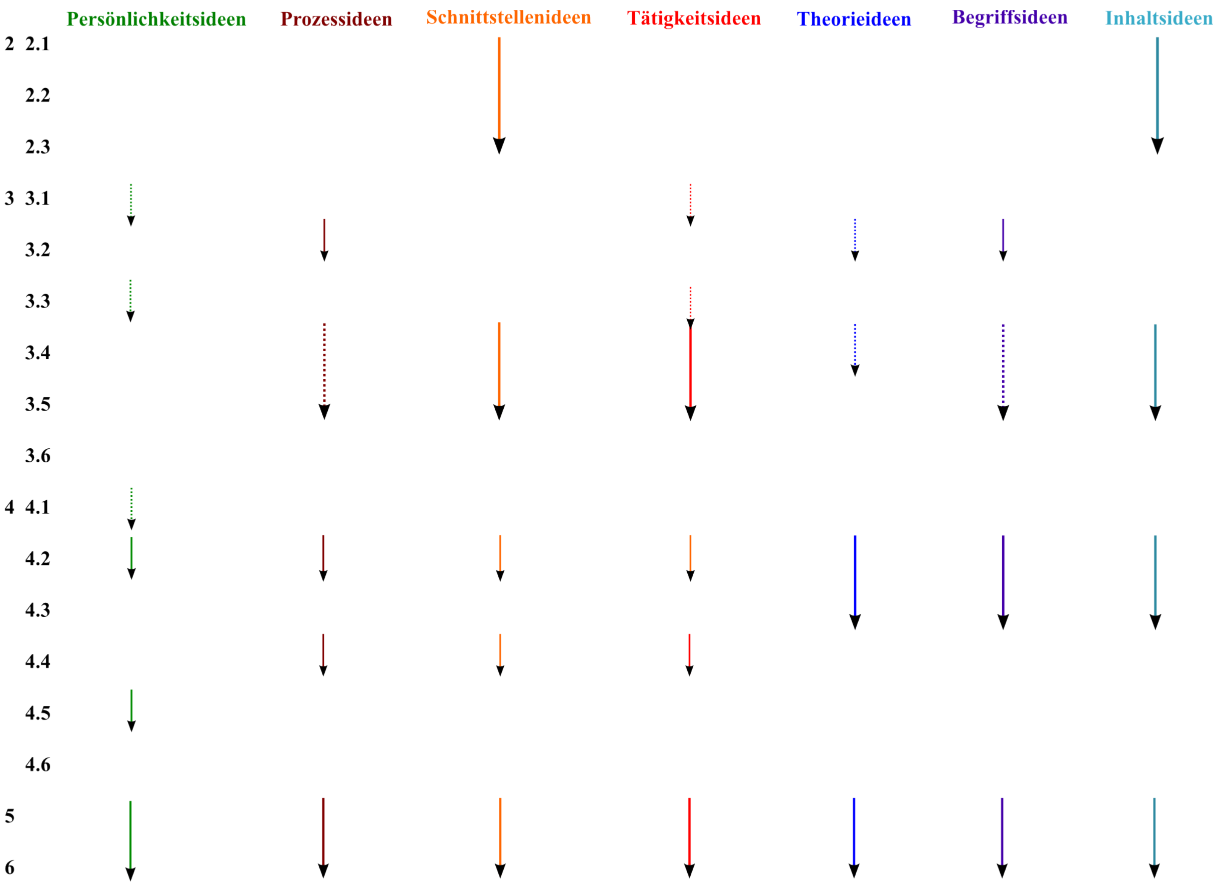


Abbildung 4 Inhaltliche Chronologie der Arbeit[15]

Das Diagramm muss mit gewissen Vereinfachungen auskommen. Kapitel, die nicht markiert sind, enthalten Zusammenfassungen vorheriger Inhalte oder geben einen Ausblick auf Kommendes. Da in Kapitel 3 stets eine Vielzahl von Arbeiten im Verbund analysiert wird, ist eine Zuordnung der Ideenkategorien im Diagramm nicht vollends präzise möglich. Auch bei dem in Kapitel 4 vorgestellten Ideenkatalog gibt es Unschärfen. Der in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Ideenkatalog zeichnet sich gerade dadurch aus, dass die dort enthaltenen Ideen-

[15] Die hier gewählten Farben stehen in keiner inhaltlichen Beziehung zu den in Kapitel 5 und 6 gewählten Farben für die Knoten des Vernetzungspentagraphen.

kategorien stark vernetzt vorkommen. Daher schwingen alle Ideenkategorien im gesamten Kapitel stets mit. Im Sinne des Überblickscharakters des Diagramms werden die einzelnen Ideenkategorien nur in den Kapiteln mit deren expliziter Erläuterung markiert. In den Kapiteln 5 und 6 sind die Ideenkategorien im Vernetzungspentagraphen aufgehoben und schwingen daher alle mit.

Vorab lässt sich schon aus dem Diagramm eine wichtige Information entnehmen. Jede Ideenkategorie besitzt Anknüpfungspunkte in der bisherigen Forschung. Während der nun folgenden ideengeschichtlichen Analyse dienen die Ideenkategorien deshalb als Leitfäden, die in Kapitel 4 zu einer Gesamttheorie zusammengeführt werden.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf das, auf der inneren hinteren Umschlagsseite, eingeklebte Poster. Es enthält einige zentrale Abbildungen, welche die Kapitel der vorliegenden Arbeit strukturieren, inhaltliche Aspekte zusammenfassen oder wichtige Transformationen visualisieren und daher auch beim weiteren Lesen von Bedeutung sind. An den entsprechenden Abbildungen innerhalb der Arbeit findet sich der Vermerk „Poster". In aufgefaltetem Zustand des Posters kann der Leser, bei aufgeschlagener Arbeit, wichtige Graphiken im Blick haben. Die strukturierenden und orientierenden Momente der Graphiken können somit auch beim Weiterblättern vor Augen bleiben.

In diesem Sinne: Eine angenehme Lektüre!

Teil I Theorien Fundamentaler Ideen

2 Standardisierte Fundamentale Ideen?

Zur Zeit wird einer Konzeption des schulischen Fachunterrichts anhand weniger zentral erscheinender Aspekte und somit (für den mathematischen Bereich) der Fokussierung Fundamentaler Ideen wieder eine prominente Rolle zugesprochen. Seit einigen Jahren wird auf bildungspolitischer Ebene eine Orientierung des Unterrichts an Kompetenzen und Leitideen, die zusammen sogenannte Bildungsstandards für den Fächerkanon der Schulen bilden, diskutiert. Für das Fach Mathematik sind zumindest dem Bezeichner nach einige schon früher im fachdidaktischen Diskurs enthaltene Fundamentale Ideen als Leitideen aufgenommen. Bevor konkret auf diese Leitideen und Kompetenzen eingegangen wird (Kapitel 2.1.3), folgt zunächst eine knappte Einordnung der Bildungsstandards im Fach Mathematik als Reaktion auf Ergebnisse deutscher Schüler bei internationalen Schulleistungsuntersuchungen (Kapitel 2.1.1) sowie ein Abriss der allgemeinen Konzeption der deutschen Bildungsstandards und der ihr innewohnenden Problematik (Kapitel 2.1.2). Es folgt ein Vergleich der KMK-Bildungsstandards für das Fach Mathematik mit ihrem österreichischen Pendant, der Lücken in den deutschen Leitideen und Kompetenzen deutlich macht (Kapitel 2.2). Abgeschlossen wird das Kapitel von einem Blick zurück auf die Preußischen Lehrpläne von 1925, in denen sich viele der aktuellen Leitideen und Kompetenzen schon wesentlich vollständiger formuliert als heute fanden (Kapitel 2.3).

2.1 Kompetenzen und Leitideen – Bildungsstandards in Deutschland

2.1.1 Das Entstehungsumfeld der Bildungsstandards

Als Reaktion auf das als unbefriedigend empfundene Abschneiden deutscher Schüler bei den Tests der internationalen Schulleistungsuntersuchungen „Programm for International Student Assessment“ (PISA) hat die KMK 2003 die bundesweit verbindlichen Bildungsstandards verabschiedet. Damit verbunden war ein Prozess weg von einer „Input-Orientierung“, wie sie beispielsweise Lehrpläne in Deutschland traditionell vorgegeben, hin zur „Outcome-Orientierung“ durch festgelegte Standards, die beispielweise am Ende einer Jahrgangsstufe erreicht sein sollen (KMK 2004c, S. 6). Dieser Schritt war laut KMK notwendig, da angloamerikanische und skandinavische Länder, in denen schon Outcome-Orientierung herrscht, bei PISA besser abschnitten als Deutschland.

Dass die KMK somit lediglich einen möglichen Erklärungsfaktor aufgegriffen hat und diesen verabsolutiert, wurde schon mehrfach in der fachdidaktischen Diskussion kritisiert (Vohns 2007, S. 46-47). Weitere mögliche Ursachen für das (vermeintlich) schlechte Abschneiden deutscher Schüler, wie unzureichende

Übersetzungen der Testaufgaben aus dem Englischen und die damit verbundene Benachteiligung der Länder, in denen Englisch keine Landessprache ist, oder länderspezifische Unterschiede in den Curricula, blieben von der KMK unberücksichtigt (vgl. Bender 2004). LUTZ FÜHRER bezeichnet das Vorgehen der KMK als „naturalistischen Kurzschluss", da „aus einer rein deskriptiven Aussage – ohne metaphysische Zutaten - keine präskriptive folgen kann, sprechen die [PISA] Befunde nicht für sich selbst" (Führer 2009, S. 17). Weiter schreibt er, die „aufgabengebundene Performanz der Probanden verrät nur Reaktionen in einem bestimmten organisatorischen Umfeld, zu einer bestimmten Zeit, auf bestimmte Aufgaben und auf unbestimmte systemstrategische Erfordernisse. Sie verrät nicht wirklich, wie es mit der jeweils inneren, in echten Lebenssituationen aktivierbaren mathematischen oder naturwissenschaftlichen Grundbildung steht und insbesondere nicht, was man tun muss, um persönliche ‚literacy' (neudeutsch: Literalität; sinngemäß ungefähr: gelebte Grundbildung) zu bessern, nicht einmal deren Performanz" (Führer 2009, S. 18).

Ungeachtet kritischer Stimmen reagierte die KMK auf die Testergebnisse und vollzog einen inkonsequenten Wechsel von einer Input- zu einer Outcome-Orientierung. Die KMK verortet die deutschen Bildungsstandards als „Mischung aus Inhalts- und Outputstandards" (KMK 2004c, S. 9).

> Bildungsstandards greifen allgemeine Bildungsziele auf und legen fest, welche Kompetenzen die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe an wesentlichen Inhalten erworben haben sollen.
>
> (KMK 2004c, S. 18)[16]

Dabei konzentrieren sich Bildungsstandards auf den Kernbereich eines jeweiligen Faches und decken nicht seine ganze Breite ab. Somit sollen Schulen „Gestaltungsräume für ihre pädagogische Arbeit" geschaffen werden (KMK 2004c, S. 6). Die KMK weist ausdrücklich darauf hin, dass Bildungsstandards zwar normative Leistungserwartungen an Schulen definieren, aber nicht dazu dienen, Lehr- und Lehrsituationen zu standardisieren (KMK 2004c. S. 11).

Diese Trennung von leistungsbezogenen Kompetenzerwartungen und einem offenen Prozess des Lernens stellt eine Diskrepanz zwischen Anspruch und Wirkung der Bildungsstandards dar, auf die im Zusammenhang Fundamentaler Ideen besonders VOHNS hingewiesen hat (Vohns 2007, S. 49 ff.). Da die Bildungs-

---

[16] In der „KLIEME-Expertise", die der KMK als wissenschaftliche Grundlage dienen sollte, war noch von Kompetenzen die Rede, die Schüler „mindestens erworben haben sollen" (Klieme 2007, S. 9). Sie schlug somit die Einführung von Mindeststandards vor. Die KMK entschied sich aus Gründen der zeitlichen Eile bei der Verabschiedung des Beschlusses über die Bildungsstandards allerdings für Regelstandards, da „Mindeststandards erst nach einem längeren Prozess der Erfahrung im Umgang mit Bildungsstandards formuliert werden können" (KMK 2004c, S. 14). In Anbetracht der Reichweite der Auswirkung dieser bundesweit verbindlichen Maßnahmen bleibt HANS-DIETER SILL folgend fraglich, ob dieses Argument überzeugend ist (Sill 2007, S. 415).

standards so angelegt sein sollen, dass ihr Erreichen prinzipiell in standardisierten Tests geprüft werden kann, wird die Qualität von Unterricht an einem Endprodukt (der Schülerleistung) gemessen. Dadurch drohen die Freiräume, welche die KMK Schulen und Lehrern bei der Unterrichtsgestaltung einräumt, zum Lippenbekenntnis zu werden, da sich ein „teaching to the test" einstellen könnte (Vohns 2007, S. 50).

Des Weiteren sind mit dem geforderten Aufgreifen „allgemeiner Bildungsziele" durch die Bildungsstandards[17] Probleme verbunden, die in der Konzeption der angestrebten Überprüfbarkeit durch PISA begründet sind. Sie sollen hier für das Fach Mathematik skizziert werden.[18]

PISA legt im Bereich Mathematik das Konzept der „mathematical literacy" (mathematische Grundbildung) zugrunde, welche Folgendes beinhaltet.

> Die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die die Mathematik in der Welt spielt, fundierte mathematische Urteile abzugeben und sich auf eine Weise mit der Mathematik zu befassen, die den Anforderungen des gegenwärtigen und künftigen Lebens einer Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht.
>
> (PISA 2001, S. 23)

Diese Definition mathematischer Grundbildung trägt einen stark pragmatischen Zug, der sich zwar in abgeschwächter Form auch in der deutschen bildungstheoretischen Didaktik (bspw. in HEINRICH WINTERs Begriff der „Umwelterschließung", vgl. (Winter 1996)) findet, allerdings in der deutschen Tradition nur einen Teil des Beitrags von Mathematik zur Bildung ausmacht (Bender 2004, S. 62).[19] Diese Tradition soll daher exemplarisch an den Arbeiten von WINTER, HARTMUT VON HENTIG und LUTZ FÜHRER, die sich auf das Fach Mathematik beziehen, dargelegt werden.

---

[17] THOMAS JAHNKE weist im Bezug zum deutschen Bildungsbegriff darauf hin, dass der Ausdruck „Bildungsstandard" eine rein deutsche Schöpfung ist, und fragt, dem Wortlaut des Begriffs nach, wie Bildung standardisiert werden soll (Jahnke 2007, S. 20). Für die unterschiedliche Verwendung des Begriffs „standard" des amerikanischen NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) und „Standard" der deutschen KMK vgl. (Sill 2007). Abgesehen davon, dass die NCTM Standards im langjährigen wissenschaftlichen Diskurs entstanden sind, wird der englische Begriff „standard" vom NCTM nicht „im Sinne der Angabe von Abschlussniveaus, sondern als Qualitätskriterium für den Mathematikunterricht verstanden" (Sill 2007, S. 411). Konkret sollen die NCTM-„standards" dabei die Qualität von Lehrplänen und Unterrichtsmaterial in Bezug auf die vom NCTM vorgegebene Zielrichtung kontrollieren und somit den Lehrer in diese Zielrichtung führen (Sill 2007, S. 411).

[18] Zu der konstitutionellen Problematik der Einführung der Bildungsstandards vgl. (Sill 2007, S. 398 ff.).

[19] Die KMK ist sich Auslassungen bewusst und verweist auf Bildungsziele von 1973. Dabei bleibt allerdings, wieder die Argumentation VOHNS anführend, fraglich, ob diese Bildungsziele nicht zugunsten einer vermeintlich abprüfbaren Beschränkung des Bildungsbegriffs außen vor bleiben.

Nach WINTER leistet das Fach Mathematik innerhalb dreier Aspekte einen Beitrag zu allgemeiner Bildung.

> Mathematik kann zur Allgemeinbildung beitragen, wenn der mathematische Unterricht folgende Grunderfahrungen ermöglicht:
>
> (1) Erscheinungen der Welt um uns, die alle angehen oder angehen sollen, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrnehmen und zu verstehen,
>
> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
>
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

(Winter 1996, S. 35)

WINTER hatte schon 1975 als Reaktion auf den lernzielorientierten Unterricht auf die Wichtigkeit allgemeiner, nicht operationalisierbarer Lernziele hingewiesen (Winter 1975). Damals schlug er vier allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht vor, die er in der nachstehenden Übersicht zusammenfasst.

		allgemeines Lernziel	
Mensch	Mathematik	in der Schule	im Mathematikunterricht
als schöpferisches, erfindendes, spielendes Wesen	als schöpferische Wissenschaft	Entfaltung schöpferischer Kräfte	heuristische Strategien lernen
als nachdenkendes, nach Gründen, Einsicht suchendes Wesen	als beweisende, deduzierende Wissenschaft	Förderung des rationalen Denkens	Beweisen lernen
als gestaltendes, wirtschaftendes, Technik nutzendes Wesen	als anwendbare Wissenschaft	Förderung des Verständnisses für Wirklichkeit und ihre Nutzung	Mathematisieren lernen
als sprechendes Wesen	als formale Wissenschaft	Förderung der Sprachfähigkeit	Formalisieren lernen, Fertigkeiten lernen

Abbildung 5 Übersicht über die allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts nach (Winter 1975, S. 116)

Übereinstimmungen mit seinem 1996 vorgeschlagenen Konzept sind deutlich. (1) hat seinen Vorläufer im allgemeinen Lernziel „Mathematisieren lernen“ von 1975. Die Lernziele „Beweisen lernen“ und „Formalisieren lernen, Fertigkeiten lernen“ von 1975 finden sich in (2) wieder. Von besonderem Interesse für die vorliegende Arbeit sind die Erläuterungen WINTERs zum Lernziel „heuristische

Strategien lernen“, welches 1996 Punkt (3) entspricht. WINTER fasst darunter eine ganze Reihe von Aspekten, welche die vorliegende Arbeit als Persönlichkeitsideen in die Diskussion Fundamentaler Ideen einbringt und die häufig in bildungspolitischen Debatten ausgeblendet werden. WINTER argumentiert, man könne sich „keine (ernsthafte) Lernsituation vorstellen, in der nicht mindestens ein Körnchen Kreativität *notwendig* ist“ (Winter 1975, S. 107). Auch sei für das schöpferische Moment mathematischen Denkens Intuition von besonderer Wichtigkeit.[20]

Ein Vergleich der PISA-Definition von mathematischer (Grund-)Bildung mit den Vorstellungen WINTERs zu Bildungszielen des Faches Mathematik macht die mittlerweile schon vielfach in der mathematik-didaktischen Forschung diskutierten Defizite ersterer deutlich. Zumindest fehlen der PISA-Definition wichtige Aspekte von Mathematik, beispielsweise Mathematik als Kulturgut und, zusätzlich zum Anwendungsgedanken, Mathematik als Gedankenwelt sui generis.

Nicht nur WINTER sah den Beitrag von Mathematik zur Allgemeinbildung schon wesentlich reichhaltiger als PISA. Auch der Pädagoge HARTMUT VON HENTIG formulierte in einer bereits 1980 erschienen Publikation den Wert von Mathematik für allgemeine Bildung.[21] Darin unterscheidet er zwei „wissenschaftspropädeutische Funktionen“ von Mathematik, die ihren Wert für allgemeine Bildung ausmachen.

> 1. Mathematik zu lernen bedeutet eine formale Erkenntnishilfe durch das Verstehen mathematischer Begriffe und Operationen [...] Es geht [...] darum, das der Mathematik innewohnende Prinzip der durchgängigen Rationalität zu erkennen [...] Hiermit wird die Mathematik als eine „Geisteswissenschaft“ etabliert, ja, als die strengste aller Geisteswissenschaften.
>
> 2. Mathematik zu lernen kann auch heißen, die mathematischen Prozeduren beherrschen, die man auf den verschiedensten Gebieten in verschiedensten Formen entwickelt hat, kurz: die Anwendung jenes Prinzips der durchgehenden Rationalität.

(von Hentig 1980, S. 282)[22]

Erkennbar sind zwei Aspekte, die sich auch schon bei WINTER fanden und finden. Zum einen ist Mathematik ein Spiel des Geistes und somit eine Geisteswissenschaft. Zum anderen wird der Anwendungscharakter und somit Mathematik als „pragmatische Hilfswissenschaft“ betont (von Hentig 1980, S. 283). Diese beiden

[20] Auf die Ideen „Kreativität“ und „Intuition“ wird in Kapitel 4.5 näher eingegangen.

[21] Trotz des zeitlichen Abstandes sind die Überlegungen VON HENTIGs auch im aktuellen Diskurs über Bildung von Bedeutung.

[22] Es ist zu beachten, dass sich VON HENTIGs Überlegungen auf den Oberstufenunterricht richten. Die erstgenannte Funktion von Mathematik spielt aber (zunächst nur implizit und mit zunehmender Klassenstufe expliziter) eine Rolle im Unterricht der Sekundarstufe I.

Aspekte setzt VON HENTIG in unauflösliche Beziehung, indem er ersteren zur Basis des zweiten macht.

> [Man] kann [...] die erste ohne die zweite lernen, die zweite aber nicht schadlos ohne die erste: Man riskiert einen philosophischen Fundamentalirrtum.
>
> (von Hentig 1980, S. 283)

VON HENTIG weist auf die Gefahr hin, bei der Anwendung mathematischer Prozeduren deren Konstruktcharakter zu vergessen und somit mathematische Ergebnisse als Eigenschaften einer Sache oder eines Sachverhaltes zu interpretieren. Reduziert auf ihren Anwendungscharakter lässt sich demnach am mathematischen Unterricht keine Bildung mehr vollziehen.

Zwar fordert der Begriff der „mathematical literacy" „die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt" (PISA 2001, S. 23), dies kann allerdings, mit Blick auf die entwickelten Testaufgaben bei PISA, nicht mit der reflektierten Sicht, wie VON HENTIG sie fordert, gleichgesetzt werden.

Auch FÜHRER beurteilt die PISA zugrundeliegende „literacy" in Bezug auf ihre Anwendung als Leitideen in Deutschland zur Vermittlung von Bildung höchst kritisch. Er nimmt direkten Bezug auf die „scientific literacy"[23] und zeigt, wie diese „auf ihrem Weg durch die nationalen Gremien delikate Modifikationen erfuhr, ohne das Aufgabenmaterial ernsthaft zu verändern" (Führer 2009, S. 18).

Die Definition der „scientific literacy" durch die NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE trug noch stark pragmatische Züge, die sich aus der traditionellen Verbindung von Wirtschaftswohl und Gemeinwohl ergeben.

> Scientific literacy is knowledge and understanding of the scientific concepts and progresses required for personal decision making, participation in civic and cultural affairs, and economic productivity.
>
> (z.n. Führer 2009, S. 22)

Für den deutschsprachigen Raum wurden die Begriffe „participation" und „economic producticity" gestrichen und durch „globalere und wolkig-unverbindlichere Redeweisen" ersetzt (Führer 2009, S. 23).

> Naturwissenschaftliche Grundbildung ist die Fähigkeit, naturwissenschaftliches Wissen anzuwenden, naturwissenschaftliche Fragen zu erkennen und aus Belegen Schlussfolgerungen zur ziehen, um Entscheidungen zu verstehen und zu treffen, die die natürliche Welt und die durch menschliches Handeln an ihr vorgenommenen Veränderungen betreffen.
>
> (Baumert/Klieme 2001, S. 3)

---

[23] FÜHRERs Überlegungen beziehen sich zunächst auf die „naturwissenschaftliche Grundbildung" zu der auch der Mathematikunterricht seinen Beitrag leisten soll.

Einige Jahre nach der NAS-Definition ist dann in den US-amerikanischen Gremien „von Bildung nicht mehr Rede [...] nur noch von Stoff, Vermittlung und Assessment“ in Deutschland wird allerdings weiterhin auf die „naturwissenschaftliche Bildung“ abgestellt (Führer 2009, S. 24). Dies hält Führer für besonders problematisch, da Bildung eben nicht durch standardisierte Tests ab prüfbar ist, so wie es die „literacy“ als Framework von PISA suggeriert. FÜHRER konstatiert, dass

> Sichtweisen und Grundhaltungen gar nicht an Verhalten ablesbar seien, jedenfalls nicht zweifelsfrei und nicht in ein- oder zweistündigen Reaktionen auf schriftliche Testaufgaben. Das Subjekt als Träger eines fortwährenden Selbst- und Fremdbildungsprozesses bleibt derartigen Testzugriffen entzogen und muss - zumindest vorübergehend - aus methodischen Gründen ignoriert werden. Aus dieser Not, persönliche Bildung nicht messen zu können, entsteht eine scheinbare Tugend, indem auf Standardisierungszwänge bei internationalen Vergleichsstudien verwiesen wird, deren gewaltiger Umfang jede Frage nach dem Bedarf erstickt.

(Führer 2009, S. 26)

Im Zuge solcher standardisierten Tests sind „Haltungen, Einstellungen, Ethik und Empathie [...] nicht messbar“ und sind für die Testindustrie „erstens unwissenschaftliche Kategorien, zweitens nicht kommerziell nutzbar und ‚folglich’, drittens, obsolet“ (Führer 2009, S. 26).

Doch gerade der bewusste Einbezug des Subjekts in der Trias Subjekt - Methode - Objekt, die FÜHRER in Anlehnung an THEODOR LITT zitiert, stellt nach FÜHRER einen Beitrag von Mathematik zu allgemeiner Bildung dar.

> Mathematikunterricht kann Weltorientierung, kritischen Vernunftgebrauch, Empathie, Kooperation und Verantwortungsbereitschaft nur da fördern, wo er die Wechselwirkung von „Mensch und Mathematik“ nicht ausblendet. [...] Positiv ausgedrückt: Mathematikunterricht kann die genannten Tugenden stützen, indem er Reine und Angewandte Mathematik fortwährend an der Trias Subjekt - Methode - Objekt reflektiert.

(Führer 2009, S. 41)

Die genannten „Tugenden“ übernimmt FÜHRER aus dem Allgemeinbildungskonzept HEYMANNs (s.u.). Die geforderte fortwährende Reflexion versteht FÜHRER im Sinne von GÜNTHER MALLE und ROLAND FISCHER, die eine „Befreiung [des Menschen] vom Wissen“[24] fordern (Führer 2009, S. 49). Gemeint ist damit, dass der Mathematikunterricht dem Schüler die Möglichkeiten bieten muss, das häufig als absolut vermittelte Wissen zu relativieren, in dem Sinne, dass mathematische Erkenntnisse stets menschliche Sichtweisen inkludieren. Mathematik muss

[24] Auf diese Forderung wird in Kapitel 3.5.1 in Zusammenhang mit der Ausarbeitung Fundamentaler Ideen nach FISCHER zurückgekommen.

stets als „Bemühen menschlicher Subjekte um die Aufklärung sachlicher Gegebenheiten als intelligent zu handhabendes Werkzeug“ erscheinen (Führer 2009, S. 47).

Zusammenfassend ist die „mathematical literacy“ der internationalen Testindustrie „- jedenfalls gemessen an der bildungstheoretischen Tradition im deutschsprachigen Raum - nicht als hinreichendes Bildungskonzept anzusehen. Ihr Bildungskonzept steckt immer im Korsett des kurztaktigen Beobachtungs- und Beobachtbarkeitszwanges“ (Führer 2009, S. 27). Bildung ist hingegen „auf eine fortwährend praktizierte Grundhaltung einzelner Subjekte bezogen“, die auch einen „unauflöslichen Bezug zu fortwährenden internen Bildungsprozessen schafft“ (Führer 2009, S. 28). Damit stellt „mathematical literacy“ eine Beschneidung des Beitrags von Mathematik zu allgemeiner, naturwissenschaftlicher Bildung dar. Diese Einschränkung wird auch in den in Deutschland ausgearbeiteten Kompetenzen und Leitideen deutlich, obwohl den deutschen Bildungsstandards WINTERs Konzept einer mathematischen Bildung vorangestellt ist.

2.1.2 Grundlagen der Bildungsstandards im Fach Mathematik

Neben den mathematischen Grunderfahrungen nach WINTER, die den deutschen Bildungsstandards für das Fach Mathematik als bildungstheoretische Fundierung vorangestellt sind, finden sich die Zentralen Ideen[25] HANS WERNER HEYMANNs dort dem Namen nach wieder (s.u.). HEYMANNs Zentrale Ideen knüpfen direkt an ein von ihm formuliertes Allgemeinbildungskonzept an, welches er 1995 veröffentlichte. Im Rahmen seiner Habilitationsschrift erläutert er den möglichen Beitrag des Schulfachs Mathematik zur Umsetzung dieses Konzepts (Heymann 1995). HEYMANN stellt sieben Aufgaben allgemeinbildender Schulen heraus:

Im Zentrum stehen [...]

Lebensvorbereitung

Stiftung kultureller Kohärenz

Weltorientierung

Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft

Einübung in Verständigung und Kooperation

---

[25] Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird für den Begriff „Fundamentale Idee“ auch der Bezeichner „Fundamentale Idee“ verwendet. In der Forschungstradition Fundamentaler Ideen werden allerdings verschiedene Bezeichner für den Begriff „Fundamentale Idee“ gebraucht. Bei der jeweiligen Diskussion der einzelnen Konzepte Fundamentaler Ideen werden die Bezeichner gewählt, die der jeweilige Autor verwendet.

Stärkung des Schüler-Ichs [...]

(Heymann 1995, S. 47)

Diese Punkte stellen die Konkretisierung eines Arbeitsprogrammes dar, mit dem „curriculare Vorgaben für Unterricht als auch [...] Unterricht auf ihre allgemeinbildende Qualität hin zu beurteilen" sind (Heymann 1995, S. 47). Um sein Programm vor einer mechanischen und additiven Abarbeitung zu schützen, weist HEYMANN auf die vielfältigen Verbindungen zwischen den einzelnen Aufgaben hin und gliedert sie zugleich in drei „Dimensionen".

Die erste Dimension, welche HEYMANN als für alle menschlichen Gesellschaften unverzichtbar herausstellt, bildet die „Befähigung zur Teilhabe". Ihr ordnet er die Aufgaben „Lebensvorbereitung" und „Stiftung kultureller Kohärenz" zu. Eng damit verknüpft, allerdings erst in neuzeitlichen Gesellschaften von größerer Bedeutung, ist die „Fähigkeit zur Erkenntnis über den engeren Lebenskreis hinaus" (zweite Dimension). Gemeint ist hiermit eine Verbindung von materialem Wissen mit Urteilsvermögen. Aufgaben der Schule in dieser Dimension sind Anregung zur „Weltorientierung" und „Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch". Die dritte Dimension schafft nach HEYMANN ein Gegengewicht zu den ersten beiden. Es geht um die „Entfaltung des Menschlichen" durch Förderung von „Verantwortungsbereitschaft", verständigem und „kommunikativem Verhalten", und „Stärkung des Schüler-Ichs" (Heymann 1995, S. 129).

Für die Diskussion der Leitideen der Bildungsstandards, und darüber hinaus auch der Fundamentalen Ideen, ist die Dimension der „Befähigung zu Teilhabe" mit der „Stiftung kultureller Kohärenz" für HEYMANN von besonderer Bedeutung. Hierbei unterscheidet HEYMANN zwei Formen von Kohärenz: Einen „diachronen" Aspekt, der einen Zusammenhang zwischen Altem und Neuem sichert und somit die Kommunikation zwischen Generationen ermöglicht, und einen „synchronen" Aspekt, der das Verbindende und Trennende innerhalb einer Kultur und zu anderen Kulturen sichtbar macht und somit eine reflektierte kulturelle Identitätsbildung ermöglichen soll (Heymann 1995, S. 74). Während HEYMANN den Beitrag des Mathematikunterrichts zum diachronen Aspekt eher nüchtern einschätzt,[26] bildet die Orientierung des Unterrichts an Zentralen Ideen eine Möglichkeit, synchrone Kohärenz herzustellen.

Dabei geht es HEYMANN vor allem darum, die Universalität von Mathematik, die er als Abstraktion und als symbolische Techniken, die durch Abstraktion gewonnen werden, konkretisiert, mittels Zentraler Ideen exemplarisch zu verdeutli-

[26] Hier spielt eher die negative Beeinflussung der Alltagskultur durch einen Mathematikunterricht, der von Traditionen losgelöst ist, eine Rolle, wie HEYMANN am Beispiel der strukturmathematischen Welle der 1970er Jahre zeigt (Heymann 1995, S.155). Zum Einfluss der Strukturmathematik vgl. Kapitel 3.2.2 und 3.2.3.

chen (Heymann 1995, S. 173). Um dieses übergeordnete Ziel zu erreichen, sollen Zentrale Ideen einer Reihe Kriterien genügen.

> Keine der Ideen soll ausschließlich einen bestimmten mathematischen Stoff repräsentieren. Jede Idee soll auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus verdeutlichbar sein und das mathematische Curriculum wie ein roter Faden vom Elementarunterricht bis zur höheren Mathematik durchziehen können [...] Die oben diskutierten „kulturübergreifenden mathematischen Basisaktivitäten“ sollten, als universale Grundlage des Mathematikunterrichts, in den Ideen zumindest „durchschimmern“. Und schließlich sollten sich die Ideen beliebig weit vertiefen lassen.

(Heymann 1995, S. 173)

An anderer Stelle fordert HEYMANN, dass Zentrale Ideen, die in unterschiedlichen mathematischen Teilgebieten bedeutungsvoll sind, nicht nur innermathematische Bedeutung haben sollen. Es gilt aufzuzeigen, wie Mathematik mit außermathematischen Aspekten unserer Gesellschaft verbunden ist (Heymann 1995, S. 159).

So oder unter anderer Akzentuierung finden sich die genannten Forderungen vielfach in der Forschungsliteratur zum Thema Fundamentale Ideen, beispielsweise bei SCHREIBER und SCHWEIGER, die HEYMANN als Grundlagen wählt.[27] Die im Zitat angesprochenen „kulturübergreifenden mathematischen Basisaktivitäten“ wurden zuvor nicht in Verbindung mit Fundamentalen Ideen diskutiert. Es handelt sich hierbei um einen anthropologischen Forschungsansatz von ALAN J. BISHOP, der in verschiedenen Kulturen nach Aktivitäten suchte, die sich dem mathematischen Bereich zuordnen lassen. Diese sogenannten „Basisaktivitäten“ sollten der Entwicklung eines tragfähigen mathematischen Curriculums dienen, in dem Schulmathematik keine einfache Projektion der höheren Mathematik der Universitäten darstellt (Bishop 1991, S. 12). Mathematische Basisaktivitäten sollen insbesondere die Beziehung bzw. die Auseinandersetzung des Individuums zu bzw. mit Mathematik ermöglichen. Sie machen mathematisches Lernen in der Schule zu einem sozialen Prozess (Bishop 1991, S. 14 f.). BISHOP identifiziert „counting“ (Zählen diskreter Objekte), „messuring“ (Messen kontinuierlicher Vorgänge), „locating“ (räumliche Beziehungen herstellen), „designing“ (Entwerfen), „playing“ (Spielen, welches durch explizite Regeln soziales Verhalten steuert und hypothetisches Verhalten ermöglicht) und „explaining“ (Begründen, Relationen herstellen) (Bishop 1991, S. 23). Während die ersten vier Aktivitäten eher im Umgang des Menschen mit seiner äußeren Umwelt bedeutsam sind, dienen „playing“ und „explaining“ dem Meistern von sozialen Aktivitäten innerhalb

---

[27] Neu ist die explizite Fokussierung der kulturellen und gesellschaftlichen Aspekte von Mathematik. Die daraus resultierende Verbindung der zwei Seiten Welt/Mensch (als Person) und Mathematik wird in Kapitel 4.2 zur Strukturierung und Explikation des erweiterten Begriffsverständnisses nach LAMBERT genutzt.

unserer Gesellschaft. Hier findet sich demnach schon die Betonung des Individuums im Umgang mit Mathematik, die sich auch in der Konzeption HEYMANNs niederschlägt. Unter dem Einfluss von BRUNER argumentiert BISHOP, dass ein Zusammenspiel der Basisaktivitäten „locating" und „designing" zur Fundamentalen Idee „shape" führt (Bishop 1991, S. 23). Basisaktivitäten sind demnach noch keine Fundamentalen Ideen und lassen ohne weitere kulturelle Spezifikation keine Schlüsse über eine inhaltliche Ausgestaltung eines Curriculums zu.

HEYMANN selbst wählt, ausgehend von einer knappen Forschungsanalyse, einen Katalog Fundamentaler Ideen, der den Basisaktivitäten BISHOPs auch begrifflich nahesteht: „Idee der Zahl", „Idee des Messens", „Idee des räumlichen Strukturierens", „Idee des funktionalen Zusammenhangs", „Idee des Algorithmus" und die „Idee des mathematischen Modellierens" (Heymann 1995, S. 174).

Zunächst fällt auf, dass der Katalog in seiner Formulierung den Bezeichnern nach sowohl mathematische Objekte (Zahl, Algorithmus) als auch Tätigkeiten/Strategien (Messen, Strukturieren, Modellieren) und Relationen (funktionaler Zusammenhang) umfasst. Die Idee des mathematischen Modellierens sieht HEYMANN auf einer übergeordneten Ebene. Sie dient der Synthese der anderen Ideen (Heymann 1995, S. 180 ff.). Modellieren schlägt die für HEYMANNs Überlegungen zentrale Brücke zwischen Mathematik als „kulturelle[r] Hervorbringung [...] und der übrigen Kultur unserer westlichen Industriegesellschaft" (Heymann 1995, S. 182). Somit ist auch klar, dass die übrigen Ideen ihren fundamentalen Charakter erst dadurch erlangen, dass sie Verbindungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit erkennen lassen. Dabei gliedert HEYMANN die Ideen auch gerade nach ihrer Verortung im Spannungsverhältnis zwischen Wirklichkeit und Mathematik. Die mathematischen „Uraktivitäten" Zählen, Messen und räumliches Strukturieren, die die gesamte Alltagskultur durchdringen, sind eher auf der Seite Wirklichkeit einzuordnen. Dagegen rücken die Ideen des funktionalen Zusammenhangs und des Algorithmus näher an die Seite Mathematik. Zwar spielen diese beiden, besonders in der Lesart HEYMANNs, eine wichtige Rolle bei der Erschließung der außermathematischen Umwelt, doch sind sie nicht mehr sinnlich erfahrbar und somit von den erst genannten zu trennen (Heymann 1995, S. 178).[28]

Die Zentralen Ideen sollen durch die Verbindung von Mathematik und Wirklichkeit eine Trennung dieser beiden Pole verhindern. Mathematik soll im Unterricht als anwendbare und nützliche Werkzeugkiste erfahren werden und nicht abgekoppelt von der Erfahrungswelt der Schüler als isolierte Wissenschaft. Dies gelingt nach HEYMANN auch bei den Ideen, die der Seite Mathematik näher ste-

[28] Auf HEYMANNs Verortung seiner Zentralen Ideen wird in Kapitel 4.2 zur Strukturierung des dort vorgestellten Ideenkatalogs erneut eingegangen.

hen, indem sie stets im Anwendungskontext, also in Zusammenhang mit der Idee des Modellierens, behandelt werden.

In dieser prinzipiell gerechtfertigten und als positiv zu beurteilenden Funktion Zentraler Ideen liegt aber gerade das Risiko. Ebenso wie die mathematische Grundbildung bei PISA überbetont HEYMANN den Anwendungscharakter von Mathematik. Damit geraten allgemeinbildende Aspekte der Idee, die sich aus innermathematischen Anwendungen ergeben könnten, aus dem Blick. Dies ist besonders bei der Idee des Algorithmus deutlich. Zwar erwähnt HEYMANN hier das allgemeinbildende Potential, welches im kreativen Finden und Formulieren von Algorithmen steckt, lässt dies allerdings in seiner Bewertung der Idee in den Hintergrund treten, wenn er die Anwendung von Algorithmen bei industriellen Fertigungsprozessen hervorhebt (Heymann 1995, S. 180). Mit dieser Überbetonung außermathematischer Zusammenhänge wird die Chance verpasst, auf gehaltvolle mathematische Aspekte der Ideen des Algorithmus einzugehen, die in diesem Falle auch auf Persönlichkeitsideen wie Kreativität und, beim Entwickeln und Ausführen komplizierter Algorithmen, auf Beharrlichkeit zielen.

Neben der starken Beschneidung der Bedeutung Fundamentaler Ideen für innermathematische Aspekte genügen HEYMANNs Ideen seinem zuvor geforderten Kriterium nur teilweise. Bis auf die eh schon herausgehobene Idee des Modellierens und die Idee des Algorithmus stehen die genannten Ideen nach den Erläuterungen HEYMANNs für klassische Gebiete der Schulmathematik. Die Idee Zahl umfasst im Wesentlichen arithmetische Inhalte, die Ideen Messen und räumliches Strukturieren beziehen sich inhaltlich auf den Bereich der Geometrie. Die Idee des funktionalen Zusammenhangs bildet schwerpunktmäßig die Schulanalysis ab, lässt allerdings auch durch geometrische Repräsentation von Funktionen durch Kurven Bezüge zur Geometrie zu.[29] Als traditioneller Schulstoff in neuem Gewand verlieren Fundamentale Ideen allerdings wichtige Funktionen (Schaffung von Ordnung im Denken, Vermittlung eines angemessenen Mathematikbilds etc.). Beschränkt auf ihren Anwendungscharakter ist fraglich, welche Wirkung ihre Betonung im Unterricht haben kann.

HEYMANNS Auffassung von Fundamentalen Ideen verengt ihre durch didaktische Forschung entwickelte Bedeutung auf einen pragmatischen Kern. Mathematische Inhalte werden als fundamental verstanden, wenn sie den Anwendungscharakter von Mathematik besonders deutlich machen und somit als „Schnittstellenideen“ wirksam sind. Der Ideenkatalog nach LAMBERT sowie die in Kapitel 3 folgende ideengeschichtliche Analyse zeigen allerdings, dass Schnittstellenideen nur eine Kategorie neben anderen Ideenkategorien sind, die Mathematik auszeichnen.

[29] Für die inhaltlichen Erläuterungen der einzelnen Ideen vgl. (Heymann 1995, S. 174 ff.).

2.1.3 Bausteine der Bildungsstandards im Fach Mathematik und deren Problematik als Fundamentale Ideen

Die bundesweit verbindlichen[30] Bildungsstandards für das Unterrichtsfach Mathematik[31] fordern eine Orientierung des Mathematikunterrichts an:

- sechs *allgemeinen Kompetenzen*: mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6), und
- fünf *inhaltlichen Leitideen*: Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang, Daten und Zufall.

Die begriffliche Nähe der Leitideen zu HEYMANNs Fundamentalen Ideen liegt auf der Hand, und auch inhaltlich finden sich zumeist Übereinstimmungen. Lediglich die Leitidee „Daten und Zufall", welche den Stoffbereich Stochastik im Unterricht abdecken soll, findet sich nicht explizit bei HEYMANN. Dort werden stochastische Aspekte implizit der Idee des Algorithmus zugeordnet. Die Idee des Algorithmus ist bei der KMK in den Leitideen „Zahl" und „Funktionaler Zusammenhang" inkludiert.[32] Erst mit den Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife kommt dem Algorithmus eine stärkere Bedeutung zu, was sich in der dortigen Umformulierung und Neuakzentuierung der Leitidee „Algorithmus und Zahl" zeigt (KMK 2012).

Die genannten allgemeinen Kompetenzen, die alle als Tätigkeiten formuliert sind, werden in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben. Diese Inhalte sind Konkretisierungen der übergeordneten mathematischen Leitideen. Die sechs allgemeinen Kompetenzen sind durch drei Anforderungsbereiche (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren), die nach ansteigendem „Anspruch" und „kognitiver Komplexität" geordnet sind, weiter differenziert (KMK 2003, S. 13). Mithilfe dieser Ausdifferenzierung kann analysiert werden, „welche Kompetenzen in welchen Anforderungsbereichen zur

---

[30] Um teilweise auf Auslassungen in den Bildungsstandards zu reagieren, setzten einige Bundesländer die Standards mit individuellen Akzenten um. Das Saarland beispielweise fügte eine sechste Leitidee „Grenzprozesse und Näherungsverfahren" hinzu, womit sich eine Erweiterung um algorithmische und approximative Aspekte von Mathematik ergibt (MBK 2012).

[31] Bildungsstandards liegen für die in Deutschland zulässigen Abschlüsse der allgemeinbildenden Schulen vor: Für den mittleren Bildungsabschluss (KMK 2003), für den Hauptschulabschluss (KMK 2004a), für die Primarstufe (KMK 2004b) und für die allgemeine Hochschulreife (KMK 2012).

[32] Zur Beschreibung der Leitidee „Zahl" heißt es dazu: „Die Schülerinnen und Schüler [...] wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen" (KMK 2003, S. 10). Unter der Leitidee „Funktionaler Zusammenhang" sind dann auch der Einsatz Neuer Medien und Effizienzüberlegungen zu verwendeten Algorithmen zur Lösung von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen gefasst (KMK 2003, S. 12).

Bearbeitung [einer Aufgabe] gebraucht werden“ (KMK 2003, S. 13). Dadurch ergibt sich eine 6×5×3 - Kompetenzmatrix, die Mathematikunterricht definieren soll.

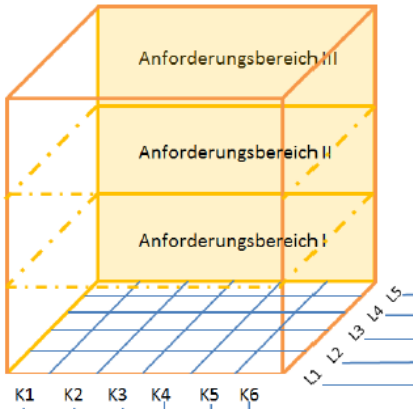


Abbildung 6 6×5×3 – Kompetenzmatrix (KMK 2003, S. 13)

Ausgehend von dieser Standardisierung soll nun

> bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten sachgebietsübergreifendes, vernetzendes Denken und Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe erreicht werden […]
>
> (KMK 2003, S. 6)

Die Bildungsstandards für die allgemeine Hochschulreife stellen den Vernetzungsgedanken weiter in den Vordergrund. Hier ist Vernetzung nicht mehr ein Produkt des Lernprozesses, sondern eine Basis.

> Für den Erwerb von Kompetenzen ist im Unterricht auf eine Vernetzung der Inhalte der Mathematik untereinander ebenso zu achten wie auf eine Vernetzung mit anderen Fächern.
>
> (KMK 2012, S. 11)

Neben den allgemeinen Kompetenzen tragen Leitideen zur Vernetzung von traditionellen klassischen Sachgebieten der Schulmathematik bei (KMK 2012, S. 21).

Mit dieser Konzeption einer Orientierung von Unterricht an allgemeinen (prozessbezogenen) Kompetenzen und inhaltlichen Leitideen ist eine ganze Reihe von Schwierigkeiten und Problemen verbunden, die schon mehrfach in der mathematikdidaktischen Forschung diskutiert wurden.[33] Daher soll hier nur auf solche Punkte eingegangen werden, die mit der Konzeption der Kompetenzen und Leitideen als Fundamentale Ideen zusammenhängen.

[33] Vgl. (Jahnke/Meyerhöfer 2006) und speziell im Zusammenhang mit Fundamentalen Ideen (Vohns 2007).

Wie von der KMK gefordert sollen Kompetenzen und Leitideen den Kern eines jeden Faches abbilden und nicht seine gesamte Breite. Sie haben demnach einen ähnlichen Anspruch wie Fundamentale Ideen. Ähnlich deshalb, weil Fundamentale Ideen so angelegt sein sollen, dass aus ihnen wieder die ganze Breite eines Faches rekonstruiert werden kann. Diese Forderung formuliert die KMK für ihre Kompetenzen und Leitideen nicht. Ein Vergleich mit den oben dargelegten Ideenkategorien nach LAMBERT legt nahe, dass Kompetenzen und Leitideen zwar als Schnittstellenideen und Inhaltsideen durchaus zu wichtigen Aspekten der Mathematik gehören, es neben ihnen allerdings noch weitere zentrale Kategorien gibt, die ebenfalls zum Fach Mathematik zählen. Eine reine Fokussierung auf die Kompetenzen und Leitideen der KMK bedeutet daher, im Unterricht ein beschränktes Bild von Mathematik zu vermitteln.

Auch die durch Leitideen angestrebte sachgebietsübergreifende Vernetzung scheint problematisch, da Leitideen inhaltlich die Themen der klassischen Stoffgebiete bündeln und gerade nicht mehr, wie für Fundamentale Ideen gefordert, quer zu diesen liegen. Fraglich ist demnach, wie Leitideen zur geforderten Vernetzung von mathematischen Gebieten und damit als Mittel gegen Stoffisolierung beitragen sollen.[34] Es verwundert daher nicht, dass einige Bundesländer bei der Umsetzung der Bildungsstandards die Bezeichnungen der klassischen Stoffgebiete beibehalten haben und erst gar nicht auf die Leitideen abstellen. In Nordrhein-Westfalen, wo die ersten standardisierten Kernlehrpläne schon 2004 verabschiedet wurden, kam es beispielsweise zur Neustrukturierung der Kompetenzen und Leitideen der KMK. Dort findet sich eine Einteilung von „übergreifenden fachlichen Kompetenzen“ in „Prozessbereiche“ („argumentieren“, „problemlösen“, „modellieren“, „Werkzeuge“) und „Inhaltsfelder“ („Arithmetik, Algebra“, „Funktionen“, „Geometrie“, „Stochastik“). Stoffgebietsübergreifende Leitideen finden keine Anwendung.[35]

Die möglichst exakte inhaltliche Trennung der Leidideen ist wahrscheinlich ihrem Einsatz in standardisierten Testaufgaben geschuldet. Hierbei wird vorausgesetzt, dass sich die Testitems möglichst genau einer Leitidee zuordnen lassen, um deren Beherrschung durch den Lernenden zu überprüfen. Mit dieser Funktion geht allerdings der fundamentale Charakter der Leidideen teilweise verloren, da zu recht fraglich ist, ob ein Lerner nur aufgrund der Tatsache, dass er ein ge-

[34] Diese Problematik wurde schon bei der Vorstellung von HEYMANNs Zentraler Ideen in Kapitel 2.1.2 kritisch hinterfragt.

[35] Gerade in Nordrhein-Westfalen hatte es im Zuge der Lehrplanreformen der 1960er Jahre schon eine Orientierung an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik gegeben. Damals waren unter dem Bezeichner „fundamentale Begriffe“ die für die Strukturmathematik bedeutsamen Begriffe Zahl, Grenzwert, Funktion, Abbildung, Vektor, Menge und Struktur curricular verankert worden (KNF 1963). Zu den Auswirkungen vgl. Kapitel 3.2.3.

wisses Testitem erfolgreich löst, schon die zugrundeliegende mathematische Idee verstanden hat.[36]

Diese Problematik bleibt auch bestehen, bedenkt man, dass ein Zurechtschneiden der Testitems in die klassischen Stoffgebiete verstärkt für die deutschen Testinstrumente bei PISA erfolgte.[37] Der internationalen Vergleichsstudie sollten eigentlich vernetzte „big ideas“ wie „Chance“, „Change and growth“, „Dependency and releationships“ sowie „Space and shape“ zugrunde liegen, die sich durch ihre gebietsübergreifende Wirksamkeit auszeichnen (Neubrand 2001).[38] Für die deutsche Zusatzerhebung wurden diese allerdings nicht berücksichtigt und die Testitems nach „content strands“ gruppiert, da die deutsche Unterrichtstradition die „einzelnen Teilgebiete der Mathematik i.a. isoliert voneinander unterrichtet“ (Neubrand 2001, S. 55).[39]

Eine weitere Problematik der Leitideen und Kompetenzen der KMK ist mit der inhaltlichen Weite der Leitideen verbunden. Als Oberbegriffe für Stoffgebiete sind sie so allgemein formuliert, dass sie nur schwerlich eine Stoffauswahl zulassen. Kaum ein mathematischer Inhalt kann wohl als unwesentlich abgetan werden, da er sich nicht in irgendeiner Weise der Leitidee „Zahl“ zuordnen lässt. Die Stoßrichtung der Leitideen scheint sich daher umgekehrt zu haben. Anstatt durch übergeordnete Leitideen Unterrichtsinhalte auf ihre Relevanz für diese Ideen zu überprüfen und somit begründet auszuwählen, wurden traditionelle Inhalte des Mathematikunterrichts lediglich danach neugeordnet, zu welcher Leitidee sie am besten passen. Damit wurde allerdings die Möglichkeit der Stoffauswahl „ad absurdum“ geführt (Vohns 2007, S. 61).

---

[36] Vgl. (Bender 2004) und (Vohns 2007, S. 61).

[37] Vgl. (Neubrand 2001, S. 55).

[38] NEUBRAND argumentiert auch, dass die „big ideas“ keine Fundamentalen Ideen sind, wie sie in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik diskutiert werden. „Big ideas“ seien bewusst wesentlich konkreter formuliert und stünden dem Alltag (scheinbar) näher als Fundamentale Ideen. Sie bündelten nämlich in erster Linie einen „umweltbezogen definierten Phänomenbereich“ im Sinne HANS FREUDENTHALs (Neubrand 2001, S. 55). Vordergründig ist dabei wieder der Anwendungsaspekt von Mathematik, der auch in der „mathematical literacy“ betont wird. NEUBRAND unterschlägt bei seiner Argumentation, dass auch die klassischen Fundamentalen Ideen im Alltagsdenken verankert sein sollen (vgl. das „Sinn“-Kriterium SCHREIBERs und die „Archetypizität“ SCHWEIGERs in Kapitel 3.5.1). Zu leugnen ist allerdings nicht, dass die einzelnen Themengebiete der Mathematik im Mathematikunterricht stärker miteinander vernetzt werden sollten.

[39] Im Zuge dieser Diskrepanz zwischen den stark vernetzenden „big ideas“ und der angenommenen Stoffisolation im Mathematikunterricht wurde das internationale Projekt „Awerness of Big ideas in mathematical Classrooms“, welches auf deutscher Seiter von SEBASTIAN KUNTZE betreut wurde, finanziert. Ziel war es, zu herauskristallisierten Ideen Lernumgebungen, die besonders reichhaltig vernetzen, zu entwickeln. Die hier verwendeten „big ideas“ (z.B. „Unterschiede beschreiben“, „Vergleichen“, „Strukturen erkennen und beschreiben“) haben mit den Leitideen der Bildungsstandards nichts gemeinsam (Kuntze 2011a) und (Kuntze 2011b). Sie ähneln eher den „process standards“ der Principles and Standards for School Mathematics von 2000 (NCTM 2000). Dort fand sich auch noch explizit eine Kompetenz, die auf Vernetzungen zielt („recognize and use connection among mathematical ideas“).

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Bildungsstandards dem Konzept der Fundamentalen Ideen einen bei der Konstruktion von Curricula bisher nie dagewesenen Stellenwert einräumen. Diese nominelle Aufwertung des Konzepts geht allerdings einher mit einer teilweisen Sinnentleerung des Begriffs. Durch die Standardisierung verlieren Fundamentale Ideen wichtige Funktionen wie die Begrenzung von Stoffisolierung. Auch eine begründete Stoffauswahl ist nicht mehr möglich. Eine der schwerwiegendsten Problematiken liegt allerdings in der Unvollständigkeit der Kompetenzen und Leitideen. Den Kern der Mathematik bilden sie nur in Teilen ab und fördern so die Vermittlung eines beschränkten Mathematikbildes. Diese Auslassungen werden besonders deutlich bei einem Blick in die Umsetzung von Standardisierungen in anderen Ländern. Hier sei als Beispiel auf die Umstellung der österreichischen Lehrpläne eingegangen, die neben prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen auch solche berücksichtigen, die sich auf mathematische Begriffe beziehen und bei der KMK völlig ausgeblendet sind.

2.2 Andere Länder – andere Ideen

In Österreich wurden im Zuge einer Standardisierung von Lehrplänen und Abschlussprüfungen ebenfalls kompetenzorientierte Bildungsstandards verfasst. Sie sind, wie ihr deutsches Pendant, als Regelstandards konzipiert, die eine Auswahl der im Unterricht zu erwerbenden Kompetenzen ermöglichen (BIFIE 2012). Der österreichische Lehrplan für die Oberstufe[40] der „Allgemeinbildenden höheren Schulen" umfasst drei Kompetenzkategorien (BMUKK 2004, S. 1).

- Kompetenzen, die sich auf *Kenntnisse* beziehen. Sie umfassen mathematische Inhalte aus den Bereichen Zahlen, Algebra, Analysis, Geometrie und Stochastik;
- Kompetenzen, die sich auf *Begriffe* beziehen. Sie äußern sich in der
  - Fähigkeit, mathematische Begriffe mit adäquaten Grundvorstellungen zu verknüpfen und
  - Mathematik als spezifische Sprache zur Beschreibung von Strukturen und Mustern, zur Erfassung von Quantifizierbarem und logischen Beziehungen sowie zur Untersuchung von Naturphänomenen zu erkennen;
- Kompetenzen, die sich auf mathematische *Fertigkeiten und Fähigkeiten* beziehen. Sie beziehen sich auf

a) darstellend-interpretierendes Arbeiten,
b) formal-operatives Arbeiten,
c) experimentell-heuristisches Arbeiten sowie

[40] Entspricht den Klassenstufen 9 bis 12 des deutschen achtjährigen Gymnasiums.

d) kritisch-argumentatives Arbeiten.

Kompetenzen, die sich auf inhaltliche Kenntnisse beziehen, entsprechen im Wesentlichen den inhaltlichen Leitideen der KMK. Die allgemeinen Kompetenzen der deutschen Bildungsstandards finden sich, wenn auch anders strukturiert, in den österreichischen Kompetenzen, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen, wieder.[41]

a	b	c	d
(K3), (K4)	(K5)	(K2)	(K1), (K6)

Abbildung 7 Beziehungen zwischen den allgemeinen Kompetenzen der KMK Bildungsstandards und den Kompetenzen in Österreich, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen

Kompetenzen, die auf Begriffe bezogen sind, finden sich so nicht in den deutschen Bildungsstandards. Diese Art von Kompetenzen beinhaltet vor allem (Meta-)Denkprozesse und trägt somit zur Erweiterung des Verständnisses von Kompetenzen um einen wesentlichen Aspekt von Mathematik bei.

Ergänzt werden die Kompetenzen durch im Unterricht zu berücksichtigende Aspekte von Mathematik, welche die Breite mathematischen Arbeitens abbilden sollen (BMUKK 2004, S.1 f.). Dabei wird Mathematik angesehen als

- Schule des Denkens, die Phantasie anregt und Kreativität fördert (Schöpferisch-kreativer Aspekt),
- elaboriertes Begriffsnetz, durch das die Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen gefördert wird (Sprachlicher Aspekt),
- spezifische Art, die Erscheinungen der Welt wahrzunehmen und durch Abstraktion zu verstehen (Erkenntnistheoretischer Aspekt),
- nützliches Werkzeug und Methodenreservoir (Pragmatisch-anwendungsorientierter Aspekt),
- geistige Schöpfung und deduktiv geordnete Welt eigener Art (Autonomer Aspekt) und
- Leistung in der Entwicklung des europäischen Kultur- und Geisteslebens (Kulturell-historischer Aspekt).

Hier werden neben der bei PISA vordergründigen Anwendungsorientierung weitere Aspekte berücksichtigt, die ein breiteres Bild von Mathematik vermitteln lassen. An dieser Stelle sei besonders der schöpferisch-kreative Aspekt hervorgehoben, da er auf „Nichtkognitive“ Ziele von Unterricht abzielt, die in den deutschen Bildungsstandards und in den meisten Konzepten Fundamentaler Ideen teilweise bis ganz ausgeblendet werden oder nur implizit mitklingen.

[41] Die Kompetenz (K6) wird von den österreichischen Kompetenzen nicht vollständig erfasst. Sie kann nur teilweise dem kritisch-argumentativen Arbeiten zugeordnet werden.

Zur Analyse und Beurteilung der vom Schüler erworbenen Kompetenzen werden letztlich nur noch drei Dimensionen von Kompetenzen unterschieden. Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen, spielen dabei keine Rolle mehr (BMUKK 2011, S. 9 f.). Dazu werden

> „verwandte" Handlungen zu Handlungsbereichen (H1, H2 …), „verwandte" Inhalte zu Inhaltsbereichen (I1, I2 …) und „verwandte" Arten bzw. Grade von Vernetzung zu Komplexitätsbereichen (K1, K2 …) zusammengefasst.

(BMUKK 2011, S. 9)

Somit ergibt sich eine 4×4×3 – Kompetenzmatrix.

Handlungsdimension	**Inhaltsdimension**	**Komplexitätsdimension**
(H1) Darstellen, Modellbilden (H2) Rechnen, Operieren (H3) Interpretieren (H4) Argumentieren, Begründen	(I1) Algebra, Geometrie (I2) Funktionale Abhängigkeit (I3) Differential- und Integralrechnung (I4) Wahrscheinlichkeit und Statistik	(K1) Einsetzen von Grundkenntnissen und Grundfertigkeiten (K2) Herstellen von Verbindungen (K3) Einsetzen von Reflexionswissen, Reflexion

Abbildung 8 Kompetenzdimensionen in den österreichischen Bildungsstandards

Die an diesen Kompetenzdimensionen ausgerichtete Reifeprüfung in Österreich zeigt deutlich, wie selbst vollständigere Kompetenzmodelle durch standardisierte Tests zur Kompetenzüberprüfung beschnitten werden. Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen und somit eher im Denken der Lernenden wirken, entziehen sich einer konkreten Überprüfung durch Tests und werden daher im Kompetenzmodell ausgeblendet. Somit ergeben sich für die abzuprüfenden Kompetenzdimensionen die gleichen Probleme, wie sie auch den deutschen Bildungsstandards für das Fach Mathematik anlasten.

2.3 Andere Zeiten – gleiche Ideen?

Dass eine Ausrichtung des schulischen Unterrichts an für die Mathematik zentral erscheinenden Aspekten eine lange Tradition im deutschsprachigen Raum hat, zeigt ein Blick in die Preußischen Richtlinien zu den Lehrplänen für die höheren Schulen von 1925 (vgl. LAMBERT 2004, S. 71-74). Damals fanden sich unter „Methodische Bemerkungen" acht „*Allgemeine Grundsätze*", die im Wesentlichen die von der KMK aktuell geforderten allgemeinen Kompetenzen beinhalten (Lietzmann 1925, S. 194).

> 1. Auf klarem Verständnis beruhende, sichere mathematische Kenntnisse sind unter ständiger Anpassung an die Fassungskraft der Schüler und durch ihre geistige Mitarbeit nach dem Lehrverfahren des Arbeitsunterrichts zu gewinnen bei Verzicht auf gedankenloses Auswendiglernen von Erklärungen, Sätzen und Regeln und grundsätzlicher Ausschaltung des Auswendiglernens von Beweisen. Der Lehr-

stoff ist dahin zu sichten, daß nur solche Sätze und Verfahren, die für den inneren Zusammenhang und für die praktische Anwendung einen Wert haben, im Unterricht erarbeitet werden. Der Gedächtnisstoff ist auf das Notwendigste einzuschränken, aber durch fortgesetzte Wiederholung zu sichern.

2. Das mathematische Wissen ist durch das Lösen von Aufgaben zum Können zu entwickeln. Die Aufgaben sollen sich nicht auf das Einüben des Lehrstoffs beschränken, sondern auch auf das Aufsuchen geometrischer und arithmetischer Sätze und auf die Fertigkeit im Schließen und Beweisen Wert legen und allmählich zu geistiger Selbständigkeit bei der Behandlung mathematischer Fragen führen bis zur Lösung größerer zusammenhängender Probleme.

3. Angewandte Aufgaben sollen der Wirklichkeit entnommen sein und zu praktisch wertvollen Ergebnissen führen. Durch Berücksichtigung der anderen Unterrichtsfächer und der Umwelt des Schülers sind die Anwendungen für sachliche Belehrungen nutzbar zu machen, besonders über die Erscheinungen des wirtschaftlichen Lebens. Darüber darf aber die Fertigkeit im eigentlichen Rechnen nicht verloren gehen. In den Anwendungen ist engste Verknüpfung mit der Heimatkunde anzustreben.

4. Der Schüler ist schon frühzeitig dazu anzuleiten, durch einen einfachen Überschlag oder einen zeichnerischen Entwurf vor der genaueren Ausführung seiner Aufgabe sich Rechenschaft zu geben über das zu erwartende Ergebnis. Es muß ihm zum Bedürfnis werden, sich ein Urteil zu bilden über die Frage nach der Lösbarkeit und der Art und der Anzahl der Lösungen und schließlich die Probe zu machen.

5. Die schon auf der Mittelstufe erzielte Einsicht in die Grenzen der Genauigkeit solcher Rechnungen, die mit Messungen zusammenhängen, wird in den oberen Klassen in allen geeigneten Fällen zu einer Abschätzung der im Endergebnis erreichten Genauigkeit gesteigert.

6. Auf Sorgfalt des sprachlichen Ausdrucks und Gewöhnung an klare, übersichtliche Darstellung ist auf allen Stufen größter Wert zu legen.

7. Die Geschichte der Mathematik ist grundsätzlich im Unterricht zu berücksichtigen bei der Entwicklung des Lehrstoffs ebenso wie bei der Aufgabenstellung. Der Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung ist dabei nach Möglichkeit hervorzuheben. Die Schüler der oberen Klassen sind auch zum Lesen geschichtlich bedeutsamer mathematischer Schriftsteller anzuregen.

8. Die mathematische Bezeichnungsweise folgt den Vorschlägen zur Vereinheitlichung der mathematischen Bezeichnungen des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.

(Lietzmann 1925, S. 194-195)

K1	K2	K3	K4	K5	K6
1., 2., 3.	2., 4.	3., 4., 5.	3., 6., 8.	3.	6., 8.

Abbildung 9 Beziehungen zwischen den allgemeinen Kompetenzen der KMK Bildungsstandards und den allgemeinen Grundsätzen der Preußischen Richtlinien von 1925. Entnommen aus (Lambert 2004, S. 74).

Lediglich die bewusste kulturelle Einbettung von Mathematik (damals 7.) findet sich nicht mehr explizit in den aktuellen Kompetenzbeschreibungen in Deutschland. In Österreich findet sich der „Kulturell-historische Aspekt“ im Rahmen der Aspekte der Mathematik, die im Lehrplan für die AHS Oberstufe direkt nach den mathematischen Kompetenzen beschrieben werden.

Ähnlich wie die allgemeinen Kompetenzen finden sich auch die Leitideen der Bildungsstandards (teilweise) in den Preußischen Richtlinien. Hier wird als „*Allgemeines Lehrziel*“ gefordert:

> Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit bestimmten Zahlen […] Schulung in der richtigen Auffassung von Größenwerten […]. Erzielung der Fähigkeit, das Mathematische in Form, Maß, Zahl und Gesetzmäßigkeit an den Gegenständen und Erscheinungen der Umwelt zu erkennen und die gewonnenen Erkenntnisse selbstständig anzuwenden; insbesondere Entwicklung des räumlichen Anschauungsvermögens und der Fertigkeit im mathematischen Auffassen der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Größenwerte.

(Lietzmann 1925, S. 194)

Angesprochen sind die Leitideen „Zahl“, „Messen“, „Raum und Form“ und „Funktionaler Zusammenhang“. Lediglich die Leitidee „Daten und Zufall“ fehlt, da Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik (teilweise bis ganz) aus den Lehrplänen gestrichen wurden, um Platz für Differential- und Integralrechnung zu schaffen.[42]

Die zitierten Preußischen Richtlinien stehen wie ihre aktuellen Nachfolger im Zeichen einer weitreichenden Bildungsreform. Sie sind im weitesten Sinne ein Endprodukt der „Meraner Reformen“, die nach Jahrzehnten die einzelnen Strömungen der Reformbewegung integrierten, „manche Fehler der alten Meraner Lehrpläne [und] manche allzu vorsichtige Formulierung ausbessert[en]“ (Lietzmann 1960, S. 66). Ziel war es damals, der Stofffülle zu begegnen und den Unterricht an zentralen Leitlinien der Mathematik auszurichten. Als zentral galten die Raumanschauung und das funktionale Denken. Darüber hinaus sollte der gesamte Unterricht von Anwendungen durchzogen sein, die an die Vorstellungen der Schüler anknüpfen. AUGUST GUTZMER, Mitglied der DEUTSCHEN MATHEMATIKER VEREINIGUNG und Teilnehmer der Naturforscherversammlung in Meran, von der die Meraner Vorschläge ausgingen, formuliert deren Zielsetzung wie folgt.

> Einmal gilt es (wie in allen anderen Fächern), den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gange der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Erkenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung zu setzen, endlich den Zusammenhang des

[42] Vgl. (Lietzmann 1925).

> Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen. Ferner wird es sich darum handeln, unter voller Anerkennung des formalen Bildungswertes der Mathematik doch auf alle einseitigen und praktisch bedeutungslosen Spezialkenntnisse zu verzichten, dagegen die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung zu bringen. Von hier aus entspringen zwei Sonderaufgaben: *die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens*.

(Gutzmer 1905, S. 80)

Das komplizierte Entwicklungsgeflecht der Meraner Reform und ihre Wirkung bis zum 2. Weltkrieg soll in der vorliegenden Arbeit weiter nicht vertieft werden, da damals nicht die explizite Entwicklung Fundamentaler Ideen angestrebt wurde.[43] Dieser kurze historische Rückblick zeigt allerdings schon, dass eine Orientierung von Unterricht an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik lange vor dem Erscheinen des Buches „The Process of Education“ gefordert wurde, und auch ganz aktuell (oft ohne Bezug zu BRUNER oder anderen historischen Vorläufern) diskutiert wird.[44] Auffällig ist dabei, dass sich die genannten Aspekte sehr ähneln. Besonders die Leitlinie des funktionalen Denkens findet sich (teilweise begrifflich anders gefasst) ebenfalls in vielen Katalogen Fundamentaler Ideen wieder (vgl. Kapitel 3.5).

Da allerdings fast alle im Folgenden vorgestellten Autoren BRUNERs Buch als (historische) Basis ihrer Theoriebildung angeben, werden die Überlegungen BRUNERs im nächsten Abschnitt als Startpunkte für eine detailliertere Analyse der Entwicklung der Theorie Fundamentaler Ideen gewählt.

---

[43] Für eine ausführliche Darstellung vgl. (Inhetveen 1976) und (Krüger 2000). KATJA KRÜGER geht besonders auf die Entwicklung des funktionalen Denkens ein und schafft dabei auch Bezüge zur Theorie der Fundamentalen Ideen (Krüger 2000, S. 292 ff.).

[44] Da die im Zitat von GUTZMER genannten „Sonderaufgaben“ von Mathematik durchaus als Vorläufer einer Konzeption Fundamentaler Ideen gesehen werden könne, besteht in der Aufarbeitung der mathematikdidaktischen Entwicklungen von den Meraner Vorschlägen bis zum Erscheinen von „The Process of Education“ und der Identifizierung von Vorläufern Fundamentaler Ideen weiterer Forschungsbedarf (vgl Kapitel 7.2). Dieser kann von der vorliegenden Arbeit, deren Zielsetzungen ein Diskussionsbeitrag zur logischen und prototypischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen sowie ein Vorschlag zur unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen sind, nicht geleistet werden.

3 Fundamentale Ideen im historischen Wandel

Schon der obige historische Rückblick zeigt, dass eine Orientierung an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik keine Erfindung BRUNERs ist. Dennoch hat er die Diskussion mit der Veröffentlichung seines Buches „The Process of Education" 1960 nachhaltig beeinflusst.[45] Seine psychologischen Überlegungen zum Lehren und Lernen Fundamentaler Ideen wurden von JEAN PIAGET aufgegriffen und mit den rein von der Mathematik aus gedachten Strukturen der „Modernen Mathematik"[46] in Verbindung gebracht. Somit schienen sich die psycho-

---

[45] Im englischen Original ist „The Process of Education" 1960 erschienen (Bruner 1960). Ins Deutsche wurde das Buch von WERNER LOCH 1970 übersetzt (Bruner 1970).

[46] Unter diesem Bezeichner wird in der vorliegenden Arbeit die neue Sichtweise auf Mathematik gefasst, welche sich im 19. Jahrhundert und Anfang des 20. Jahrhunderts entwickelte und im Wesentlichen durch das Zusammenwirken dreier wissenschaftlicher Strömungen gekennzeichnet ist (vgl. Kapitel 4.3.1). Gemeint sind die Ausbildung der modernen Axiomatik, der formalen Logik und des Strukturdenkens (Schuberth 1971).

Moderne Axiomatik bezeichnet dabei die Methode, welche DAVID HILBERT für einen widerspruchsfreien Aufbau der Geometrie wählte, die nicht mehr auf die Grundbegriffe (beispielsweise Punkte, Geraden, Ebene) bezog, sondern die Beziehungen zwischen diesen Grundbegriffen zum Untersuchungsgegenstand macht. Modern ist diese Axiomatik insofern, als HILBERT mit ihr grundsätzlich keine inhaltliche Begriffsbildung mehr miteinbezieht. Die EUKLIDische Axiomatik war dagegen noch von, wenn auch abstrakten, Vorstellungen ihrer Grundbegriffe ausgegangen. Ohne inhaltliche Vorstellung der Grundbegriffe einer Theorie war eine Wendung vom „Geometrisch-Anschaulichen" zum „Logisch-Denkbaren" vollzogen (Schuberth 1971, S. 28), die sich auch in anderen Bereichen der Mathematik widerspiegelte.

So beispielsweise auch bei der Begründung der „modernen Mengenlehre" durch GEORG CANTOR. CANTOR betrachtete 1874 erstmals verschiedene Stufen von Unendlichkeit, indem er zeigte, dass sich zwar die algebraischen Zahlen bijektiv auf die natürlichen Zahlen abbilden lassen, es eine solche Bijektion zwischen reellen und natürlichen Zahlen allerdings nicht gibt (Lexikon der Mathematik 2001). RICHARD DEDEKIND, der in engem Austausch mit CANTOR stand, stellte 1888 einen „ersten mengentheoretischen Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den reellen Zahlen" vor (Lexikon der Mathematik 2001, S. 284). Einige Jahre später zeigte sich dann, dass die CANTORsche Mengenlehre allerdings nicht geeignet war, die gesamte Mathematik zu begründen, da sich insbesondere aus der unendlichen Menge Widersprüche ergaben. Ein berühmter Widerspruch ist die RUSSELLsche Antinomie von 1902, auf die in Kapitel 3.2.2 eingegangen wird. Etwa zur gleichen Zeit gab GOTTLOB FREGE ein Axiomensystem für die Mengenlehre an, welches ebenfalls zu Widersprüchen führte. „Dennoch stellt Freges Arbeit praktisch den Anfang der axiomatischen Mengenlehre" und den Beginn einer Reihe von Versuchen, die Mathematik durch ein widerspruchsfreies Axiomensystem zu beschreiben, dar (Lexikon der Mathematik 2001, S. 285). Auch HILBERT stellte einen solchen Versuch vor. Er entwickelte einen formalen Logikkalkül, der konsequent inhaltliches und formales Denken trennte und mit dessen Hilfe er hoffte, „grundsätzliche Sicherheit vor Widersprüchen zu gewinnen" (Schuberth 1971, S. 34).

Obwohl dieses sogenannte HILBERT-Programm seit 1931 durch den GÖDELschen Unvollständigkeitssatz als gescheitert angesehen werden kann, wurden das dort vorherrschende Systemdenken und der Formalismus zu grundlegenden Instrumenten in der mathematischen Forschung. Beispiele hierfür sind die Arbeiten von ANDREI NIKOLOJEWITSCH KOLMOGOROV für die Wahrscheinlichkeitstheorie und von EMMY NOETHER für die Algebra (Otte 1974, S. 11 f.). Angeregt durch die Arbeit von NOETHER, welche die grundsätzlichen Arbeiten von ÉVARISTE GALOIS zum Gruppenbegriff und der damit verbundenen Entwicklung der Algebra weg von einer Lehre des Gleichungslösens hin zu einer Untersuchung und Beschreibung von mathematischen Strukturen aufgriff, identifiziert die BOURBAKI-Gruppe die sogenannten „Mutterstrukturen" („algebraische Struktulogischen und die mathematischen Ideen in idealer Weise in den mathematischen Begriffen „Menge, Struktur und Abbildung“[47] zu entsprechen. Dies führte zur Einführung der „Strukturmathematik“[48] in Schulen, welche insbesondere mathematische Begriffe abgekoppelt von ihrem Alltagsgebrauch und ihrer historischen Genese betonte. Damit wird Mathematik auf Aspekte der Theorie- und Begriffsideen beschränkt.

BRUNERs Überlegungen sind in Kapitel 3.1 dargestellt. Das Aufgreifen und Weiterentwickeln seiner Theorie von psychologischer und mathematischer Seite ist in Kapitel 3.2 nachgezeichnet. Dass BRUNER seine Fundamentalen Ideen allerdings von Anfang an breiter gedacht hat, zeigt die Einordnung seiner Konzeption Fundamentaler Ideen in seine weitere Forschung. Anhand seines Buches „Towards a Theory of Instruction“ (Bruner 1974) wird in Kapitel 3.3 gezeigt, dass BRUNER auch Aspekte im Blick hatte, die im Ideenkatalog von LAMBERT den Prozess- und Tätigkeits- und Schnittstellenideen zugeordnet werden können. Zudem berücksichtigt BRUNERs Theorie auch „Nichtkognitive“ Ziele, die bei der Aneignung und Auseinandersetzungen mit Fundamentalen Ideen deutlich werden.

Als direkte Reaktion auf die Fehlentwicklung für den schulischen Unterricht können auch die deutschsprachigen mathematikdidaktischen Arbeiten zum

---

ren“, „Ordnungsstrukturen“ und „topologische Strukturen“) zur Ordnung und Neustrukturierung der gesamten Mathematik (Bourbaki 1974, S. 149 f.). Das speziell bei BOURBAKI vorherrschende Strukturdenken und die dort verwendeten Begriffe, insbesondere der Gruppenbegriff, wurden von PIAGET aufgegriffen und mit der kognitionspsychologischen Entwicklung des Lerners in Verbindung gebracht. Dies u.a. führte zur Einführung der „Strukturmathematik“ in der Schule, vgl. Kapitel 3.2.2.

[47] Wie in Kapitel 1 erwähnt, wählt STEINER diese drei Begriffe aus der Vielzahl neuer strukturmathematischer Begriffe, da sie ihm als Leitlinien für den Mathematikunterricht besonders geeignet scheinen. Sie verkörpern zentrale Elemente der „Modernen Mathematik“ und gehören deshalb „zu den Grundvoraussetzungen des heutigen Mathematikverständnisses und [...] [müssen] damit eines der wesentlichen Ziele der mathematischen Elementarbildung am Gymnasium sein“ (Steiner 1964/65, S. 260). Die drei Begriffe „Menge, Struktur und Abbildung“ verwendet STEINER (u.a.) da sie „zugleich die Grundkategorien des Mathematisierens“ sind und somit „ein weites Vorfeld der Mathematik, von dem aus Mathematik in Gang gebracht werden kann, in den Bereich der unterrichtlichen Betrachtungen“ tritt (Steiner 1964/65, S. 260). Für STEINER bietet diese Vorfeld „fruchtbare Ansatzpunkte, die Phantasie und die Eigentätigkeit der Schüler anzuregen“ (Steiner 1964/65, S. 260). Da die vorliegende Arbeit die Entwicklungen der strukturmathematischen Welle nur insoweit untersucht, wie sie Einfluss auf das Verständnis Fundamentaler Ideen und deren unterrichtliche Nutzung hatten, werden die von STEINER vorgeschlagenen Begriffe als Schlagworte für die strukturmathematische Ausrichtung des schulischen Mathematikunterrichts verwendet.

[48] Unter diesem Bezeichner werden die Anfang der 1960er Jahre beginnenden und bis ca. Ende der 1970er Jahre anhaltenden Veränderungen in schulischen Mathematikunterricht gefasst, die sich aus der Neustrukturierung der Lerninhalte nach Strukturbegriffen der Modernen Mathematik, wie sie beispielsweise von STEINER (s.o.) genannt werden, richteten. Begleitet wurde diese Neuausrichtung von Unterrichtsinhalten durch einen höheren Grad an Strenge, wie er sich auch in der Fachwissenschaft Mathematik für das Gebiet Analysis und, angeregt durch den Formalismus des HILBERT-Programms, dann für die gesamte Mathematik nachweisen lässt.

Thema Fundamentaler Ideen verstanden werden. Sie knüpfen zwar fast alle[49] direkt an BRUNERs Überlegungen an, vermeiden allerdings Bezüge zur Strukturmathematik. Anders als zuvor sind Fundamentale Ideen nun vor allem mathematische Tätigkeiten. Fundamentale Ideen sind im Prozess des Mathematiktreibens verankert und treiben diesen voran (Schreiber 1979). Obwohl auch weiterhin mathematische Begriffe als fundamental angesehen werden (besonders in bereichsspezifischen Ideenkatalogen, vgl. Kapitel 3.5.3), treten überwiegend Ideen auf, die den Prozess- und Tätigkeitsideen zugeordnet werden können. Mit zunehmend zeitlicher Nähe zur Kompetenzorientierung der aktuellen Bildungsstandards finden sich unter den genannten Fundamentalen Ideen auch Schnittstellenideen (Schweiger 2010). Gegliedert nach den zwei „Urtheorien" von BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER, welche schon in der Einleitung dieser Arbeit zitiert wurden und die zur Theoriegrundlage späterer Arbeiten wurden, werden die mathematikdidaktischen Arbeiten zum Thema „Fundamentale Ideen" in Kapitel 3.5.2 vorgestellt. Arbeiten, die Fundamentale Ideen eines Teilgebiets der Mathematik (zu denen hier auch die Informatik gezählt wird)[50] erarbeiten, sind in Kapitel 3.5.3 zusammengefasst. Den Abschluss der historischen Analyse (Kapitel 3.5.4) bildet die Betrachtung der Dissertation von VOHNS, der Fundamentale Ideen erstmals explizit als Analysewerkzeug für Unterrichtsinhalte nutzt. Somit liefert seine Arbeit wichtige Bezugspunkte für die in Kapitel 6 vorgeschlagene unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen mithilfe des Vernetzungspentagraphen.

3.1 Ein Anfang: JEROME BRUNER

BRUNER brachte den Begriff „fundamental idea" mit der Veröffentlichung seines Buches „The Process of Education" nachhaltig in die pädagogische (und später auch in die didaktische) Diskussion ein. Bei dem Buch handelt es sich um eine zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse einer von BRUNER geleiteten

[49] Auf Arbeiten, die keinen direkten Bezug zu BRUNER zeigen, wird in Abschnitt 3.5.1 eingegangen. Sie stellen die Bedeutsamkeit Fundamentaler Ideen für den Unterricht heraus, indem sie diese in Verbindung mit Bildungszielen setzen. Für den Unterricht sehen sie den Lehrer in der Pflicht, mathematisch bedeutsame Ideen auszuwählen und diese inhaltlich so aufzubereiten, dass eine echte Auseinandersetzung mit Mathematik im Unterricht erlebt werden kann. Diese Auseinandersetzung wird als Ausgangspunkt für Bildung angesehen. Diese Akzentuierung Fundamentaler Ideen bildet einen Ankerpunkt für die in Kapitel 5 vorgeschlagene unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen als Analysewerkzeug für Unterrichtsinhalte durch den Lehrer.

[50] Auf Berührpunkte zwischen Mathematik und Informatik wurde im Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik" der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) auch schon unter dem Aspekt der Fundamentalen Ideen beider Fachrichtungen diskutiert (Hischer 1995). Dieser Diskurs wird in Kapitel 3.5.3 in Grundzügen aufgegriffen. Da Informatik in den meisten Bundesländern (noch?) nicht als eigenständiges Schulfach etabliert ist, bietet es sich zur Zeit an, informatische Inhalte (soweit möglich) im Mathematikunterricht zu integrieren. Für einige inhaltliche Themengebiete liegen dazu bereits didaktische Vorschläge vor, beispielsweise (Lambert/Selzer 2005) für die Diskretisierung und (von der Bank 2016) für Approximationsalgorithmen.

Konferenz in Woods Hole im September 1959. Dort berieten unter anderem Erziehungswissenschaftler, Lehrer, Psychologen und Fachwissenschaftler über die weitere Entwicklung und Verbesserung des (naturwissenschaftlichen) Unterrichts der Grund- und weiterführenden Schulen (Bruner 1970, S. 13).

Sowohl BRUNERs Buch als auch die vorangegangene Konferenz stehen im Zeichen einer bildungspolitischen Umbruchstimmung. Durch den enormen Ausbau der Rüstungsindustrie während des 2. Weltkrieges und des aufkommenden Kalten Krieges stieg das Bruttoinlandsprodukt der USA ständig an. Demokratie und Kapitalismus schienen vielen Amerikanern Garanten für technologischen und wirtschaftlichen Fortschritt. Damit ging ein Überlegenheitsgefühl gegenüber anderen Nationen einher, besonders gegenüber der UdSSR. Dieses Selbstverständnis wurde grundlegend erschüttert, als am 4. Oktober 1957 die Sowjetunion den ersten künstlichen Erdsatelliten startete. Politisch wurde dieses Ereignis (genannt „Sputnik-Schock") in den USA genutzt, um die staatlichen Förderungen der amerikanischen Rüstungsindustrie aufzustocken, da nun ein direkter nuklearer Raketenangriff der Sowjetunion auf die USA möglich schien. Gleichzeitig begegnete die Regierung unter Dwight D. Eisenhower dem vermeintlichen „Bildungsrückstand" gegenüber der Sowjetunion mit einer stärkeren finanziellen Förderung des Bildungssystems.[51] BRUNER selbst spricht von einer Krise der nationalen Sicherheit, „für deren Bewältigung es auf eine gut ausgebildete Bürgerschaft ankommt" (Bruner 1970, S. 16).

Als Ursache für diesen vermeintlichen „Bildungsrückstand" nennt BRUNER die unzureichende Entwicklung der Curricula in den letzten fünfzig Jahren. Diese begründet er zum einen dadurch, dass führende Wissenschaftler und

> die an der Spitze ihrer Disziplinen stehenden Gelehrten, die den größten Beitrag zu einer grundlegenden Reorganisation ihres Fachgebietes hätten leisten können, an der Entwicklung von Curricula für Primar- und Sekundarschulen nicht beteiligt [waren].
>
> (Bruner 1970, S. 18)

Das führte dazu, dass der „Kontakt" zwischen den schulischen Lehrstoffen und den universitären Lehrgegenständen abbrach und so „die Unterrichtsprogramme der Schulen das Wissen unserer Zeit oft ungenügend oder gar unrichtig dargeboten" haben (Bruner 1970, S. 18).

---

[51] Der Ministerrat der „Organisation for Economic Cooperation and Development" (OECD) hatte 1961 beschlossen, das Sozialprodukt aller beteiligten Länder bis 1970 um 50% zu steigern. SCHOENE, der Delegierte der BRD bei der OECD, beschreibt eine Konsequenz dieser Forderung: „Die geforderte Entwicklung verlangt aber ein Arbeitskräftepotential (human resources), das in dieser Form nur durch die Schulen herangebildet werden kann" (Schoene 1962, S. 468).

Als weiteren Grund gibt er an, dass wichtige Bezugswissenschaften wie Lern- und Erziehungspsychologie sich nicht mehr ganzheitlich mit dem Curriculumsproblem beschäftigten (Bruner 1970, S. 19).

Beide genannten Entwicklungen beschreibt BRUNER als rückläufig und hebt hervor, dass neuerdings wieder viele Wissenschaftler an der Entwicklung und Planung des Schulunterrichts auf ihrem Fachgebiet beteiligt sind (Bruner 1970, S. 18). Im Zuge der Erforschung des sogenannten „nicht-spezifischen“ Transfers wurde das Interesse verschiedener psychologischer Disziplinen an

> jenen Formen komplexen Lernens neu belebt, wie man sie in der Schule findet: eines Lernens, durch welches ein allgemeines Verständnis für die Struktur eines Unterrichtsgegenstandes erreicht werden soll.
>
> (Bruner 1970, S. 20 f.)

Besonders diese Art des Transfers (engl: transfer of principles and attitudes) bildet für BRUNER den Kern des „Erziehungsprozesses“. Er unterscheidet sich vom spezifischen Übergangstransfer dadurch,

> daß man anfangs nicht eine Fertigkeit (skill) erlernt, sondern einen allgemeinen Begriff (general idea). Dieser kann dann als Basis dafür genutzt werden, spätere Probleme als Sonderfälle des ursprünglich erlernten Begriffs [(idea)] zu erkennen.
>
> (Bruner 1970, S. 30)[52]

Lernen besteht dann aus

> the continual broadening and deepening of knowledge in terms of basic and general ideas.
>
> (Bruner 1960, S. 17)

Dazu ist ein Curriculum notwendig,

> [that] should revisit these basic ideas repeatedly, building upon them until the student has grasped the full formal apparatus that goes with them.
>
> (Bruner 1960, S. 13)

Der Forderung nach einem spiraligen Aufbau des Curriculums liegt die berühmte Hypothese BRUNERs zugrunde „that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development“ (Bruner 1960, S. 33).

---

[52] An den folgenden Stellen ist ein Rückgriff auf die englische Originalliteratur unverzichtbar, da ab dieser Stelle der deutschen Übersetzung in (Bruner 1970) der englische Begriff „idea“ häufig mit dem deutschen Bezeichner „Begriff“ übersetzt wird. An vorherigen Textstellen findet sich noch die Übersetzung von „basic ideas“ (Bruner 1960 S. 12) mit „basalen Ideen“ (Bruner 1970, S. 26). Es ist in der deutschen Übersetzung nicht klar nachzuvollziehen, warum unterschiedliche Bezeichner an den verschiedenen Stellen gewählt wurden. Daher trägt die deutschsprachige Übersetzung hier wenig zur Begriffsklärung bei (vgl. Kapitel 4.1).

Wichtig ist hier, dass BRUNER nicht jeden beliebigen Lehrgegenstand („subject“) meint, sondern seiner Hypothese zur Voraussetzung macht

> that any idea can be represented honestly and usefully in the thought forms of children of school age, and that these first representations can later be made more powerful and precise the more easily by virtue of this early learning.
>
> (Bruner 1960, S. 33)

BRUNER umschreibt „basic ideas“, die auch häufig mit „fundamental ideas“ bezeichnet werden, als

> ideas that lie at the heart of all sciences and mathematic [...] [and] are as simple as they are powerful [...]
>
> (Bruner 1960, S. 12)

> The more fundamental or basic is the idea [...], almost by definition, the greater will be its breadth of applicability to new problems. Indeed, this is almost a tautology, for what is meant by “fundamental” in this sense is precisely that an idea has wide as well as powerful applicability.
>
> (Bruner 1960, S. 18)

Damit also Lernen durch nicht-spezifischen Transfer möglich ist, muss der Lernende wissen, ob eine vorher gelernte „idea“ auf einen neuen Lerngegenstand anwendbar ist. Dazu ist es nach BRUNER unabdingbar, die Struktur des Lerngegenstandes zu beherrschen.

> Die Struktur eines Themas begreifen heißt, es so zu verstehen, daß viele andere Dinge dazu in eine sinnvolle Beziehung gesetzt werden können. Kurz: Die Struktur lernen, heißt lernen, wie die Dinge aufeinander bezogen sind.
>
> (Bruner 1970, S. 22)

Obwohl BRUNER an einigen Stellen die Bezeichner „fundamental structure“ und „fundamental idea“ nahezu synonym verwendet, sprechen obige Zitate gegen eine inhaltliche Gleichsetzung der Begriffe.[53] Fundamentale Ideen sind als allgemeine Konzepte zu verstehen, die gewissermaßen zu Grundlagen von Lernprozessen werden können. Mit Struktur ist eine Beschaffenheit eines Themas gemeint, die

---

[53] Die Betonung der „Struktur eines Lehrgegenstandes“ ist natürlich keine Erfindung BRUNERs. Seit ca. 1900 nutzten viele Wissenschaftsgebiete wie beispielsweise die Physik, die Psychologie, die Soziologie, die Linguistik und die Ethnologie den Strukturbegriff als Erkenntniswerkzeug (Scharlau 1996 S. 79). BRUNER versuchte nun (wohl beeinflusst durch die Arbeit von PIAGET), den Strukturbegriff auf die Kognitionspsychologie zu übertragen und somit das Denken durch Fachwissenschaftliche Strukturen zu beschreiben. Für den Mathematikunterricht hatte die Vermischung der Begriffe „Struktur der Mathematik“ im Sinne der Modernen Mathematik und „Fundamentale Ideen der Mathematik“ im Sinne BRUNERs ganz erhebliche negativen Auswirkungen (vgl. Kapitel 3.2.2 und 3.2.3).

ein Erkennen[54] von Zusammenhängen zwischen (vorher) gelernten Fundamentalen Ideen und neuen Lerngegenständen (des Themas) zulässt. Somit stiftet Struktur nach BRUNER Verbindung zwischen verschiedenen Lerngegenständen durch Fundamentale Ideen, die ihnen zugrunde liegen. Die Struktur eines Gegenstandes schafft demnach Vernetzungen zwischen ihm und weiteren Lerngegenständen.

Vereinfacht gesprochen fordert BRUNER die Entwicklung eines Curriculums, welches aufbauend auf Fundamentalen Ideen den Erwerb von vernetztem Wissen zulässt. Von einem solchen Curriculum erhofft[55] sich BRUNER folgende vier Vorteile (vgl. BRUNER 1970, S. 35-38).

1. Der Lehrgegenstand wird fasslicher, da er als Spezialfall einer vorher gelernten Fundamentalen Idee erkannt werden kann und so in die Gesamtstruktur des Gelernten eingeordnet werden kann.
2. Das Gedächtnis wird entlastet, da nicht mehr zusammenhanglose Einzelheiten gelernt werden, sondern allgemeine Prinzipien. „Das Erlernen allgemeiner oder grundlegender Prinzipien [engl. general or fundamental principles] schützt uns davor, daß ein Erinnerungsverlust keinen völligen Verlust bedeutet, daß das was übrig bleibt, uns nötigenfalls ermöglicht, die Einzelheiten zu rekonstruieren." (Bruner 1970, S. 37).
3. Der „nicht-spezifische Transfer" wird erlernt.
4. Dadurch, dass der Unterrichtsstoff der Primar- und Sekundarschulen ständig auf „seinen fundamentalen Charakter hin überprüft wird, [wird] der Abgrund zwischen ‚fortgeschrittenem' und ‚elementarem' Wissen [verringert]" (Bruner 1970, S. 37).

Was sich zunächst auf eine so einfache und anerkannte Formel bringen lässt, erweist sich in der Umsetzung als höchst problematisch. BRUNER selbst weist auf einige Schwierigkeiten hin.

> Das nächstliegende, offenkundigste Problem besteht darin, wie solche Curricula anzulegen sind, nach denen durchschnittliche Schüler von durchschnittlichen Lehrern unterrichtet werden können und aus denen zugleich die grundlegenden oder tragenden Prinzipien der verschiedenen Wissenschaftsbereiche deutlich hervorgehen.
>
> (Bruner 1960, S. 18)

[54] Wiedererkennen meint in diesem Kontext das Erkennen einer allgemeinen Fundamentalen Idee in einer neuen (spezielleren) Lernsituation (Bruner 1970, S. 25). Dieser Aspekt im Umgang mit Fundamentalen Ideen, das Sehen des Allgemeinen im Speziellen, findet sich schon bei ALFRED NORTH WHITEHEAD (Whitehead 1962), vgl. Kapitel 3.5.1

[55] BRUNER formuliert die Vorteile einer Orientierung an Fundamentalen Ideen und der Struktur eines Faches bewusst als „Behauptungen, die noch einer eingehenden Behandlung bedürfen" (Bruner 1970, S. 35).

Bruner folgend lässt sich die Frage nach den Inhalten und dem Aufbau eines Curriculums, welches die Struktur und die zugrunde liegenden Fundamentalen Ideen eines Lehrgegenstandes betont, nur „mit der Hilfe von Personen von großer Weitsicht und Kompetenz auf diesen Gebieten“ entscheiden (Bruner 1970, S. 32). Diese Aussage beinhaltet allerdings in keiner Weise, dass Bruner die Auswahl von Inhalten allein Wissenschaftlern der einzelnen Fachgebiete überlassen will.[56] Die von Wissenschaftlern benannten Fundamentalen Ideen müssen vielmehr zusammen mit „erfahrenen Lehrkräften und Fachleuten für die Entwicklungspsychologie des Kindes“ zu Lehrplänen ausgearbeitet werden (Bruner 1970, S. 43).[57]

Damit gibt Bruner das Problem des Findens Fundamentaler Ideen (scheinbar) an praktizierende Wissenschaftler weiter[58] und geht dabei davon aus, dass durch Zusammenarbeit der besten Köpfe einer jeden Fachwissenschaft Einigkeit über Inhalte und Ziele von Unterricht erreicht werden kann.[59]

In den Jahren nach der Veröffentlichung von „The Process of Education“ haben sich namhafte Mathematiker mit der Suche nach „Grundbausteinen“ der Wissenschaft Mathematik beschäftigt. Exemplarisch soll auf die Überlegungen von Michael Francis Atiyah und Paul Richard Halmos im nächsten Abschnitt eingegangen werden.

3.2 Elements of mathematics, Basic ideas und Mutterstrukturen

Wie oben beschrieben sind Bruners Überlegungen in einer bildungspolitischen Umbruchzeit entstanden. Sie können als Vorboten einer stärkeren Wissenschaftsorientierung des Mathematikunterrichts der Schulen angesehen werden, die mit der Einführung der Mengenlehre und abstrakter mathematischer Strukturbegriffe verbunden war. Bevor auf diese Entwicklung und ihre weitreichenden Folgen für das Schulsystem eingegangen wird, sollen zwei Ansätze gesondert vorgestellt werden. Gemeinsam ist ihnen, dass ihre Intention keine Reform des schulischen Mathematikunterrichts (oder der mathematischen Lehre im weiteren Sinne) ist. Sie liefern vielmehr einen Blick in fachmathematische Diskussio-

---

[56] Eine solche (Fehl-)Interpretation findet sich häufig als Kritik am Brunerschen Ansatz in der fachdidaktischen Diskussion (vgl. beispielsweise Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 37).

[57] Bruner hebt gleichwohl die Wichtigkeit einer Zusammenarbeit mit den führenden Wissenschaftlern an weiteren Stellen seines Buches hervor. In Kapitel 3.3 wird noch einmal darauf zurückzukommen sein.

[58] In seinem Buch finden sich als Beispiele für Fundamentale Ideen der Mathematik die „Ideen der Ordnung“ als Kern des Faches Mathematik und „Zahl“, „Maß“, „Wahrscheinlichkeit“ (Bruner 1970, S. 28 und S. 63).

[59] Dass ein Katalog von Inhalten und Zielen, selbst wenn er im Konsens der führenden Wissenschaftler erstellt wird, immer nur vorübergehend Gültigkeit behalten kann, erläutert Bruner schon in der Einleitung seines Buches (Bruner 1970, S. 23).

nen „Fundamentaler Ideen“, die zu Ansatzpunkten weiterer mathematischer Forschungen werden können.

3.2.1 Exemplarische mathematische Sichtweisen

1976 beschrieb der englische Mathematiker ATIYAH in seiner Rede vor dem 3th International Congress of Mathematical Education einige wesentliche Ideen der „Modernen Mathematik“.

> The best part of modern mathematics is its emphasis on a few basic ideas such as symmetrie, continuity and linearity which have very wide applications.

(Atiyah 1976, S. 73 f.)

ATIYAH wählt diese drei Ideen, da sie ihm zum einen zur Strukturierung des schulischen Unterrichts geeignet scheinen („[They] should be reflected in teaching whenever possible“, S. 74). Zum anderen zeichnen sich diese Ideen durch ihre langandauernde Relevanz (engl. „longterm trends“) für die mathematische Forschung und durch ihren verbindenden Charakter aus (Atiyah 1976, S. 61). ATIYAH zeigt dies für die Gebiete der modernen Algebra und Topologie. Dabei zeigt er immer wieder auf, wie diese modernen Gebiete der Mathematik mit dem traditionellen Gebiet Geometrie verknüpft sind.[60] Diese möglichen Verbindungen (Vernetzungen) von Gebieten der Mathematik durch Ideen macht ATIYAH zu seiner Hauptthese.

> As you will have gathered by now my main theme is that modern mathematics is not as divorced from traditional mathematics as is sometimes implied [...] the difference is more in the manner than in the substance [...]

(Atiyah 1976, S. 73)

Die angesprochene „Substanz“ bildet gerade die oben genannten Ideen. Schon die geringe Zahl der Ideen macht deutlich, dass es ihm nicht um die Erarbeitung eines (auch für die Schule) tragfähigen Katalogs Fundamentaler Ideen der Mathematik, wie ihn BRUNER fordert, geht. ATIYAH begründet dies dadurch, dass seine Überlegungen subjektiv durch seine Forschungsschwerpunkte gefärbt („I cannot do equal justice to all parts of mathematics“, S. 61) und seine Kenntnisse des Aufbaus der Schulmathematik unzureichend sind („It may be [...] that my information about what goes on in the educational world is inadequate“. S. 74).

[60] ATIYAH zieht die Grenze zwischen moderner und traditioneller Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Er bemerkt dazu, dass diese Grenze daher rührt, dass „the years since 1900 have seen a general drift in the centre of gravity of mathematics“ (Atiyah 1976, S. 62). Für ATIYAH stellen die Anwendung der modernen Axiomatik und des Formalismus auf die gesamte Mathematik eine Zäsur zu Beginn des 19. Jahrhunderts dar. Damit ist auch klar, dass ATIYAH unter den modernen Gebieten Algebra und Topologie die strukturgeprägte Sichtweise auf diese Gebiete meint. Diese zu Beginn des 20. Jahrhunderts aufkommende Sichtweise ist dann natürlich wesentlich neuer als die euklidische Geometrie.

Dennoch konkretisieren ATIYAHs Kriterien für Fundamentale Ideen BRUNERs Überlegungen. Fundamentale Ideen sollen demnach inhaltliche Vernetzungen ermöglichen, da sie gebietsübergreifend „verbindenden Charakter“ (s.o.) haben, und zum anderen sollen sie durch ihre Langzeitwirkung auch Zusammenhänge zur Genese der Mathematik erkennen lassen.

ATIYAHs Überlegungen zur Vernetzung mittels Fundamentaler Ideen finden sich expliziter in den strukturierten Kriterienkatalogen mathematikdidaktischer Arbeiten wieder. Dort, sowie in der vorliegenden Arbeit, spielen zudem weitere Vernetzungen (bspw. zwischen Mathematik und der übrigen Welt) eine Rolle.

Zwar auch für seine Forschungsgebiete konzipiert, aber dennoch wesentlich umfangreicher entwickelt der amerikanische Mathematiker ungarischer Herkunft HALMOS einen Ideenkatalog. In seinem 1981 erschienenen Artikel fragte er „Does Mathematics have Elements?“ (Halmos 1981). HALMOS fordert auf, es den Chemikern gleich zu tun und auch als Mathematiker nach den Bausteinen, den „elements“ der Mathematik zu fragen.

> No doubt many mathematicians have noted that there are some basic ideas that keep cropping up in widely different parts of their subject, combining and recombining with one another in a way faintly reminiscent of how all matter is made up of elements. A subconsciuos intuitive awareness of these „elements“ of mathematics probably contributes to (possibly it constitutes) the research insight that distinguishes great mathematicians from ordinary mortals.

(Halmos 1981, S. 147)

Die angesprochenen „basic ideas“ sind nach Halmos Bausteine von Mathematik, die in vielen Bereichen zu Anwendung kommen können und daher Vernetzungen schaffen. Für HALMOS haben diese „ideas“ zunächst ihre Existenz im Unterbewussten. Er spricht von „intuitive awareness“ des Mathematikers gegenüber solchen „Elementen“. Diese Intuition stellt für HALMOS die Basis mathematischer Forschung dar, da sie den Mathematiker im Forschungsprozess zur Eingebung („insight“) gelangen lässt. Auf ähnliche Momente im mathematischen Forschungsprozess haben auch vor HALMOS schon POINCARÉ und HADAMARD hingewiesen. Wie auch POINCARÉ sieht HALMOS in der Eingebung jene Eigenschaft, welche große Mathematiker besitzen und andere nicht.[61] Zum Entdecken der beschriebenen „Elemente“ bedarf es also großer mathematischer Weitsicht.

Exemplarisch hebt HALMOS drei potentielle „Elemente“ der Mathematik hervor: „geometric series“, „quotient structures“ und „eigenvectors“. Diese drei Beispiele

[61] HALMOS hatte sich schon 1968 zu der in obigem Zitat angesprochenen „intuitive awareness“, die Mathematiker bei ihrer Forschung leitet, geäußert (Halmos 1968). In Kapitel 4.5 der vorliegenden Arbeit wird die Fundamentale Idee „Intuition“, welche nicht nur von HALMOS als für mathematische Forschung wesentlich eingeschätzt wird, als Persönlichkeitsidee vorgestellt.

stellen für HALMOS Prototypen für drei Klassen/Arten von möglichen Elementen dar, die er mit den Worten „computational“, „categorial“ und „conceptual“ beschreibt. Dabei gehören „geometric series“ zur Klasse „computational“, „quotient structures“ zur Klasse „categorial“ und „eigenvectors“ zur Klasse „conceptual“ (Halmos 1981, S. 147). HALMOS erarbeitet im Folgenden einen ausführlicheren Katalog von Elementen, die er den Klassen „categorial“ und „conceptual“ zuordnet.

- Universal algebra: Structures, Isomorphism, Quotients
- Size: Primes, Duality, Pigeonhole, Infinity
- Compositions: Iteration, Cross section, Exponential
- Analogy: Commutativity, Symmetrie, Continuity

HALMOS nimmt selbst einen relativierenden Blickwinkel zu seinem Katalog ein. Er beschreibt seine Sicht wie folgt:

> I fell like a fumbling freshman disciple of Empedocles, picking „elements“ almost at random, not by controlled observation and careful analysis, but based on private experience and personal intuition.
>
> (Halmos 1981, S. 152)

Damit spricht HALMOS einen wesentlichen Aspekt der Suche nach Fundamentalen Ideen an. Da Fundamentale Ideen stets auch auf die Frage, was der Kern von Mathematik ist, antworten sollen und diese Frage nicht abschließend objektiv beantwortet werden kann, ist ein Ideenkatalog nicht als absolut anzusehen. Diese Einsicht ging bei der Gleichsetzung mathematischer und kognitiver Strukturen und der resultierenden Etablierung der Strukturmathematik in den Schulen verloren (vgl. Kapitel 3.2.2 und 3.2.3). Erst mit den Arbeiten von SCHREIBER/BENDER und SCHWEIGER in den 1980er verloren die Ideenkataloge ihren absoluten Charakter und wurden somit der Veränderung durch wissenschaftlichen Diskurs zugänglich gemacht.[62]

Neben dieser individuellen Färbung des Katalogs fällt auf, dass die meisten der genannten Ideen (Elemente) kaum für den Mathematikunterricht geeignet sind. Im letzten Abschnitt seines Artikels erklärt HALMOS, dass es ihm nicht um die Erarbeitung eines konsensfähigen Katalogs geht, sondern um die Anregung einer Diskussion innerhalb der Fachwissenschaft Mathematik.

> In any event, I know, at best, all I have done was to suggest the existence of a question. If that suggests to others wider applications of the elements I have mentioned, or new elements in parts of mathematics I know nothing about, or steps to-

[62] Besonders deutlich weist (Schweiger 2010) auf die Subjektivität der Ideenkataloge hin und bezeichnet diese als große Chance der Weiterentwicklung der Forschung.

> ward a beautiful and useful theorie of mathematical elements, then I'll have accomplished my mission.
>
> (Halmos 1981, S. 153)

Die Bezeichnung „mathematische Elemente" hat nicht Einzug in die Debatte Fundamentaler Ideen gehalten. HALMOS Vorstellung von Bausteinen, die sich in allen mathematischen Inhalten widerfinden, so wie chemische Elemente in allen Substanzen, stellt eine Metapher für das dar, was mit Fundamentalen Ideen verbunden wird, die in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Diskussion nur selten beispielsweise von SCHWEIGER aufgegriffen wurde.

Die Diskussion von Elementen der Mathematik, zu der HALMOS aufruft, wurde im Sinne der Suche nach Fundamentalen Ideen der Mathematik nach Erscheinen des Buchs „The process of education" von BRUNER sowohl von mathematischer als auch von kognitionspsychologischer Seite betrieben. Jene Entwicklungen, die zur Gleichsetzung von mathematischen und kognitionspsychologischen Strukturen und der damit verbundenen Einführung der Strukturmathematik in den deutschen Schulen führten, sollen im nächsten Kapitel genauer analysiert werden.

3.2.2 Mathematische und kognitionspsychologische Ideen

Getragen wurde die Einführung der Strukturmathematik mit ihren zentralen Begriffen „Menge, Struktur und Abbildung" in der Schule durch Forschungsergebnisse des französischen Kognitionspsychologen PIAGET. Er hatte auf Basis empirischer Untersuchungen ein Modell entwickelt, welches die Denkentwicklung stufenweise beschreibt und das Denken auf einzelnen Stufen mittels des mathematischen Gruppenbegriffs beschreibt.[63] Der Vormarsch der Strukturmathematik zeichnete sich schon auf der von BRUNER geleiteten Konferenz in Woods Hole ab. Dort war BÄRBEL INHELDER[64] aufgefordert worden, „Verfahren zu empfehlen, wie man Kinder schneller durch die verschiedenen Stufen intellektueller Entwicklung im Bereich der Mathematik und Physik führen könne" (Bruner 1970, S. 51).[65] In ihrem dazu verfassten „Memorandum" heißt es (u.a.):

---

[63] PIAGET nutzt den mathematischen Gruppenbegriff, um das Denken der formal-operativen Stufe zu beschreiben. Das Denken der konkret-operativen Stufe beschreibt er durch den Begriff der Gruppierung (Piaget 1973a, S. 36 f.). Ein Unterschied zwischen den beiden Begriffen liegt in der Eindeutigkeit des neutralen Elements, die bei einer Gruppierung nicht gegeben ist. Für eine kritische Diskussion des PIAGETschen Gruppen- bzw. Gruppierungsbegriffs vgl. (Wittmann 1978, S. 219 ff.).

[64] INHELDER war Entwicklungspsychologin und lehrte zu dieser Zeit an der Universität Genf. Sie war zunächst Schülerin, dann Mitarbeiterin und schließlich Nachfolgerin von PIAGET.

[65] Mit den hier angesprochenen Stufen der intellektuellen Entwicklung sind die Stufen der kognitiven Entwicklung von Kindern nach PIAGET gemeint (s.u.).

> Die psychologische Entwicklung entspricht in ihrer Abfolge oft dem axiomatischen Aufbau eines Lehrgegenstandes genauer als der historischen Linie der Begriffsentwicklung innerhalb eines Fachs. Zum Beispiel bemerkt man, daß bestimmte topologische Begriffe wie Verbindung, Trennung, Enthaltensein usw., der Ausbildung von Begriffen aus der euklidischen und darstellenden Geometrie vorausgehen, obgleich die topologischen Begriffe in ihrer formalen Gestalt in der Geschichte der Mathematik neueren Datums sind als die letztgenannten.
>
> (Bruner 1970, S. 53)

Die Bezeichnung „axiomatischen Aufbau“ in obigem Zitat zielt auf den Versuch der Neustrukturierung der gesamten Mathematik durch die BOURBAKI-Gruppe ab und schafft somit einen (scheinbaren) Bezug von mathematischen auf kognitive Strukturen. Hinter dem Pseudonym „BOURBAKI“ verbarg sich ein Mitte der 1930er Jahre zusammengeschlossenes Autorenkollektiv um die französischen Mathematiker und Hochschullehrer ANDRÉ WEIL und JEAN DIEUDONNÉ. Ziel der Gruppe war es zunächst, ein modernes Hochschullehrbuch für die Analysis zu schreiben, da die bis dahin üblichen Lehrbücher als veraltet angesehen wurden.[66] Geleitet wurde das Vorhaben von dem Wunsch nach der „einheitlichen Explizierung der Aspekte und Strukturen des mathematischen Forschungsprozesses, zur Präzision im Interesse der Kommunizierbarkeit“ (Otte 1974, S. 9). Daher sollte das neu zu schreibende Buch so aufgebaut sein, dass sich alle verwendeten Sätze aus zuvor im Buch Bewiesenem ableiten lassen. Die Entwicklung eines „zentralen Kerns“ von vorhandenen mathematischen Erkenntnissen mit stringentem Zusammenhang zu den Grundlagen der Mathematik wurde angestrebt (Bourbaki 1974, S. 142). Der Unterschied zu früheren Versuchen[67] einer einheitlichen Darstellung der Mathematik beschreibt die BOURBAKI-Gruppe wie folgt:

---

[66] Vgl. (Otte 1974, S. 8 f.).

[67] HILBERT setzte mit seiner 1899 erschienenen Schrift „Grundlagen der Geometrie“ entscheidende Impulse für die moderne axiomatische Methode. Diese unterscheidet sich von der klassischen Axiomatik EUKLIDs dadurch, dass sie jegliche inhaltliche Vorstellung ihrer Grundbegriffe vermeidet. So plädierte auch HILBERT dafür, dass konsequent das „Mathematisch-Logische vom Sinnlich-Anschaulichen“ getrennt werden sollte und „auch bei geometrischen Überlegungen keine räumlichen Vorstellungen benutzt werden dürfen“ (Lexikon der Mathematik 2001, S. 405). Zu Beginn des 20 Jahrhunderts untersuchte HILBERT die Grundlegung der Mathematik und entwickelte dazu einen entsprechenden „Logikkalkül des formalen Schließens“, mit dessen Hilfe er einen finiten Beweis der Widerspruchsfreiheit der Mathematik anstrebte (HILBERT-Programm). KURT GÖDEL gelang allerdings 1931 der Nachweis, dass nicht jeder Satz einer „hinreichend aussagekräftigen Theorie“ aus den „Mitteln der Theorie alleine“ bewiesen werden kann (Lexikon der Mathematik 2001, S. 405). Damit galt zwar das HILBERT-Progamm als nicht realisierbar, die „Errungenschaften“ HILBERTs, die „in der Wendung zum Operativen zu sehen [sind], wie sie sich etwa in der neuen Auffassung von Axiomatik auf der Grundlage eines sich stärker entwickelnden Systemdenkens ausdrückt“, wurden zu grundlegenden Instrumenten der Forschung beispielsweise im Bereich der Algebra (Otte 1974, S. 11). Auf das HILBERT-Programm wird in Kapitel 4.3.1 bei der Erläuterung der Theorieideen zurückgekommen.

> wir wollen nicht die Beziehungen der Mathematik zur Wirklichkeit oder den großen Kategorien des Denkens untersuchen; wir beabsichtigen vielmehr, allein im Bereich der Mathematik zu bleiben, und werden versuchen, die oben aufgeworfene Frage [MCvdB: Gibt es eine einheitliche Mathematik oder mehrere getrennte Mathematiken?] zu beantworten, indem wir die Verfahrensweise der Mathematik selbst analysieren.
>
> (Bourbaki 1974; S. 142)

Mit der alle Teilgebiete der Mathematik verbindenden „Verfahrensweise“ ist eine axiomatische Methode gemeint, die aus Axiomen deduktive Schlüsse zieht. Diese Methode ermöglicht eine „Durchschaubarkeit der Mathematik bis in die Tiefe“, da sie in der Lage ist, „die gemeinsamen Ideen dieser scheinbar sehr verschiedenen Theorien zu finden, die oft unter einer Anhäufung von Einzelheiten begraben sind, diese Ideen hervorzuholen und sie ins rechte Licht zu setzen“ (Bourbaki 1974, S. 144).[68]

Um das Vorgehen dieser axiomatischen Methode zu erläutern, definiert die BOURBAKI-Gruppe nun den Begriff der „mathematischen Struktur“.

> Um eine mathematische Struktur zu definieren, nimmt man eine oder mehrere Relationen zwischen diesen (nicht weiter definierten) Elementen als gegeben an [...]; dann postuliert man, daß die gegebenen Relation (oder die gegebenen Relationen) gewisse Bedingungen erfüllen, welche explizit festgesetzt werden und welche die Axiome der betrachteten Struktur sind. Die axiomatische Theorie einer so gegeben Struktur aufstellen, läuft dann hinaus auf die Deduktion der logischen Folgerungen aus den Axiomen dieser Struktur, ohne Berücksichtigung irgendeiner weiteren Hypothese über die betrachteten Elemente oder die Natur dieser Elemente.
>
> (Bourbaki 1974, S. 148-149)

Ausgehend von dieser Definition und der Art der Relation, „die den Ausgangspunkt für die Definition einer Struktur bilde[t]“, extrahiert BOURBAKI drei große Strukturtypen (algebraische Strukturen, Ordnungsstrukturen und topologische Strukturen), die sog. „Mutterstrukuren“ (Bourbaki 1974, S. 149-150). Ausgehend von diesen Mutterstrukturen zeigt BOURBAKI, wie durch Hinzunahme weitere Axiome und durch Kombination der Mutterstrukturen die Theorien verschiedener Gebiete der Mathematik und somit ein Gerüst der ganzen Mathematik als „Hierarchie von Strukturen“ entstehen.

So wird beispielsweise die Theorie der Gruppe durch Hinzunahme eines Axioms, das die Zahl der Gruppenelemente endlich hält, zur algebraischen Struktur der

[68] BOURBAKI knüpfte mit der axiomatischen Darstellung der Mathematik an die Arbeiten von HILBERT zum axiomatischen Aufbau der Geometrie sowie EMMY NOETHER und EMIL ARTIN, mit ihren grundlegenden Arbeiten zur abstrakten Algebra, an (vgl. Schuberth 1971, S. 37). Auf das in diesem Zusammenhang entstandene Lehrbuch zur Algebra von BARTEL LEENDERT VAN DER WAERDEN wird in Kapitel 4.3.1 eingegangen.

endlichen Gruppe (Bourbaki 1974, S. 153). Die Theorien der klassischen Gebiete der Mathematik (Analysis, Zahlentheorie etc.) sind nun als „Kreuzprodukte" zu verstehen, an denen „mehrere allgemeine mathematische Strukturen zusammentreffen und aufeinander einwirken" (Bourbaki 1974, S. 153). Durch die Umstrukturierung des Aufbaus der Mathematik, der nun nicht mehr Inhalte gleicher Natur zu einem Gebiet zusammenfasste, sondern Gebiete nach Strukturen gliederte, die in ihnen enthalten sind, und die damit verbundene Neuerschaffung verschiedener Gebiete (bspw. die topologische Algebra)[69] veränderten die Vorstellung davon, was als Gebiete der Mathematik aufzufassen war. Prinzipiell spricht BOURBAKIs Ansatz demnach Aspekte an, die in den Kategorien der Theorie- und Begriffsideen aufgehoben sind. Die (Weiter-)Entwicklung mathematischer Gebiete sowie der Wandel mathematischer Objekte[70] ist natürlicher Teil wissenschaftlicher Forschung. Mit dem Aufkommen der modernen axiomatischen Methode und dem mit ihr verbundenen Grad der Abstraktion und Strenge veränderte sich die Erkenntnis- und Begründungskultur.

Da der Begriff der Struktur auch in BRUNERs Lerntheorie eine herausragende Rolle spielt und BRUNER die inhaltliche Ausarbeitung seiner Fundamentalen Ideen praktizierenden Wissenschaftlern, wie beispielsweise den Mitgliedern der BOURBAKI-Gruppe, überlassen hatte, meinte man nun, „die ‚fundamentalen Ideen' der Mathematik in ihren Strukturbegriffen und Strukturierungsstrategien gefunden zu haben" (Führer 1997, S. 78).

Ein entscheidendes Bindeglied bei der Gleichsetzung von mathematischen und kognitiven Strukturen, welches besonders im aktuellen Diskurs Fundamentaler Ideen vernachlässigt wird,[71] ist der enge Zusammenhang mit den Entdeckungen der Arbeitsgruppe um PIAGET zur kognitiven Entwicklung bei Kindern.[72] PIAGETs Äquilibrationstheorie geht davon aus, dass das Individuum Schemata durch Organisation und Adaption (unterteilt in Assimilation und Akkommodation) bei der ständigen Auseinandersetzung mit seiner Umwelt (weiter)entwickelt.[73] Die Gesamtheit der dem Individuum zur Verfügung stehenden Schemata nennt PIAGET

[69] Vgl. (Bourbaki 1974, S. 154).

[70] Hier von Definitionen, Begriffen etc. zu deren Relationen.

[71] Beispielsweise erörtert VOHNS 2016 in seiner Zusammenfassung, die einer internationalen Leserschaft einen Eindruck vom Forschungsstand Fundamentaler Ideen im deutschsprachigen Raum liefern soll, zwar die Entwicklungen in der Zeit der Strukturmathematik, lässt dabei allerdings die Arbeiten von PIAGET und dessen Beschreibung des Denkens mittels des mathematischen Gruppenbegriffs außer Acht (Vohns 2016).

[72] Die Theorien PIAGETs, die sich aus jahrzehntelanger Forschungsarbeit ergaben, können im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht im Einzelnen erörtert werden. Dafür sei auf die ausführliche Literatur verwiesen (Steiner 1973), (Steiner 1978), (Scharlau 1996).

[73] Vgl. (Wittmann 1981, S. 59 ff.). WITTMANN definiert Schema (in seiner Lesart PIAGETs) als „flexibel organisiertes, kohärentes, adaptierbares Reflex-, Operations-, Denk-, Beschreibungs- oder Erklärungsmuster, das in die kognitive Gesamtorganisation des Individuums integriert ist und die Aktivitäten des Individuums steuert" (Wittmann 1981, S. 63).

„kognitive Struktur". Diese hilft „dem Individuum, Hindernisse zu überwinden, Informationen zu ermitteln, Neues zu entdecken, die Unsicherheit bei Entscheidungen zu reduzieren, Entscheidungen zu optimieren, Zustände beizubehalten oder zu transformieren, Probleme zu lösen usw.", um so ein immer besseres Gleichgewicht zwischen sich und seiner Umwelt zu erreichen (Wittmann 1981, S. 65). PIAGET folgend müssen drei Merkmale erfüllt sein, um von einer Struktur zu sprechen.

> Wenn wir von ‚Struktur' im allgemeinsten Sinne (mathematische usw.) sprechen, bleibt unsere Definition begrenzt, da wir keineswegs jede beliebige statische ‚Form' einschließen [...] Eine Struktur besitzt erstens Totalitätsgesetze, die andere sind als die ihrer Elemente und die es ihr sogar ermöglichen, von derartigen Elementen ganz abzusehen. Zweitens sind diese Eigenschaften der Gesamtheit Transformationsgesetze, die im Gegensatz stehen zu irgendwelchen Formalgesetzen. Drittens beinhaltet jede Struktur eine Selbstregelung im zweifachen Sinn: Ihr Aufbau führt niemals über ihre Grenzen hinaus und benötigt niemals etwas von außerhalb dieser Grenzen (was sie nicht hindert, sich in Substrukturen zu untergliedern, die die Eigenschaften der Hauptstruktur erben und dennoch jede für sich ihre limitativen Besonderheiten ausbilden). Im Zustand ihrer Vollendung stellt eine Struktur also (im Gegensatz zu ihren eventuellen Entstehungs- und Aufbauphasen) ein geschlossenes System dar (trotzdem kann sie sich ihrerseits als Substruktur in neue, umgreifendere Strukturen integrieren), und diese Geschlossenheit sichert ihre Autonomie und ihre im Inneren wirkenden Kräfte.
>
> (Piaget 1973b, S. 9)

Die kognitive Struktur nimmt also „bei Piaget eine vermittelnde Stellung zwischen den Funktionen der Assimilation und der Akkomodation einerseits und den verschiedenen Umweltsituationen andererseits ein" und „ist die mit verschiedenen Inhalten wiederholbare Form einer Verhaltensweise (einer Handlung oder eines Denkaktes)", also „eine formale Abstraktion von den faktischen Verhaltensweisen" (Steiner 1973, S. 135-136).

Die Ähnlichkeit zu den algebraischen Strukturen BOURBAKIs ist deutlich und von PIAGET gewünscht. Er bemerkt dazu: „Auf mathematischem Gebiet halten wir unserer Meinung nach den BOURBAKI die Treue, deren Strukturalismus spezifisch ist" (Piaget 1973, S. 10).[74] PIAGET sieht als „qualitativ höchste Form der Intelligenz die von der Mathematik und Logik entwickelten symbolischen Denkmodelle an" (Wittmann 1981, S. 60). So verwundert es auch nicht, dass PIAGET eben diese mathematischen Strukturen und Modelle zur Beschreibung eines Teils des qualitativen Verlaufs der Denkentwicklung verwendet.

---

[74] PIAGET beschreibt sogar, dass es in den kognitiven Strukturen von Kindern im Alter von sechs bis sieben Jahren Entsprechungen der drei Mutterstrukturen BOURBAKIs gibt (Piaget 1973, S. 35-41).

Das Team um den Schweizer Entwicklungspsychologen hatte in zahlreichen Versuchen gezeigt, dass sich die Denkentwicklung von Kindern in Stufen/Stadien relativen Gleichgewichts einteilen lässt. Nach PIAGET können vier solcher Stadien unterschieden werden: das sensomotorische Stadium (0-1,5 Jahre), das präoperative Stadium (1,5-7 Jahre), das konkret-operative Stadium (7-11/12 Jahre) und das formal-operative Stadium (ab 11/12 Jahre).[75] Die Entwicklung dieser Stadien verläuft sequenziell und PIAGET ging davon aus, dass alle Kinder die Stufen in der gleichen Reihenfolge durchlaufen und sich im gleichen Alter auch annähernd im gleichen Stadium befinden. Besonders für die Beschreibung der Denkentwicklung des letztgenannten Stadiums, das für den Unterricht der weiterführenden Schulen von besonderer Bedeutung ist, nutzte PIAGET, wie oben angedeutet, logisch-mathematische Strukturen.

Das Denken von Kindern im formal-operativen Stadium zeichnet sich u.a. durch die Fähigkeiten aus, deduktive Schlüsse zu ziehen - das Denken richtet sich nicht mehr nur auf konkrete Objekte, mit denen Operationen ausgeführt werden, sondern diese Operationen können nun selbst wieder zu „Objekten" des Denkens werden, mit denen operiert werden kann - und vollständige kombinatorische Schemata anzuwenden.[76] Mithilfe vieler Versuche glaubte PIAGET nachgewiesen zu haben, dass die somit entwickelte kognitive Struktur sich durch die mathematische Struktur einer Gruppe beschreiben lässt. PIAGET nennt diese Gruppe INRC-Gruppe, nach den gedanklichen Transformationen, zu denen Kinder in diesem Stadium fähig sind (Identität (I), Negation (N), Reziprozität (R) und Korrelation (C)).[77] Mathematisch gesehen handelt es sich bei der INRC-Gruppe um eine KLEINsche Vierergruppe mit den Transformationen als Elementen und den

---

[75] Neben der hier vorgenommen Einteilung gibt es in der Literatur noch weitere Einteilungen, vgl. (Wittmann 1981, S. 70). Zudem ist umstritten, ob auf das formal-operative Stadium ein weiteres Stadium mit höherer Gleichgewichtsform folgt (Scharlau 1996, S. 70).

[76] Kinder im konkret-operativen Stadium bearbeiten Aufgaben, zu deren Lösung kombinatorische Überlegungen notwendig sind, meist unvollständig und/oder unsystematisch. Kinder des formal-operativen Stadiums dagegen sind zur Bildung aller kombinatorischen Möglichkeiten fähig (Neimark 1978, S. 158 f.).

[77] PIAGET benutzt auch den Begriff der „Gruppierung" zur Beschreibung von kognitiven Strukturen im konkret-operativen Stadium (PIAGET 1973a, S. 36 f.). Gruppierungen bilden ein „qualitatives Äquivalent zur mathematischen Gruppe", durch die das Denken erst im formal-operativen Stadium beschrieben werden kann (Steiner 1973, S. 138). Mathematische Unterschiede ergeben sich beispielsweise aus der Definition des neutralen Elements. Während in einer Gruppe ein einziges Identitätselement existiert, gibt es in einer Gruppierung mehrere Identitätsmerkmale (Brainerd 1978). Ein kognitiver Unterschied besteht in der Integration der beiden Reversibilitätsformen „Negation" und „Reziprozität" in eine Struktur, nämlich die der Gruppe. Schon im konkret-operativen Stadium verfügen Kinder über diese beiden Invertierungsformen. Allerdings sind diese getrennt voneinander in zwei verschiedenen Strukturen aufgeteilt, die durch verschiedene Gruppierungen beschrieben werden (Neimark 1978, S. 159). Auf diese Unterscheidung soll hier nicht weiter eingegangen werden. Eine ausführliche Untersuchung des PIAGETschen Gruppierungsbegriffs mit einer Diskussion mathematisch widerspruchsfreier Definitionen findet sich in (Wittmann 1978, S. 219-235).

üblichen Gruppenaxiomen (Abgeschlossenheit, Assoziativität, Existenz eines neutralen Elements, Existenz eines inversen Elements für jedes Gruppenelement, hier ist jedes Element zu sich selbst invers) (Steiner 1973, S. 136). Einer der oben angesprochenen Versuche ist das Experimentieren an der Balkenwaage (Piaget/Inhelder 1977, S. 159 ff.). Zur Erläuterung der psychologischen Relevanz der Vierergruppe und der sich, aus der Verbindung von psychologischen und mathematischen Strukturen ergebenden Problematik soll dieses Experiment nun skizziert werden.

Dem Kind wird eine Balkenwaage gezeigt, an deren beiden Armen im gleichen Abstand zwei gleich schwere Gewichte hängen. Die Waage befindet sich also im Gleichgewicht. Der Versuchsleiter bringt die Waage aus dem Gleichgewicht, indem er das Gewicht auf der einen Seite vergrößert und es in einem größeren Abstand an der Waage aufhängt (vgl. Abbildung 10). Er fragt das Kind nach Möglichkeiten, die Waage wieder ins Gleichgewicht zu bringen.

Abbildung 10 Balkenwaage (links: im Gleichgewicht; rechts: Gleichgewicht wird durch schwereres Gewicht in größerem Abstand gestört)

PIAGET/INHELDER wählen folgende Symbole und Konventionen zur Beschreibung der vier Transformationen.

> Mit p bezeichnen wir die Aussage einer bestimmten Vergrößerung des Gewichts, mit q die gleiche Aussage beim Abstand, mit $\overline{p}$ und $\overline{q}$ die Aussagen einer entsprechenden Verkleinerung des Gewichts und des Abstands auf jeweils dem gleichen Hebelarm der Waage. Die Symbole p′ und q′ entsprechen p und q, ebenso $\overline{p}'$ und $\overline{q}'$ $\overline{p}$ und $\overline{q}$, aber auf einem anderen Hebelarm.
>
> (Piaget/Inhelder 1977, S. 171)

Zur Verknüpfung der Aussagen werden die Operatoren ∨ und ∧ im mathematischen Sinne benutzt. Somit lässt sich die Handlung des Versuchsleiters als verknüpfte Aussage $p \wedge q$ oder als Transformation $I(p \wedge q)$ (die Identität der Aussage) auffassen.

Kinder im formal-operativen Stadium sind zu folgenden gedanklichen Transformationen fähig. Sie können die Waage durch *Negation* ($N(p \wedge q) = \overline{p} \vee \overline{q} = (p \wedge \overline{q}) \vee (\overline{p} \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$) ins Gleichgewicht bringen, wobei alle Negationen gedanklich vollzogen werden können. Sie können also entweder ein größeres Gewicht in kleinerem Abstand oder ein leichteres Gewicht in größerem Abstand oder ein kleineres Gewicht in kleinerem Abstand anhängen und so das Gleichgewicht wieder herstellen. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Transformation *Rezip-*

rozität ($R(p \wedge q) = p' \wedge q'$), welche die ursprüngliche Aussage kompensiert. Dies wird durch die Vergrößerung des Gewichts und seines Abstandes auf dem anderen Arm der Balkenwaage erreicht. Als vierte Transformation ist die Korrelation ($C(p \wedge q) = \overline{p}' \vee \overline{q}' = (p' \wedge \overline{q}') \vee (\overline{p}' \wedge q') \vee (\overline{p}' \wedge \overline{q}')$) möglich. Sie hebt die Reziprozität auf und bildet somit deren Negation. Es gilt also $CR = N$ und, wovon man sich schnell überzeugen kann, auch $NR = C$ und $NC = R$. Die Transformationen sind demnach untereinander ersetzbar, was auf mathematischer Seite der Abgeschlossenheit einer Gruppe entspricht. Die anderen oben genannten Axiome der Vierergruppe werden für die Transformationen in (Neimark 1987) begründet.

Zusammenfassend ergeben die Transformationen und ihre Beziehungen untereinander folgendes Schema.

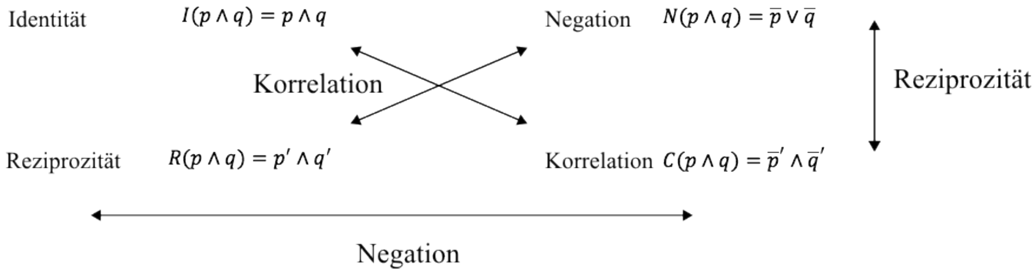


Abbildung 11 Zusammenfassung der möglichen Transformationen beim Experiment an der Balkenwaage

Das Experiment und die an ihm möglichen gedanklichen Transformationen wurden ausführlich beschrieben, da sich aus der dadurch erfolgten Beschreibung kognitiver Strukturen durch mathematische Strukturen einige Probleme ergeben. Zunächst wird auf einige Schwierigkeiten eingegangen, die direkt aus dieser Beschreibung resultieren, um danach auf einige Probleme hinzuweisen, die sich aus der Übertragung des „BOURBAKIsch-PIAGETschen“ Ansatzes auf den schulischen Unterricht ergaben.

Ein erstes Problem liegt in der Interpretation der physikalischen Transformationsgruppe INRC als logische Gruppe. PIAGET beobachtete im Verhalten seiner Probanden physikalische Transformationen als Handlungen an der Balkenwaage. Daraus lässt sich nicht ohne Weiteres schließen, dass auch die gedankliche Struktur der Probanden als logische Gruppe vorhanden ist (Steiner 1973, S. 137).[78] Dies wird besonders deutlich im Zusammenhang mit der Stufentheorie PIAGETs. Weiter oben wurde bereits erwähnt, dass ein Unterschied zwischen konkret-operativem und formal-operativem Stadium in der Integration der bei-

[78] An PIAGETs experimenteller Forschung wurde immer wieder kritisiert, dass die von ihm eingesetzte Forschungsmethode, die „klinische Methode“, Artefakte produzieren würde, da es durch die geführten Interviews zur Überinterpretation kommen könnte. Ein weiterer Kritikpunkt (auf den in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen werden kann) ist die Ausblendung von unterschiedlichen kulturellen, sozialen und schulischen Einflüssen auf die Leistung von Kindern, vgl. dazu (Neimark 1978, S. 165 ff.) und (Scharlau 1996, S. 71).

den Reversibilitätsformen (Negation und Reziprozität) zu einem System im letztgenannten Stadium besteht. Die somit entstandene Struktur weist (PIAGET folgend) Gruppenaxiome auf und unterscheidet sich damit qualitativ von den Gruppierungen, welche die kognitive Struktur im konkret-operativen Stadium beschreiben. Weitere Forschungen konnten allerdings feststellen, dass es durchaus Situationen gibt, in denen Kinder des konkret-operativen Stadiums zu beiden Reversibilitätsformen gleichzeitig fähig sind (Steiner 1973, S. 139). Der Begriff der Gruppierung, wie er von PIAGET definiert wurde, reicht demnach nicht zur Beschreibung dieser kognitiven Struktur aus. Andererseits ist es heute unbestritten, dass auch innerhalb eines Stadiums nicht alle Operationen gleichzeitig ausgeprägt werden. Diese zeitliche Verzögerung lässt sich ebenfalls nicht in den von PIAGET gewählten mathematischen Strukturen fassen (Brainerd 1978, S. 216).

Noch auf einen letzten Punkt soll hingewiesen werden, der ebenfalls von BRAINERD kritisiert wird. Er argumentiert, dass mathematische Strukturen nicht ohne weiteres zur Beschreibung von qualitativen Unterschieden in der kognitiven Entwicklung genutzt werden können. Beispielweise stellt der mathematische Unterschied zwischen den PIAGETschen „Gruppierungen“ und der „Gruppe“, nämlich zum einen die Existenz mehrerer neutraler Elemente und zu anderen die Eindeutigkeit des neutralen Elements der Gruppe, mathematisch gesehen keinen qualitativen, sondern einen quantitativen Unterschied dar.

Ohne an dieser Stelle weiter ins Detail zu gehen, wird deutlich, dass die Gleichsetzung von kognitiven und mathematisch-logischen Strukturen zu Widersprüchen führt. PIAGETs mathematische Strukturen können zusammenfassend lediglich als Modelle angesehen werden, „denen sich [...] die Strukturen des kognitiven Verhaltens im Laufe ihrer Entwicklung nur in ausgewählten Verhaltensbereichen nähern, ohne sie in ihrer mathematisch-logischen Idealität je zu erreichen“ (Steiner 1973, S. 140).

Der zweite Kritikpunkt, auf den nun eingegangen werden soll, bezieht sich auf die Umgestaltung von Lehrplänen und das Eindringen der Modernen Mathematik in den Unterricht, wie sie scheinbar durch den Ansatz von PIAGET und BOURBAKI nahegelegt wurde. Durch die vermeintliche Passgenauigkeit kognitiver und mathematischer Strukturen, die für den mathematischen Bereich deckungsgleich mit den Fundamentalen Ideen BRUNERs zu sein schienen, schlugen sich unmittelbar in der in Woods Hole angebahnten Lehrplanreform zunächst in den USA und dann in Deutschland nieder. Dabei wurde die oben beschriebene Diskrepanz zwischen kognitiven und mathematischen Strukturen im Schulalltag besonders deutlich. Die Betonung der mathematischen Mutterstrukturen führte zu erheblichen Lernwiderständen.

3.2.3 Umsetzung der Reformen in der Schule

Die politischen Entwicklungen in den USA, die schon die Entstehung des Buches „The Process of Education“ von BRUNER beeinflussten, gingen auch an Deutschland nicht spurlos vorbei. Im Zuge einer stärkeren wirtschaftlichen Bindung Deutschlands an die USA seit den 1950er Jahren[79] und dem aufkommenden und sich langsam wieder legenden „Wirtschaftswunders“ wurden von deutscher Seite nun nach und nach ebenfalls Reformen im Bildungswesens eingeleitet. In diesem Zusammenhang kam es auch zu Neustrukturierungen von Lehrplänen und Unterrichtswerken, die sich an den Strukturbegriffen der Modernen Mathematik orientierten, und somit zur Einführung der Strukturmathematik in den Schulen führten. Die lange Phase der Reformen begann zunächst 1950 mit vereinzelten Vorstößen (bspw. der „Kasseler Lehrplan“ von 1953).[80] Als prominenter Vertreter, der auch heute noch in der Forschung zu Fundamentalen Ideen rezipiert wird, seien die „Richtlinien für den Unterricht in der Höheren Schule“ des Kultusministers des Landes Nordrhein-Westfalens von 1963 genannt (KNF 1963). Darin wird die Ausrichtung des Unterrichts an „fundamentalen Begriffen“ gefordert, sodass „jeder Unterrichtsgegenstand [...] die Schüler zu klaren Grundvorstellungen über die Begriffe Zahl, Grenzwert, Funktion, Abbildung und Vektor, möglichst auch über Menge und Struktur führ[t]“ (KNF 1963, S. 19). Anhand dieser „fundamentalen Begriffe“ sollen die Schüler „zu einem vertieften Verständnis, insbesondere zu einer wissenschaftstheoretischen Betrachtung vorstoßen“ (KNF 1963, S. 19). Neben den inhaltlichen Bezugspunkten im Curriculum wird anschließend für jeden fundamentalen Begriff erläutert, welche wissenschaftstheoretischen Vertiefungen und philosophischen Betrachtungen möglich sind. Vertiefungen sind allerdings nur anhand eines Begriffes zu leisten, und philosophische Betrachtungen können auch im Philosophieunterricht aufgehoben sein. Somit wird deren konkrete Umsetzung im Mathematikunterricht fraglich. Auch bleiben die Begriffe relativ isoliert nebeneinander, und Vernetzungen zwischen ihnen finden sich nur in den wissenschaftlichen Vertiefungen.[81] Die Beschränkung auf die reine Hervorhebung von fundamentalen Begriffen trägt zu-

---

[79] Nach dem 2. Weltkrieg war es vor allem die finanzielle Unterstützung der USA, die beim westdeutschen Wiederaufbau half und somit zur wirtschaftlichen Bindung der BRD an die USA beitrug. Die Entwicklungen des Kalten Krieges und der Fall des ebenfalls seit 1954 geteilten Vietnams, in dem der Stellvertreterkrieg der kommunistischen Großmächte UdSSR und China auf der einen Seite und der kapitalistischen Großmacht USA auf der anderen Seite ausgefochten wurde, führten zu einer engeren Bindung der BRD an die USA.

[80] Für einen Überblick über die Phasen der Reform, deren Ursachen und Wirkungen vgl. (Schuberth 1971). Für eine detaillierte Darstellung mit Analysen der einzelnen reformierten Lehrpläne vgl. (Damerow 1977).

[81] Vertiefungen des Begriffs der geometrischen Abbildung in der analytischen Geometrie können zur „Arithmetisierung der Geometrie“ genutzt werden und somit, ganz im Sinne des damaligen Zeitgeistes, zur Diskussion eines einheitlichen mathematischen Systems genutzt werden (KNF 1962, S. 27).

dem die Problematik in sich, diese dem Curriculum lediglich aufzusetzen, ohne dass eine tragfähige Neustrukturierung stattfindet (s.u.). Die Richtlinien können daher zu dem Eindruck führen, dass der Reform des Unterrichts schon Genüge getan wäre, wenn die fundamentalen Begriffe stärker betont werden als andere. Die hier etablierten fundamentalen Begriffe leisten demnach nicht, was BRUNER von einer Fundamentalen Idee verlangt. Auf ihren begrifflichen Charakter beschränkt, lassen sie sich nur unzureichend frühzeitig antizipieren, und gerade im Bereich der Schulmathematik sind ihre Anwendungsmöglichkeiten begrenzt.

Die Reformphase erreichte einen Höhepunkt am 3.10.1968 mit der bundesweiten Festsetzung von Vorgaben zur Lehrplanentwicklung unter Berücksichtigung der Modernen Mathematik in den „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen“ der KMK.[82]

> Die Modernisierung des Mathematikunterrichts verlangt eine Zusammenschau der verschiedenen Teilgebiete unter übergreifenden Gesichtspunkten [...] Tragende Grundbegriffe wie Menge, Abbildung und Struktur (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum) müssen an geeigneter Stelle immer wieder verdeutlicht werden. Es muss paradigmatisch das mathematisch Wesentliche gezeigt werden, um für den Schüler die Mathematik geordneter und übersichtlicher und damit auch klarer und durchsichtiger zu machen. Die Modernisierung des Mathematikunterrichts bringt es mit sich, daß Didaktik und Methodik dieses Faches neu orientiert werden.

(KMK 1968, S. 2)

Für den Stoffaufbau wurde die in der folgenden Abbildung 12 zusammengefasste Gliederung in Themenkreise von der KMK gewählt.

[82] Schon 1958 beispielsweise gab es einen Beschluss der KMK zur Neustrukturierung des Lehrstoffes am Gymnasium. Darin wurde vorgeschlagen, die Begriffe „Menge“, „Gruppe“ und „Vektor“ zu behandeln, „soweit sie sich organisch in den Unterricht einbauen lassen“ (KMK 1958). Diese Neuerungen wurden allerdings nicht in bindende Form gebracht und hatten somit keinen durchschlagenden Einfluss auf Lehrplanreformen (Schuberth 1971, S. 49).

Themenkreise aus den Richtlinien um 1968
Klasse 1 bis 6:
Mengen und ihre Verknüpfungen – Menge der natürlichen Zahlen und ihre Verknüpfungen – Größen – geometrische Grundbegriffe – Ziffern und Stellenwertsystem – Teilbarkeit und Teilermengen – Menge der nichtnegativen rationalen Zahlen und ihre Verknüpfungen
Klassen 7 bis 10:
Zuordnung von Mengen – Kongruenzabbildungen – Geometrische Größen - Algebraische Aussageformen – Algebraische Strukturen – Reelle Zahlen - Ähnlichkeitsabbildungen – Potenzen und zugehörige Funktionen – Flächen- und Rauminhalt, Darstellung von Körpern – Ebene Trigonometrie
Klasse 11 bis 13:
Analysis – Vektorraum, affiner und metrischer Raum – Geometrische Abbildungen – Strukturen – Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, moderne mathematische Techniken

Abbildung 12 Themenkreise aus den „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts“ der KMK von 1968, entnommen aus (Führer 1997, S. 75)

Für die inhaltliche Neustrukturierung[83] orientierte sich die KMK mit ihren Richtlinien, die ja für alle allgemeinbildenden Schulen gedacht waren, hauptsächlich an dem „Nürnberger Rahmenplan“ des DEUTSCHEN VEREINS ZUR FÖRDERUNG DES MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS, der allerdings „von vornherein zu eng auf die höheren Bildungsabschlüsse bezogen war“ (Damerow 1977, S. 210).[84] Da diese Vorlage in der Reformbewegung schon als „gemäßigt“ galt (Schuberth 1971, S. 55), verwundert es auch nicht, dass sich hinter den modern klingenden Themenkreisen im Wesentlichen traditionelle Inhalte verbargen.[85] Diese Vermischung von modernen und traditionellen Inhalten hatte zur Folge, dass den klassischen Gebieten der Schulmathematik teilweise die modernen Strukturbegriffe aufgesetzt wurden, ohne dass „die stoffliche Basis für die Abstraktion dieser Begriffe“ gegeben wäre (Damerow 1977, S. 226). DAMEROW zeigt diese Diskrepanz am Beispiel des Themenkreises „Kongruenzabbildungen“, der nun neben der „Dreieckslehre“ und den

[83] Die angesprochen Neuorientierung der Didaktik und Methodik wollte die KMK in einem Lehrerhandbuch zusammenfassen, das jedoch nie erschien (Damerow 1977, S. 224). Ein Grund für das Scheitern der Reform liegt gerade in der Fokussierung auf inhaltliche Neuerungen und der Vernachlässigung didaktischer und methodischer Überlegungen.

[84] Durch diese Fokussierung auf das Gymnasium wurden für die Hauptschule sog. subtraktive Lehrpläne durch ein Ausdünnen der gymnasialen Lehrpläne geschaffen. Für eine Zusammenfassung der sich daraus ergebenden Probleme sei auf (Gaab 2015) verwiesen.

[85] DAMEROW zeigt dies, indem er „die Einzelstoffe unabhängig von der vorgeschlagenen Themenkreisstruktur unter traditionellen Ordnungskategorien der Schulstoffe des Mathematikunterrichts [zusammenfasst], um sie dann mit dem traditionellen Stoff zu vergleichen“ (Damerow 1977, S. 227). Die somit sichtbar gewordenen Gemeinsamkeiten und Unterschiede sind a.a.O. S. 229 festgehalten.

verschiedenen Kongruenzabbildungen, eine Einführung der abstrakten Begriffe „Gruppe", „Vektor" und „Permutation" beinhaltet (Damerow 1977, S. 226 f.).

Durch die oben genannten Probleme bei der Umstrukturierung des Schulstoffes kam es nicht zu der von der KMK gewünschten Ordnung und Durchsichtigkeit der Mathematik für Schüler. Ganz im Gegenteil, viele Schüler sahen keinen Sinn in den abstrakten Begriffen und Strukturen der Modernen Mathematik. Eltern verstanden den Grundschulstoff ihrer Kinder nicht mehr und auch viele Lehrer waren für die nun zu behandelnden Inhalte unzureichend ausgebildet.[86]

Angesichts dieser Fehlentwicklungen meldeten sich nun auch diejenigen Wissenschaftler ablehnend zu Wort, auf die sich die KMK eigentlich stützen wollte. Das Gründungsmitglied der BOURBAKI-Gruppe DIEUDONNÉ richtet beispielsweise seine Kritik klar gegen die Umsetzung der Strukturmathematik im Unterricht. Das zu hohe Maß an Strenge und die Abstraktheit der neu eingeführten Begriffe können „schädlich" für Schüler sein, da ihr Sinn in der Schule nicht deutlich werden kann.

> Diese Anwendungen liegen jedoch weit über dem Niveau der ‚under-graduate'-Ausbildung [...] auf dieser Ausbildungsstufe sind die traditionellen ‚Dedekind-Schnitte' oder ähnliche Arten der ‚Definition' reeller Zahlen vollkommen nutzlos, wenn nicht sogar schädlich.

(Dieudonné 1974, S. 408)

Er schreibt: „Meiner Meinung nach sollten Schüler unter 15 Jahren überhaupt noch nicht mit einem Axiomen-*System* bekannt gemacht werden" (Dieudonné 1974, S. 411)

Es wird deutlich, dass sich DIEUDONNÉs Kritik nicht gegen die Moderne Mathematik wendet, sondern gegen die Art, wie und in welcher Altersstufe diese in den Schulen gelehrt wird. In ähnlicher Weise hatte sich auch PIAGET, der sich seit der Mitte der 1950er Jahre vermehrt mit fachdidaktischen Fragen auseinander gesetzt hatte,[87] zu den Entwicklungen geäußert. Auch er hält daran fest, dass

> zwischen den wichtigsten, vom Kind spontan durchgeführten Operationen und den abstrakten Begriffen, die man ihm beizubringen sucht, eine unverhofft große Übereinstimmung besteht: So entdecken Sieben- bis Achtjährige selbstständig Operationen wie Vereinigung und Überschneidung von Mengen sowie kartesische Produkte, während Elf- bis Zwölfjährige bereits mit „Teilmengen" operieren.

(Piaget 1972, S. 79)

[86] Zwar fokussierte die KMK in ihren Empfehlungen auch Lehrerfortbildungen, diese erfolgten aber teilweise zu spät, da in vielen Bundesländern die Lehrpläne schon seit 1962 reformiert wurden und zum Zeitpunkt des KMK Beschlusses schon in Kraft getreten waren.

[87] Vgl. (Kohler 2009, S. 325 ff.).

Der Grund für die Probleme mit der Strukturmathematik in der Schule wird in der Passivität der Schüler gesehen. Denn

> die Unterrichtspraxis [wird] dadurch verfälscht, daß der Lehrstoff zwar ‚modern', die Lehrmethode aber psychologisch gesehen veraltet ist, da sie auf schlichte Wissensvermittlung beschränkt und sich (für die Denk- und Urteilsfähigkeit der Schüler meist viel zu früh) in eine axiomatische Form kleidet.

(Piaget 1972, S. 79)

Die angesprochene Passivität der Schüler wird nicht nur durch die Unterrichtsmethode hervorgerufen, sie haftet schon den durch PIAGET an BOURBAKI angelehnten Unterrichtsinhalten an. BOURBAKI wies nämlich darauf hin, dass sein Ansatz keine optimale Form der Genese von Mathematik (oder von mathematischem Wissen) darstellt, sondern eine Rekonstruktion von Mathematik im Nachhinein ist.

> Um die richtige Perspektive zu erhalten, müssen wir dieser raschen Skizze [gemeint ist die Beschreibung der Gebiete der Mathematik durch die Mutterstrukturen, MCvdB] sogleich die Bemerkung anfügen, daß sie nur eine sehr rohe Annäherung an den tatsächlichen Stand der heutigen Mathematik ist; die Skizze ist schematisch und ebenso idealisiert wie erstarrt.
>
> Schematisch – weil in der tatsächlichen Entwicklung die Dinge nicht in so einfacher und systematischer Weise vor sich gehen [...]
>
> Idealisiert – weil es keineswegs zutrifft, daß in allen Gebieten der Mathematik die Rolle jeder der großen Strukturen klar erkannt und herausgearbeitet ist [...]
>
> Schließlich erstarrt – denn [...] die Strukturen sind nicht unveränderlich, weder in ihrer Anzahl noch in ihrem wesentlichen Inhalt [...]

(Bourbaki 1974, S. 155)

PIAGETs Kritik am Mathematikunterricht trifft sich mit einer Spielart Fundamentaler Ideen, die BRUNER bei deren Konzeption schon mitdachte. Da sich nach BRUNER die wissenschaftliche Tätigkeit nicht in ihrer Art, sondern nur im Niveau unterscheidet, sollen sich anhand Fundamentaler Ideen für die jeweilige Wissenschaft typische Herangehensweisen und Tätigkeiten vollziehen lassen. Ein entdeckendes Lernen soll im Vordergrund stehen und die Schüler nicht zur Passivität verurteilen (vgl. Kapitel 3.3).

Schon während der Phase der Reformeuphorie waren Stimmen laut geworden, die eben diese Einseitigkeit der strukturmathematischen Sichtweise und die daraus resultierenden Probleme für Schüler kritisierten. 1962 beispielsweise veröffentlichten mehrere amerikanische und kanadische Mathematiker ein Memorandum, in dem sie sieben Punkte zusammenfassten, die „fundamentale Grundsätze und praktische Richtlinien" für die Erarbeitung von Lehrplänen und

Durchführung von Unterricht darstellen. Durch die namhaften Unterzeichner[88] wurde eine Sichtweise öffentlich gemacht, die forderte, dass bei den Reformen des Mathematikunterrichts stärker fachwissenschaftliche Arbeitsweisen berücksichtigt werden (Damerow 1977, S. 109). Grundsätzlich stehen die Verfasser dabei Reformbestrebungen positiv gegenüber. So heißt es:

> Der Mathematikunterricht in den elementaren und höheren Schulen ist weiter hinter den heutigen Notwendigkeiten zurückgeblieben, und es ist höchst erforderlich, ihn wesentlich zu verbessern: wir erklären uns nachdrücklich mit dieser heute fast allgemein akzeptierten Meinung einverstanden.

(Wittenberg 1962, S. 225)[89]

Eine Ursache für die Rückständigkeit des Mathematikunterrichts wird in der Isolierung der Mathematik von anderen Wissenschaften (beispielweise der Physik) gesehen, wodurch ihm wichtige Anwendungsgebiete entzogen werden. Aber auch innerhalb der Mathematik sind viele Unterrichtsgegenstände so sehr voneinander isoliert, dass „Techniken und Sätze dem Schüler als isolierte, unzusammenhängende Tricks“ erscheinen (Wittenberg 1962, S. 226).

In der Strukturmathematik sehen sie eine Chance zur Überwindung dieser Isoliertheit im Mathematikunterricht.

> Auch wir glauben, daß ein vernünftiger, angemessener Gebrauch von Mengen und von der Sprache und den Begriffen der „abstrakten“ Algebra möglicherweise mehr Kohärenz und Einheitlichkeit in den Unterricht der höheren Schulen bringen kann.

(Wittenberg 1962, S. 226)

Die Verfasser wollen den Mathematikunterricht jedoch nicht nur mit modern strukturierten Inhalten reformieren. Sie betonen weiter zum einen die Wichtigkeit von handlungsorientiertem Unterricht, in dem Schüler durch aktive Auseinandersetzung mit dem Lehrstoff Wissen erwerben. Zum anderen stellen sie die „Genetische Methode“[90] einem logisch systematischen Vorgehen im Schulstoff

---

[88] Zu den Unterzeichnern des Memorandums gehörten u.a. RICHARD COURANT, GEORGE PÓLYA, WEIL und ALEXANDER WITTENBERG. Vom letztgenannten stammt die hier zitierte deutsche Übersetzung des Memorandums, die in der vorliegenden Arbeit mit (Wittenberg 1962). Da im Folgenden WITTENBERGs Arbeit „Bildung und Mathematik“ von 1963 mit (Wittenberg 1963) zitiert wird, ist an dieser Stelle der vorliegenden Arbeit auch auf die jeweiligen Jahreszahlen bei der angegebenen Zitierweise zu achten, um die beiden zitierten Arbeiten nicht zu verwechseln.

[89] WITTENBERG übersetzt „high school“ mit „höhere Schule“, obwohl sich diese amerikanische Schulstufe und die deutschen dreigliedrigen weiterführenden Schulen nicht entsprechen. Da für ihn die „grundsätzliche Tragweite“ der im Folgenden vorgestellten Richtlinien im Vordergrund steht und diese „sich zum Teil auch in manchen europäischen Reformbemühungen widerspiegeln“, nimmt er die Gleichsetzung dennoch vor (Wittenberg 1962, S. 224).

[90] Die Verfasser des Memorandums verstehen darunter das psychogentische Grundgesetz, bei dem davon ausgegangen wird, dass die „beste Art, die geistige Entwicklung des einzelnen zu lei-

gegenüber. Auf beide Punkte soll hier etwas ausführlicher eingegangen werden, da sie Ansatzpunkte für eine erkenntnistheoretische Legitimation der Orientierung an fachmethodischen Arbeitsweisen im Mathematikunterricht liefern, die der Reformbewegung zunächst fehlten (vgl. Damerow 1977, S. 110).

Zunächst zur Handlungsorientierung. Im Memorandum heißt es:

> In der Mathematik hat nur solches Wissen Wert, das nicht Besitz von Information, sondern „know-how"- Wissen, „wie man es macht", ist. Mathematik können heißt imstande sein, Mathematik zu tun: einigermaßen flüssig die mathematische Sprache zu gebrauchen, Probleme zu lösen, Überlegungen kritisch zu überprüfen, Beweise zu finden und, was die wichtigste Tätigkeit sein mag, einen mathematischen Begriff in einer gegebenen konkreten Situation erkennen oder ihn aus ihr herauszuschälen.
>
> (Wittenberg 1962, S. 225)[91]

Für die Verfasser des Memorandums steht demnach der Prozesscharakter von Mathematik im Vordergrund, zum Beispiel die Tätigkeit des Problemlösens. Das Hervorheben des Problemlösens überrascht wenig, bedenkt man, dass das angesprochene „know-how"-Wissen, also Problemlösestrategien, gerade das „Herzstück der Heuristik"[92] nach PÓLYA bilden, einem Mitunterzeichner des Memorandums. Seit 1917 widmete sich PÓLYA immer wieder dem Studium der Heuristik, also der Frage, wie Lösungen von Problemen gewonnen werden (Pólya 1980, Vorwort zur deutschen Ausgabe). Für ihn ist die Kunst des Problemlösens ein Gesicht von Mathematik.

> Wenn wir die Methoden der Lösung von Aufgaben studieren, nehmen wir ein anderes Gesicht von Mathematik wahr. In der Tat hat die Mathematik zwei Aspekte; sie ist die strenge Wissenschaft Euklids, aber sie ist auch etwas anderes. Nach Euklid dargestellt, erscheint die Mathematik als eine systematische deduktive Wissenschaft; aber die Mathematik im Entstehen erscheint als experimentelle induktive Wissenschaft. Beide Aspekte sind so alt wie die Mathematik selbst. Aber der zweite Aspekt ist in einer Beziehung neu; Mathematik „in statu nascendi", in dem Prozeß des Erfundenwerdens, ist in dieser Art niemals vorher dem Schüler oder dem Lehrer oder dem breiten Publikum dargestellt worden.
>
> (Pólya 1980, S. 9)

Für diesen zweiten Aspekt von Mathematik erarbeitete PÓLYA, ausgehend von der Analyse vieler Lösungen von berühmten Problemen, aber auch dem eigenen

---

ten, [jene] ist, ihn die geistigen Entwicklungen des Menschengeschlechts nachvollziehen zu lassen" (Wittenberg 1962, S. 225).

[91] Diese Definition zeigt, dass rund 40 Jahre vor der „mathematical literacy" auch in den USA die Ziele des Mathematikunterrichts wesentlich breiter gedacht wurden. Von den hier genannten Handlungen findet sich aktuell nur noch das Problemlösen wieder (vgl. Kapitel 2.1).

[92] (Wittmann 1974, S. 57).

Vorgehen beim Problemlösen, ein Schema, dass sowohl Lehrern als auch Schülern bei der Lösung von Problemen dienen kann. Dieses Schema besteht aus Fragen, die zur Lösung anregen und sich in vier Schritte gliedern, die hier kurz wiedergegeben werden.[93]

1. *Verstehen der Aufgabe* (Was ist bekannt? Was ist gegeben? Wie lauten die Bedingungen?)
2. *Ausdenken eines Plans* (Kennst du eine verwandte Aufgabe? Hier ist eine Aufgabe, die der deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst du sie gebrauchen?)
3. *Ausführen des Plans* (Kontrolliere jeden Schritt. Kannst du beweisen, dass er richtig ist?)
4. *Rückschau* (Kannst du das Resultat kontrollieren? Kannst du das Resultat oder die Methode für irgendeine andere Aufgabe gebrauchen?)

Die Auflistung zeigt, dass die häufig überbewertete Wichtigkeit des tatsächlichen Ausführens des Lösungsplans relativiert wird durch die Betonung der anderen drei Punkte. Neben der „Rückschau" rückt PÓLYA besonders den zweiten Punkt, das Ausdenken eines Plans, in den Vordergrund. Dazu stellt er eine Vielzahl von Strategien vor, die bei der Suche eines Plans nützlich sind, beispielsweise Analogiebildung, Reduktion oder Spezialisierung.[94]

WITTMANN gelang, ausgehend von diesen verschiedenen heuristischen Strategien, die Verbindung der Theorie PÓLYAs mit der Erkenntnistheorie PIAGETs. Dazu nutzt WITTMANN das Wechselspiel von Akkommodation und Assimilation bei der Adaption neuer Schemata, also den externen Aspekt der Wechselwirkung von Individuum und Welt.

> Im Hinblick auf den Mathematikunterricht würde nun eine Beschränkung auf (namentlich fertige) mathematische Schemata eine eingeengte Auffassung des internen Aspekts, Organisation, bedeuten und nur ein einseitiges erkenntnistheoretisches Bild vermitteln. Zu einem vollen Bild gehören die mathematische Umwelt, die durch mathematische *Probleme* repräsentiert wird, und der Aspekt der Adaption.
>
> (Wittmann 1974, S. 56)

Wie PÓLYA sieht WITTMANN die zwei Gesichter der Mathematik und hält fest, dass es im Mathematikunterricht „einer erfolgreichen Adaption inhaltlicher Schemata *und* heuristischer Strategien bedarf" (Wittmann 1974, S. 57). Analog zu den inhaltlichen Schemata, die WITTMANN durch die Mutterstrukturen BOUR-

---

[93] Die vorgestellten Fragen sind exemplarisch ausgewählt. Das vollständige Schema findet sich in (Pólya 1980, Einband).

[94] Auf die Bedeutung dieser Strategien für die aktuelle Diskussion um Fundamentale Ideen wird in Abschnitt 5.3 weiter eingegangen. Die von PÓLYA angesprochenen motivationalen Aspekte der Heuristik (Pólya 1980, Vorwort) werden in Abschnitt 5.4 behandelt.

BAKIs charakterisiert sieht, entwickelt er drei „Mutter-Strategien" der Heuristik, welche einige der von PÓLYA genannten Strategien zusammenfassen und teilweise abstrahieren. WITTMANN nennt „Zerlegung in Teilprobleme", „Übergang zu neuen Problemen bezüglich Ordnungsrelationen" und „Übergang zu benachbarten und analogen Problemen und Stetigkeitsbetrachtungen" (Wittmann 1974, S. 58).

Ähnlich wie sich aus den BOURBAKIschen Mutterstrukturen durch Kombination neue Gebiete der Mathematik beschreiben lassen, zeigt auch WITTMANN, wie durch Überlagerung der Mutter-Strategien neue Strategien entstehen.[95] Gleichzeitig ist er sich der Begrenztheit seines strukturellen Ansatzes bewusst und hält fest, dass es „eine Fülle speziellerer heuristischer Strategien gibt, die sich nicht aus den Mutterstrategien herleiten lassen" (Wittmann 1974, S. 59). Dennoch sieht WITTMANN in seinem Ansatz eine Weiterentwicklung der Heuristik, mit der er sich gegen die „fachstrukturelle Abstinenz" bei der Problemorientierung im Mathematikunterricht richtet (Wittmann 1974, S. 59). Seine Mutter-Strategien sollen einen Beitrag zur Integration von strukturmathematischen Elementen, echten Problemen und heuristischen Strategien im Mathematikunterricht leisten.

In eine ähnliche Richtung, wenn auch strukturell verschieden zu WITTMANN, geht WITTENBERG,[96] auf dessen Überlegungen im Folgenden eingegangen wird. Auch er will den Mathematikunterricht an echten Problemen ausgerichtet sehen und rückt dabei gleichzeitig ein genetisches Vorgehen in den Vordergrund. Die Wichtigkeit der „Genetischen Methode" wird auch im oben zitierten Memorandum angesprochen, dessen Mitunterzeichner WITTENBERG war. Darin wurde die

[95] Als ein Beispiel wählt WITTMANN die vollständige Induktion „bei der, ausgehend vom einfachsten Spezialfall, jeweils *benachbarte Spezialfälle* betrachtet werden" (Wittmann 1974, S. 58). Hier überlagern sich alle drei Strategien. Zum einen wird das ursprüngliche Problem in Teilprobleme zerlegt, da jeweils nur ein Fall betrachtet wird. Diese Teilprobleme sind dadurch alle von speziellerer Natur als das Ausgangsproblem. Der Induktionsschluss wird aus dem Übergang eines (Teil)Problems zu seinem benachbarten Problem geschafft.

[96] WITTMANN wirft WITTENBERGs Ansatz zur Problemorientierung im Mathematikunterricht eine gewisse Einseitigkeit vor, da er zwar „eine ursprüngliche Problemorientierung konzipierte [...] und [...] heuristische Elemente aufnahm [...], die fachstrukturelle Abstinenz [...] aber beibehielt [...]" (Wittmann 1974, 59). Sieht man von der zeitlichen Distanz der beiden Arbeiten ab (WITTENBERGs „Bildung und Mathematik" ist von 1963, als die Strukturmathematik in Deutschland noch nicht lange in den Schulen etabliert war und WITTMANNs Artikel ist von 1974, als die Strukturorientierung ihren Höhepunkt erreichte), so bleibt dennoch zu fragen, ob WITTMANNs Feststellung als Kritik an WITTENBERG haltbar ist. Es ist gut denkbar, dass WITTENBERG sich bewusst von der Umsetzung der Modernen Mathematik in der Schule distanzierte und daher auch deren Terminologie nicht verwendet. Darüber hinaus bleibt fraglich, welchen Mehrwert WITTMANNs stark verdichteter struktureller Ansatz für den Mathematikunterricht besitzt im Vergleich zu PÓLYAs unterrichtspragmatischer Theorie.

„Genetische Methode“ allerdings an das psychogenetische Grundgesetz angelehnt:[97]

> Die beste Art, die geistige Entwicklung zu leiten, ist, ihn die geistige Entwicklung des Menschengeschlechts nachvollziehen zu lassen – die großen Linien der Entwicklung, natürlich nicht die tausend Irrtümer in Einzelheiten.
>
> (Wittenberg 1962, S. 15)

Diese Aussage mag in ihrer Absolutheit sicher nicht immer zutreffen, die Schlussfolgerung, welche die Verfasser aus ihr ziehen, verweist dennoch auf eine wichtige Betrachtungsweise im Mathematikunterricht.

> Wenn A in einem gewissen logischen System vor B kommt, so kann es nicht notwendigerweise gerechtfertigt sein, im Unterricht B vor A durchzunehmen, besonders wenn in der Geschichte B vor A war.
>
> (Wittenberg 1962, S. 15)

WITTENBERG selbst geht in seiner Abhandlung „Bildung und Mathematik“ noch weiter in seiner Kritik an den damaligen Reformen.[98] Er bettet die Reformbestrebungen in eine, in Deutschland üblicherweise geführte, Diskussion um den Bildungsbegriff ein und misst ihren Wert an ihrem Beitrag zur Bildung der Schüler.

> Zunächst ist also eine solche geistige Auseinandersetzung mit dem Fach durchzuführen, welche, indem sie aus diesem dessen wesentlichen Beitrag für das Ganze unseres Weltbildes herauszuschälen sucht, dadurch zugleich die möglichen Bausteine einer allgemeinen Bildung bereitstellt.
>
> (Wittenberg 1963, S. 42)

Dem Fach Mathematik misst WITTENBERG einen zweifachen Beitrag zu allgemeiner Bildung zu. Zum einen die Erfahrung, dass mathematisches Denken eine Welt eigener Gattung („sui generis“) darstellt und gleichzeitig erschließt (Wittenberg 1963, S. 46). Zum anderen die Erfahrung, dass es eine „merkwürdige Übereinstimmung zwischen unserem mathematischen Denken und unserer Erfahrung der Natur“ gibt (Wittenberg 1963, S. 48).

Die Vermittlung von solchen Erfahrungen im Mathematikunterricht veranlasst dazu, den Mathematikunterricht genetisch zu gestalten. Damit meint

---

[97] WITTENBERG beschreibt in seiner Arbeit „Bildung und Mathematik“ eine andere genetische Methode. Für ihn bedeutet ein genetisches Vorgehen, Schüler die Mathematik wieder entdecken zu lassen, im Sinne eines „Neuentstehend und Neudurchdenkens“ mathematischer Inhalte (Wittenberg 1963, S. 59).

[98] Er bemängelt darin nicht nur den modernen Gymnasialstoff als eine Art ausgedünnte Hochschulvorlesung, sondern prangert auch die Art der Entstehung der Reformmaßnahmen an (Wittenberg 1963, Vorwort XI f.).

WITTENBERG allerdings nicht die an das psychogenetische Grundgesetz angelehnte „Genetische Methode", die im Memorandum angesprochen wurde, sondern

> [...] einen Unterricht, der darin besteht, die Schüler gleichsam die Mathematik von Anfang an wieder entdecken zu lassen. Das bedeutet nicht unbedingt, daß dieser Unterricht der historischen Entwicklung, mit ihren Zufällen und Umwegen, folgen muss. Aber in sachlicher Hinsicht muss er gleichsam ein Neuentstehen und Neudurchdenken der Mathematik in jeder Klasse sein, ein frisches und unmittelbares Wiedererleben der Mathematik durch die Schüler.

(Wittenberg 1963, S. 59)

WITTENBERG verbindet demnach mit einem genetischen Vorgehen eine aktive Auseinandersetzung der Schüler mit Mathematik. Am Anfang dieser Auseinandersetzung steht das „Zustandekommen und die allmähliche Entwicklung einer Fragestellung", da dies auch das Vorgehen eines forschenden Mathematikers ist (Wittenberg 1963, S. 60). Dann beginnt ein „Suchen" nach der Antwort. In dieser Phase spielen nun auch heuristische Strategien eine herausragende Rolle. Abgeschlossen wird dieser Prozess mit der Begründung der gefundenen Antwort, womit ein Bewusstsein für die Notwendigkeit von Beweisen beim Schüler geschaffen werden kann (Wittenberg 1963, S. 61). Ein so aufgebauter Unterrichtsgang ermöglicht dem Schüler eine „echte"[99] Erfahrung von Mathematik und kann somit zu allgemeiner Bildung beitragen.

Es fällt auf, dass WITTENBERGs Vorstellungen von einem zur Bildung beitragenden Unterrichtsgang Ähnlichkeiten zu den Phasen des Problemlösens von PÓLYA aufweisen.[100] In den Phasen des Suchens und der Sicherung von Antworten (Ausdenken und Umsetzen eines Plans und Überprüfen des Ergebnisses bei PÓLYA) spielt der Lehrer in beiden Theorien eine wichtige Rolle.[101] Beide Autoren

---

[99] Mit dem Gesagten wird deutlich, dass die Umsetzung der Modernen Mathematik in der Schule, die für WITTENBERG hauptsächlich in einer historisch und sachlich zusammenhanglosen „Nachäffung der höheren Mathematik" besteht, keinen Bildungswert hat (Wittenberg 1963, S. 54 f.).

[100] Ein Unterschied besteht in der „Initiierung" der Auseinandersetzung mit Mathematik. Während PÓLYAs Phasen ein vorhandenes Problem voraussetzen (ob vom Lehrer vorgegeben oder vom Schüler selbst gestellt, spielt dabei keine zunächst entscheidende Rolle), ist es für WITTENBERG elementar, dass schon die Fragestellung vom Schüler entwickelt wird. Zudem ist WITTENBERGs Theorie „größer", da sie eine komplette Unterrichtstheorie darstellt und sich nicht auf einen Bereich (Problemlösen) konzentriert. WITTENBERG ist vielmehr darauf bedacht, ein möglichst ganzheitliches Bild von Mathematik im Unterricht zu erzeugen, das sowohl Fragen als auch „Begriffe, die die gedanklichen Bausteine der Mathematik sind" und „Methoden, deren sich der Mathematiker für den Aufbau seiner Theorien und die Erlangung seiner Einsichten bedient" integriert (Wittenberg 1963, S. 58).

[101] WITTENBERG zeichnet darüberhinaus ein ganzheitliches Bild eines Gymnasiallehrers, der seinen Beruf nicht als „minderwertige wissenschaftliche Laufbahn" sieht, sondern als „eine anspruchsvolle geistige Aufgabe [...] anderer Art" (Wittenberg 1963, Vorwort XIII f.). Ein solcher Lehrer ist in der Lage, wissenschaftliche Strömungen auf ihren pädagogischen Wert zu überprüfen und somit zur Sicherung des Ziels des Gymnasiums (allgemeine Bildung) beizutragen (Wittenberg 1962, S. 66).

sehen den Lehrer als Begleiter im Lernprozess, dem (teilweise) dessen Initiierung und dessen gezieltes, aber „vorsichtiges und unaufdringliches“ Vorantreiben zukommt (Pólya 1980, S. 14).

Die begründbare Herausstellung der Wichtigkeit der Lehrerrolle zeigt, dass PIAGETs erkenntnistheoretische Theorie zur Legitimation einer Orientierung des Unterrichts an fachwissenschaftlichen Methoden (s.o.) alleine nicht ausreicht.[102] Neben der Problematik einer Beschreibung kognitiver Prozesse mittels mathematischer Strukturen berücksichtigt seine Theorie zu wenig kulturelle und schulische Einflüsse auf das Lernen. Gerade beim aktiven Nachvollzug von Problemlösestrategien spielt der Lehrer eine wichtige Rolle, da es hierbei nicht darum geht, den Schüler alle Probleme der Mathematik selbstständig lösen zu lassen. Demnach reicht eine reine Darbietung (gleich in welcher Form) nicht aus, um mittels Fundamentaler Ideen Lernprozesse zu gestalten. Der Einfluss des Lehrers und die Art, wie er Schüler anleitet, sind Kernbestandteile BRUNERs Unterrichtstheorie (Bruner 1974)[103]. BRUNERs Theorie ist so wie die PÓLYAS’, WITTENBERGs und WITTMANNs handlungsorientiert. Darüber hinaus bietet BRUNERs Unterrichtstheorie die Möglichkeit seine ursprüngliche Konzeption Fundamentaler Ideen in einem ganzheitlicheren Rahmen zu sehen und somit eben jene Konzeption neu zu bewerten.

3.3 JEROME BRUNER: Ein Abschluss

Für BRUNER besteht Unterricht darin,

> den Schüler Schritt für Schritt durch Formulierung und Neuformulierung eines Problems oder Wissensbereichs einen Weg zu weisen, so daß der Lernende eine bessere Einsicht gewinnt und in die Lage kommt, das, was er lernt, auch umzuformen und in anderen Zusammenhängen zu verwenden [...]

(Bruner 1974, S. 53)

Wie (u.a.) PÓLYA die zwei „Gesichter“ der Mathematik festgehalten hat, sieht auch BRUNER für das Lernen inhaltliche Aspekte, die in den „Wissensbereichen“ festgehalten sind, und prozesshafte Aspekte, die beim Lösen von Problemen dieser Wissensbereiche eine Rolle spielen. Ziel des Unterrichts ist es, den Schüler zu

---

[102] Der oben zitierte Artikel WITTMANNs weist auf die kognitionspsychologische Wichtigkeit heuristischer Strategien hin und schafft somit eine Verbindung zwischen mathematischen Strategien und deren psychologischer Relevanz. Dass damit nur ein Aspekt einer Theorie für den Mathematikunterricht eingefangen ist, zeigen WITTMANNs Verweise auf die Wichtigkeit von inhaltlichen Schemata (s.o.). Eine Unterrichtstheorie im größeren Rahmen entwickelt er in (Wittmann 1981), dort auch unter Berücksichtigung BRUNERs instruktiver Theorie.

[103] Es handelt sich um die deutsche Übersetzung der 1965 erschienen Sammlung von Essays „Toward a Theory of Instruction“.

befähigen, eigenständig Probleme zu lösen, ohne auf permanente Hilfe eines Lehrers angewiesen zu sein (Bruner 1974, S. 57).[104]

Für BRUNER hat eine Theorie, die solchen Unterricht beschreibt, vier wesentliche Merkmale (Bruner 1974, S. 45 f.).

1. Sie sollte „diejenigen Erfahrungen genau bestimmen, die am sichersten dazu führen, im Individuum eine Prädisposition zum Lernen zu schaffen" (Bruner 1974, S. 45).
2. Sie „muss genau festlegen, auf welche Weise ein ganzer Wissensbereich strukturiert werden muß, damit der Lernende ihn möglichst leicht auffassen kann" (Bruner 1974, S. 45).
3. Sie muss den methodischen Gang bei der Behandlung eines Unterrichtsstoffes auswählen und begründen. Dazu müssen verschiedene Verfahren analysiert werden.
4. Sie „sollte [...] die Art und schrittweise Belohnung und Strafe im Prozess des Lernens und Lehrens festlegen" (Bruner 1974, S. 46).

Ausschlaggebend für den ersten Punkt der Lernvoraussetzungen sind vor allem kulturelle und soziale Bedingungen im Umfeld der Schüler. Dabei spielt insbesondere die Beziehung zwischen Lehrer und Lernenden eine wichtige Rolle. Auch emotionale Aspekte, die sich aus diesem Umfeld ergeben, können großen Einfluss auf den Erfolg des Lernprozesses haben. Beispielsweise hemmen Angst und starke Erregung die Informationsaufnahme und verhindern so die Ausbildung von Fähigkeiten zum Problemlösen (Bruner 1974, S. 56).

Der zweite Punkt schafft eine direkte Verbindung zu BRUNERs Überlegungen bzgl. Fundamentaler Ideen. In seiner Unterrichtstheorie geht er davon aus, dass diese Ideen gefunden und festgesetzt wurden, und beschäftigt sich nun mit deren Darbietung im Unterricht. Fundamentale Ideen[105] sind hiernach eine „Reihe von Lehrsätzen", die eine „Optimale Struktur" (engl: „optimal structur") bilden, „von [...] [der] aus weitere Wissensbereiche erschlossen werden können" (Bruner 1974, S. 45). Jede Struktur eines Wissensbereichs kann im Unterricht durch die be-

---

[104] Ein übergeordnetes Ziel ist, den Schüler zu befähigen, am Prozess der Wissensgewinnung teilzuhaben. Dazu muss die Lehre nicht nur auf die Vermittlung der Struktur des Wissens abzielen, „sondern auch den Charakter des Wissens und den Prozess der Wissensgewinnung reflektieren" (Bruner 1974, S. 74). Die Ähnlichkeit zu WITTENBERGs Vorstellungen (s.o.) liegt auf der Hand.

[105] Zwar benutzt BRUNER den Bezeichner „Fundamentale Idee" in seinem Essay nicht, sondern spricht von „Struktur", dennoch ist davon auszugehen, dass er mit beiden Bezeichnern den gleichen Begriff meint. Dafür spricht, dass BRUNER schon in seinem Buch „Der Prozess der Erziehung" beide Bezeichner verwendete. Zudem hatte sich in der Diskussion um die Reformbewegung im Anschluss an BOURBAKI der Bezeichner „Struktur" durchgesetzt. Es ist also anzunehmen, dass BRUNER auch in diesem Essay als Basis für die angesprochen Strukturen Fundamentale Ideen annahm.

rühmt gewordenen drei Repräsentationsformen enaktiv – ikonisch – symbolisch dargestellt werden.

Ausgehend von diesen Darstellungsebenen spielt bei der Vermittlung der Struktur der dritte Punkt, bei dem es um den methodischen Gang des Unterrichts und die Reihenfolge der Inhalte geht, eine Rolle. Diese Reihenfolge ist für BRUNER von besonderer Wichtigkeit, da sie so gewählt werden muss, dass sich immer wieder neue Probleme (für die Schüler) ergeben können, und somit „Interesse aktiviert und [...] aufrecht erhalten wird“ (Bruner 1974, S. 53).

Der vierte Punkt rückt noch einmal die Rolle des Lehrers als Begleiter des Lernprozesses in den Vordergrund. BRUNER versteht in einem handlungsorientierten Unterricht unter „Belohnung und Strafe“ die Korrektur und Lenkung der evtl. zunächst zusammenhanglosen Lernschritte des Schülers (Bruner 1974, S. 55).

Als Schlussfolgerung aus den Aufgaben, welche die Entwicklung eines Unterrichts (und größer: eines Curriculums) nach seiner Unterrichtstheorie mit sich bringt, und aus den Fehlentwicklungen, die sich in den Jahren der Unterrichtsreform in den USA gezeigt haben, mahnt BRUNER (nochmals) zur Zusammenarbeit von Fachwissenschaftlern, Lehrern und Psychologen.

> [...] ein Curriculum [sollte] in Zusammenarbeit von Fachwissenschaftlern, Lehrern und Psychologen erarbeitet werden, unter gebührender Berücksichtigung der dem Stoff innewohnenden Struktur, seiner richtigen Reihenfolge, dem psychologisch richtigen Tempo der Verfestigung und der Ausbildung und Aufrechthaltung der Bereitwilligkeit des Schülers, Probleme zu lösen.

(Bruner 1974, S. 73)

Ein solcher Aufruf zur Zusammenarbeit fand sich schon 1960 im Buch „The process of education“ (s.o.). Ebenfalls dort finden sich Andeutungen wichtiger Aspekte obiger Unterrichtstheorie. Damals noch mit direktem Bezug zu Fundamentalen Ideen.

> Mastery of the fundamental ideas of a field involves not only the grasping of general principles, but also the development of an attitude towards learning and inquiry, towards guessing and hunches, towards the possibility of solving problems on one’s own […] To instill such attitudes by teaching requires something more than the mere presentation of fundamental ideas […] but it would seem that an important ingredient is a sense of excitement about discovery – discovery of regularities of previously unrecognized relations and similarities between ideas, with a resulting sense of selfconfidence in one’s abilities.

(Bruner 1960, S. 20)

Es ist also anzunehmen, dass BRUNER schon bei der ursprünglichen „Definition“ Fundamentaler Ideen sowohl inhaltliche Aspekte („general principles“), aber auch prozesshafte Aspekte des Problemlösens im Blick hatte.[106] Hinzu kommen „Nichtkognitive“ Komponenten von Lernen („attitude towards learning“), die im Zusammenhang mit Fundamentalen Ideen stehen. Im Zuge der damaligen Reformen wurden die beiden letztgenannten Aspekte zunächst jedoch völlig vernachlässigt. Ihr Fehlen im Diskurs wurde nur vereinzelt festgestellt und bemängelt. Erst mit der, seit Mitte der 1970er Jahre stärker geführten, Diskussion in der mathematischen Fachdidaktik fanden sie wieder verstärkt Berücksichtigung.

Mit dieser abschließenden Betrachtung BRUNERs Theorie soll nun auch der Teil der vorliegenden Arbeit über die (Fehl-)Entwicklungen von einer eher durch Mathematiker geprägten Sichtweise Fundamentaler Ideen abgeschlossen werden.

3.4 Zwischenfazit

BRUNERs Forderung einer Orientierung des Fachunterrichts an den Fundamentalen Ideen der zugrundeliegenden Wissenschaften war mitausschlaggebend für eine weitreichende Reform des Mathematikunterrichts. Nach BRUNER sind Fundamentale Ideen (mathematische) Konzepte, die zur Grundlage von Lernprozessen werden können. Durch ihre reichhaltigen Anwendungen in der Wissenschaft eignen sie sich dafür besonders gut. Zudem ermöglichen sie eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Inhalten in dem Sinne, dass sie für die jeweilige Wissenschaft typische Herangehensweisen initiieren. Damals (und bis heute) erwies sich das Finden solcher Ideen als problematisch. Einen ersten Vorschlag in diese Richtung bot die Verbindung mathematischer und kognitiver Strukturen durch die BOURBAKI-Gruppe und die Arbeit von PIAGET. Als fundamental galten mathematische Begriffe und Relationen, mit denen auf einem streng deduktiven und abstrakten Niveau umgegangen wurde. Es galt, die gesamte Mathematik möglichst voraussetzungsfrei zu systematisieren und zu ordnen, mit dem Ziel, Begriffsnetze und -hierarchien zu erschaffen. Diese wurden dann mittels Relationen zu (teilweise neuen) Gebieten der Mathematik verknüpft. Mathematische Tätigkeiten und die geforderten typischen Herangehensweisen blieben unberücksichtigt. Im LAMBERTschen Ideenkatalog können diese Aspekte den Begriffsideen (Objekte, Netze, Ordnungen, Charakterisierungen) und Theorieideen (Gebiete, Erkenntnis- und Begründungskultur, Systeme und Sprache) zugeordnet werden. Folgt man der Unterscheidung BERNHARD ANDELFINGERs zwischen Mathematik als Wissenschaft und Mathematik als Schulfach, so werden zwei Dinge klar (Andelfinger 1979). Für die universitäre Wissenschaft ist ein solcher Aufbau der Mathematik noch begründbar, schließlich stellt die Moderne Mathematik mit der modernen axiomatischen Methode ganz wesentliche Aspekte von Mathematik heraus. Mathematik ist (auch) die Wissenschaft des deduktiven Schließens

[106] Das wird auch durch BRUNERs Aussage bestärkt, dass die Überlegungen, die er 1965 festhielt über „fünf Jahre[...] hin zustande gekommen“ sind (Bruner 1974, S. 7), demnach schon 1960 im Erscheinungsjahr von „The Process of Education“ eine (implizite) Rolle spielten.

und der abstrakten Muster und Strukturen. Das Erkennen solcher Strukturierungsmuster und der Umgang mit ihnen sind wichtige Bestandteile des mathematischen Arbeitens. Diese bilden allerdings nur Teilaspekte von Mathematik ab. Werden Begriffs- und Theorieideen ihrer genetischen Tradition beraubt und isoliert von weiteren tragenden Ideen der Mathematik im Unterricht dargeboten, werden sie für das Lernen von Mathematik unbrauchbar. Den Mutterstrukturen fehlen die „longterm trends" (Atiyah 1976, S. 61).

Zusätzlich unterschlägt eine Überbetonung der Deduktion und des Begrifflichen wesentliche Aspekte von Mathematik. Fundamentale Ideen sollen auch eine wissenschaftliche Herangehensweise an Inhalte ermöglichen. Demnach müssen auch prozesshafte Elemente von Mathematik im Unterricht berücksichtigt werden. Diese Aspekte spielen ja auch beim wissenschaftlichen Mathematiktreiben eine wesentliche Rolle (vgl. Kapitel 4.5). Namhafte Wissenschaftler wie PÓLYA, WITTMANN und WITTENBERG verfolgten ebenfalls diesen Aspekt, der sich in der Theorie BRUNERs im Zusammenhang mit Fundamentalen Ideen findet. Sie trugen maßgeblich dazu bei, das vermittelte Bild von Mathematik im Unterricht wieder um die Kategorien der Prozess- und Tätigkeitsideen zu erweitern.

Gerade diese Ideenkategorien sind es, mit denen sich auch die mathematikdidaktischen Arbeiten zum Thema Fundamentale Ideen auseinandersetzen. In ihnen ist besonders deutlich, dass Fundamentale Ideen im Prozess des Mathematiktreibens eingesetzt werden, diesen initiieren und vorantreiben (Schreiber 1979).

Das nächste Kapitel schließt die Analyse der mathematikdidaktischen Arbeiten an. Dabei finden zunächst Arbeiten Berücksichtigung, die nicht direkt an BRUNERs Konzeption Fundamentaler Ideen anknüpfen, sondern Ideen für den Mathematikunterricht allgemeiner aus bildungstheoretischer Sicht beleuchten (Kapitel 3.5.1). Aus den dort gegeben Beispielen und den impliziten Bezügen zur Theorie BRUNERs lässt sich schließen, dass sie eine ähnliche Zielsetzung mit ihren Ideen verfolgen wie BRUNER mit den Fundamentalen Ideen. Neben der Einordnung Fundamentaler Ideen in die deutsche Diskussion des Bildungsbegriffs sind hier Bezüge zur Kategorie der Persönlichkeitsideen erkennbar.

Des Weiteren werden die Ansätze der klassischen Forschungstradition Fundamentaler Ideen vorgestellt, die sich systematisch mit der Begriffsdefinition (sowohl im logischen als auch im prototypischen Sinne) beschäftigen. Dabei werden zwei grundlegende Arbeiten und deren direkte Rezeption (Kapitel 3.5.2) unterschieden von bereichsspezifischen Arbeiten (Kapitel 3.5.3) und der neusten Weiterentwicklung des Konzepts durch VOHNS (Kapitel 3.5.4). Hier wird auch verstärkt das Vernetzungspotential Fundamentaler Ideen deutlich, welches in Kapitel 5 zur unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen eingesetzt wird.

3.5 Fachdidaktische Diskussion(en) Fundamentaler Ideen

Anders als unter den Fachmathematikern, unter denen die Mutterstrukturen BOURBAKIs weitgehend als Fundamentale Ideen der Mathematik anerkannt wurden, konnte bis heute unter den Mathematikdidaktikern nicht im Konsens geklärt werden, was Fundamentale Ideen der Fachwissenschaft Mathematik sind, noch wie sich an ihnen vernetztes Wissen im Unterricht erfolgreich erwerben lässt.

Die Uneinigkeit über den Begriffsumfang zeigt sich in der Vielzahl fachdidaktischer Publikationen, in denen trotz ähnlicher Theorieansätze für Fundamentale Ideen häufig völlig unterschiedliche Ideenkataloge erarbeitet werden. Selbst bei dem zu benutzenden Bezeichner für den Begriff „Fundamentale Idee" herrscht keine Einigkeit (vgl. Abbildung 13). Zudem werden einige Bezeichner nicht synonym verwendet. Beispielsweise versteht SCHREIBER unter „Zentralen Ideen" gebietsspezifische Ausprägungen übergeordneter „Universeller Ideen" (Kapitel 3.5.2), während HEYMANN den Bezeichner „Zentrale Ideen" für seine übergeordneten Ideen verwendet (Heymann 1995, S. 173). In (Tietze/Klika/Wolpers 2000) und den wesentlichen Vorüberlegungen dazu von UWE-PETER TIETZE bezeichnen „Leitideen" einen von drei Aspekten Fundamentaler Ideen, die besonders Produkte der Mathematik umfassen (Tietze 1979, S. 145). Für HANS-JOACHIM VOLLRATH bezeichnen „Leitideen" eine ganze Reihe prozesshafter Aspekte des Mathematiktreibens wie „Gedanken", „Einfälle" und „Fragestellungen" (Vollrath 1978, S.29).

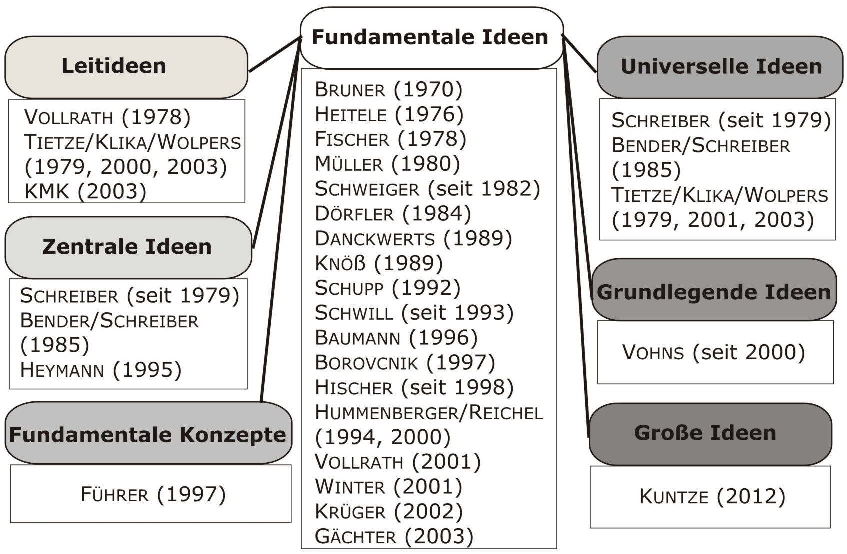


Abbildung 13 Synonyme (?) für den Begriff „Fundamentale Idee" in der deutschsprachigen Literatur

Mittlerweile existiert eine Vielzahl an unterschiedlichen Konzeptionen Fundamentaler Ideen. Dabei wurde der Thematik über die Jahre recht unterschiedliches Interesse geschenkt (vgl. Abbildung 14).

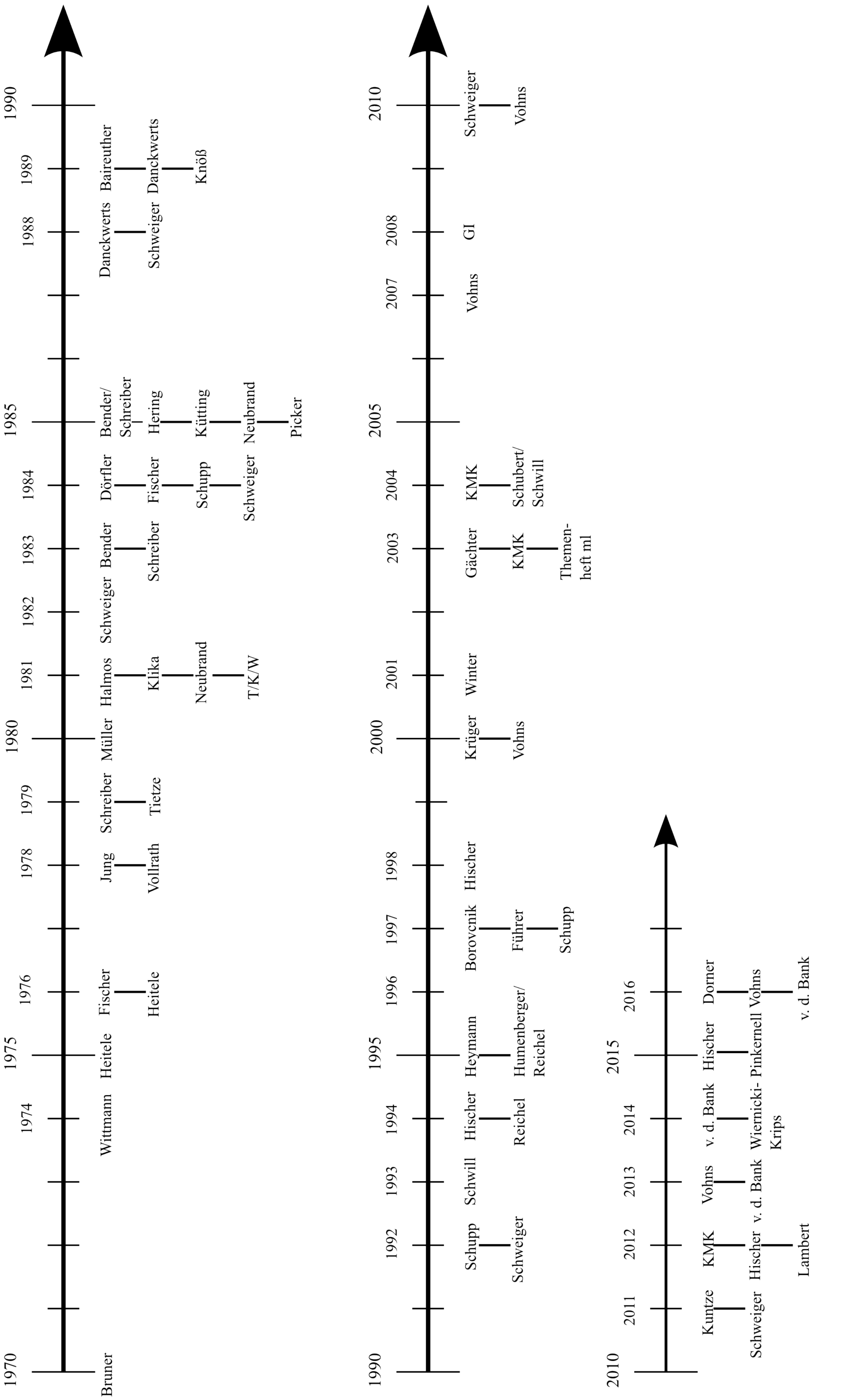


Abbildung 14 Chronologische Ordnung ausgewählter Publikationen zum Thema Fundamentale Ideen

Kurz nach der deutschen Übersetzung von BRUNERs „The Process of Education“ war die Rezeption groß. Viele Arbeiten entstanden, die Fundamentale Ideen von Seiten logischer und prototypischer Begriffsbildung präzisierten. Diese erste Welle hielt bis in die Mitte der 1980er Jahre an. Danach ging die Anzahl der Veröffentlichungen deutlich zurück. Ende der 1980er Jahre bis in die Mitte der 1990er Jahre bekam die Ideenforschung wieder neuen Schub. Verursacht wurde diese zweite Interessenswelle durch die Einführung der Informatik als eigenständigem Schulfach. Auf der Suche nach substanziellen Begründungen für oder gegen diese Einführung entstanden viele Arbeiten, die Fundamentale Ideen zur Verankerung von Informatik im Mathematikunterricht oder eben zur Abgrenzung von Informatik und Mathematik nutzten. Nach diesem Schub ist wieder eine fast zehnjährige Lücke in der Forschungsdiskussion auszumachen. Aktuell wird der Thematik erneut größere Aufmerksamkeit im Zuge der Ausrichtung von Lehrplänen an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik gewidmet.

Trotz unterschiedlicher Bezeichner und des zeitlichen Abstands zwischen den Arbeiten stehen die verschiedenen Konzepte Fundamentaler Ideen in einem engen Beziehungsgeflecht. Dominierten in den 1970er und 1980er Jahren eher Arbeiten, die eine theoretische Grundlegung anstrebten oder einzelne Ideen als fundamental herausstellten, so werden aktuell eher Überblicksarbeiten veröffentlicht, die bestehende Theorien aufgreifen, weiterentwickeln und auf den Mathematikunterricht anwenden. Einen Überblick über die Beziehungen und über den Einfluss der Arbeiten auf- und untereinander gibt folgende Abbildung 15. In ihr sind die Verfasser von zentralen Arbeiten zu Fundamentalen Ideen als Knoten modelliert. Sie sind nach dem Erscheinen ihrer Hauptwerke chronologisch von oben nach unten geordnet.[107] Eine Kante zwischen zwei Knoten bedeutet, dass der Autor auf der linken Seite jenen auf der rechten Seite zitiert.

[107] Obwohl die Arbeit von TIETZE, KLIKA und WOLPERS schon in den 1980er Jahren entstand, findet sich erst in der neuen Ausgabe eine ausführlichere Literaturschau zum Thema Fundamentale Ideen. Chronologisch wurde sie daher im Jahr 2000 eingeordnet. SCHWEIGER gab sowohl 1992 als auch 2010 einen ausführlichen Literaturüberblick. Da er 2010 seine Übersicht von 1992 lediglich durch neuere Arbeiten ergänzt ist SCHWEIGER chronologisch vor 2010 eingeordnet.

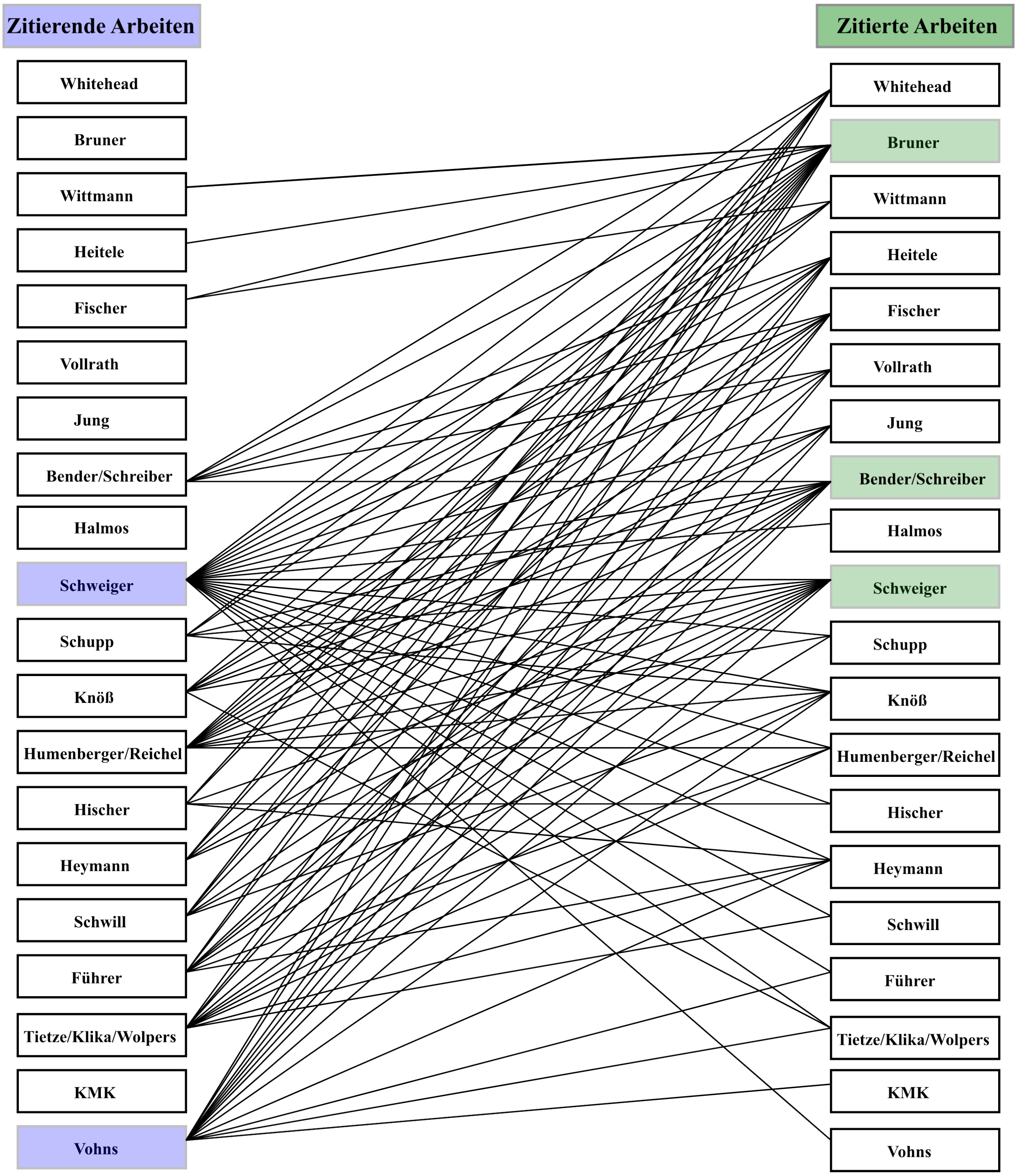


Abbildung 15 „Wer zitiert wen?“-Graph

Obwohl der Graph sicherlich nicht alle jeweils zitierten Arbeiten enthalten kann, lassen sich aus ihm wichtige Informationen ziehen. Auf der linken Seite fällt auf, dass einige Arbeiten ohne Anknüpfung an den bisherigen Forschungsstand auskommen. Zu nennen sind hier (Whitehead 1962) und (Bruner 1960),[108] die erst-

[108] WHITEHEAD wird hier zeitlich vor Bruner eingeordnet, da sich auf seine Rede von 1913 bezogen wird. Diese wird allerdings in der vorliegenden Arbeit in Kapitel 3.5.1 in der Übersetzung von WITTENBERG von 1962 zitiert.

mals eine Orientierung des Unterrichts an Ideen forderten und somit nicht auf vorherige Arbeiten zurückgreifen konnten. (Vollrath 1978) und (Jung 1978) vermeiden bewusst jeden Bezug zu vorherigen Arbeiten, da sie mit der Orientierung an Ideen eine Abkehr von der damals in den Schulen etablierten Strukturmathematik anstreben. Auch die aktuellen Bildungsstandards für das Fach Mathematik wurden von der KMK ohne Bezug zu historischen Vorläufern formuliert. Hierin liegt ein Grund dafür, dass die dort genannten Leitideen teilweise an der didaktischen Diskussion vorbeigehen. Seit den grundlegenden Arbeiten von SCHREIBER und später BENDER/SCHREIBER ist das Konzept der Fundamentalen Ideen in der mathematikdidaktischen Diskussion angekommen. Fortan sind Nachfolgearbeiten durch Bezugnahme auf den jeweiligen Forschungsstand gekennzeichnet. Besonderes reichhaltig nutzte SCHWEIGER die vorhandene Literatur. Er befasste sich in einem Zeitraum von fast 30 Jahren kontinuierlich mit Fundamentalen Ideen. Besonders Merkmal seiner Arbeiten sind die ausführlichen Literaturschauen (Schweiger 1992) und (Schweiger 2010).[109] Der letztgenannte Autor VOHNS erstellte im Rahmen seiner Dissertation ebenfalls eine ausführliche Zusammenfassung des bisherigen Forschungsstandes (Vohns 2007).

Auf der Seite der zitierten Autoren (rechts) lassen sich ebenfalls „Häufungspunkte“ ausmachen. BRUNER ist als Begründer des Konzepts Fundamentaler Ideen in fast allen späteren Arbeiten zitiert. Daneben sind es die Arbeiten von BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER, auf die am häufigsten Bezug genommen wird. Ihre Arbeiten stellen gewissermaßen zwei Urtheorien Fundamentaler Ideen dar und gelten bis heute als Weg weisend.

VOHNS schlägt für eine Einteilung der umfangreichen mathematikdidaktischen Literatur zum Thema Fundamentale Ideen Folgendes vor.

> [Es] lassen sich grob drei Richtungen unterscheiden:
>
> - Arbeiten, in denen die Bedeutung einer Orientierung des Mathematikunterrichts an Ideen grundsätzlich bildungstheoretisch erwogen und gegen eine bloße Fokussierung auf mathematische Strukturen und Begriffe abgegrenzt werden [...]
> - Arbeiten, die sich mit fundamentalen Ideen einzelner Inhaltsbereiche oder einzelnen als fundamental angenommenen Ideen beschäftigen, ohne dass alle Arbeiten den Begriff der fundamentalen Ideen selbst näher definieren oder gar problematisieren [...]
> - Arbeiten, die in teils deutlicher Abgrenzung zu BRUNER den Begriff der fundamentalen Idee bzw. eigene alternative Begriffsvorschläge selbst und ihre mögliche Bedeutung für den Mathematikunterricht erörtern [...]
>
> (Vohns 2007, S. 24 f.)

[109] Auf die Weiterentwicklung SCHWEIGERs Theorie Fundamentaler Ideen, die sich aus diesem langen Forschungsprozess ergibt, wird in Kapitel 3.5.2 eingegangen.

Dieser Einteilung wird auch in der vorliegenden Arbeit gefolgt, allerdings kommt den Arbeiten der ersten Richtung bei der folgenden Analyse ein höherer Stellenwert zu als in (Vohns 2007). Dadurch wird ihre Bedeutung für die in Kapitel 4 folgende Öffnung des Ideenbegriffs herausgestellt. Arbeiten der zweiten Richtung werden integrativ mit den Arbeiten der dritten Richtung untersucht, da diese Arbeiten meist Arbeiten der dritten Richtung als Theoriegrundlagen verwenden und das dortige Begriffsverständnis ihren Überlegungen zugrunde legen. Zunächst zu den Arbeiten der ersten Richtung.

3.5.1 Ideen: mehr als nur Strukturen

Die nun vorgestellten Ansätze knüpfen (wenn auch nicht immer explizit) an die Konzeptionen WITTENBERGs an, der sich gegen die unreflektierte Behandlung Moderner Mathematik wendete und für einen an „echter" Mathematik ausgerichteten Mathematikunterricht plädierte, der einen Beitrag zu allgemeiner Bildung leisten kann (vgl. Kapitel 3.2.3). WITTENBERG selbst wies auf einen „Vordenker" seines Ansatzes hin, dessen u.a. 1913 veröffentlichte „Gedanken und Grundsätze" von „vorbildlicher geistiger Qualität" waren und auch „in heutiger Zeit [...] geradezu brennend aktuell[...]"[110] sind (Whitehead 1962, S. 257). Die Rede ist von WHITEHEAD, der lange vor BRUNER eine Orientierung des schulischen Mathematikunterrichts an „einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung" fordert (Whitehead 1962, S. 260).

Dadurch, dass WHITEHEAD die Orientierung an Ideen nicht nur auf inhaltliche Überlegungen beschränkte, sondern eine solche Orientierung stets an ihrem Beitrag zur Bildung der Schüler maß, wurde er (neben BRUNER) zu einer wichtigen Bezugsquelle für viele Autoren, die sich innerhalb der mathematischen Fachdidaktik mit einer Theorie Fundamentaler Ideen beschäftigten.[111]

„Education is the guidance of the individual towards a comprehension oft the art of life" (Whitehead 1949, S. 50).[112] Die Kunst des Lebens besteht nun darin „erstens [...] lebendig zu sein, zweitens, lebendig zu sein auf befriedigende Weise, und drittens ein Wachsen der Befriedigung zu erreichen" (z.n. Jung 1962, S. 250). Ausgehend von dieser philosophischen Definition von Bildung stellt JUNG, in seiner Lesart WHITEHEADs, heraus, dass dieser zwei Funktionen einer solchen Erziehung berücksichtigt sehen wollte. Zum einen, indem er das Verständnis („comprehension") für die Kunst des Lebens einbezieht, betont er das „intellektu-

[110] Gemeint ist die Zeit der Reformbewegungen in den 1960er Jahren.

[111] Direkten Einfluss hatten WHITEHEADs Überlegungen auf die Arbeiten von WALTER JUNG, SCHREIBER, SCHWEIGER und VOHNS.

[112] Es ist darauf hinzuweisen, dass der gebürtige Brite WHITEHEAD das engl. „education" verwendet, zu dem es kein passendes deutsches Pendant gibt. WITTENBERG macht deutlich, dass es WHITEHEAD, wenn dieser auch von „liberal education" spricht, eine Art „geistig befreiende Bildung" im Blick hat, die „zugleich auch Erziehung ist" (Whitehead 1962, S. 259 f. Fn. 3).

elle Moment“ einer humanistischen Bildung (Jung 1962, S. 251). Zum anderen hält WHITEHEAD mit dem „lebendig zu sein“ die Aktivität des Individuums fest. Er übt somit Kritik an der humanistischen Bildung seiner Zeit, denn

> Aktivität ist wesentlich und die Erfahrung, in den Fluß der Ereignisse verwoben zu sein, mit seiner Verknüpfung von Ursache und Wirkung. Eine Erziehung, die das intellektuelle und ästhetische Leben von diesen fundamentalen Fakten zu lösen sucht, trägt die Dekadenz der Zivilisation in sich.
>
> (z.n. Jung 1962, S. 249)

Mit dem Erziehungsziel der „Selbsttätigkeit“ formuliert WHITEHEAD ein Korrektiv zu einer an „nutzlosen Ideen [...] und [...] [bloßem] Informiertsein“ ausgerichteten Erziehung (Jung 1962, S. 251).

Auf die Mathematik als Unterrichtsfach bezogen bedeutet dies, dass neben inhaltlicher Kenntnis auch das Moment der selbstständigen Tätigkeit des Schülers betont werden muss. Gerade bei der inhaltlichen Ausrichtung des Mathematikunterrichts sieht WHITEHEAD klar die Gefahr der „Esoterik“, denn die „Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen, noch zu alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen lassen“ (Whitehead 1962, S. 260). Um sein „esoterisches Antlitz“ zu verlieren, sollte sich der Mathematikunterricht „offenkundig auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung befassen“ (Whitehead 1962, S. 260). Bedeutung ist dabei nicht nur bezogen auf die Mathematik gedacht, sondern berücksichtigt auch das Verständnis des Schülers. Ihm soll es möglich sein, die Bedeutung der behandelten Ideen „unmittelbar zu schätzen“ (z.n. Jung 1962, S. 252). Damit rückt WHITEHEAD die Wichtigkeit von praktischer Anwendung, der abstrakten Ideen der Mathematik, in den Vordergrund. Solche Anwendungen lassen sich als Beispiele abstrakterer Ideen, mit direkten Bezug zum Alltagsdenken, und in den Naturwissenschaften finden.

Als eine erste Gruppe von abstrakten Ideen nennt WHITEHEAD die „Beziehungen der Zahl, [...] der Quantität und [...] des Raumes“, die „vielfach miteinander verknüpft“ sind (Whitehead 1962, S. 261). Diese Verknüpfung der Ideen zeigt WHITEHEAD am „Messen“, das die Idee der Quantität und der Zahl vereint. Eine Möglichkeit, die Ideen für Schüler offenzulegen, sieht WHITEHEAD in einer reflektierenden Rückschau am Ende einer Unterrichtsreihe. Somit werden „jene allgemeinen Ideen, welche der ganzen früheren mathematischen Arbeit zugrunde liegen, nun von selber in hellstem Licht hervortreten“ (Whitehead 1962, S. 263).[113] In Bezug auf das Messen könnte diese Rückschau aus dem Studium des

---

[113] WHITEHEAD relativiert die Tragweite eines solchen Vorgehens für die schulische Praxis, indem er gesteht, dass für „zurückgebliebene Schüler [...] der Gegenstand nicht geeignet [wäre], doch für die fortgeschrittenen könnte er gewiß interessant gemacht werden“ (Whitehead 1962, S. 264). Es

fünften Buches von EUKLID bestehen, aus dem die Entdeckung der Inkommensurabilität nachvollzogen werden kann. Somit könnten die Schüler „sorgfältig erwägen [...] welches diejenigen fundamentalen Eigenschaften der Größe im Allgemeinen sind, welche zu einer Einführung des zahlenmäßigen Messens führten" (Whitehead 1962, S. 263). Es wird deutlich, dass WHITEHEAD mit seinen Ideen nicht nur ein inhaltliches Kriterium zur Stoffauswahl bereitstellen will, sondern auch auf ein tieferes Verständnis von Sinn und Zweck dieser Ideen abzielt, das auch deren Bedeutung in der Entwicklung der Mathematik berücksichtigt.[114] Diese Anliegen macht er noch am Beispiel der funktionalen Abhängigkeit deutlich. In den Reformen zur Etablierung des funktionalen Denkens im Mathematikunterricht „bestehe eine gewisse Tendenz, die Kinder einfach zum Zeichnen von Kurven zu veranlassen" und deren physikalische oder geometrische Bedeutung auszublenden (Whitehead 1962, S. 264).[115] Im Sinne des oben nachgezeichneten Auftrags des Mathematikunterrichts zu allgemeiner Bildung nach WHITEHEAD wäre es aber gerade wichtig, diese „Idee[en] hinter der Kurve" herauszustellen.

Hier zeigt sich deutlich, dass es bei WHITEHEADs Konzeption einer Orientierung an Ideen um mehr und auch graduell andere Dinge geht als bei BRUNER. Während BRUNER Fundamentale Ideen als inhaltliche Auswahlkriterien sieht, die, neben ihrer ordnenden Funktion im Denken des Schülers, diesem auch einen entdeckenden Zugang zum Stoff ermöglichen sollen, geht es WHITEHEAD auch um eine tiefere Auseinandersetzung mit der Sache „Mathematik". Dazu ist es notwendig, Sinnfragen[116] zu stellen und nach der Bedeutung mathematischer Ideen zu fragen.

Der Versuch, durch die Akzentuierung von Ideen Bedeutung zu schaffen, findet sich auch in den Arbeiten von VOLLRATH und JUNG, die beide (sicherlich bewusst) nicht direkt an BRUNERs Fundamentale Ideen anknüpfen.

VOLLRATHs 1978 erschienener Artikel „Rettet die Ideen" unternimmt den Versuch konkret aufzuzeigen, welche Anlässe die Mathematik bietet, den Schülern im Unterricht ihre Ideen aufzuzeigen. Möglichkeiten bieten sich genügend, denn VOLLRATH fasst den Ideenbegriff sehr weit.

> Wenn ich im folgenden von Ideen spreche, dann meine ich damit den entscheidenden Gedanken eines Themas, den wesentlichen Kern einer Überlegung, den

---

ist zu beachten, dass WHITEHEAD über das englische Schulsystem spricht und dabei nicht das deutsche Gymnasium in Blick hat.

[114] Dem Studium der Geschichte der Mathematik misst WHITEHEAD Bedeutung beim Vertiefen der Ideen zu (Whitehead 1962, S. 265).

[115] Zur Entwicklung des funktionalen Denkens als fachdidaktisches Prinzip vgl. auch (Krüger 2000).

[116] Vgl. dazu auch die unten vorgestellte Arbeit von ROLAND FISCHER.

> fruchtbaren Einfall bei der Lösung eines Problems, die leitenden Fragestellungen einer Theorie, die zentrale Aussage eines Satzes, die einem Algorithmus zugrundeliegenden Zusammenhänge und die mit Begriffsbildungen verbundenen Vorstellungen.

(Vollrath 1978, S. 449)

Diese umfangreichere Liste von Ideen leitet er aus der Analyse (teils) fachmathematischer Arbeiten ab, in denen der Ideenbegriff (meist in einem Vorwort oder Kommentar) verwendet wird.

Während Ideen in der fachwissenschaftlichen Diskussion noch vorkommen, sind sie im Mathematikunterricht zahlreichen Bedrohungen ausgesetzt (Vollrath 1978, S. 449). VOLLRATH nennt als Bedrohungen (vgl. Vollrath 1978, S. 451-454):[117]

- „Überwucherung der Ideen durch Formalisierung“ (Überbetonung des Kalküls gegenüber seiner Anwendung),
- „Ausufernde Begrifflichkeit“ und „Verneblung der Ideen durch technische Terminologie“ (Einführung von Nachbar-, Ober-, und Unterbegriffen, die unnötig den Begriffsapparat aufblähen; Aufnahme von nicht fachtypischer Terminologie in den Unterricht, „Operatorchinesisch“),
- „Abwertung tradierter mathematischer Ideen“ und „Geringschätzung ideenhaltiger Inhalte“ (Aufgabe von bewährten Betrachtungsweisen zugunsten nicht notwendigerweise leistungsfähigeren „moderneren“ Betrachtungsweisen; Inhalte werden ihrer Ideen beraubt und kalkülmäßig behandelt, um schließlich aus dem Unterricht zu verschwinden),
- „Atomisierung von Ideen“ (Zersplitterung von Problemsequenzen im Unterricht, die keinen Zusammenhang zu übergeordneten Ideen erkennen lassen),
- „Verwaltung und Bürokratisierung von Ideen“ (Eliminierung von Freiräumen zu Beschäftigung mit Ideen durch Bestrebungen zur Normierung von Abschlüssen).

Diese Auflistung wurde ausführlicher wiedergegeben, da sie in systematischer Weise die Kritik an den Reformen des Mathematikunterrichts enthält, die schon in Kapitel 3.2.3 vorgebracht wurde, und darüberhinaus weitere wichtige Punkte expliziert. Der letzte Punkt beispielweise verweist auf Problematiken, die sich durch „Standardisierung“ von Aufgaben und Notengebung bei Abschlussprüfungen ergeben und somit auch aktuell, in der Zeit von Bildungsstandards, relevant ist.

---

[117] Die in Anführungszeichen gesetzten Passagen sind die wörtlichen Zitate der Überschriften, die VOLLRATH den Bedrohungen gibt. Die Stichworte in Klammern sind sinngemäße Zusammenfassungen von VOLLRATHs Erklärungen zu den Überschriften.

Für die Überlegungen zu Fundamentalen Ideen ist besonders der dritte Punkt im Zusammenspiel mit dem vierten von Bedeutung. VOLLRATH macht am Beispiel des Begriffs Vektorraum deutlich, dass es bei der Erarbeitung eines Begriffs häufig verschiedene Ideen gibt. Der Vektorraum kann beispielsweise geometrisch und algebraisch motiviert werden. VOLLRATH zieht hier jedoch die „altmodische" geometrische Methode vor, da das algebraische Vorgehen zu sehr „pathologische" Beispiele in den Vordergrund stellt (Vollrath 1978, S. 453). Bei der Auswahl der im Unterricht vermittelten Idee soll deren „Zugänglichkeit für den Schüler, Merkbarkeit, Hantierbarkeit, Anwendbarkeit und [...] Tragfähigkeit" entscheidend sein (Vollrath 1978, S. 453). Gerade in Bezug auf die ersten vier Punkte sieht VOLLRATH die „bewährten Betrachtungsweisen", also die „genetischen fundamentalen Ideen", im Vorteil (Vollrath 1978, S. 453).[118]

Von diesen Ideen erhofft sich VOLLRATH einige Vorteile im Unterricht, die den Schülern das Lernen erleichtern können. Neben kognitiven Aspekten (Ideen bewahren vor dem Vergessen und lassen zum Kern der Dinge vorstoßen) hält er dabei auch „Nichtkognitive" Aspekte fest. Dazu gehören, dass Ideen entzünden können, Belastungen ertragen helfen und die Kraft des eigenen Denkens erfahrbar machen, was besonders beim Problemlöseprozess von Wichtigkeit ist.

Der vierte Punkt in obiger Aufzählung von Bedrohungen ordnet solche Ideen in einen größeren Zusammenhang ein. Ausgehend von der Tatsache, dass es bei der Erarbeitung eines Begriffs mehrere tragfähige Ideen geben kann, entfaltet VOLLRATH die Notwendigkeit eines übergeordneten Ordnungsschemas für Ideen. Die sieht er in übergeordneten „Leitideen" gegeben (Vollrath 1978, S. 454). Als solche potentiellen Leitideen identifiziert er „Symmetrie", „Stetigkeit" und „Linearität", in Anlehnung an ATIYAH und den Funktionsbegriff für die Analysis, sowie den Abbildungsbegriff für die Geometrie und den Mengenbegriff für die Grundschule (Vollrath 1978, S. 450 f.). Eine Ausarbeitung dieser Leitideen, aus der ihr Beitrag zu den oben genannten Vorteilen einer Betonung von Ideen ersichtlich wird, unternimmt VOLLRATH nicht.

VOLLRATH unterscheidet also mindestens zwei Ebenen seiner Ideen. Zum einen eine Art „Mikroebene", auf der sinntragende Ideen für die prozesshaften Aspekte von Mathematik, wie VOLLRATH sie zu Beginn seines Artikels beschreibt, zu suchen sind. Diese Konzeption ähnelt den Vorstellungen WITTENBERGs zu einer Orientierung des Unterrichts an Ideen.[119] Zum anderen geht VOLLRATH auch auf

[118] Die Verbindung von bewährten Ideen mit neuen Fundamentalen Ideen soll eine Abkoppelung der Inhalte des Mathematikunterrichts von ihrer Tradition verhindern. Eine solches Auseinanderdriften traditioneller und neuer Ideen führte für den Mathematikunterricht zu den in Kapitel 3.2.3 diskutierten Problemen der Strukturmathematik.

[119] Dies verwundert nicht, da beide Autoren die Überlegungen MARTIN WAGENSCHEINs als einen Ausgangspunkt wählen. Vgl. (Vollrath 1978, S. 452) und (Wittenberg 1963, Vorwort XII).

eine „Makroebene“ und möchte den Mathematikunterricht an einer Reihe von übergeordneten Leitideen ausgerichtet sehen, die zu dessen Strukturierung beitragen und so den „roten Faden“ erkennen helfen (Vollrath 1978, S. 450).

VOLLRATHs Hauptaugenmerk liegt allerdings auf der Mikroebene der Ideen. Um diese zu verdeutlichen entwickelt er eine ganze Reihe von exemplarischen Ideen, wie die „Idee einer Äquivalenzumformung“, die „Idee des Abbildungsbegriffs“, die „Idee der Symmetrie“ oder die „Idee der Ableitung“ (Vollrath 1978, S. 450). Hinzu kommen viele mathematische Inhalte, die von Ideen getragen werden, welche im Mathematikunterricht deutlich werden sollten. VOLLRATH nennt u.a. das „babylonische Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzeln“, die „Behandlung von Gleichungen“ und die „Trigonometrie“ (Vollrath 1978, S. 451; 452; 454).

Es ist klar, dass VOLLRATH bei solch umfangreichen Listen nicht zu einer Erarbeitung eines systematischen Katalogs Fundamentaler Ideen gelangen kann, mit dessen Hilfe sich der Mathematikunterricht inhaltlich strukturieren ließe. Sein Beitrag zur Diskussion Fundamentaler Ideen ist daher in der systematischen Gliederung von Vorteilen einer Orientierung an Idee und der umfangreichen Auflistung der Gefahren, denen diese Ideen ausgesetzt sind, zu sehen. VOLLRATH bemerkt dazu:

> Wenn ich den Begriff der Idee in einem naiven Sinne verwendet habe, dann sollte das dazu dienen, auf die Notwenigkeit hinzuweisen, im Mathematikunterricht Akzente zu setzen.
>
> Die Geschichte des Mathematikunterrichts zeigt das Bemühen, Leitideen für den Mathematikunterricht zu gewinnen, damit Schüler durch die Beschäftigung mit Mathematik gebildet werden können.

(Vollrath 1978, S. 454)

VOLLRATH schließt seinen Artikel mit einer Ermahnung.

> Es zeigt sich aber zugleich die Gefahr, daß gerade die Ideen in der Unterrichtspraxis am ehesten verschüttet werden. Deshalb sollte es unser Ziel sein, die Ideen für den Mathematikunterricht zu retten.

(Vollrath 1978, S. 454)

Dieser Aufruf zur Rettung der Ideen, verbunden mit der Vielzahl der von VOLLRATH genannten Ideen, veranlasste WALTER JUNG zu einer Stellungnahme. Er grenzt seine Vorstellung von Ideen deutlich von der VOLLRATHs ab.

> Es sollte aber klar sein, daß [...] die hier gemeinte Konzeption deutlich von der von Vollrath vorgestellten abweicht: Die Fülle der von ihm angeführten Ideen reizt in der Tat am Ende zu dem Ruf „Rettet die Ideen“.

(Jung 1978, S. 171)

Für JUNG steht eine Orientierung an Ideen als Kontrast zu dem lernzielorientierten Unterricht der damaligen Zeit. Die Ansicht, dass „diejenigen Lehrer den größten Lerneffekt erzielen können, die präzise Vorstellungen von dem haben, was sie vermitteln wollen“, ist für JUNG „alter pädagogischer common sense und genau genommen eigentlich trivial“ (Jung 1978, S. 168). Dafür verschleiert die Lernzielorientierung eigentlich bedeutende Fragen. Nämlich die nach den Zielen und den Langzeitwirkungen des Mathematikunterrichts.

> Vor lauter Eifer mit Pseudo-Präzision immer feinere und detailliertere und damit auch immer mehr „Ziele“ zu konstruieren, geht der Eifer für die ungleich wichtigere Besinnung über den Zweck des ganzen Unternehmens und für eine Diskussion der Sachen verloren.

(Jung 1978, S. 169)

JUNG wendet sich also entschieden gegen eine zu starke Präzision der Ziele, da diese „je präziser, desto bedeutungsloser“ werden (Jung 1978, S. 168). Um allerdings eine bedeutungsvolle Begegnung mit Mathematik zu ermöglichen, müsste der Mathematikunterricht aber bemüht sein, Langzeitwirkung zu haben. An dieser Stelle weist JUNG darauf hin, dass solche bedeutungsvollen Begegnungen „früher“ auch von „Lehrer-Schüler-Verhältnissen“ ausgegangen sind (Jung 1978, S. 169).

> Man ging etwa zu Rutherford nach Cambridge [...] zu Hilbert nach Göttingen, weil man von ihnen lernen wollte. Was aber im Detail das sein würde, war vorher nicht entschieden [...] Auch auf bescheidenerem Niveau spielt sich Analoges ab. Die bedeutungsvollen Wirkungen gehen von der Begegnung aus, mit bedeutenden Menschen, die man achtet, vielleicht gar bewundert, die auf idiosynkratische Weise die Auseinandersetzung mit der Sache vermitteln.

(Jung 1978, S. 169)

Dies soll nicht bedeuten, dass JUNG es für unwichtig hält, was Schüler am Ende einer Unterrichtsreihe für Konzepte beherrschen. Ihm geht es eher darum, die richtige Frage für die Auswahl dieser Konzepte zu stellen.

> Welche Ideen nimmt der Schüler als Elemente seiner geistigen Existenz mit und welche Rolle spielen diese Ideen in seinem Leben?

(Jung 1978, S. 170)

JUNG fragt an dieser Stelle bewusst nicht danach, welche mathematischen Strukturen oder typischen Denkweisen der Schüler aus dem Mathematikunterricht mitnimmt, denn

> mit „Ideen“ ist [...] mehr gemeint als mit „Struktur“ oder „Verfahren“. Idee schließt die Vorstellung einer geistiges Leben organisierenden Potenz ein. Die Idee mathematischer Strukturen mitnehmen ist viel mehr als mathematische Strukturen mitnehmen, weil sie einschließt, daß der *Sinn* mathematischer Strukturen durchschaut ist, daß er erklärt werden kann, als Teil eines geistesgeschichtlichen Pro-

> zesses begriffen und als Ferment des geistigen Lebens wirksam ist. Ideen sind in gewisser Hinsicht auch weniger: Die Idee einer Sache ist etwas vage, braucht keine Detaillierung, macht sie überhaupt erst sinnvoll. Sie entspricht dem, was manche Lernpsychologen ein „Schema" [...] nennen. Ideen sind geistige Gebilde, an denen *Teilhabe* in mehr oder weniger hohem Grad möglich ist.
>
> (Jung 1978, S. 170)

Es geht JUNG um mehr als nur inhaltliche Auswahl zur Bekämpfung von Stofffülle. Er plädiert für eine Auswahl von Konzepten, die mathematischen Sinn tragen und so mathematische und individuelle Bedeutung erlangen können. Dadurch werden Ideen zu einem „Konzept einer mathematischen Bildung" (Jung 1978, S. 170). Somit schließt sich JUNG an die Konzeptionen WHITEHEADs, WITTENBERGs und auch VOLLRATHs an, denen es allen um die Orientierung an sinntragenden Ideen zum Zwecke der Bildung ging. Es ist JUNGs Verdienst, diese Ausrichtung an Ideen in dieser Deutlichkeit herausgestellt zu haben und somit einen Betrag zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen zu leisten.

JUNG sucht demnach nach Ideen für den Unterricht, die „hinreichend wage sind, um zu individueller Aneignung einzuladen" (Jung 1978, S. 170). Dabei ist ihm klar, dass ein Einzelner zu einem solchen Kanon von Ideen nur Hinweise geben kann. Seine Vorschläge sind die „Idee eines Kalküls oder Algorithmus", die „Idee des Unendlichen" und die „Idee des Messens" (Jung 1978, S. 171). An der Idee des Kalküls macht JUNG deren historische Bedeutung deutlich und weist nach, wie „Naturbegriffe" (hier: Mechanismus) mit mathematischen Ideen zusammenhängen (Jung 1978, S. 172). Mit der „Idee des Unendlichen" stellt JUNG die Sinnfrage und zeigt, dass deren Diskussion nicht nur mathematischen Kreisen vorenthalten war. Die „Idee des Messens" stellt eine zweite Ebene von Idee dar, an denen sehr deutlich wird, was eine Idee mehr ist als ein Begriff oder eine Tätigkeit (s.o.). Die Idee des Messens beschreibt hier nämlich nicht den Prozess des Messens einer Strecke oder das Suchen, Finden und Anwenden eines Maßes[120], sondern die Idee, die hinter diesen Aktivitäten steht. Dabei geht es JUNG darum aufzuzeigen, dass beispielsweise die Länge einer Strecke keine ihrer naturgegebenen Eigenschaften ist (Jung 1978, S. 173), sondern, dass dieses Maß ein von Menschen festgelegtes ist. Anders als WHITEHEAD möchte JUNG damit weniger auf genetische Ideen hinaus. Ihm geht es darum, das Verständnis dafür zu schaffen, warum wir heute so messen und wie es auch anders sein könnte. Als Abschluss seines Artikels schlägt JUNG dazu einen methodischen Gang vor, der Geometrie zur „Science Fiction" macht, indem er von einer Welt ausgeht, in der es beispielsweise keine EUKLIDische Metrik gibt, und die Möglichkeiten der Bewegung ihrer Bewohner auslotet (Jung 1978, S. 173 f.).

[120] Dies ist das (hier sehr frei formulierte) Verständnis der Leitidee Messen in den deutschen Bildungsstandards, vgl. Kapitel 2.1.3.

Einen vorläufigen Abschluss findet diese Richtung der deutschsprachigen Diskussion Fundamentaler Ideen, die besonders den Bildungswert von Ideen erschließt, mit der Arbeit von FISCHER 1984.

Schon der Titel „Unterricht als Prozess der Befreiung vom Gegenstand“ deutet deren philosophischen Hintergrund an. FISCHER sieht die Menschheit mit einer unüberblickbaren Fülle von (mathematischem) Wissen konfrontiert. Er unterscheidet zwei Gruppen von Menschen, deren Umgang mit dieser Fülle an Wissen unterschiedlich ist. Die erste Gruppe, die aus wissenschaftlich forschenden Mathematikern besteht, bildet zum einen Spezialisten aus, die nur einen kleinen Teil des mathematischen Wissens in allen Details kennen, und zum anderen jene, die versuchen, ein Überblickswissen zu behalten, das aber notgedrungen recht oberflächlich sein muss (Fischer 1984, S. 54). Unter der zweiten Gruppe subsummiert FISCHER all jene Menschen, die „außerhalb“ der Wissenschaft stehen und mit der Fülle an Wissen evtl. nur in der Schule konfrontiert wurden. Aufgrund des abstrakten Charakters mathematischer Begriffe und Theorien, in denen ein „langdauernder, aufwendiger Kommunikationsprozeß von Wissenschaftlern [...] verborgen und kaum rekonstruierbar“ ist, wird mathematisches Wissen für Laien unverdaulich (Fischer 1984, S. 55). Daraus kann eine Abwehrhaltung gegenüber der Mathematik entstehen, die FISCHER „Mathophobie“ nennt und die zu einer Spaltung der Kultur in eine „mathematisch-naturwissenschaftlich-technische“ und eine „geisteswissenschaftlich-künstlerisch-humanistische Orientierung“ führt (Fischer 1984, S. 55 f.). Der Trennung dieser beiden Kulturen will FISCHER entgegenwirken, daher fordert er, dass in der Schule nicht mehr nur Wissen vermittelt wird, sondern auch wie der Mensch mit diesem Wissen umgehen kann.

> Aufgabe des Fachunterrichts im offiziellen Bildungssystem sollte heute nicht nur und nicht in erster Linie das Heranführen an bestimmtes Wissen sein [...], sondern die Entwicklung eines reflektierten, realistischen Verhältnisses zum jeweiligen Wissen.
>
> (Fischer 1984, S. 52)

Diese neue Orientierung des Fachunterrichts nennt FISCHER einen „Akt der Befreiung [...] vom mathematischen Wissen“ (Fischer 1984, S. 59). Im Mathematikunterricht kann diese Befreiung daraus bestehen, dass

> wir uns ständig der über jedes Wissen hinausgehenden Möglichkeiten des lebendigen Menschen bewußt [sind] [...], die letzten Endes den Wert des Menschen bestimmen. Möglichkeiten, die im Reflektieren über das Wissen, im Bewerten dieses Wissens, aber auch im Erfassen zusätzlicher – für uns wesentlicher – Gesichtspunkte liegen, bis hin zu den Möglichkeiten, in Situationen intuitiv zu handeln, zu fühlen etc.
>
> (Fischer 1984, S. 59)

FISCHER plädiert also für eine Stärkung von Aspekten, die auf einer Metaebene liegen. Somit steht nun nicht mehr das Wissen, sondern das Verhältnis des Lernenden zu diesem Wissen im Zentrum des Unterrichts. Damit rücken auch „Nichtkognitive“ Aspekte von Mathematikunterricht in den Vordergrund. Ähnlich wie bei JUNG geht es FISCHER um Sinnfragen, die sich aus dem Wissen ergeben. Eben um den „sozial-kommunikativen Charakter“, der sich hinter mathematischen Begriffen und Theorien verbirgt (Fischer 1984, S. 62). Das Ziel der Befreiung vom Wissen wird durch das Stellen und Beantworten solcher Sinnfragen und das Erkennen der daraus resultierenden Möglichkeiten des Menschen erreicht. Dies führt zu einem „gestärkten Selbstbewußtsein“ der Schüler und somit zur Befreiung vom Wissen (Fischer 1984, S. 59).

Für die Umsetzung eines Unterrichts, der diese neue Akzentuierung trägt, müssen Inhalte ausgewählt werden, an denen Sinnfindung möglich ist. Eine Möglichkeit zu deren Auswahl sieht FISCHER in der Betonung Fundamentaler Ideen.[121] Das Scheitern der Strukturmathematik, deren Ziel eine Orientierung des Mathematikunterrichts an den fundamentalen Strukturen der Mathematik war, ist nach FISCHER darin begründet, dass diese Strukturen aus ihrem Entstehungsprozess rausgelöst wurden. Damit wurde ihnen der Sinn geraubt.

> [...] Theorien sind Sichtweisen von Menschen zur Erklärung von Sachverhalten. Z.B. stellt ein mengentheoretischer Aufbau der Zahlsysteme oder der Geometrie <u>eine</u> Möglichkeit dar und wird nur dann verständlich, wenn mitbedacht wird, was er leistet und was er nicht leistet bzw. welche Alternativen es gibt. Zweckhaftigkeit und der sozial-kommunikative Charakter von derartigen fundamentalen Ideen gehen verloren, wenn man bloß die Gerade als Menge ihrer Punkte definiert, konkrete Relationen betrachtet usw. Man erfährt z.B. nicht, warum sich bestimmte Begriffsbildungen durchgesetzt haben, wofür sie gut sind usw. Je „fundamentaler“ eine Idee ist, desto mehr müßte man ihr Umfeld, ihre Genese, ihre Anwendungen berücksichtigen. Für den Schulunterricht hat man diese Begriffe „verdinglicht“, ihres theoretischen und sozialkommunikativen Charakters beraubt, sodaß sie einfach als naiv-existierend angenommen werden.

(Fischer 1984, S. 62)

So „verdinglicht“ tragen Fundamentale Ideen nur noch zur Stoffvermehrung bei und erschweren damit die Befreiung vom Wissen.

Zudem, so befürchtet FISCHER, scheint eine solche Stoffmenge den Unterricht zu beherrschen und den Lehrer zu verleiten, sich „ganz in den Dienst des Stoffes bzw. der Vermittlungsaufgabe“ zu stellen (Fischer 1984, S. 67). Die Aufgabe des

---

[121] Als weiteres Auswahlkriterium nennt er den „traditionalistischen Weg“, bei dem die Inhalte als sinnhaft angesehen werden, weil sie im Lehrplan festgehalten sind. Eine andere Möglichkeit ist die Auswahl von Inhalten, die für spätere Lebenssituationen (Beruf etc.) eine Rolle spielen oder zu „höheren, allgemeineren Bildungs- und Lehrzielen“ beitragen (Fischer 1984, S. 63).

Lehrers besteht dann darin, im Nachhinein „fertigem, abgeschlossenem Wissen noch irgendwie Leben zu verleihen“ (Fischer 1984, S. 68). Somit findet im Unterricht eine künstliche Auseinandersetzung mit dem Stoff statt, welche Sinnfragen ausblendet und die von FISCHER geforderte „echte“ Auseinandersetzung unmöglich macht. Der Lehrer tritt damit als „Schauspieler“ auf, der seine Schüler höchstens zur Mathematik „verführen“ kann (Fischer 1984, S. 68). Als Voraussetzung für Sinnfindung im Unterricht sieht FISCHER die „echte“ Auseinandersetzung des Lehrers mit dem Stoff. Dazu muss der Lehrer sein Verhältnis zur Mathematik klären und dieses dem Schüler zugänglich machen.

Wie aber kann eine solche „echte“ Auseinandersetzung aussehen und wie kann der Lehrer seine Erfahrungen zugänglich machen? Da diese Situation für Lehrer neu sein kann, schlägt FISCHER eine Orientierung am „traditionalistischen Weg“ vor, bei dem (in Lehrplänen oder Schulbüchern) vorhandene Inhalte auf ihren Sinn untersucht werden. Eine Möglichkeit dazu wäre die Analyse von Schulbüchern auf dort angesprochene Fundamentale Ideen (Fischer 1984, S. 69). Dabei ist zu beachten, dass FISCHER sicher keine rein inhaltliche Analyse meint, sondern eine, die auch das Vorhandensein des sozial-kommunikativen Charakters aufdeckt. Anhand dieser Analyse kann der Lehrer dann entscheiden, ob er den Gang des Schulbuchs für sinnvoll erachtet oder einen anderen bevorzugt. Solche Entscheidungen soll der Lehrer dem Schüler mitteilen, um diesem die Chance einer eigenen Entscheidung (Lehrer vs. Schulbuch) zu geben (Fischer 1984, S. 70). Somit ermöglicht der Lehrer über seine eigene Auseinandersetzung mit der Sache, dem Schüler die seine zu führen.

Nun ist FISCHERs (teilweise sehr radikal formulierter) Ansatz sicher mit Vorsicht zu lesen. Im damaligen und heutigen Unterricht ist es nicht möglich und sicher auch nicht sinnvoll, wenn Lehrer stets ihr methodisches Vorgehen mit Schülern besprechen. Beachtenswert ist indes der Aufruf zu einer Analyse von Unterrichtsmaterialien auf sinntragende Aspekte von Mathematik.[122] Die Ergebnisse dieser Analyse könnten dann an passender Stelle auch mit Schülern besprochen werden, um ihnen zu zeigen, dass es in der Mathematik durchaus verschiedene Betrachtungsweisen (Theorien) gibt (s.o.). Zudem weist FISCHER darauf hin, dass ein Unterricht, der Sinnfragen in den Vordergrund stellt, eine andere Organisation benötigt. Neben der Vorbereitung des Unterrichts mittels Ideenanalyse müssen auch Aspekte des „sozialen Lernens“ berücksichtigt werden. Hierunter sind beispielsweise der konstruktive Umgang mit Fehlern und eine Art der Lern-

[122] Der Vorschlag, mithilfe von Fundamentalen Ideen Unterrichtsinhalte zu analysieren, wurde lange in der Forschung nicht verfolgt. Erst mit der Dissertation von VOHNS wurde ein solches Unterfangen durchgeführt (vgl. 3.5.4). Der Vernetzungspentagraph stellt ebenfalls ein Werkzeug zur Analyse von Unterrichtsmaterial auf der Basis Fundamentaler Ideen dar, vgl. Kapitel 6.

organisation zu fassen, die dem Schüler ein selbstbestimmtes Lernen ermöglicht (Fischer 1984, S. 73).

Durch FISCHER wurden die Konzeptionen eines an Ideen orientieren Unterrichts, dessen Ziel ein Betrag zur Bildung ist, um eine Art „Unterrichtsprogramm" erweitert. Während die Überlegungen WHITEHEADs und VOLLRATHs eher auf das generelle Aufzeigen von Vorteilen der Orientierung an Ideen gerichtet sind und kaum unterrichtspraktische Vorschläge beinhalten, rückt JUNG die Ausarbeitung eines passenden Unterrichtskonzepts explizit als Aufgabe der Fachdidaktik in den Blickpunkt (Jung 1978, S. 170). FISCHER konzipierte nun seine „Vision eines neuen Mathematikunterrichts", der die Behandlung von sinnhaften Inhalten (Ideen) in den Vordergrund stellt. Dabei legt er konkrete Merkmale eines solchen Unterrichts fest und macht somit deutlich, welche Bedingungen ideenorientierter Unterricht erfüllen sollte.

Während diese Konzeptionen noch (implizit) Einzug in die Arbeiten von SCHREIBER und SCHWEIGER gefunden haben, spielen sie bei den meisten Ausarbeitungen von Katalogen Fundamentaler Ideen kaum noch eine Rolle.[123] Auch aktuell, da Fundamentale Ideen als Leitideen Einzug in die Debatte um Bildungsstandards gefunden haben, wird ihr bedeutungsreicher sinntragender Charakter völlig ausgeblendet. Eine Arbeit, die sich in eine aktuelle Diskussion Fundamentaler Ideen einbetten lässt und (entgegen dem Zeitgeist) unter ihnen Inhalte mit Bedeutung versteht, ist die „Pädagogik des Mathematikunterrichts" von LUTZ FÜHRER (Führer 1997), auf die nun eingegangen wird.

Ganz im Sinne der oben vorgestellten Arbeiten stellt FÜHRER seine Überlegungen zu Fundamentalen Ideen unter die Leitfrage: „Was kann Mathematik einem Nichtmathematiker bedeuten?" (Führer 1997, S. 71).[124] Seine thesenhafte Antwort lautet:

> Für Nichtmathematiker soll Mathematik zu *einem* Denkwerkzeug werden. Mathematik wird in außermathematische bzw. in nicht rein innermathematische Situationen *hinein*gedacht, um Beurteilungs- und Entscheidungs*hilfen* zu gewinnen. Im allgemeinen ist nicht zu erwarten, daß damit alles Wesentliche der Situation erfaßt wird.
>
> (Führer 1997, S. 72)[125]

[123] Ausnahmen stellen die Arbeiten von MANFRED BOROVCNIK zur Stochastik und von HANS-CHRISTIAN REICHEL zur Angewandten Mathematik dar, vgl. Kapitel 3.5.3.

[124] FÜHRER fragt hier bewusst nicht nach dem Nutzen mathematischer Inhalte, vgl. (Führer 1997, S. 71).

[125] Ähnlichkeiten zu dem von FISCHER skizzierten Verhältnis von Mensch und Wissen sind deutlich. Auch FISCHER weist darauf hin, dass mithilfe von mathematischem Wissen nicht alle Aspekte einer Situation erfasst werden können und dass mathematische Denkwerkzeuge nur eine Möglichkeit sind, Situationen zu erfassen (s.o.).

Demnach hat allgemeinbildender Mathematikunterricht als eine zentrale Aufgabe,

> die allmähliche Einführung in strukturierende Sichtweisen [...]. Dazu gehört auch die Aufklärung über und die Gewöhnung an besonders leistungsfähige Strukturbegriffe, Sprech- und Argumentationsweisen.

(Führer 1997, S. 78)

Dass FÜHRER hier, auch wenn sich die verwendeten Bezeichner ähneln, nicht die Strukturbegriffe der Modernen Mathematik meint, wird aus seiner Vorstellung zum Umgang mit solchen Strukturierungsmitteln deutlich. Diese sollten

> sorgfältig erinnert und nüchtern studiert werden. Dies muß, kann und soll helfen, sich abzeichnende Entwicklungen zu begreifen, um verantwortungsbewußt mitwirken zu können, um alternative Sichtweisen und notwendige Relativierungen zu respektieren, um Etikettenschwindel zu erkennen und ggfs. rechtzeitig auf gefährliche Fehlentwicklungen aufmerksam zu werden.

(Führer 1997, S. 79)

Dies ist keine Aufgabe, die dem Mathematikunterricht alleine zukommt. Sie kann nur im Verbund aller Fächer angegangen werden, zumal der Beitrag des Mathematikunterrichts zu diesem „hehrenen" Ziel eher im „Atmosphärischen" zu suchen ist (Führer 1997, S. 80). Darunter versteht FÜHRER beispielsweise Perspektiven, Ausdrucksweisen und Haltungen, die sich nicht unbedingt am Stoff materialisieren lassen. Hier ist vor allem der Lehrer in der Pflicht, denn seine Haltung zur Sache stellt für seine Schüler

> ein nichttriviales Beispiel humaner Auseinandersetzung mit Sachzwängen [dar] und es macht einen großen Unterschied, ob er sich und seine Schüler der Macht des Faktischen anpassen will [...] oder ob er zeigt, wie man sich *immer wieder und auf jedem Niveau bemühen* kann, die Fülle der Details *ohne Verrat an deren Substanz* anhand weniger „ausgezeichneter" Grundgedanken zu entwirren.

(Führer 1997, S. 80 f.)

Die Konzeption dieser Grundgedanken deckt sich mit dem, was bisher unter Fundamentalen Ideen diskutiert wurde und von FÜHRER als „fundamentale Konzepte" benannt wird.[126] Es ist demnach eine Aufgabe des Lehrers, solche Fundamentalen Ideen seiner Fachwissenschaft zu entnehmen und „mit Kompetenz, Respekt, Vernunft, pädagogischem Takt und Nachdruck" im Mathematikunterricht zu behandeln (Führer 1997, S. 81). FÜHRER konzentriert sich sodann auf das Finden von „potentiell innermathematischen Essenzen" und klammert das „Atmosphärische" zunächst aus, da dieses u.a. durch zwischenmenschliches Ge-

[126] FÜHRER lehnt den Bezeichner „Idee" ab, da Idee im „Hinblick auf diverse Varianten des deutschen Idealismus" etwas anders meint als das englische „ideas" (Führer 1997, S. 83), vgl. auch Kapitel 4.1.

schehen im Unterricht geprägt ist und sich somit einer Beschreibung der Fachdidaktik (und teilweise auch der im Unterricht agierenden Personen) entzieht (Führer 1997, S. 83).

Zur Findung Fundamentaler Idee schließt FÜHRER sich im Wesentlichen dem logischen Begriffsverständnis SCHWEIGERs[127] an und schlägt „Funktionale Variation“, „Induktion“, „Approximation“, „Algorithmisierung“, „Invarianz“, „Symmetrie/Symmetrisierung“, „Kontrolle“ und „Effizienz“ als Fundamentale Konzepte vor (Führer 1997, S. 84 f.).[128]

Diese Liste von Ideen ist umfangreicher als jene der vorher genannten Autoren. Zudem sind die Ideen konkreter, das heißt nicht ganz so „vage“, wie JUNG es gefordert hat. Das hängt mit der Intention und dem zeitlichen Abstand der Arbeit FÜHRERs zu den anderen zusammen. FÜHRERs Überlegungen zielen nicht auf die grundsätzliche Ausarbeitung von Vorteilen einer Orientierung des Mathematikunterrichts an Ideen. Er entwickelt vielmehr einen Katalog von Ideen, der zur Strukturierung vom Unterricht geeignet ist und somit „materiale Orientierungspunkte“ setzt (Führer 1997, S. 85).[129]

Diese veränderte Intention hängt natürlich auch mit dem zeitlichen Abstand der Arbeiten zusammen. Schon parallel zur Arbeit von FISCHER hatte sich eine Richtung in der Mathematikdidaktik etabliert, die an einer systematischen Erschließung des Begriffs „Fundamentale Idee“ interessiert war. Ziel war (und ist) es, ein möglichst umfassendes Begriffsverständnis zu erarbeiten. Typisch für diese Arbeiten ist ein zweifacher Zugang zum Begriff Fundamentale Idee. Zum einen werden Kriterien festgelegt, denen eine Fundamentale Idee genügen muss. Die Erarbeitung eines Kriterienkatalogs, der kritische Attribute Fundamentaler Ideen enthält, wird in der vorliegenden Arbeit als logische Begriffsbildung bezeichnet. Im Unterschied zu den bisher vorgestellten Arbeiten werden diese Kriterien nun in Form von konkreten Listenpunkten angegeben. Zum anderen werden auf Basis der Kriterienkataloge Listen von potentiellen Kandidaten Fundamentaler Ideen (Ideenkataloge) erarbeitet. Diese exemplarischen Ideen dienen der prototypischen Begriffsbildung. Die prototypische Begriffsbildung hat zu ei-

---

[127] Vgl. Kapitel 3.5.2.

[128] „Effizienz“ wurde bei der Neubearbeitung des Buches 2012 dem Katalog hinzugefügt.

[129] Die „materialen Orientierungspunkte“ FÜHRERs sind auch Anlässe zur Sinnfindung im Unterricht. Ähnlich wie FISCHER sieht er den Lehrer in der Verantwortung der Auswahl der sinntragenden Ideen und der Bewusstmachung dieser bei seinen Schülern (Führer 1997, S. 86). FÜHRERs Katalog kann dem Lehrer als Fundgrube zur Begründung eines individuellen Kataloges dienen. Auch die von JUNG geforderte organisierende Potenz Fundamentaler Ideen hat FÜHRER mitgedacht. Beispielsweise ist mit der Idee „Approximation“ auch das Exaktifizieren von Begriffen gemeint, was auf einer Metaebene zur Organisation mathematischer Begriffe im Denken der Schüler beitragen kann.

ner Reihe von „Ideen-Kandidaten“ geführt, deren Wirksamkeit im Mathematikunterricht mehr oder weniger erforscht wurde.[130]

Herausragende Ergebnisse dieser Bemühungen sind die Arbeiten von SCHREIBER/BENDER und SCHWEIGER, deren Theorien Fundamentaler Ideen sich (fast) alle späteren Arbeiten zunutze machten.[131] Sie werden im nächsten Kapitel vorgestellt.

3.5.2 Zwei Ur-Theorien und ihre Rezeptionen

Bei der nun folgenden Untersuchung soll ein weiterer Sachverhalt systematischer berücksichtigt werden, der schon bei BRUNER eine wichtige Rolle spielte und auch bei anderen Autoren oft (impliziter) Anlass war, sich mit Ideen zu beschäftigen. Gemeint ist, dass man sich von einer Orientierung des Mathematikunterrichts an Fundamentalen Ideen eine Verbindung von Inhalten erhofft. Sie sollen zur Vernetzung von sonst eher unzusammenhängend erscheinenden Inhalten beitragen und so mathematisches Wissen als eine Einheit erscheinen lassen. Neben Vernetzungen auf inhaltlicher Ebene, die schon BRUNER forderte, finden sich in der deutschsprachigen Forschungsliteratur zu Fundamentalen Ideen Forderungen nach Vernetzungen zum Alltagsdenken und -sprechen sowie zur geschichtlichen Entwicklung der Mathematik (z.B. Schreiber 1983 bzw. Schweiger 1992). Forderungen nach Vernetzung finden sich in den Kriterienkatalogen, die die Autoren zur logischen Begriffsbildung erarbeiten.[132]

SCHREIBER nähert sich der Thematik Fundamentaler Ideen aus einer philosophischen Perspektive. BRUNER folgend sieht SCHREIBER die Lernenden mit einer Stofffülle konfrontiert, die kaum zu überblicken ist. Hinzu tritt das schon von WHITEHEAD formulierte Problem der „Esoterik“[133] mathematischer Inhalte; also deren „spezialistischer Wirklichkeitsferne“. Er verschärft dies zu dem „Sinnproblem“, vor dem die Mathematik stehe: „Welchen Sinn haben mathematische Tätigkeiten?“ (Schreiber 1983, S. 66). Dieses Problem lässt sich in drei Richtungen beschreiben.

---

[130] Die wechselseitige Beeinflussung von logischer und prototypischer Begriffsbildung ist typisch für die Beschäftigung mit Fundamentalen Ideen. Dieser Sachverhalt wird am Ansatz von SCHWEIGER verdeutlicht.

[131] Beispiele hierfür sind die Arbeiten von HORST HISCHER, der SCHWEIGERS Theorie stärker gliedert und der Kriterienkatalog von SCHWILL, welcher eine „Synthese“ der Theorien SCHREIBERS und SCHWEIGERS bildet (Schwill 1993, S. 8).

[132] Da der Begriff der Vernetzung wesentlich für die unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen mit Hilfe des Vernetzungspentagraphen ist, wird auf ihn in Kapitel 5 genauer eingegangen.

[133] Für SCHREIBER bedeutet Esoterik in Anlehnung an WHITEHEAD ein „Umgehen mit Begriffen und Erkenntnissen, die selbst lebensfern und bedeutungsarm sind oder deren Beziehungshaltigkeit, Sinnfülle und geistiges Gewicht dem Lernenden nicht angemessen vermittelt werden“ (Schreiber 1979, S. 165).

- Der traditionellen Philosophie der Mathematik (die sich eng an die mathematische Grundlagenforschung anschließt) erscheint es als Problem der Rechtfertigung axiomatischer Theorien.
- Der Pädagogik erscheint es zweifach: als Problem der begründbaren Auswahl mathematischer Inhalte für den Unterricht und als Problem ‚adäquaten' Vermittelns und Verstehens.
- Die Mehrzahl der Menschen hat, wenn überhaupt, ein extrem bruchstückhaftes Bild von Mathematik als einer esoterischen Wissenschaft. Ferner ist kaum zu leugnen, daß in der Mathematik selbst eine immanente Neigung zu Esoterik (spezialistischer Wirklichkeitsferne) vorhanden ist.

(Schreiber 1983, S. 66)

Die Überwindung dieser Schwierigkeiten liegt beispielsweise nicht im „Rückgriff auf Fundamentalismen" (Bourbakismus), nicht in einer Elementarisierung mathematischer Inhalte und auch nicht in einem generellen Hinweis auf die Nützlichkeit der Mathematik (Schreiber 1983, S. 66 f.). Sie liegt in einer Beschränkung auf das „Wesentliche", jenen Stücken mathematischen Wissens, „die auch für das Alltagsdenken der Menschen weittragende Bedeutung haben" (Schreiber 1983, S. 67).

> Dabei [kann es sich] nicht darum handeln, dem alltäglichen Leben [...] die unbeeinflußte Suche nach mathematischen Grundideen zu überlassen. Vielmehr geht es um eine angemessene Verbindung von Lebenswelt und vorgegebener fachlicher Struktur.

(Schreiber 1979, S. 166)[134]

Hier sieht SCHREIBER die Fachdidaktik gefordert, die mit BRUNERs Konzept der Fundamentalen Ideen ein Mittel zur Auswahl solcher Inhalte „assimiliert" hat (Schreiber 1983, S. 67). Diese Assimilation erfolgte durch Versuche anderer Autoren, für Teilgebiete der Mathematik eine Ideenkollektion zu erstellen.[135] Für SCHREIBER erwächst daraus die Frage, „ob und wie sich allgemeinmathematische [...] Ideen finden lassen", die nicht auf ein Teilgebiet beschränkt sind. Den Bezeichner „fundamental" für solche Ideen lehnt SCHREIBER allerdings ab, da dieser zu sehr auf verfälschende Interpretationen wie das psychogenetisch

---

[134] SCHREIBER betont in diesem Zitat die Wichtigkeit von Verbindungen zwischen Lebenswelt und Mathematik. 1973 hatte schon HANS FREUDENTHAL das didaktische Prinzip der Beziehungshaltigkeit als zentrales Element der Sinnkonstruktion im Mathematikunterricht aufgezeigt: „Will man zusammenhängende Mathematik unterrichten, so muss man in erster Linie die Zusammenhänge nicht direkt suchen; man muss sie längs der Ansatzpunkte verstehen, wo die Mathematik mit der erlebten Wirklichkeit des Lernenden verknüpft ist. Das - ich meine die Wirklichkeit - ist das Skelett, an das die Mathematik sich festsetzt [...] Den Mathematiker möge ein freischwebendes System der Mathematik interessieren - für Nichtmathematiker sind die Beziehungen zur erlebten Wirklichkeit unvergleichlich wichtiger" (Freudenthal 1973, S. 77).

[135] SCHREIBER nennt die Arbeiten von DIETGER HEITELE zur Stochastik (Heitele 1976) und von FISCHER zur Analysis (Fischer 1978).

Frühe (nach PIAGET) oder auf Grundlagen der Mathematik (wie die Mengenlehre) abzielt (Schreiber 1979, S. 166). Stattdessen spricht er von Universellen Ideen, zu deren systematischer Erschließung folgendes Arbeitsprogramm - und inspirierende Agenda der vorliegenden Arbeit - vorgestellt wird.[136]

> 1. Das Konzept [...] der unv. Idee ist zu präzisieren. Wünschenswert wäre dabei eine Art Kriterium der Universalität.
>
> 2. Ein Katalog geeigneter Ideen ist aufzustellen und auf seine internen und externen Beziehungen hin zu studieren.
>
> 3. Die Rolle muß geklärt werden, die unv. Ideen beim Aufbau eines adäquaten Bildes der Mathematik spielen können (möglichst im Anschluss an 2.).
>
> 4. Der Einsatz unv. Ideen im Unterricht ist zu untersuchen sowie damit verbunden die Frage zu beantworten, durch welche Stoffe bestimmte Ideen am geeignetsten repräsentiert werden.
>
> 5. Die Repräsentation und Kombination unv. Ideen in bestimmten Teilgebieten führt auf (gebietsspezifische) zentrale Ideen, die für möglichst viele Bereiche der Mathematik herauszuarbeiten und zu analysieren sind.
>
> (Schreiber 1979, S. 167)

SCHREIBER widmet sich in seinen Arbeiten der Umsetzung dieses Programms.

Zunächst sind also die Begriffe „universell“ und „Idee“ zu klären. Unter einer Idee versteht SCHREIBER „allgemeine Schemata, die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess erst in Gang setzen oder weitertreiben“ (Schreiber 1979, S. 166). SCHREIBER weist darauf hin, dass eine „allgemeinverbindliche Explikation des Begriffs des unv. Schemas […] vermutlich nicht möglich [ist]“, da sich der Begriff „Schema“ nur vage umschreiben lässt (Schreiber 1979, S. 167).[137]

In einer späteren Zusammenarbeit mit BENDER wurde SCHREIBERs Theorieansatz weiterentwickelt und auf den mathematischen Teilbereich der Geometrie angewendet. Dazu charakterisieren die Autoren Universelle Ideen als

---

[136] Diese fünf Punkte stellen eine systematische Konkretisierung der Erschließung Fundamentaler Ideen dar. Diese hatte schon JUNG gefordert, allerdings nicht ausgearbeitet. Damit wird auch klar, warum SCHREIBERs Ansatz in der vorliegenden Arbeit als systematischerer Zugang zu Fundamentalen Ideen bezeichnet wird. Während in der bisherigen Forschung vor allem Punkt 1 und 2 Berücksichtigung fanden, liefert die vorliegende Arbeit einen Beitrag zu den Punkten 1, 2 und 3 und durch den Vernetzungspentagraphen besonders zu Punkt 4.

[137] SCHREIBER schließt sich zur Erläuterung seines Verständnisses des Begriffs „Schema“ WITTMANNS an, der darunter ein „flexibel organisiertes, kohärentes, adaptierbares Reflex-, Operations-, Denk-, Beschreibungs- oder Erklärungsmuster, das in die kognitive Gesamtorganisation des Individuums integriert ist und die Aktivitäten des Individuums steuert“ versteht (Wittmann 1981, S. 63).

> wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc. […], deren Universalität nicht bloß auf häufiger, sondern auf vielseitiger fruchtbarer Anwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen beruht. Insbesondere sind universelle Ideen ihrerseits nicht wiederum als Fundament der Mathematik aufzufassen, sie sind vielmehr begrifflich noch nicht scharf umgrenzte Anhaltspunkte der eigentlichen mathematischen Theoriebildung. Sie haben zwar oft in einer Theorie präzisierte Entsprechungen, gehören aber ursprünglich einem vorwissenschaftlichen (nicht: unwissenschaftlichen) Denken an. Dabei stiften sie Ordnung in der internen Struktur des Faches und seinen Beziehungen zur Umwelt; noch wichtiger ist ihre ordnende Funktion beim Eindringen in diese Struktur und beim Erschließen der Umwelt. Universelle Ideen zeichnen sich also aus durch
>
> – Weite („logische“ Allgemeinheit),
> – Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen),
> – Sinn (Verankerung im Alltagsdenken).
>
> (Bender/Schreiber 1985, S. 199)[138]

Mit diesen drei Kriterien sind nur Anhaltspunkte gesetzt, die allerdings schon deutlich machen sollen, dass „neben logisch-analytische[n] [...] Verfahren ein breit angelegtes historisch-anthropologisches Vorgehen erforderlich“ ist, um Universelle Ideen zu sondieren (Schreiber 1983, S. 69).

Betrachtet man den Kriterienkatalog genauer, zeigt sich, dass sich hinter den Kriterien (implizit) Forderungen nach Vernetzung verbergen. Dadurch, dass Universelle Ideen in vielen Teilgebieten Relevanz besitzen („Fülle“-Kriterium), können sie im Mathematikunterricht zur Vernetzung dieser Teilgebiete beitragen. Somit wird der Stoffisolation entgegengewirkt. Durch das „Weite“-Kriterium sind Universelle Ideen keine scharf umrissenen mathematischen Begriffe, sondern gewissermaßen vage und vortheoretisch.[139] Somit können sie zu einer Vielzahl von Begriffen präzisiert werden und zu deren Vernetzung beitragen. Neben solchen inhaltlichen Vernetzungen, die schon BRUNER forderte, stellt das „Sinn“-

[138] SCHREIBER hatte schon 1983 darauf hingewiesen, dass es ein ähnliches Vorgehen mittlerweile auch in der Philosophie der Mathematik gibt. SAUNDERS MAC LANE suchte die Ursprünge mathematischer Tätigkeiten in allgemeinen Erfahrungen der Menschen und leitete verschiedene Gebiete der Mathematik von diesen ab. Beispielsweise verdichten sich im Gebiet der Arithmetik/Algebra und Zahlentheorie die Erfahrungen von Zählen oder in der Geometrie die Erfahrungen des Formens und Messens (Mac Lane 1981, S. 463; eigene Übersetzung). Die damit verbundene kategorielle Beschreibung mathematischer Konstruktionen lässt vor allem mathematische Ideen deutlich werden, die MAC LANE ebenfalls durch Kriterien („breadth“, „clarity, „depth“) charakterisiert (Mac Lane 1981, S. 471). SCHREIBER ist dabei wichtig, dass „die mathematische Tätigkeit mit ihrer operativen, logischen (formalen) sowie ästhetischen (intuitiven) Komponente [...] als ein anthropologisches Faktum“ ernster genommen wird (Schreiber 1983, S. 70). SCHREIBERs philosophische Einordnung seines Begriffsverständnisses Universeller Ideen stellt eine Einzigartigkeit in der didaktischen Forschung zu Fundamentalen Ideen dar.

[139] SCHREIBER macht dies an der Idee der Invarianz klar, welche dem präzisierten mathematischen Begriff „Gruppe“ zugeordnet werden kann (Schreiber 1983, S. 68).

Kriterium eine Neuerung dar.[140] Es fordert von einer Universellen Ideen eine Verankerung im Alltagsdenken und trägt so (im weitesten Sinne) zu Vernetzungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit bei. Damit geht SCHREIBER über die Forderungen BRUNERS hinaus.

Zur Erarbeitung einer Ideenkollektion unterscheidet SCHREIBER „Schemata" zunächst in Leitideen und Verfahren, welche erneut untergliedert werden in Findungsverfahren im Sinne PÓLYAs und Begriffsbildungsverfahren (Schreiber 1979, S. 167). Er gibt folgende Universellen Ideen der Mathematik an:

– *Leitideen*: Algorithmus, Exhaustion, Invarianz, Optimalität, Funktion, Charakterisierung,
– *Verfahren*: Rekursion, Abstraktion, Ideation.

Dieser Katalog wurde in (Schreiber 1983) teils reorganisiert und teils erweitert. Dort wird eine Gliederung der Ideen in „Prozeduren", „Eigenschaften" und „Komponenten von Begriffsbildungsprozessen" vorgenommen (vgl. Schreiber 1983, S 70):

– *Prozeduren*: Exhaustion, Iteration, Reduktion, Abbildung, Algorithmus,
– *Eigenschaften*: Quantität, Kontinuität, Optimalität, Invarianz, Unendlich,
– *Komponenten von Begriffsbildungsprozessen*: Ideation, Abstraktion, Repräsentation, Raum, Einheit.

Die Ideen „Unendlich", „Raum" und „Einheit" tauchen schon in (Schreiber 1983) auf, zielen allerdings auf die Diskussion „Zentraler Ideen" der Geometrie, die in (Bender/Schreiber 1985) dargestellt ist, ab. Die Autoren verstehen Zentrale Ideen als gebietsspezifische Ausprägungen übergeordneter Universeller Ideen, die sich durch „Repräsentation und Kombination universeller Ideen" ergeben (Bender/Schreiber 1985, S. 199). Ebenfalls als Zentrale Ideen der Geometrie werden „starre Körper", „Homogenität", gebietsspezifische Ausprägungen von „Exhaustion" und „Ideation" sowie „Passen" (als (teilweise) Inzidenz von Flächen mit seinen drei Erscheinungsformen „eingeschränkte Beweglichkeit", „Optimierung" und „Messen") betrachtet.[141]

Bemerkenswert ist bei der Diskussion Zentraler Ideen, dass SCHREIBER damit nicht nur Ausprägungen Universeller Ideen in Teilgebieten der Mathematik im Blick hat, sondern auch deren Wirksamkeit in anderen Fachwissenschaften berücksichtigt. Beispielsweise sind der Universellen Idee des Algorithmus, neben

[140] Gerade das „Sinn"-Kriterium macht dabei deutlich, dass Universelle Ideen sich nicht nur aus ihrer Bedeutung für die Fachwissenschaft Mathematik legitimieren. Somit kommen die während der Phase der Strukturmathematik im Mathematikunterricht eingeführten abstrakten mathematischen Begriffe für SCHREIBER nicht als Universelle Ideen in Frage.

[141] Zu den genannten Zentralen Ideen der Geometrie (besonders zur Idee des Passens) finden sich wichtige Vorüberlegungen (u.a. deren mögliche unterrichtliche Umsetzung) in (Bender 1983).

ihren Ausprägungen in der Analysis, auch die Zentralen Ideen „Programme“ und „Deterministische Automaten“ der Informatik zugeordnet (Schreiber 1983, S. 69). Die Idee der Invarianz spielt auch in der Physik bei „Erhaltungsätzen“ eine Rolle (Schreiber 1979, S. 168).[142] Mit dieser Analyse, über die Fachgrenzen hinaus, möchte SCHREIBER das „Spektrum“ von Idee klären, welches den Gebrauchskontext der Ideen aufdeckt. Diesen sieht er neben der Mathematik vor allem in Technik, den Künsten und der Philosophie (Schreiber 1983, S. 71).

Durch ein solches logisch-analytisches Verfahren, angereichert durch historisch-anthropologische Untersuchungen, können, SCHREIBER folgend, Ideen gefunden werden, welche die Gefahr von „fundamentalistischen Auffassungen jedweder Art“ eindämmen und operative und prozesshafte Züge von Mathematik berücksichtigen (Schreiber 1979, S. 169). Damit können sie zur Etablierung eines angemessenen Bildes von Mathematik beitragen und sollten daher zu wichtigen Komponenten des Hintergrundwissens von Lehrern werden.

Mit Blick auf den Unterricht reicht eine Verlegung Universeller Ideen in das Hintergrundwissen des Lehrers nicht aus. Es muss auch untersucht werden, „auf welche Weise solches Wissen anzueignen sei, damit überhaupt ein Einfluss auf Vermittlungsvorgänge möglich und förderlich ist“ (Schreiber 1979, S. 170). Das führt SCHREIBER zum vierten Punkt seines Arbeitsprogramms. Zunächst hält er fest, dass Universelle und Zentrale Ideen das Lernen der Schüler lokal strukturieren können, da sie Übersicht und „Bedeutungskonzentration“ leisten können. Um dies zu erreichen, sollte der Lehrer sich ein möglichst genaues Bild von den Ideen machen, die einem gewissen Unterrichtsstoff innewohnen.[143] Universelle Ideen eignen sich allerdings, nach SCHREIBER, nicht als Leitfaden für größere Unterrichtseinheiten (Schreiber 1983, S. 72). Zudem gilt bei der Erschließung Universeller Ideen eine Art genetisches Primat der Zentralen Ideen.

> Was in einer Teildisziplin und der Auffassung darüber, wie mit ihr umzugehen sei, als zentrale Idee gilt, hängt zwar außer vom Gegenstand der Disziplin von univer-

---

[142] Auch in der Physikdidaktik sind schon früh Bestrebungen zu erkennen, den Physikunterricht an zentralen Aspekten auszurichten. Dort lässt sich auch eine Gleichsetzung von fachlichen Strukturen und Fundamentalen Ideen nachweisen. Exemplarisch sei auf die Arbeit von KAY SPRECKELSEN von 1970 verwiesen, der eine Zusammenfassung von „große Ideen“ der Naturwissenschaften auch unter Berücksichtigung anderer Arbeiten angibt. Konkret nennt SPRECKELSEN als solche Ideen „Teilchenvorstellung“, „Statistik“, „Erhaltungssätze“, „Quantentheorie und statistische Theorie des Universums“ sowie „Veränderung durch Wechselwirkung“ (Spreckelsen 1970, S. 421). Aus diesen Ideen leitet SPRECKELSEN sodann einen inhaltlichen Kanon für den Physikunterricht ab. Dabei werden die Begriffe „Strukturelemente“ und „Leitideen“ bzw. „große Ideen“ synonym verwendet. Andere Beispiele solcher „Leitideen“ werden in (Meyerbröker 1973) und für den Teilbereich der Elektronik in (Heyner 1975) angegeben. Auf diese naturgemäß physikspezifischen Sichtweisen kann im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen werden.

[143] Einen Diskussionsbeitrag in diese Richtung stellt der Vernetzungspentagraph dar, vgl. Kapitel 5 und 6.

> sellen Ideen ab; zu den universellen Ideen gelangt der Lernende aber zuallererst über die zentralen Ideen (aus verschiedenen Disziplinen), weil diese den jeweiligen konkreten Fachinhalten näher stehen.
>
> (Bender/Schreiber 1985, S. 199 f.)

Besonders mit Blick auf die Geometrie ergibt sich dieses Primat Zentraler Ideen auch aus historischer Sicht.

> Da die Mathematik ihren faktischen Ursprung in der Geometrie hat und jahrtausendelang von dieser befruchtet worden ist, verwundert es nicht, daß viele der universellen Ideen ihr entstammen und Universalität dann beim Eindringen in andere Teilbereiche erworben haben.
>
> (Bender/Schreiber 1985, S. 200)

Diese beiden Spielarten des genetischen Prinzips müssen im Unterricht in Einklang gebracht werden. BENDER und SCHREIBER fordern eine „konstruktible Genese“ nicht nur mit systematisierendem, sondern mit interpretierendem Charakter, der sich „an tatsächlichen Entstehungszusammenhängen orientiert, der an individueller Entwicklung ausgerichtet und von historischer Entwicklung inspiriert ist“ (Bender/Schreiber 1985, S. 263).

Damit nun Ideen eine sinnvolle Funktion beim Lernen einnehmen, müssen sie vom Lernenden unmittelbar zweckhaft zum Erreichen bestimmter Ziele angesehen werden. Der Unterricht muss also auch einem teleologischen Prinzip folgen (Schreiber 1979, S. 170). Diese Forderung findet sich bereits bei WHITEHEAD.

Zudem ist eine Orientierung am „Prinzip der pragmatischen Ordnung“ anzustreben, die sicherstellt, dass jeder Schritt des Lehrgangs an einer Stelle erfolgt, „wo nichts vorausgeht, was er erst leistet, und nichts vorausgesetzt wird, was durch ihn erst möglich wird“ (Bender/Schreiber 1985, S. 270). Oberflächlich betrachtet hat dieses Prinzip Ähnlichkeit mit dem axiomatischen Aufbau eines Lehrgangs nach BOURBAKI. Die Autoren meinen hier aber etwas anderes. Ihnen geht es nicht um eine vorrangig systematisierende Genese, die allein genommen zur deduktiven Imitation und somit zur „Übernahme isolierter Systembausteine, zur Abkopplung der Theorie von der Wirklichkeit und damit zu einer Verkehrung wissenschaftlichen Denkens“ führt (Bender/Schreiber 1985, S. 271). Das Prinzip ist auf eine interpretierende Genese anzuwenden, ,,damit die „pragmatische Ordnung durch den Interpretationszusammenhang bestimmt“ wird und somit ein „mögliches Muster für mathematisierendes oder allgemeiner: theoriegewinnendes Vorgehen“ liefert (Bender/Schreiber 1985, S. 271). Die Autoren machen das Gemeinte am Beispiel der Analysis deutlich. Einen Fehler im Sinne der pragmatischen Orientierung begeht der, der „Anfängern in Analysis die Integrale von Riemann und Lebesgue als Sonderfälle einer abstrakten Integralnorm vorsetzt“. Der Weg sollte umgekehrt sein. Durch „didaktisch geschickt angeregte

Variation bei der Bestimmung von Flächenmaßen“ gelangt man (über Spezialfälle) zum abstrakteren Integral (Bender/Schreiber 1985, S. 271).

Durch den Ansatz von SCHREIBER und dessen Präzisierung in (Bender/Schreiber 1985) wurden Fundamentale Ideen für die fachdidaktische Diskussion in einer systematischen Weise erschlossen. Für die Geometrie konnten die Autoren zeigen, wie Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht sinntragend eingesetzt werden können. Eine Konkretisierung der Ideen für andere Gebiete der Schulmathematik, mitsamt der Erarbeitung von Unterrichtsmaterial, steht bis heute aus. Das hat sicher auch mit dem abstrakten Charakter der Universellen Ideen zu tun und der daraus resultierenden Weite ihres Spektrums. Diese, den Ideen innewohnende Vagheit, veranlasst VOHNS zu folgender Kritik, die er an der Idee der Exhaustion festmacht.

> Mit Blick auf die Exhaustion etwa wird ein sehr weiter Bogen gespannt von der alltäglichen Form des Messens einer Länge mit dem Metermaß bis zur Approximation einer Funktion durch die zugehörige Taylor-Reihe [...] Hier muss man sich fragen, inwieweit die mit den beiden Exhaustionsprozessen verfolgten Ziele tatsächlich im Wesentlichen unverändert bleiben.

(Vohns 2007, S. 32)

Selbst wenn die Zielsetzung im Rahmen einer wissenschaftstheoretischen Analyse gleich ist, bleibt die Frage, ob dies auch im Mathematikunterricht deutlich wird.

Dennoch galten und gelten die Arbeiten von BENDER und SCHREIBER zu Fundamentalen Ideen damals wie heute als richtungsweisend. Dies zeigt sich zum einen an der Vielzahl von Arbeiten, die diese Theorie zur Erarbeitung Zentraler Ideen einer mathematischen Teildisziplin nutzen, und zum anderen darin, dass ihr Ansatz in die zweite „Urtheorie“ Fundamentaler Ideen (zumindest implizit) eingeflossen ist.

Ebenfalls seit den 1980ern beschäftigt sich SCHWEIGER intensiv mit der Theorie Fundamentaler Ideen. Wie schon BRUNER sieht er sie als Erfahrungen, die „im handelnden Mathematiker und im lernenden Menschen verankert“ sind (Schweiger 1982, S. 103). Für ihn liegen die Vorteile einer Orientierung an Ideen zunächst in der Lehrerausbildung.

> In der Ausbildung wird der Lehrerstudent gewiß mit sehr viel Stoff konfrontiert und er ist gezwungen, oft relativ schwierige Sätze im Detail zu lernen. Aber kann er diesen Stoff gliedern? Nämlich anders gliedern als in einem deduktiven Schema.

(Schweiger 1982, S. 109)

Das bewusste Aufzeigen Fundamentaler Ideen kann den Studenten eine Gliederung des Stoffes erleichtern. Ziel ist es, die Ideen zu verinnerlichen und sie so nicht nur für das eigene Lernen zu nutzen, sondern sie auch als Lehrer für Schüler (in transformierter Form) nutzbar zu machen. Dazu reicht es nicht, Fundamentale Ideen in der Ausbildung „bloß vorzutragen“. Sie müssen vielmehr von den Auszubildenden „erfahren, d.h. an Handlungen erworben werden“ (Schweiger 1982, S. 110). Schon BRUNER forderte die Vermittlung Fundamentaler Ideen im Unterricht handlungsorientiert und entdeckend zu gestalten.[144]

Auch den Bezeichner „Fundamentale Idee“ übernimmt SCHWEIGER von BRUNER und definiert zur logischen Begriffsbildung:

> Eine fundamentale Idee ist ein Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken, die
>
> 1. in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,
> 2. tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,
> 3. als Ideen zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,
> 4. den Mathematikunterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,
> 5. in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.

(Schweiger 1992, S. 207)

Wie bei BRUNER und SCHREIBER dienen Fundamentale Ideen auch bei SCHWEIGER dazu, Inhalte auf verschiedenen Ebenen zu vernetzen (2. und 4.). Der letzte Punkt betont Vernetzungen von Mathematik und Wirklichkeit. Damit ähnelt SCHWEIGERs Kriterienkatalog dem SCHREIBERs, rückt aber den Mathematikunterricht stärker in den Fokus. SCHWEIGER sieht u.a. die Bedeutung Fundamentaler Ideen nicht nur bei der lokalen Strukturierung, sondern auch globaler als vertikale Faser von Curricula; eben im Sinne des Spiralprinzips von BRUNER. Eine weitere Neuerung stellt die explizite historische Verankerung von Fundamentalen Ideen und damit die Forderung von Vernetzung zwischen Inhalten und Genese der Mathematik dar (1.). Bei SCHREIBER war dieses Kriterium in der geforderten historisch-anthropologischen Analyse aufgehoben. Dem Sinn-Kriterium SCHREIBERs entspricht das Zusammenspiel der Punkte 3, 4 und 5. Die Kriterien „Weite“ und „Fülle“, mit denen SCHREIBER noch wissenschaftstheoretisch argumentiert hatte, richtet SCHWEIGER mit den Punkten 2, 3 und 4 auf den Mathematikunterricht aus.

Ein weiterer Unterschied besteht in der Deutung Fundamentaler Ideen im engeren Sinne. Während SCHREIBER Universelle Ideen als Methoden, Beweisideen,

---

[144] In (Schweiger 2011) wird ein Zusammenhang zwischen der handlungsorientierten Vermittlung Fundamentaler Ideen und der Förderung von Kreativität hergeleitet. SCHWEIGER sieht die Wirksamkeit Fundamentaler Ideen demnach auch im Bereich „Nichtkognitiver“ Aspekte.

Theoreme und Begriffskonstruktionen auffasste, sind sie bei SCHWEIGER Bündel von Handlungen, Strategien und Techniken. Daraus könnte geschlossen werden, dass für SCHWEIGER mathematische Begriffe, Sätze und Eigenschaften in Bezug auf Fundamentale Idee keine Rolle spielen. Eine solche Interpretation scheint aus den folgenden Gründen allerdings nicht angebracht.

Unter Berücksichtigung der Entstehungszeit des Ansatzes ist sicher mit der Betonung von Handlungen eine Distanzierung von der Strukturmathematik intendiert. Eine solche findet sich ja auch bei SCHREIBER, der den prozesshaften Charakter der Mathematik deutlich hervorhebt.

Bei der von SCHWEIGER geforderten Gliederung des Stoffes durch Fundamentale Ideen kommt diesen der Aufbau einer „Syntax" mathematischer Begriffe zu (Schweiger 1982, S. 109).[145] Dies greift auch WERNER PESCHECK auf. In (Peschek 2005) findet sich die Interpretation der SCHWEIGERschen Ideen als „Metakonzepte", die gewissermaßen „typische Frage- und Problemstellungen" eines mathematischen Gebiets enthalten und somit „einen sinnstiftenden Zusammenhang zwischen einzelnen Begriffen, Sätzen und Methoden des Themengebiets" herstellen (Peschek 2005, S. 64).[146]

Darüber hinaus ist zu bedenken, dass SCHWEIGER die Wichtigkeit der „Archetypizität" von Fundamentalen Ideen herausstellt. Nimmt man die erkenntnistheoretischen Ansätze von PIAGET und BRUNER zur Aneignung von Wissen als aktiven Prozess ernst, so scheint eine Orientierung der Ideen an Handlungen, die zur Ausbildung von Begriffen, Eigenschaften und Sätzen führt, gerechtfertigt. Nicht zuletzt zeigen SCHWEIGERs Prototypen von Ideen, dass er nicht nur Tätigkeiten im Blick hat.

SCHWEIGER gibt in seinen beiden wichtigsten Arbeiten zum Thema „Fundamentale Ideen" (Schweiger 1992, Schweiger 2010) unterschiedliche Ideenkataloge an, die sich beide stark von den Universellen Ideen SCHREIBERs unterscheiden.

- SCHWEIGER 1992: Linearisierung, einfache Strukturen, Bifurkation, Ähnlichkeit, Stabilität, Unabhängigkeit von Störungen, Kraft des Formalen, Erweiterndes Umdefinieren, Dualität, Optimalität[147].

[145] Ziel des Aufbaus dieser Syntax ist für Lehrer und Schüler, „sinnvoll an kommunikativen Prozessen über mathematische Inhalte beteiligt sein zu können" (Schweiger 1982, S. 109). In (Fischer 1984) werden die „sozial-kommunikativen" Komponenten Fundamentaler Idee zum tragenden Konzept seiner Theorie, vgl. Kapitel 3.5.1.

[146] Diese Interpretation des SCHWEIGERschen Ansatzes nutzt VOHNS zur Weiterentwicklung Fundamentaler Ideen zu einem inhaltlich und didaktisch orientierten Analysewerkzeug, vgl. (Vohns 2007). Auch bei BOROCVNIK findet sich eine ähnliche Interpretation (s.u.).

[147] Optimalität wurde im Dialog mit HANS SCHUPP dem Ideenkatalog hinzugefügt (Schweiger 1992, S. 206).

- SCHWEIGER 2010: Sprache und Muster, Testen und Bestätigen, Erweiterndes Umdefinieren, Ordnen, Reparieren, Rekursion und Iteration, Funktion, Abbildung, Modelle, Optimieren.

Während der erste Katalog eher durch mathematische Ideen geprägt ist, enthält der zweite eher Ideen, deren Unterrichtsrelevanz sofort ersichtlich ist. Diese Neuakzentuierung ist zweifach begründet. Der erste Katalog findet sich, bis auf die Ideen „Dualität“ und „Optimierung“, schon in (Schweiger 1982). Damals suchte SCHWEIGER nach Fundamentalen Ideen der Analysis, die zur mentalen Gliederung des Lehrstoffs an Universitäten durch Lehramtsstudierende dienen können. SCHWEIGERs Fundamentale Ideen sind somit wesentlich konkreter als SCHREIBERs Universelle Ideen und liegen eher auf der Ebene der Zentralen Ideen.

Der Katalog von 2010, der schon in (Schweiger 2006) anklingt, ist nun stärker durch aktuellere Forschungen, besonders die amerikanische Curriculumsforschung, beeinflusst. Zu einer Basis seines neuen Katalogs macht SCHWEIGER das „root sytem of mathematics“ von LYNN ARTHUR STEEN.[148] Das „root system“ ist als eine Reaktion auf die teilweise enge Ausrichtung von mathematischen Curricula in den USA entstanden. STEEN kritisiert:

> Traditional school mathematics picks very few strands (e.g., arithmetic, geometry, algebra) and arranges them horizontally to form the curriculum: first arithmetic, then simple algebra, then geometry, then more algebra and finally – as if it were the epitome of mathematical knowlege – calculus.

(Steen 1990, S. 4)

Er plädiert für eine sinnvolle Berücksichtigung weiterer Aspekte von Mathematik, die er „deep ideas“ nennt. Solche „deep ideas“ können (Steen 1990, S. 3 f.) sein:

- *Structures*: numbers, algorithms, ratios, shapes, functions, data;
- *Attributes:* linear, periodic, symmetric, continuous, random, maximum, approximate, smooth;
- *Actions:* represent, control, prove, discover, apply, model, experiment, classify, visualize, compute;
- *Abstractions:* symbols, infinity, optimization, logic, equivalence, change, similarity, recursion;
- *Attitudes:* wonder, meaning, beauty, reality;
- *Behaviors:* motion, chaos, resonance, iteration, stability, convergence, bifurcation, oscillation;

[148] (Steen 1990, S. 3).

- *Dichotomies:* discret vs. continuous, finite vs. infinite, algorithmic vs. existential, stochastic vs. deterministic, exact vs. approximate.

Diese Liste darf nicht als Versuch der Erstellung einer Ideenkollektion Fundamentaler Idee verstanden werden. Sie ist so umfangreich aufgebaut, um ein möglichst breites Spektrum von Ideen aufzuzeigen, aus denen einzelne zur Lehrplankonstruktion ausgewählt werden können.[149]

In diesem Sinne leitet SCHWEIGER aus obigen „actions“ und „attitudes“ einige Fundamentale Ideen ab (Schweiger 2006, S. 67). Zusätzlich wird der Ideenkatalog SCHWEIGERs durch Standardisierungen von Lehrplänen und Abschlussprüfungen beeinflusst. SCHWEIGER nennt exemplarisch die „Principles and Standards of School Mathematics“[150], betont aber, dass „any list of such ‘standards’ clearly reflects some ideas of what is seen as ‘fundamental’“ (Schweiger 2006, S. 67).

Diese neue Orientierung der Prototypen der Ideen hat ihrerseits wieder Auswirkung auf das logische Begriffsverständnis SCHWEIGERs. Er formuliert seine Kriterien um und erweitert sie. Anstatt von den fünf oben genannten Kriterien geht er nun von folgenden aus.

> Fundamental ideas
>
> recur in the historical development of mathematics (time dimension),
>
> recur in different areas of mathematics (horizontal dimension),
>
> recur at different levels (vertical dimension),
>
> are anchored in everyday activities (human dimension) […]
>
> Fundamental ideas should help to
>
> design curricula,
>
> elucidate mathematical practice and the essence of mathematics,
>
> build up sementic networks between different areas,
>
> improve memory.

(Schweiger 2006, S. 68)

SCHWEIGER teilt seine Kriterien in zwei Kategorien ein, wie durch die Absätze in obigem Zitat deutlich wird. Diese Weiterentwicklung des Kriterienkatalogs von SCHWEIGER erarbeitete HISCHER (Hischer 1998). Dieser unterteilte SCHWEIGERs ursprünglich genannten Kriterien nach ihrem deskriptivem (1., 3. und 5.) und

[149] Wie genau dies vonstatten gehen soll und nach welchen Kriterien die Ideen auszuwählen sind, lässt STEEN offen.

[150] (NCTM 2000).

normativem (2. und 4.) Charakter. Dadurch wurde die vorhandene Theorie stärker gegliedert und gleichzeitig genauer reflektiert, welche Erwartungen (für den Mathematikunterricht) an Fundamentale Ideen gestellt werden und welchen beschreibenden Charakter sie für die Mathematik haben. Im neuen Kriterien-Katalog haben die ersten vier Kriterien deskriptiven und die letzten vier normativen Charakter. Die Einteilung von HISCHER veranlasste SCHWEIGER ebenfalls, seine Kriterien stärker zu explizieren. So fordert er beispielsweise weiterhin von Fundamentalen Ideen die normative Funktion, Curricula vertikal zu gliedern (Punkt 2 im ursprünglichen Katalog). Im neuen Katalog wird diese Funktion auch auf die Mathematik übertragen und erhält hier deskriptiven Charakter. Fundamentale Ideen sollen nun auch in unterschiedlichen Ebenen von Mathematik auffindbar sein („vertical dimension“). Angeregt durch die Arbeit von SCHWILL für die Diskussion Fundamentaler Ideen der Informatik fügt SCHWEIGER seinem Katalog auch ein „Horizontalkriterium“ hinzu, welches SCHREIBERs „Fülle“-Kriterium entspricht.

Der Vergleich von SCHREIBERs Universellen Ideen und SCHWEIGERs Fundamentalen Ideen, der oben schon angeklungen ist, zeigt, dass die Ideenkataloge, obwohl die Kriterienkataloge ähnlich sind, wenige Ähnlichkeiten aufweisen. Auch SCHWEIGERs Ideenkataloge unterscheiden sich deutlich. Es ist typisch für die Diskussion Fundamentaler Ideen, dass verschiedene Autoren trotz ähnlicher Theoriebasen unterschiedliche Ideenkataloge erarbeiten. Schon 1992 hatte SCHWEIGER auf die Unterschiedlichkeit von Ideenkatalogen hingewiesen, die teilweise für das gleiche Themengebiet erstellt wurden. Damals kam für ihn in diesen unterschiedlichen Katalogausrichtungen „eine Art Hilflosigkeit gegenüber dem Phänomen Mathematik“ zum Vorschein. Könnte man diese Aussage SCHWEIGERs noch als eine Art „Resignation“ verstehen (Vohns 2007, S. 35), so macht SCHWEIGER 2010 deutlich, was er eigentlich meint. Den „Mangel an Konsens“ sieht SCHWEIGER nämlich nicht als nachteilig für die Diskussion Fundamentaler Ideen an, denn

> die Auswahl fundamentaler Ideen bzw. deren Exemplifizierung kann, realistisch gesehen, immer nur eine vorläufige sein,
>
> die Herstellung eines Konsens für ein bestimmtes Ziel [...] ist ein prozesshaftes Element, welches in unserer Gesellschaft wichtig ist,
>
> die individuelle Ausprägung mathematischen Unterrichts soll (in Grenzen) gefördert, aber nicht durch einen von Fachleuten erstellten Kanon fundamentaler Ideen eingeengt werden.

(Schweiger 2010, S. 17)

Rückblickend auf seine jahrzehntelange Beschäftigung mit der Thematik Fundamentaler Ideen, hält SCHWEIGER fest, dass es wohl auch gar nicht möglich sei, die Frage nach einem einheitlichen und verbindlichen Katalog von Ideen zu klären.

> Ich bin heute der Meinung, dass es nicht wichtig ist, diese Fragen zu beantworten. Vielmehr erscheint es mir wichtig, dass sich Lehrer und Lehrerinnen mit diesen Fragen beschäftigen. Das Finden eines individuellen Katalogs, der auch immer wieder revidiert werden kann, könnte ein lohnender Teil der den Unterricht begleitenden didaktischen Reflexion sein [...]

(Schweiger 2010, S. 1)

Nun richtet sich SCHWEIGER gegen die Etablierung eines für den Mathematikunterricht verbindlichen Ideenkatalogs, der von Fachleuten vorab bestimmt wurde. Dies sollte nicht als Absage an die in der mathematischen Fachdidaktik verwurzelte Suche nach Fundamentalen Ideen verstanden werden. Vielmehr geht es ihm um einen vom Lehrer ausgesuchten Katalog, der seine Tragfähigkeit zum einen an der Umsetzbarkeit im Unterricht misst, der zum andern aber auch von fachlicher Seite aus gestützt sein sollte.[151] Eine solche Legitimierung von fachlicher Seite könnte dann durch den Abgleich des eigenen Katalogs mit denen in der Fachdidaktik diskutierten sein. Welche Ansatzpunkte die fachdidaktische Forschung für bestimmte mathematische Gebiete dafür bietet, wird nun erläutert.

3.5.3 Auswahl bereichsspezifischer Kataloge

Bis heute ist eine Vielzahl von Arbeiten entstanden, die versuchen, Fundamentale Ideen einzelner mathematischer Gebiete herauszustellen oder sich auch mit einer einzigen, als fundamental angenommenen, Idee beschäftigen. Beispiele für die letztgenannte Sorte von Arbeiten sind (Danckwerts 1988) und (Danckwerts 1989) zur Linearität, (Hischer 1998) zur Mittelwertbildung, (Schupp 1992) und (von der Bank 2013) zum Optimieren, (Vohns 2000) zur Idee des Messens und (Wiernicki-Krips 2014) zum Invertieren. Diese Arbeiten nutzen entweder die Definitionen von SCHREIBER/BENDER oder von SCHWEIGER oder beide für Fundamentale Ideen[152] und zeigen, dass ihre bevorzugte Idee den dort genannten Kriterien genügt. Darüber hinaus enthalten diese Arbeiten inhaltliche Ausarbeitun-

---

[151] Die Erarbeitung eines von mathematischer und fachdidaktischer Seite begründbaren Ideenkataloges (Kapitel 4) ist neben dessen Nutzung im Unterricht (Kapitel 5 und 6) das Ziel der vorliegenden Arbeit.

[152] Auf den Beitrag HISCHERs zur Weiterentwicklung der SCHWEIGERschen Theorie wurde schon hingewiesen. Auch SCHUPP wirkte auf die Theoriebildung Fundamentaler Ideen. Er leitete aus den Kriterien SCHWEIGERs in Anlehnung an WITTMANN ein Prinzip für den Einsatz von Fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht ab. Das „Prinzip der tragfähigen Zwischenabschlüsse" besagt, dass valide Vorstellungen, die mithilfe Fundamentaler Ideen gewonnen wurden, nicht nur am Ende einer Beschäftigung mit ihnen stehen dürfen. Sie müssen auch „zwischendurch" angestrebt werden (Schupp 1992, S. 104). Auf die Überlegungen von VOHNS zur Weiterentwicklung Fundamentaler Ideen wird in Kapitel 3.5.4 eingegangen.

gen der dort genannten Ideen, die direkten Bezug zum Schulstoff erkennen lassen. Die Autoren argumentieren also auch auf einer konkreteren Ebene und wollen so das Wirksamwerden Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht fördern. Zusätzlich geben insbesondere HISCHER und SCHUPP konkrete Hinweise für die Implikationen der jeweiligen Ideen im Unterricht. Diese Arbeiten sind daher als Aufarbeitung des vierten Punkts aus dem Arbeitsprogramm von SCHREIBER zu sehen.[153]

Die erste Sorte von Arbeiten versucht, Fundamentale Ideen eines, mehr oder weniger großen, Teilgebietes von Mathematik zu erarbeiten. Ziel dieser Arbeiten ist es, die genannten Ideen an Unterrichtsinhalten zu verdeutlichen. Zur Begründung der Ideenauswahl dient dann häufig eher der (vermutete) Mehrwert, den Unterricht durch sie bekommt, denn deren deskriptiver Charakter für die Mathematik.[154] Das Potential solcher bereichsspezifischen Ideenkataloge soll nun exemplarisch aufgezeigt werden. Dazu dienen Kataloge von verschiedenen Autoren aus verschiedenen Zeiten. Betrachtet werden die Arbeiten zur Analysis von FISCHER und KLIKA, wobei Bezüge zu SCHWEIGERs Arbeit hergestellt werden, von HEITELE und BOROVCNIK zur Stochastik, verschiedene Ansätze innerhalb der Informatikdidaktik und abschließend die Arbeit von JOHANN HUMENBERGER und REICHEL für die angewandte Mathematik. Die letztgenannte Arbeit berücksichtigt explizit auch „Nichtkognitive“ Aspekte von Mathematik bei der logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen und liefert somit einen Ankerpunkt für die in Kapitel 4.2 vorgestellte Öffnung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen.

Wie oben beschrieben, war SCHWEIGER in seiner ersten Untersuchung des Konzepts der Fundamentalen Ideen auf der Suche nach charakteristischen Ideen der Analysis. Er stellte damals „Linearisierung“, „einfache Strukturen“, „Bifurkation“, „Ähnlichkeit“, „Stabilität“, „Unabhängigkeit von Störungen“, „Kraft des Formalen“ und „Erweiterndes Umdefinieren“ als fundamental heraus. Diese Ideen sind von der Mathematik aus gedacht, und ein unterrichtlicher Nutzen durch ihre Akzentuierung ist ohne weitere Erklärungen nicht ersichtlich. Die Ideen scheinen sehr abstrakt und kaum in Inhalten des Mathematikunterrichts auf elementarem Niveau aufzeigbar.

Aus einer anderen Richtung näherte sich 1976 FISCHER der Problematik des Findens Fundamentaler Ideen der Analysis (Fischer 1976). Um den Bezug seiner Ideen zum Mathematikunterricht sofort klar werden zu lassen, beschränkt er

---

153 Vgl. zur Etablierung Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht auch Kapitel 5.1.

154 Eine dieser Arbeiten stammt von REICHEL, der unter Fundamentalen Ideen „nicht nur gewisse mathematische Methoden und Begriffsbildung [...] sondern auch spezifische Tätigkeiten und Fähigkeiten, die man als typisch für die Mathematik oder den Mathematikunterricht bezeichnen kann“ versteht (Reichel 1994, S. 170). Damit subsumierte er wieder mehr für Mathematik typische Aspekte als lediglich Begriffe und Tätigkeiten.

sich auf die Explikation von Ideen, die sich auf die Differentialrechnung und speziell auf reelle Funktionen beziehen.[155] Dabei ist, wie auch in seiner übergreifenden Arbeiten von 1984, die Erzeugung eines „unverfälschten Bildes von Mathematik“ bei den Schülern leitende Zielvorstellung des Mathematikunterrichts (Fischer 1976, S. 185). Da ein valides Bild von Mathematik neben mathematischem Wissen auch dessen Anwendung, also „die Darstellung von Mathematik nach außen“, beinhaltet, sieht FISCHER hier besonders die Fachdidaktik gefordert. Die Suche nach den jeweiligen Fundamentalen Ideen eines Gebietes stellt für FISCHER einen ausgezeichneten Ansatz zur Einlösung dieser Forderung dar.

Er nennt den folgenden Katalog (Fischer 1976, S. 186-189).

- Reelle Funktionen: Intuition[156], Approximationsgedanke
- Untersuchung reeller Funktionen. Eigenschaften: Injektivität, Surjektivität, Monotonie, Extremstellen
- Finden reeller Funktionen
- Spezielle Funktionen: Lineare Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Winkelfunktionen
- Funktionen als Elemente: Rechnen mit Funktionen
- Begriff und Intuition des Differentialquotienten: Änderungsrate
- Macht des Differentialkalküls – Ableitungsfunktion
- Exaktifizieren durch Formalisieren, Beweise
- Ordnung und Struktur

FISCHERs Katalog enthält als Fundamentale Ideen, „Begriffe und Tatsachen der Theorie“, deren Zusammenspiel bildungsrelevant ist (Fischer 1974, S. 185). Er bleibt also bei einem intuitiven Begriffsverständnis von Fundamentalen Ideen und setzt sie zunächst zu Begriffen (Definitionen) und Tatsachen der Theorie in Beziehung. Dabei hält FISCHER keine strenge Unterscheidung ein, wie die Erläuterungen zu seinem Katalog zeigen. Er spricht häufig vom „fundamentalen Charakter“ verschiedener Begriffe und Vorstellungen.[157] Es ist also anzunehmen, dass FISCHER unter Fundamentalen Ideen Begriffe (und deren Definitionen), Tätigkeiten und Strategien versteht, die zu „allgemeinem Bildungsgut“ werden können, da sie helfen können, das von ihm propagierte Bild von Mathematik

[155] FISCHER klammert bewusst die Integralrechnung aus, da die Interpretation des Integrals als lineares Funktional für die Schule unergiebig ist und das Integral damit eher zur Maßtheorie denn zum Thema „reelle Funktionen“ gehört (Fischer 1976, S. 186).

[156] Eine Persönlichkeitsidee, vgl. Kapitel 4.5.

[157] Die vorgestellten speziellen Funktionen sind für FISCHER fundamental. Ebenso besitzen „Injektivität, Surjektivität [...], Monotonie, sowie die [...] Extremstellen [...] fundamentalen Charakter“ (Fischer 1976, S. 186), sowie die Vorstellungen von Funktionen als Elemente von Mengen (Fischer 1976, S. 187).

beim Schüler zu erzeugen. Anders als SCHREIBER oder SCHWEIGER erstellt FISCHER keinen „feineren“ Kriterienkatalog für Fundamentale Idee, sondern richtet seine Ideen nach der weiteren Zielvorstellung ihres (von ihm vermuteten) Bildungswertes aus.

In dieser weiten und, durch die Unschärfe des Bildungsbegriffs,[158] vagen Zielvorstellung liegt der Grund für die Heterogenität des Katalogs bezüglich des Konkretisierungsgrades seiner einzelnen Punkte. Die genannten mathematischen Objekte, Tätigkeiten und Strategien sind zum einen sehr „weit“ und für die gesamte Mathematik von Bedeutung (z.B. Formalisieren) und zum anderen sehr konkret und für die Differentialrechnung wesentlich (z.B. Ableitungsfunktion). Für die genannten Objekte erarbeitet FISCHER mögliche Grundvorstellungen, die er vergleichend diskutiert und ihren Sinn im Unterricht gegeneinander abwägt. So stellt er beispielsweise die Vorteile einer Vorstellung des Differentialquotienten als Änderungsrate gegen die Vorstellung als Tangentensteigungen heraus, da sich aus ersterer die meisten Deutungen des Differentialquotienten (z.B. Beschleunigung etc.) ergeben (Fischer 1976, S. 187 f.). Andere Objekte, wie die speziellen Funktionen, haben ihren Platz im Katalog, da sie für Anwendungen der Mathematik „fundamentalen Charakter“ haben (Fischer 1976, S. 187). Anhand der genannten mathematischen Tätigkeiten entfaltet FISCHER mögliche Unterrichtsgänge, die den Charakter von Mathematik als prozesshafter, anwendungsorientierter und (vor allem) nicht abgeschlossener Wissenschaft deutlich werden lassen. Insbesondere das Aufsuchen von reellen Funktionen, die einen (außer)mathematischen Sachverhalt beschreiben, sollte, neben der Untersuchung dieser Funktionen, zum „Generalthema“ des Analysisunterrichts werden und diesen wie ein roter Faden durchziehen (Fischer 1976, S. 185). Mit dem Punkt „Exaktifizieren durch Formalisieren“ nennt FISCHER eine „Idee“, die für alle mathematischen Bereiche Bedeutung hat (Fischer 1976, S. 189). Ihm geht es hier um die Betonung ihrer Ausprägung im Bereich der Analysis. Diese Fundamentale Idee soll dem Schüler die Erfahrung ermöglichen, zu erkennen, dass die Methoden der Analysis auf dem gleichen Exaktheitsniveau begründet werden können wie Methoden, die er schon aus der Algebra und Geometrie kennt, und dass er diese Erfahrung „als eine grandiose Leistung des menschlichen Geistes“ erlebt (Fischer 1976, S. 189). Um dieses „oberste Lernziel“ zu erreichen, muss der gesamte Unterricht inhaltlich und methodisch darauf ausgerichtet sein. FISCHER schlägt vor, den Unterricht so aufzubauen, dass am Anfang intuitive Begründungen stehen, anhand derer durch Problembetrachtungen „Sprungbretter“ auf ein neues Niveau des Exaktifizierens thematisiert werden (Fischer 1976, S. 189). Eine solche Möglichkeit sieht FISCHER in der durch die Umkehrfunktion aufge-

[158] Zur Unschärfe des Bildungsbegriffs vgl. beispielsweise (Heymann 1996).

worfenen Frage nach ihrem Definitionsbereich, die zum Aspekt der Stetigkeit führen kann.

Obwohl die Idee des Exaktifizierens durch Formalisieren aufgrund ihrer Weite mit den anderen genannten Ideen verbunden ist, möchte FISCHER sie doch eigenständig betonen. Wird diese Idee unbewusst integrativ mit anderen Ideen verbunden, kann sie dem Schüler verloren gehen oder zumindest vage bleiben. Somit ist die von FISCHER geforderte Erfahrung nicht mehr möglich.

Auch die allgemeineren Ideen Struktur und Ordnung konkretisiert FISCHER im Bereich der reellen Funktionen. Dabei geht es ihm nicht um eine axiomatische Durchdringung des Schulstoffes durch die BOURBAKIschen Mutterstrukturen, sondern er schlägt wichtige Aspekte zur Ordnung des Analysisstoffes der Schule vor. Als Beispiel stellt er den Approximationsgedanken vor, dessen Ordnungsfunktion in der Vereinheitlichung des Aufbaus der Theorie besteht (Fischer 1976, S. 189).

Ausgehend von seinem Ideenkatalog entwickelt FISCHER Konsequenzen für den Mathematikunterricht. Beispielsweise richtet er sich gegen eine konstruktive Einführung der reellen Zahlen. Bei einer solchen Behandlung werden intuitive Vorstellungen kaum berücksichtigt, und die Ideen des Exaktifizierens und Formalisierens, zumindest wie er sie verstanden haben möchte, werden verdeckt, da sich keine „Sprungbretter“ aus einem solchen Aufbau ergeben.[159] Stattdessen schlägt er entdeckendes Vorgehen vor, welches von der Identifizierung der reellen Zahlen als Punkte einer Geraden ausgeht.

Zur Beurteilung des von FISCHER vorgelegten Katalogs ist hier weniger entscheidend, ob seinem Ideenvorschlag oder seinen didaktischen Konsequenzen für einen Unterrichtsgang zugestimmt wird. Wichtig ist, dass es ihm gelingt, einen (begründeten) Katalog zu entwickeln, der ausreichend konkret ist, um direkten Bezug zu tragenden Grundvorstellungen und Methoden im Unterricht zuzulassen, aber gleichzeitig auch zu einer abstrakteren Ebene von allgemeineren mathematischen Ideen Beziehungen erkennen lässt.

Einen weiteren Ideenkatalog zur Analysis stellte MANFRED KLIKA 1981 vor (Klika 1981). Zur Theoriebildung greift KLIKA auf ein Konzept zurück, welches er mit TIETZE und WOLPERS für die Monographie „Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II“ ausarbeitete (Tietze/Klika/Wolpers 2000). Für die dortige Konzeption Fundamentaler Ideen lieferte TIETZE 1979 eine wichtige Vorarbeit, in welcher

[159] Um die Tatsache zu demonstrieren, dass in der Mathematik häufig ein System auf ein anderes zurückgeführt wird, hält FISCHER die Konstruktion der komplexen Zahlen für geeigneter, da hier ja auch etwas „nicht geht“ (Fortsetzung der Ordnung).

alle wesentlichen Punkte schon anklingen.[160] Es wird zuerst diese übergreifende Konzeption vorgestellt und anschließend KLIKAs Anwendung auf den Bereich der Analysis.

Die Autoren unterscheiden drei Perspektiven Fundamentaler Ideen.

- *Leitideen* (als wichtige fachliche Grundlagen innerhalb des Implikationsgefüges einer Theorie)
- *zentrale Mathematisierungsmuster* (die den Verwendungsaspekt und wichtige Erfordernisse des „tertiären Bereichs“ Studium/Beruf erfassen)
- *bereichsspezifische Strategien* (die eine entscheidende Rolle beim Problemlösen, Begriffsbilden, Mathematisieren spielen)

(Klika 1981, S. 2)

Mit dieser Unterteilung soll dem Produkt- und Prozesscharakter von Mathematik Rechnung getragen werden. Unter Leitideen sind eher mathematische Produkte wie Sätze und Begriffe zu fassen, die „gemeinsame Grundlage zahlreicher Aussagen dieser Theorie sind oder einem hierarchischen Aufbau dienen“ (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 41). Sie sollen also Anwendung in möglichst vielen Inhalten haben und somit gleichzeitig diese Inhalte vernetzen sowie das logische „Beziehungsgeflecht“ eines Gebietes erkennen lassen. Das bedeutet allerdings keine Ausrichtung des Unterrichts an rein wissenschaftlichen Aspekten der Mathematik, wie den Mutterstrukturen der BOURBAKI-Gruppe. Mathematische Produkte können nur dann zu Leitideen werden, wenn sie auch innerhalb der Schulmathematik eine Reihe von Phänomenen erklären und ordnen. Im Umgang mit den Leitideen im Analysisunterricht weist KLIKA darauf hin, dass die Idee des Exaktifizierens im Sinne FISCHERs eine wichtige Rolle spielt. Bei der Begriffsklärung sei immer von intuitiven Vorstellungen von Begriffen auszugehen, welche durch Hinterfragen exaktifiziert werden (Klika 1981, S. 2). Wie schon FISCHER gehen die Autoren davon aus, dass zum Mathematiktreiben Intuition gehört und somit auch Persönlichkeitsideen eine Rolle spielen.

Zentrale Mathematisierungsmuster und bereichsspezifische Strategien betonen den Prozesscharakter von Mathematik. Der Unterschied liegt in ihrem Anwendungsrahmen. Unter Mathematisierungsmustern verstehen die Autoren vorrangig „verbreitete Methoden des Mathematisierens in nicht-mathematischen Wissenschaften“, aber auch „Mathematisierungen im Sinne allgemeiner Erfahrun-

[160] TIETZE wendet die erarbeitete Theorie Fundamentaler Ideen auf den Bereich der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie an (Tietze 1979). Da sich die Arbeiten von KLIKA und TIETZE zwar auf unterschiedliche Teilgebiete der (Schul-)Mathematik beziehen, in ihrer Konzeption allerdings gleich sind und daher auch die gleichen Vor- bzw. Nachteile eine solchen Orientierung tragen, wird an dieser Stelle der vorliegenden Arbeit bezüglich des erarbeiteten Ideenkatalogs nicht weiter auf die Arbeit von TIETZE eingegangen.

gen (z.B. der mathematische Raumbegriff)“ (Tietze 1979, S. 145).[161] Ihr Anwendungsgebiet liegt also im außermathematischen „tertiären“ Sektor. Bereichsspezifische Strategien hingegen sind „wichtige Ergänzungen allgemeiner heuristischer Verfahrensregeln“, die in einem Bereich der Mathematik besonders wichtig sind (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 42). Beispielsweise die Strategie „Suche und benutze homogene (gleichartig-gelegene) Stücke in kongruenten Dreiecken“ für die Schulgeometrie (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 42).[162]

Eine Fundamentale Idee kann auch in mehreren dieser Perspektiven bedeutsam sein. Für die Autoren ist die Idee der Koordinate eine solche. Zum einen ist sie für die Analytische Geometrie in Zusammenhang mit dem Vektorbegriff eine Leitidee. Die geeignete Auswahl eines Koordinatensystems ermöglicht die algebraische Beschreibung geometrischer Objekte. Dies macht die Idee der Koordinate zu einer bereichsspezifischen Strategie. Sie findet auch in vielen wirtschafts- und sozialwissenschaftlichen Sachverhalten Anwendung als Darstellungsstrategie und dient der algebraischen und graphischen Beschreibung unseres Erfahrungsraums (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 41).

Neben dieser Differenzierung der verschiedenen Aspekte Fundamentaler Ideen stellt auch das Verfahren zur Gewinnung von Ideen, welches TIETZE/KLIKA/WOLPERS vorstellen, eine Neuerung dar. Es wird ein „abstrahierendes“ Verfahren vorgeschlagen, „das von der Analyse konkreter mathematischer Bereiche ausgeht“. Es wird also ein umgekehrter Weg eingeschlagen, der von konkreten Unterrichtsinhalten ausgeht, nach Gemeinsamkeiten sucht und damit mögliche Ideen identifiziert. Durch eine Überprüfung, ob die Ideen auch in anderen Bereichen eine Rolle spielen, gelangt man zu Fundamentalen Ideen. Solche übergreifenden Ideen nennen die Autoren, in Anlehnung an SCHREIBER, Universelle Ideen. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass, besonders in Bezug auf die Leitideen, Beziehungsnetze eines Inhaltsbereichs deutlich werden. Gleichzeit gibt das Verfahren Hinweise darauf, welche Inhalte sich besonders gut zur Vermittlung bestimmter Ideen eignen (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 41). Ausgehend von ihren bereichsspezifischen Analysen entwickeln sie folgende Universelle Ideen: „Algorithmus“, „Approximation/Approximieren“, „Funkti-

---

[161] TIETZE weist auf eine empirische Möglichkeit der Identifizierung von Mathematisierungsmustern hin. Sie können durch Defizitanalysen, „in denen untersucht wird, wie weit schulische Inhalte bei Studienanfang für elementare Anwendungssituationen zur Verfügung stehen“, erfasst werden (Tietze 1979, S. 143). Wichtig, um die Unterscheidung zu bereichsspezifischen Strategien zu erhalten, ist, dass Studiengänge untersucht werden, die nicht primär mathematisch ausgerichtet sind. Drei Jahre zuvor hatte schon HEITELE versucht, bei seiner Untersuchung Fundamentaler Ideen der Stochastik, fundamentale Fehler und Fehlvorstellungen als komplementäre Ausprägung Fundamentaler Ideen zu sehen (Heitele 1976). Diese Sichtweise setzte sich allerdings in der fachdidaktischen Diskussion nicht durch.

[162] Eine solche, nicht trennscharfe Unterscheidung von Schnittstellenideen und eher mathematischen Tätigkeitsideen wird auch im Ideenkatalog nach LAMBERT vorgenommen, vgl. Kapitel 4.4.

on/Abbildung/Operator", „Messen", „Modellbildung" und „Optimieren" (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 40).

Speziell für einen Ideenkatalog im Bereich der Analysis halten die Autoren alle genannten Universellen Ideen für bedeutsam. Zusätzlich nehmen sie noch Ideen von anderen Autoren auf: Von BENDER und SCHREIBER „Exhaustion", „Invarianz" und „Charakterisierung", von HEYMANN „Zahl" (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 179). KLIKA konkretisiert diese Ideen zu bereichsspezifischen Ideen der Analysis und gibt folgende Leitideen, bereichsspezifische Strategien und zentrale Mathematisierungsmuster, die hier aufgrund ihres Umfangs nur stichwortartig wiedergegeben werden können, an.[163]

Leitideen:

- Reelle Zahlen (Körperaxiome, Ordnungsaxiome mit Vollständigkeit/Archimedizität, Norm)
- Reelle Funktionen (einer Variable/mehrerer Variablen)
- Konvergenz, Stetigkeit (Grenzwert, Stetigkeit/Zwischenwertsatz/Satz vom Maximum, Folgen, Reihen)
- Differenzierbarkeit
- Integrierbarkeit
- Funktionalgleichungen, Differentialgleichungen (Differenzengleichungen)
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- Zentrale globale Sätze (Mittelwertsätze, Monotonie-, Schrankensatz)
- Ableitungs- und Integralregeln, Eigenschaften von Ableitungen und Integral

Bereichsspezifische Strategien:

- Approximation mit Hilfe von Folgen von Zahlen oder von Polygonen, rekursiv definierten Folgen, Intervallschachtelung, Funktionen und deren Graphen, Änderungsraten und Differenzenquotienten
- Linearisierung im Sinne linearer Approximation und durch geeignete Transformation nicht-affiner Funktionen
- Abschätzung bei Grenzwert-, Stetigkeits- und Funktionsuntersuchungen, beim Rechnen mit Dezimalbrüchen, beim Rechnen mit Ungleichungen
- Geometrisierung analytischer Sachverhalte zur wechselseitigen Interpretation

[163] Die gleiche Liste, lediglich anders sortiert, findet sich in (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 184).

- Zentrale Sätze des Kalküls, die als Strategien beim Argumentieren dienen und inhaltliche Zusammenhänge herstellen (z.B. Produkt- und Kettenregel oder Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Zentrale Mathematisierungsmuster:

- Reelle Funktionen zur mathematischen Darstellung von Naturgesetzen und zur Modellbildung
- Differenzen- und Differentialquotient als Änderungsrate
- Integral als Gesamteffekt von Änderungsraten
- Differenzen- und Differentialgleichungen

Anhand der Leitideen, die sich teilweise mit den Fundamentalen Ideen FISCHERs decken, beschreiben die Autoren mögliche Zugänge zu einzelnen Begriffen und Sätzen. Dabei findet aber keine Diskussion ihrer Bedeutung innerhalb der Mathematik und des Alltagsverständnisses oder ihrer Tragfähigkeit im Unterricht statt. Da insbesondere die Perspektive der Leitideen von bereichsspezifischen Strategien und zentralen Mathematisierungsmustern getrennt ist, wird nicht immer deutlich, welche mathematischen Prozesse, Problemstellungen und Fragen mit ihnen in Verbindung stehen.[164] Ihr Ideencharakter kommt daher viel weniger stark zum Vorschein als beispielsweise bei SCHWEIGER oder FISCHER. Stattdessen nutzt KLIKA die genannten Leitideen zur inhaltlichen Durchdringung und didaktisch orientierten Gliederung der Analysis. VOHNS bemerkt dazu richtigerweise, dass die Kategorie der Fundamentalen Ideen für eine solche Zielrichtung zu „hoch gegriffen" ist (Vohns 2007, S. 38).

Bedenkt man, dass TIETZE und WOLPERS ebenso umfangreiche Listen für die Analytische Geometrie und Lineare Algebra und Stochastik erarbeitet haben, die, zusammen mit KLIKAs Arbeit, den Oberstufenunterricht gliedern sollen, ist doch fraglich, inwieweit diese Fülle von Aspekten noch Orientierungspunkte liefert oder letztendlich nur noch zur Stoffvermehrung beiträgt. Diese Konzeption Fundamentaler Ideen scheint genau die Gefahr in sich zu tragen, vor der schon JUNG warnte. Sie fördert eine Aufgliederung und „Runterbrechung" von Ideen bis zu ihrer Bedeutungslosigkeit (Jung 1978).

Obwohl die Ansätze zur Findung Fundamentaler Ideen im Bereich der Analysis kein großer zeitlicher Abstand trennt, die Autoren auch teilweise aufeinander verweisen, bleiben die Kataloge doch eher zusammenhanglos nebeneinander stehen. SCHWEIGER und KLIKA verweisen zwar beide auf den Katalog FISCHERs, erläutern aber nicht näher, wie dieser auf ihre Ideenkataloge gewirkt hat und welche Beziehungen zu FISCHERs Ideen bestehen. SCHWEIGER selbst wies 1992 auf

[164] SCHWEIGER hatte schon kritisiert, dass somit die von KLIKA genannten Fundamentalen Ideen Kapitelüberschriften aus Lehrbüchern zu stark ähneln (Schweiger 1992, S. 209).

eine wichtige Richtung, in der er Potential zur Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen sah, hin. Ziel zukünftiger Forschung könnte das „Herausarbeiten semantischer Beziehungen zwischen neuen und bestehenden Katalogen fundamentaler Ideen“ sein (Schweiger 1992, S. 212). In überzeugender Weise ist diese Zielvorstellung bis heute nur für die Stochastik durch die Arbeit von BOROVCNIK eingelöst worden (Borovcnik 1997).[165] Er formuliert seinen Katalog Fundamentaler Ideen in engem Bezug zur Arbeit von HEITELE, der schon 1976 eine Konzeption Fundamentaler Ideen der Stochastik vorschlug.

1976 legte HEITELE mit seiner Dissertation einen Katalog Fundamentaler Ideen der Stochastik vor (Heitele 1976). Nach den Überlegungen WITTMANNs und parallel zu FISCHER stellt diese Arbeit eine der ersten zur Thematik Fundamentaler Ideen dar. Entsprechend nah ist HEITELEs Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen an BRUNERs ursprünglicher Konzeption. HEITELE stellt die Modellbildung in das Zentrum eines Stochastikunterrichts, mit dem er sich auf die Grundschule und Förderstufe bezieht. Fundamentale Ideen nach BRUNER sieht HEITELE als

> Ordnungsprinzipien, die der menschliche Geist geschaffen hat, um historische Gegebenheiten oder naturwissenschaftliche Phänomene im Sinne eines größtmöglichen Erklärungswertes zu strukturieren. Sie sind reine Gedankenkonstrukte, die der Mensch der Umwelt aufprägt.

(Heitele 1976, S. 91)

Besonders der letzte Satz erinnert an die Kategorialen Begriffe von IMMANUEL KANT. HEITELE nähert sich der Thematik also eher von einer Interpretation des Ideenbegriffs, der durch den deutschen Idealismus geprägt ist. Er definiert Fundamentale Ideen als solche Ideen,

> die dem Individuum auf jeder Stufe seiner Entwicklung möglichst gute Erklärungsmodelle liefern und die sich auf verschiedenen kognitiven Stufen nicht strukturell, sondern (im weitesten Sinne des Wortes) nur vom sprachlichen und durch den Grad der Elaboriertheit her unterscheiden.

(Heitele 1976, S. 92 f.)

Die Erklärungsmodelle dürfen dabei nicht auf ein zu enges Verständnis von „erklären“ reduziert werden, sondern sollte darunter auch „beschreibende und ordnende Aspekte“ verstehen (Heitele 1976, S. 91). HEITELE betont weiter, dass ein Katalog von Ideen stets abhängig von Sichtweisen und Zielsetzungen ist. Demnach kann es leicht zu Kontroversen kommen, werden die Intentionen hinter den

---

[165] Zudem lieferte BENDER eine Liste mit Grundvorstellungen und -verständnissen für den Bereich Stochastik, welche er als „Ideen quer zu einem curricularen Aufbau“ eines Lehrganges bezeichnet (Bender 1997, S. 10). BENDER nennt folgende Beispiele: „Kombinatorik“, „Wahrscheinlichkeitsraum“, „Die Rolle des Subjekts bei der Generierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen“, „Kontinuierliche Verteilungen“, „Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit“, „Zufallsgrößen als Funktion“ und „Anfänge des Hypothesentestens“ (Bender 1997). BENDERs Überlegungen enthalten konkrete Implikationen für den Mathematikunterricht und ermöglichen somit eine direkte Nutzung seiner Ideenbeispiele.

Katalogen nicht deutlich gemacht. Seine Ausrichtung ist eine fachdidaktische, die den Modellcharakter mathematischer Konstrukte hervorheben möchte. Dazu schlägt er folgende Ideen vor (Heitele 1976, S. 94-103).[166]

1. Normierung unseres Erwartungsgefühls (durch Präzisierung der Alltagssprache; Abbildung der Multidimensionalität der Umwelt auf das eindimensionale reelle Einheitsintervall)

2. Wahrscheinlichkeitsfeld (Zufallsexperimenten wird ein Ereignisraum und dem Feld der beobachtbaren Ereignisse ein σ-Mengenkörper zugeordnet, axiomatischer Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung)

3. Disjunkte Verknüpfung von Ereignissen – Additionsregel (aus einfachen Modellen, wie Anfangswahrscheinlichkeiten, werden kompliziertere Modelle mit neuen Wahrscheinlichkeiten entwickelt)

4. Verknüpfung von Zufallsexperimenten – Unabhängigkeit (Zusammensetzung von Modellen, bedingte Wahrscheinlichkeit)

5. Gleichverteilung und Symmetrie (Gleichverteilung als nächstliegende Arbeitshypothese, die auch ihre Adäquatheit überprüft werden muss, Symmetrie als heuristische Grundidee)

6. Kombinatorische Ideen (komplizierte Zufallsexperimente werden nach ihrer Zusammensetzung aus einfacheren Standardtypen berechenbar gemacht)

7. Urnenmodell und Simulation (zur Veranschaulichung stochastischer Begriffe, Modellbildung und Gesetzmäßigkeiten)

8. Die Idee der Zufallsvariable (als historisch gewachsenes Erklärungsmodell)

9. Aussagen zur „Großen Zahl“ (als Nahtstellen zwischen Sachebene, empirisches Gesetz, und Entwurfsebene, mathematisches Gesetz)

10. Die Idee der Stichprobenentnahme (als Reflexionsanlass für Urteile, Vorurteile und die Tragweite von Wissen überhaupt)

Alle genannten Ideen werden von der übergeordneten Idee „Sachebene und Entwurfsebene – distanzierte Rationalität“ durchzogen. Die Berücksichtigung dieser Idee soll bei den anderen Ideen deutlich machen, dass es sich um stochastische Modelle handelt, die „einer stochastischen Umwelt [...] aufzuprägen“ sind (Heitele 1976, S. 94).

HEITELE sieht, und das bestätigen seine Fundamentalen Ideen, den Stochastikunterricht als (spezifischen) Modelllieferant zur Beschreibung der Umwelt. Fundamentale Ideen dienen ihm bei der Definition dieser Modelle. Dabei bleibt er

[166] Die stichwortartigen Erklärungen in Klammern sind sinngemäß aus (Heitele 1976) entnommen.

mit seinen Ideen auf Seiten der Mathematik und fasst vor allem mathematische Begriffe, Sätze und (teilweise) Verfahren als fundamental auf. Tätigkeiten bleiben weitgehend unberücksichtigt. Das ist sicherlich zum einen HEITELEs enger Auslegung des Begriffs Fundamentaler Ideen nach BRUNER geschuldet. Zum anderen in der frühen Entstehungszeit der Arbeit, in der, wie auch schon in (Fischer 1976) herausgestellt wurde, eine häufig implizite Trennung zwischen Fundamentalen Ideen, Fundamentalen Begriffen und Tätigkeiten mit fundamentalem Charakter vorkam. Dass HEITELE im Bezug auf die Behandlung Fundamentaler Ideen im Unterricht auch Tätigkeiten im Blick hat, zeigt ein Kapitel seiner Dissertation, in dem er für jede seiner Ideen mögliche Aktivitäten von Schülern im Unterricht beschreibt. Doch auch wenn Tätigkeiten im Unterricht eine Rolle spielen, werden sie zur Betonung des Begrifflichen im Ideenkatalog ausgeblendet.

Die bei HEITELE vorherrschende Betonung des Begrifflichen ist der Ausgangspunkt für BOROVCNIKs Kritik.[167] Er nähert sich der Erarbeitung eines Katalogs Fundamentaler Ideen nicht von der Seite des fertigen Produkts Mathematik, sondern fragt, im Sinne der Offenen Mathematik FISCHERs, welche sozial-kommunikativen Momente in den Ideen stecken.

> Fundamentale Ideen sollen Begriffe und Methoden wieder mitsamt ihrer sozial-kommunikativen Komponenten erlebbar machen. Sie sind ja in der Auseinandersetzung (Kommunikation) mit „Problemen" unter ganz bestimmten Zielen, Zwecksetzungen und Interessen heraus entstanden. Fundamentale Ideen sollen aus geschlossener, in sich erstarrter Mathematik wieder Offene Mathematik machen. Mitentscheidend, ob eine Idee als fundamental eingestuft wird, ist auch, wie sehr dadurch Begriffe auf einer Metaebene strukturiert, oder besser geprägt werden, d.h. ob alternative Begriffe, ob mehrere Begriffe und ob gleichzeitig Kriterien und Metawissen für die Bewertung dieser Begriffe herausfallen.

(Borovcnik 1997, S. 22)

Es ist unmittelbar deutlich, dass HEITELEs Ideen diesen Anforderungen nicht genügen, da sie schon zu stark konkretisiert sind. Sie lassen kaum noch Raum für alternative Begriffsbildung. BOROVCNIK kritisiert daher, dass bei HEITELE häufig ein zentraler Begriff in den Vordergrund gestellt und die Rechtfertigung dieses Begriffs innerhalb einer Theorie als Ausgangspunkt für die Idee gesehen wird. „Dadurch wird leitende Idee und mathematischer Begriff umgekehrt und die Einsicht, daß zur Idee [...] eine ganz andere mathematische Begrifflichkeit" passen könnte, unmöglich (Borovcnik 1997, S. 25). Betrachtet man den von

---

[167] BOROVCNIK zitiert HEITELE mit einem Artikel von 1975 (Heitele 1975), welcher der Veröffentlichung seiner Dissertation vorausging (Borovcnik 1997, S. 23). In diesem Artikel sind die in der Dissertation ausführlich erläuterten Anlässe zur „Konstruktion von Aktivitäten zu fundamentalen stochastischen Ideen" im Unterricht, die in der Dissertation entfaltet werden, nicht erwähnt. Sie finden daher auch keinen Einzug in BOROVCNIKs Kritik.

BOROVCNIK vorgeschlagenen Ideenkatalog, wird in der Tat deutlich, dass er eine zu HEITELE umgekehrte Richtung aufweist. Vorgeschlagen werden diese Ideen in (Borovcnik 1997, S. 28 f.).

a) Ausdruck von Information über eine unsichere Sache
b) Revidieren von Information unter neuen (unterstellten) Fakten
c) Offenlegen verwendeter Information
d) Verdichten von Information
e) Präzision von Information – Variabilität
f) Repräsentativität partieller Information
g) Verbesserung der Präzision

BOROVCNIK nimmt folgende kommentierte Sortierung der Ideen HEITELEs zu seinen eigenen Ideen vor.

BOROVCNIK	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
HEITELE	1.,2.,5., 8.	4., 5.	7.	8.	8.	10.	9.

Abbildung 16 Beziehungen zwischen den Ideen von BOROVCNIK und HEITELE

Die Idee „Disjunkte Verknüpfung von Ereignissen“ (Additionsregel) und die kombinatorischen Ideen HEITELEs finden im Katalog von BOROVCNIK kein Pendant, da bei ihnen „begrifflich gar nichts neues“ herauskommt und sie daher lediglich „triviale Regeln“ darstellen (Borovcnik 1997, S. 24).

Die von BOROVCNIK vorgenommene „Richtungsänderung“ bei der Benennung seiner Ideen wird besonders an der Idee „Ausdruck von Information über eine unsichere Sache“ deutlich. Diese Idee stellt klar,

> um welche Art von Information es in der Stochastik geht, daß es um eine „Vorausschau“ in die Zukunft (oder eine Abwägung über die Vergangenheit) geht, ohne Prädiktion [...] Wahrscheinlichkeit subsumiert eine andere Art von Information als kausale oder logische Erklärungsmuster und hilft letztlich, Entscheidungen unter Unsicherheit transparent zu gestalten.
>
> (Borovcnik 1997, S. 28)

Die Vagheit dieser Idee ermöglicht die Herausarbeitung der konkreteren Ideen HEITELEs. Die Idee „Normierung unseres Erwartungsgefühls“ entsteht durch bewusste Thematisierung der „Kalibrierung“ von „Messvorgängen“, die der im Zitat beschriebenen Entscheidungsfindung dienen. Die Idee des Wahrscheinlichkeitsfeldes und der Zufallsvariable sind (mögliche) begriffliche Ausschärfung von BOROVCNIKs Idee „Ausdruck von Information über eine unsichere Sache“. Sie legt solche Begriffe zunächst noch nicht fest, sondern gibt Raum, sie vor ihrer Entstehungsgeschichte und ihrem Nutzen zu diskutierten. Dies scheint besonders mit Blick auf Anwendungsgebiete der grundraumfreien Stochastik angebracht (Borovcnik 1997, S. 24). BOROVCNIK formuliert seine Ideen demnach bewusst so, dass „die Art Information darzustellen, zu verdichten, oder überhaupt deren Präzision begrifflich zu erfassen“ durch die Ideen angeregt und in den Vordergrund gestellt wird (Borovcnik 1997, S. 27). HEITELEs Idee der Gleichverteilung und der Symmetrie stellt für BOROVCNIK neben einer begrifflichen Ausschärfung seiner ersten Idee auch einen „Ausdruck einer speziellen Information“ dar, die „viel besser als Ausdruck einer Indifferenz in Bezug auf Handlungen (etwa Wetten und akzeptierte Quoten) anzusehen“ ist (Borovcnik 1997, S. 25). Diese Indifferenz betrachtet BOROVCNIK als Spezialfall von Information über eine Situation, die zur Revision anderer Informationen führen kann. Daher fasst er diese Idee HEITELEs auch unter der Idee „Revidieren von Information unter neuen (unterstellten) Fakten“.

Die Bias HEITELE – BOROVCNIK ist aus zwei Gründen bemerkenswert. Zum einen, wie oben schon erwähnt, stellen Arbeiten zu bereichsspezifischen Fundamentalen Ideen, die einen direkten Bezug zu älteren Arbeiten mit gleichem Themengebiet herstellen, eine Seltenheit dar. Zum anderen zeigt die Analyse der beiden Konzeptionen, wie stark Fundamentale Ideen von individuellen Zielsetzungen[168] abhängen. Die Kandidaten des Ideenkatalogs von BOROVCNIK sind wesentlich weiter gefasst als die sehr konkreten Ideen HEITELEs. Dadurch bieten sie beispielsweise Lehrern die Möglichkeit zur Diskussion und Reflexion von Begriffsbildungen, zu deren Bewertung und Schwerpunktsetzung im Unterricht.[169] Genau zu diesen Prozessen wollte BOROVCNIK ja auch mit seinem Ideenkatalog anregen. Die Vagheit und Weite des Katalogs ist eine Voraussetzung dafür, was von HEITELEs Ideen nicht geliefert wird. In der Vagheit der Ideen liegt allerdings auch eine Gefahr dieses Katalogs. Er könnte als zu vage für einen Einsatz im Unterricht angesehen werden. Die Tatsache, dass jegliche Begrifflichkeit und auch mathematische Inhalte erst noch aus den Ideen konkretisiert werden müssen, macht seinen Sinn zur Orientierung fraglich. HEITELEs Katalog liefert durch seine begrifflich und inhaltlich ausgeschärften Ideen wesentlich konkretere Orientierungspunkte, auch wenn diese zunächst nur auf inhaltlicher Ebene liegen. HEITELE liefert damit eine Übersicht der wesentlichen Begriffe und Modellbildungen im Bereich Stochastik. Seine Ideen lassen allerdings keinen Raum für die von BOROVCNIK fokussierten Aneignungsprozesse.

Die Tatsache, dass sich die Fundamentalität von Ideen einer allgemein verbindlichen Explikation zu entziehen scheint, wird im Bereich der Informatik noch

[168] Dies kann beispielsweise die Integration oder Etablierung eines Schulfaches sein, wie die Diskussion Fundamentaler Ideen der Informatik zeigt (s.u.).

[169] Nach einer sicherlich notwendigen Vorauswahl und Vorstrukturierung von Seiten des Lehrers sollen Fundamentale Ideen den Schülern Anlässe zur Überwindung der Paradoxie des Verstehens helfen, in dem sie die beiden Seiten dieser Paradoxie, die Einzelheiten und das „Ganze“, überbrücken (Borovcnik 1997, S. 18).

deutlicher als in der Mathematik.[170] Wählte BOROVCNIK beispielsweise einen auch begrifflich anderen Katalog, um sich von HEITELE zu distanzieren, werden in der Informatikdidaktik sogar die gleichen Fundamentalen Ideen verwendet, um verschiedene Positionen deutlich zu machen. Oberflächlich betrachtet scheint eine Art „common sense“ über die Fundamentalen Ideen dieser Fachwissenschaft zu herrschen. In den wichtigsten Beiträgen zu dieser Thematik werden die Ideen des Algorithmus und der Modularisierung als fundamental herausgestellt. Allerdings besteht keine Einigkeit mehr darin, was genau unter diesen Ideen zu verstehen ist. Das zeigt sich daran, dass verschiedene Autoren die dem Bezeichner nach gleichen Ideen zur Legitimierung entgegengesetzter Forschungspositionen nutzen. Für jede dieser Forschungspositionen soll nun ein Vertreter mit seiner Konzeption Fundamentaler Ideen vorgestellt werden.[171]

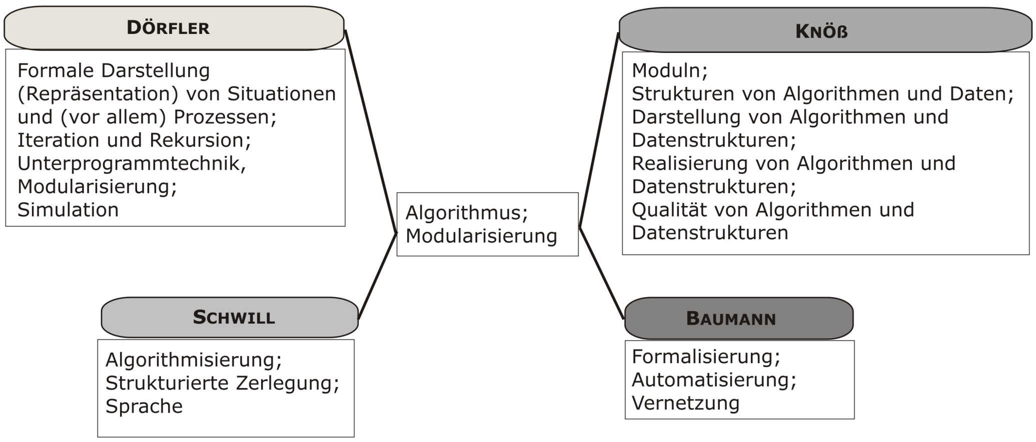


Abbildung 17 Kataloge Fundamentaler Ideen der Informatik. Zusammengestellt aus (Dörfler 1984), (Knöß 1989), (Baumann 1996) und (Schwill 1993).

Für die Entwicklung Fundamentaler Ideen der Informatik lassen sich zwei Forschungspositionen herausarbeiten: Entweder werden Fundamentale Ideen der Informatik aus dem Blickwinkel des Mathematikunterrichts gesehen und möglichst in diesen integriert (die Arbeiten von DÖRFLER und PETRA KNÖß sind Beispiele für solche Versuche).[172] Oder, um ein eigenständiges Schulfach Informatik

---

[170] Vgl. dazu auch (von der Bank 2016).

[171] Es handelt sich um die Arbeit von DÖRFLER, in der eine Integration informatischer Inhalte in den Mathematikunterricht gefordert wird, und um die Arbeiten von SCHWILL, dem es um eine bewusste Abgrenzung zwischen den Wissenschaften geht, um ein eigenständiges Schulfach Informatik zu etablieren.

[172] Zu beachten ist, dass DÖRFLER ein eigeständiges Fach Informatik keinesfalls ausschließt. Er möchte allerdings zunächst „Berührpunkte“ des Mathematik- und Informatikunterrichts aufzeigen und plädiert daher für eine Behandlung informatischer Ideen im Mathematikunterricht. KNÖß dagegen, deren Überlegungen auf den Primarbereich gerichtet sind, begründet ihre Integration informatischer Inhalte in den Mathematikunterricht damit, dass „in absehbarer Zeit niemand die Einführung eines eigenständigen Faches Informatik in der Primarstufe befürworten [wird]“ (Knöß 1989, S. 25-26). Sie rückt einen fächerübergreifenden Unterricht in den Mittelpunkt, da „die Einführung eines weiteren Faches im ohnehin schon stark in Fächer zerklüfteten Grundschulbereich kaum wünschenswert“ erscheint (Knöß 1989, S. 26).

zu begründen, wird ein Katalog Fundamentaler Ideen der Informatik erarbeitet, der möglichst wenig mit den Ideen der Mathematik gemeinsam hat (vgl. Schwill 1993).[173] Gemeinsam ist den oben genannten Arbeiten der Informatikdidaktik, dass sie zur Klärung der Bedeutung des Begriffs „Fundamentale Idee" auf Arbeiten aus der Mathematikdidaktik zurückgreifen. DÖRFLER und RÜDIGER BAUMANN gehen von einem intuitiven Begriffsverständnis aus, welches nicht weiter vertieft wird. KNÖß legt ihrer Arbeit bewusst die sehr vage Begriffsexplikation BRUNERs und die drei Kriterien von BENDER/SCHREIBER zugrunde, da in der Vagheit der Fundamentalen Ideen gerade ihr Potential steckt (Knöß 1989, S. 25). SCHWILL führt die Kriterienkataloge von BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER zusammen und nutzt die resultierende Theorie zur Erschließung eines „vollständigen Katalogs fundamentaler Ideen der Informatik" (Schubert/Schwill 2004, S. 95). Die drei Ideen „Algorithmisierung", „Strukturierte Zerlegung" und „Sprache" bilden dabei die „Masterideen" (Schubert/Schwill 2004, S. 96), die in Ideenbäumen mit letztendlich 60 Fundamentalen Ideen der Informatik ausdifferenziert werden.[174] Die Arbeiten der Informatikdidaktik tragen insgesamt wenig(er) zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen bei. Ihre Stärke liegt hingegen in der prototypischen Begriffsbildung. In den jeweiligen Arbeiten werden Ideenkataloge nicht nur ausführlich vorgestellt und ihre möglichen Umsetzungen im Un-

---

[173] Zur Kritik an den Trennungsversuchen von Informatik- und Mathematikunterricht mittels ihrer Fundamentalen Ideen und speziell zum Ansatz von SCHWILL vgl. (Bender 1994, S. 8-17, speziell S. 12-13) und die weiter unten dargestellten Überlegungen WILFRIED HERGETs in der vorliegenden Arbeit.

[174] Der Aufbau des Katalogs von SCHWILL wurde auch von HERGET bei seinen Überlegungen zu einenden und trennenden Elementen von Mathematik und Informatik thematisiert. Dort heißt es: „Der umfangreiche Artikel von Schwill verdient Anerkennung; er bietet viele gute Ansätze, um die Diskussion über zentrale Inhalte der Informatik – als Wissenschaft und als Schulfach – anzuregen, zu strukturieren und zu vertiefen. Allerdings ist hier wohl doch noch einige Arbeit nötig. Die drei Hauptideen – Algorithmus, strukturierte Zerlegung, Sprache – decken m.E. noch nicht das ganze Spektrum ab, und insbesondere der dritte Punkt unterscheidet sich vom Wesen her doch sehr von den ersten beiden. Betrachtet man dann die feinere Aufgliederung, so geht einerseits der Vorteil der knappen, übersichtlichen Struktur verloren, andererseits bleibt der Wunsch nach einer noch ausgewogeneren, umfassenderen Darstellung bestehen" (Herget 1994, S. 36). Diese Kritik am SCHWILLschen Katalog blieb in der Informatikdidaktik nicht unbemerkt. So wendet ECKARD MODROW in seiner Dissertation, in der er Fundamentale Ideen der theoretischen und technischen Informatik benennt, ein, dass wenn „fundamentale Ideen nur als ein Aspekt zur Auswahl von Unterrichtsinhalten beitragen, dann brauchen wir von diesen nicht gleich alles zu fordern, was insgesamt für diesen Ausleseprozess von Bedeutung ist" (Modrow 2002, S. 43). HERGETs Aussage und MODROWs Reaktion spiegeln einen zentralen Diskussionspunkt im Umfeld Fundamentaler Ideen wider: Wie abstrakt bzw. konkret müssen und dürfen Fundamentale Ideen sein, um einerseits Orientierungspunkte zu liefern und andererseits individuelle Aneignung zu zulassen?

terricht beschrieben, sondern die Ideen werden aus historischen Entwicklungen der Informatik hergeleitet und bewertet.[175]

In (Dörfler 1984) wurde, angeregt durch das Eindringen von „Informations- und Kommunikationstechnologien in alle Lebensbereiche“, schon vor drei Jahrzehnten gefordert, diese Entwicklung auch an allgemeinbildenden Schulen zu berücksichtigen. Der Autor sieht im Mathematikunterricht Potential zur Bewältigung dieser Herausforderung.

> Meine Position ist die, daß der Mathematikunterricht ohne einschneidende inhaltliche Veränderungen gewisse, heute in der durch die Charakteristika des Instruments Computer relevant gewordene Denkformen und Mittel des Denkens genauso entwickeln kann. Ich möchte diese kognitiven Strategien auch „fundamentale Ideen“ der Informatik nennen, weil sie dort erstmals bewußt und gezielt zum Gegenstand und Mittel der Forschung und Entwicklung wurden.
>
> (Dörfler 1984, S. 21)

Obwohl also diese Ideen im Mathematikunterricht aufgehoben sein können, bezeichnet DÖRFLER sie bewusst als informatische Ideen, da „es dies alles [zwar] schon lange in der Mathematik gibt, aber es bleibt dort „stilles Hilfsmittel“ und wurde nicht bewußt dargestellt und untersucht“ (Dörfler 1984, S. 21). Durch eine erheblich verbesserte Computerleistung und die daraus resultierende Entwicklung der Informatik als eigenständige Fachwissenschaft bekommen diese zunächst mathematischen Ideen neue informatische Bedeutungen. Sie können aber, unter Berücksichtigung ihrer erweiterten Bedeutung, im Mathematikunterricht behandelt werden. Allerdings scheint DÖRFLERs Umschreibung von Fundamentalen Ideen als „kognitive Strategie“ zu kurz, da einige der genannten Ideen streng genommen nicht nur Strategien sind. Beispielsweise kann die Idee „formale Darstellung“ eine Strategie sein, dann müsste sie aber eher mit „formales Darstellen“ bezeichnet werden. „Formale Darstellung“ kann aber auch ein Objekt sein, eben die formale Darstellung einer Situation. DÖRFLERs Ideen umfassen also neben Strategien auch Objekte. Diese Unschärfe der genannten Ideen ist dem von DÖRFLER gewollten intuitiven Zugang zum Begriff „Fundamentale Idee“ geschuldet.

Als Synthese der Kriterienkataloge von SCHREIBER und SCHWEIGER ist die Theorie Fundamentaler Ideen SCHWILLs zu sehen. Er führt die Definitionen beider Autoren zusammen und beschreibt Fundamentale Ideen als „Denk-, Handlungs-,

---

[175] In Arbeiten der Mathematikdidaktik wird meist auf eine Herleitung (und damit Begründung) der Ideenkataloge verzichtet. Zwei der seltenen Arbeiten, die jede Idee ihrer Ideenkataloge an den von ihnen entwickelten Kriterien messen, sind (Bender/SCHREIBER 1985) und (Schweiger 2010). Im Bereich der Arbeiten, die eine mathematische Idee als fundamental herausarbeiten, seien HISCHER, der sich vorrangig mit der Idee „Mittelwertbildung“ beschäftigt (Hischer 1998), und SCHUPP, der die Fundamentalität des „Optimierens“ nachweist (Schupp 1992), mit überzeugender Herleitung und Begründung ihrer Ideen genannt.

Beschreibungs- und Erklärungsschemata“ (Schwill 1993, S. 8). Zudem führt er für die einzelnen Kriterien SCHWEIGERs die Bezeichner „Zeitkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 1.), „Vertikalkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 2.) und „Sinnkriterium“ (bei SCHWEIGER Punkt 5.) ein. In Anlehnung an SCHREIBERs Forderung nach „Fülle“ einer Fundamentalen Idee fügt SCHWILL SCHWEIGERs Katalog das „Horizontalkriterium“ hinzu, welches sicherstellen soll, dass eine Fundamentale Idee in verschiedenen Gebieten der Mathematik Anwendungen besitzt (Schwill 1993, S. 7). Im Unterschied zu HISCHER unterscheidet SCHWILL die genannten Kriterien nicht nach normativem bzw. deskriptivem Charakter, sondern nach ihrer Notwendigkeit für die Begriffe „fundamental“ bzw. „Idee“. Demnach sind Horizontal- und Vertikalkriterium Bedingungen für die Fundamentalität, während Zeit- und Sinnkriterium Bedingungen sind, damit von einer Idee gesprochen werden kann (Schwill 1993, S. 8). Um die philosophischen Überlegungen von KANT zum Ideenbegriff zu berücksichtigen, fügt SCHWILL in einer späteren Arbeit seinem Katalog das „Zielkriterium“ hinzu (Schubert/Schwill 2004, S. 85). Es beinhaltet, dass eine Idee „zur Annäherung an eine gewisse idealisierte Zielvorstellung dient, die jedoch faktisch möglicherweise unerreichbar ist“ (Schubert/Schwill 2004, S. 85). Eine Orientierung an Fundamentalen Ideen kann demnach dazu dienen, sich dieser „idealisierten Zielvorstellung“ anzunähern.[176]

Die Diskussionen Fundamentaler Ideen der Mathematik und Informatik haben sich gegenseitig beeinflusst. Wurde das Konzept für die Informatik zunächst aus der mathematikdidaktischen Diskussion heraus fruchtbar gemacht, so wirkt beispielsweise die Theorie SCHWILLs auf viele Arbeiten zur Mathematik zurück. Besonders neuere Arbeiten greifen den Kriterienkatalog SCHWILLs für ihre Theorien auf.[177] HERGET macht darüberhinaus deutlich, dass zwischen den Fundamentalen Ideen der Informatik, wie sie beispielsweise von KNÖß benannt werden (Modularisieren, Strukturieren sowie Darstellen, Realisieren, Beurteilen von Algorithmen), und den von Tietze/Klika/Wolpers benannten Grundtätigkeiten im Mathematikunterricht (Mathematisieren, Argumentieren und Begründen, Heuristisches Arbeiten, Lokales und Globales Ordnen) Übereinstimmungen existieren (Herget 1994, S. 36).[178]

---

[176] Dass der deutsche Begriff „Idee“ in Anlehnung an KANT keine günstige Übersetzung des ursprünglich englischen Begriffs „idea“ ist, hat schon FÜHRER herausgestellt (vgl. Kapitel 3.5.1). In Kapitel 4.1 wird darauf zurückgekommen.

[177] Dabei bleibt allerdings das „Zielkriterium“ meist unberücksichtigt (Wiernicki-Krips 2014). Ein Indiz dafür, dass dieses Kriterium den Katalog für eine Anwendung auf mathematische Inhalte sperrt.

[178] Dies überrascht nicht, bedenkt man, dass KNÖß für ihrem Katalog Fundamentaler Ideen bewusst Anknüpfungspunkte im Mathematikunterricht wählt, da sie kein eigenständiges Fach Informatik etablieren möchte. Unberührt davon bleibt HERGETs Feststellung, dass anhand Fundamentaler Ideen solche Berührpunkte von Mathematik und Informatik sichtbar sind.

Auch auf bundesdeutscher Ebene gibt es Parallelen in den Bildungsstandards der Fächer Mathematik und Informatik.[179] Ähnlich wie für den Mathematikunterricht existieren mit der Empfehlung „Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule“ des Arbeitskreises „Bildungsstandards“ der GESELLSCHAFT FÜR INFORMATIK (GfI) seit 2008 auch für den Informatikunterricht ausformulierte Kompetenzen. Sie sind in

- Prozessbereiche: Modellieren und Implementieren; Begründen und Bewerten; Strukturieren und Vernetzen; Kommunizieren und Kooperieren; Darstellen und Interpretieren und
- Inhaltsbereiche: Information und Daten; Algorithmen; Sprache und Automaten; Informatiksysteme; Informatik, Mensch und Gesellschaft

gegliedert (GfI 2008, S. 11).

Die Ähnlichkeiten zwischen allgemeinen Kompetenzen der KMK und den Prozessbereichen des GFI-Vorschlags sind nicht zu übersehen. Allerdings verweisen Prozessideen wie beispielsweise „Bewerten“ auf ihre Bedeutsamkeit auf einer Meta-Ebene. Diese Eigenschaft ist in den allgemeinen Kompetenzen der KMK nicht so deutlich. Auf der Inhaltsseite lassen sich fachbedingte Unterschiede ausmachen, wobei auch hier (wie bei den Fundamentalen Ideen der Mathematik bzw. Informatik) deutlich wird, dass dem Algorithmus zentrale Bedeutung im Mathematik- und Informatikunterricht zukommt.[180]

Der Inhaltsbereich „Informatik, Mensch und Gesellschaft“, der soziale und gesellschaftliche Aspekte von Informatiksystemen und den verantwortungsvollen Umgang mit diesen umfasst (GfI 2008, S. 13), findet kein gleichwertiges Pendant in den Bildungsstandards der KMK. In der Informatikdidaktik hat eine Thematisierung von gesellschaftlichen Bedingungen und Auswirkungen der Informatik Tradition. Schon der 1976 vom Fakultätentag Informatik verabschiedete Fächerkatalog gliedert Informatik in sechs Teilbereiche, unter denen „Gesellschaftliche Bezüge der Informatik“ einen Bereich bilden (nach (Baumann 1996, S. 83)).

Auf eine letzte bereichsspezifische Ausarbeitung Fundamentaler Ideen soll noch eingegangen werden. HUMENBERGER und REICHEL formulieren Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik, um mit ihrer Hilfe gewisse Einstellungen zum Mathematiktreiben deutlich zu machen (Humenberger/Reichel 1995).[181] Die

---

[179] Für die Informatik liegt bislang nur ein Vorschlag für Bildungsstandards der Gesellschaft für Informatik vor. Dieser ist bundespolitisch (noch) nicht bindend.

[180] Während in (KMK 2003) und (KMK 2004a) die Idee „Algorithmus“ noch unter der Leitidee „Zahl“ gefasst ist, betont die Leitidee „Algorithmus und Zahl“ in (KMK 2012) die Bedeutung des Algorithmus.

[181] Die wichtige Vorarbeit von REICHEL (Reichel 1994) wird in der vorliegenden Arbeit an einigen Stellen ebenfalls hinzugezogen.

Autoren plädieren für eine verstärkte Anwendungsorientierung des Mathematikunterrichts.

> Wir verstehen unter *Angewandter Mathematik* nicht einen Zweig der Mathematik, dem die verschiedenen Inhalte in eindeutiger Weise zugeordnet werden können (oder in alternativer Weise eben der *Reinen* Mathematik), sondern vielmehr eine Haltung, eine Einstellung, eine Sichtweise bzw. eine Betreibungsart von Mathematik, die dadurch gekennzeichnet ist, daß Theorien nicht nur Selbstzweck sind, sondern *auch* zur Lösung von außermathematisch gestellten Problemen beitragen sollen, daß Mathematisierung von Realsituationen (Modelle), Näherungsverfahren (-lösungen), Begründungen, Interpretationen (Sprache!), Vernetzungen, numerische und stochastische Aspekte, kreatives und eigenständiges Arbeiten und alle im Folgenden beschriebenen Fundamentalen Ideen eine gefestigte und wichtige Stellung haben.

(Humenberger/Reichel 1995, S. 16)

Fundamentale Ideen schaffen demnach eine „Aussöhnung" zwischen den Polen reiner und angewandter Mathematik. Die Autoren fassen unter ihnen „nicht nur gewisse mathematische Methoden und Begriffsbildungen [...], sondern auch spezifische Tätigkeiten und Fähigkeiten, die man als typisch für die Mathematik oder den Mathematikunterricht bezeichnen kann" (Reichel 1994, S. 170). Mit dieser begrifflichen Öffnung knüpfen sie an die Konzeptionen JUNGs, VOLLRATHs und FISCHERs an, betonen allerdings, dass ihre Prototypen wesentlich konkreter als beispielsweise die von JUNG sind. Sie unterscheiden dabei zwischen abstrakten Fundmentalen Ideen, die „a posteriori" für die Fachwissenschaft hilfreich sind, und konkreteren Ideen, die „a priori" zum Lernen von Mathematik geeignet sind (Humenberger/Reichel 1995, S. 29). Zu letztgenannter Art Fundamentaler Ideen zählen HUMENBERGER und REICHEL folgende Beispiele (Humenberger/Reichel 1995, S. 30).[182]

- Modelle, Sprache und Übersetzungsvorgänge
- Näherungsverfahren, Näherungswerte und Fehlerkontrolle
- Stochastik
- Optimieren
- Algorithmus
- Darstellen von Situationen und einer „mathematischen Brille" - Heuristik
- Vernetzen mathematischer Sachverhalte - „Projekte" und „Facharbeiten"

Seitens der prototypischen Begriffsbildung differieren die genannten Fundamentalen Ideen stark im Grad ihrer Weite und Abstraktion. Dies ist von den Autoren

[182] In (Reichel 1994) finden sich zum Teil noch andere Fundamentale Ideen wie „Beschreiben von Lösungswegen" oder „Arbeiten mit Näherungswerten" (Reichel 1994, S. 173). Diese wurden in der Zusammenarbeit mit HUMENBERGER den anderen Ideen untergeordnet.

gewollt, da es ihnen „nicht um Systematik ging“ und somit „keine bestimmte Ordnung eingehalten“ wurde (Reichel 1994, S. 176). Die logische Begriffsbildung ist für die vorliegende Arbeit allerdings sehr fruchtbar. Die Autoren verknüpfen mit Fundamentalen Ideen eine ganze Reihe emotionaler und im weitesten Sinne „Nichtkognitiver“ Aspekte. Fundamentale Ideen dienen der Anregung von Phantasie beim Problemlösen (Reichel 1994, S. 169) und sollen „Freude beim Anwenden von Mathematik“ fördern (Humenberger/Reichel 1995, S. 28). Zudem sollen sie gewisse Einstellungen widerspiegeln, die typisch für Mathematik und Mathematikbetreiben sind. Diese Erweiterungen des Begriffs der Fundamentalen Ideen um typische Einstellungen von Mathematikern wird in Kapitel 4 erneut aufgegriffen, um die dieser Arbeit zugrundeliegende Definition Fundamentaler Ideen zu formulieren.

Den Abschluss der vorliegenden Analyse der historischen Entwicklung Fundamentaler Ideen bildet die Diskussion einer Dissertation zur Thematik. In (Vohns 2007) werden Fundamentale Ideen zur Analyse von Unterrichtsinhalten genutzt. VOHNS betont darüber hinaus explizit einen Vernetzungsgedanken bei seinem Kriterienkatalog für Fundamentale Ideen und weist gleichzeitig auf deren bildungstheoretische Bedeutsamkeit hin. Diese Akzentuierung stellt eine Weiterentwicklung der Thematik Fundamentaler Ideen zur unterrichtlichen Nutzung dar.

3.5.4 Ein analytischer Zugriff auf Fundamentale Ideen

Eine der in letzter Zeit erschienen Monografien zum Thema „Fundamentale Ideen“ stammt von VOHNS (Vohns 2007).[183] Seine Intention ist, anhand „Grundlegender Ideen“[184] Unterrichtsinhalte mittels einer didaktisch orientierten Sachanalyse auf ihren stofflichen Kern zu untersuchen. Dabei interpretiert er Grundlegende Ideen als Metakonzepte, denen lokale Subkonzepte zugeordnet sind (Vohns 2007, S. 94 ff.). Metakonzepte fasst VOHNS als „Bündel spezifischer Handlungen, Strategien, Techniken und Zielvorstellungen“ auf (Vohns 2007, S. 87). Im Gegensatz zu früheren Arbeiten von SCHREIBER bzw. SCHWEIGER gibt VOHNS einen eher offenen Kriterienkatalog an.

> Eine grundlegende Idee ist mathematisch, bildungstheoretisch und pragmatisch bedeutsam, d.h., sie gibt partiell Aufschluss über Strukturen und Zusammenhänge innerhalb der Mathematik, zwischen Mathematik und „dem Rest der Welt“, zwi-

[183] Die Dissertation wurde 2007 veröffentlicht. Seitdem ist neben SCHWEIGERs Zusammenfassung des Forschungsstands (Schweiger 2010) und SCHREIBERs persönlichen Bemerkungen zur Etablierung Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht keine größere theoriebildende Arbeit zur Thematik der Fundamentalen Ideen erschienen.

[184] Der Bezeichner „Grundlegend“ wird gewählt, da er „die Vorstellung einer Reichhaltigkeit bzw. Bedeutsamkeit“ einschließt. Diese wird innermathematisch, wissenschaftshistorisch und außermathematisch anwendungsbezogen verstanden (Vohns 2007, S. 87).

> schen Mathematik und ihren möglichen oder gewünschten Bildungswirkungen, zwischen mathematischen Inhalten und ihrer Lernbarkeit.
>
> (Vohns 2007, S. 3)

Die Bedeutsamkeit einer Idee sieht er zweifach. Zum einen sind Grundlegende Ideen im alltäglichen Denken bedeutsam, da sie auf einer vorwissenschaftlichen Ebene nachweisbar sind. Zum andern sind sie innerhalb der Mathematik nachweisbar und erhalten somit Bedeutung im Bereich des fachwissenschaftlichen Denkens; ob eine Idee bedeutsam ist, hängt davon ab, ob sie „auf der Basis lokaler Subkonzepte“ hilfreich ist, neues Wissen zu erwerben und ob sie Möglichkeiten zur Reflexion über Mathematik bietet (Vohns 2007, S. 88). Mit diesen lokalen Subkonzepten fasst VOHNS zwei Komponenten zusammen. Zum einen versteht er darunter diverse Konzeptionen von Grundvorstellungen[185] und zum anderen heuristische Strategien. Die Aufgabe Grundlegender Ideen besteht dann darin, verschiedene Subkonzepte zu bündeln und somit Orientierung zu schaffen. Für VOHNS dienen Grundlegende Ideen der Vernetzung von mathematischen Inhalten untereinander, aber auch von Mathematik und Wirklichkeit. Besonders betont er Vernetzungen zwischen Inhalten und Bildungszielen des Schulfaches Mathematik.

VOHNS sieht

> die Weiterentwicklung grundlegender Ideen als fachdidaktischer Kategorie […] forschungsmethodisch darin, diese – ohne ihren normativen Charakter aufzugeben oder zu missachten – vor allem als Leitkategorien der Analyse der Unterrichtsinhalte aufzufassen und erst in zweiter Linie als Leitkategorien der unterrichtspraktischen Ausgestaltung.
>
> (Vohns 2007, S. 68)

Dieser Perspektivenwechsel, der sich aus dem analytischen Zugriff auf Grundlegende Ideen ergibt, ermöglicht eine Untersuchung von Unterrichtsgegenständen auf die ihnen zugrunde liegenden Ideen. Dadurch können Beziehungen zwischen „lokalen Subkonzepten“ und „Metakonzepten“ (Grundlegenden Ideen) deutlich werden (Vohns 2007, S. 89). VOHNS Analysen richten sich also auf das, was BRUNER missverständlich mit Struktur eines Lerngegenstandes bezeichnet hat. Der Unterschied in ihren Herangehensweisen liegt darin, dass VOHNS als Basis konkrete Unterrichtsgegenstände wählt und nicht von übergeordneten Ideen ausgeht, also die Richtung invertiert.

Dieses Vorgehen setzt einen (konsensfähigen) Katalog Grundlegender Ideen voraus. Als Grundlage nutzt VOHNS Ideenkataloge anderer Autoren (Vohns 2007,

---

[185] Von VOHNS genannt werden die Grundvorstellungskonzepte von VOM HOFE, MALLE, BENDER und FISCHBEIN (Vohns 2007, S. 95-100).

S. 89).[186] Er unterscheidet dabei zwei Ebenen Grundlegender Ideen. Auf einer übergeordneten allgemeineren Ebene wählt er zunächst „Ankerpunkte“, die ihm ein Suchfeld für speziellere Ideen eröffnen (Vohns 2007, S. 90). Diese Ankerpunkte sollen eher mathematische Objekte sein. Auf der zweiten Ebene nennt er dann speziellere Ideen, die nun eher mathematischen Tätigkeiten entsprechen sollen.

- *Ankerpunkte*: Zahl, Messen, Strukturieren in Ebene und Raum, funktionales Denken.
- *Spezielle Ideen*: Optimalität, Symmetrie, Ideation und Abstraktion, Exhaustion und Approximation, Algorithmus, Invarianz, Induktion, Repräsentation.[187]

VOHNS ist die begriffliche Heterogenität seines Katalogs bewusst und er begründet,

> ich [habe] bewusst keine einheitliche Formulierung der Ideen als Begriffe oder Handlungen angestrebt. Eine grundlegende Idee zu sein, beinhaltet für mich stets begriffliche, handlungsmäßige, technisch-methodische und heuristisch-strategische Elemente […]
>
> (Vohns 2007, S. 91)

Zudem ist ihm die Interpretation der Ankerpunkte als Schnittstellen und deren Vernetzung wichtig, damit sie nicht zu oberflächlich als Überschriften von Themengebieten erscheinen (Vohns 2007, S. 92).[188]

In einer späteren Arbeit präzisiert VOHNS sein Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen weiter. Dazu führt er neue Kategorien von Ideen ein. Er spricht von „mathematischen Ideen“ als Oberbegriff, zu denen „fundamentale Ideen“ und „lokale Ideen“ gehören (Vohns 2010a, S. 231). Mathematische Idee sieht VOHNS, den Überlegungen VOLLRATHs folgend, als

> einen entscheidenden Gedanken, den man hinter gewissen Strategien, Techniken, Denk- und Handlungsmustern auszumachen versucht, den Versuch einer Antwort auf die Frage nach dem springenden Punkt, dem Verstehen ermöglichenden Kern einer Sache.
>
> (Vohns 2010a, S. 230)

[186] Speziell (Heymann 1996), (KMK, 2003), (Schreiber 1979) und (Führer 1997).

[187] VOHNS weist darauf hin, dass keine Ideen genannt werden, die spezifisch für das Gebiet Stochastik wären, da stochastische Themen in seinen Analysebeispielen unberücksichtigt bleiben (Vohns 2007, S. 90 f.).

[188] VOHNS Überlegungen bzgl. Vernetzungen zwischen Fundamentalen Ideen und deren Nutzung im Bereich von Metakonzepten bilden eine Basis für weitere Überlegungen der vorliegenden Arbeit. Sie spielen eine wichtige Rolle bei der Weiterentwicklung des Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen und bei Überlegungen zu deren unterrichtlicher Umsetzung, vgl. Kapitel 6.1.

Mit dieser Umschreibung wird die Unschärfe des Begriffs „Idee“ auf die des „springenden Punktes“ übertragen. Für VOHNS ist dies dennoch eine Präzisierung des Konzepts der mathematischen Idee, da somit eine klarere Zielvorstellung mit Ideen verbunden wird. Sie sollen bei der Beantwortung der Fragen „Warum funktioniert das ... so wie es funktioniert ... und was macht es mit den Dingen ... und wozu ist das ganze gut?“ helfen (Vohns 2010a, S. 230). Diese Fragen zielen auf den Verstehen ermöglichenden Kern mathematischer Inhalte ab. Genau für diese Ausrichtung führt VOHNS die „lokalen Ideen“ ein, die „deutlich unterhalb der Ebene meist Curriculum übergreifend gedachter, fundamentaler Ideen angesiedelt“ sind und für einzelne Begriffe, Verfahren und Darstellungsweisen von Bedeutung sind (Vohns 2010a, S. 230). Hier wird also das, was üblicherweise als Grundvorstellungen oder Metakonzepte diskutiert wird (und in seiner Dissertation auch noch so von VOHNS bezeichnet wurde), gefasst. Den Vorteil dieser neuen Kategorie gegenüber den klassischen Fundamentalen Ideen sieht VOHNS darin, dass für solche lokalen Ideen schon länger ihre konstruktiven und operativen Funktionen und ihre Bedeutung bei der individuellen Aneignung von Inhalten diskutiert werden.

Wichtig im Prozess dieser individuellen Aneignung sieht VOHNS die bewusste Erfahrung von Kohärenzen und Differenzen.

> Solche [mathematischen] Ideen sollten insbesondere geeignet erscheinen, Lehrer(innen) ebenso wie Schüler(innen) zum Nachdenken über Kohärenzen und Differenzen anzuregen
>
> zwischen bereits Gelerntem (Gelehrtem) und noch zu Lernendem (Lehrendem),
>
> zwischen implizit Genutztem / Geahntem und explizit Thematisiertem,
>
> zwischen alltäglichen und mathematischen Denk- und Handlungsweisen.
>
> (Vohns 2010a, S. 232)

Anhand unterschiedlicher Grundvorstellungskonzeptionen[189] zeigt VOHNS die Bedeutung Lokaler Ideen zur Erfahrung der drei genannten Punkte auf. Sie können also einen Betrag zur Sinnkonstitution im Unterricht leisten.

In bisherige Konzeptionen Fundamentaler Ideen sieht VOHNS einige Probleme. Zunächst hält er fest, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen Lokalen und Fundamentalen Ideen in ihrer Reichweite besteht. Während Lokale Ideen nach dem „springenden Punkt“ eines Begriffs oder einer Handlung fragen, müssen Fundamentale Ideen den gemeinsamen Kern eines ganzen Bündels von Konzepten, Begriffen und Handlungen fassen. Damit liegt der Suche nach Fundamentalen Ideen die „Vorstellung eines im Wesentlichen kohärenten mathematischen

---

[189] Es werden beispielsweise die Konzeptionen von RUDOLF VOM HOFE, PREDIGER und KATJA LENGNINK genannt.

Wissens“ zugrunde (Vohns 2010a, S. 239). Diese Kohärenz liegt für VOHNS nicht in der Sache Mathematik, sondern wird vom „Denkkollektiv“ der forschenden Mathematiker herbeigeführt (Vohns 2010a, S. 239). Er kritisiert, dass diese bewusst geschaffene Kohärenz dem schulischen Unterricht durch die Formulierung von Fundamentalen Ideen gewissermaßen „von oben“ aufgesetzt wird. Als Mathematische Ideen in obigem Sinne sollen Fundamentale Ideen den Prozess des Verstehens der Schüler begünstigen. Da dies jedoch ein individueller Prozess ist, kann nicht unbedingt im Vorfeld festgelegt werden, welche Ideen ihn begünstigen. VOHNS fordert daher, dass sich erst im Unterricht entscheiden darf, welche Ideen fundamental sind und zum „springenden Punkt“ vordringen lassen (Vohns 2010a, S. 243).[190] Damit sind Fundamentale Ideen mehr als nur Stoffauswahlkriterien. Sie werden zu Reflexionsanlässen im Unterricht für Lehrer und Schüler. Daraus ergibt sich allerdings, dass Fundamentale Ideen auch mit Schülern bewusst thematisiert werden müssen. Hier sieht VOHNS eine Schwäche in der bisherigen Forschung, in der er die Neigung zur „Explikation der fundamentalen Ideen im Unterricht einzufordern“ als rückläufig herausstellt (Vohns 2010a, S. 242).[191] Als Konsequenz zieht VOHNS nun, dass Fundamentale Ideen im Unterricht genutzt werden sollen, um Kohärenzen oder Differenzen (als Brüche in der Beschäftigung mit Mathematik) für Lehrer und Schüler erfahrbar zu machen. Die Aufgabe der Fachdidaktik sieht er im Erstellen eines Katalogs Fundamentaler Ideen, der solche Erfahrungen ermöglicht. Wichtig ist ihm, dass dieser Katalog nur Vorschlagscharakter hat und die Ideen erst im Klassenzimmer auf ihre Wirksamkeit geprüft werden können und müssen.

Neben der unterrichtlichen Umsetzung, auf die VOHNS nicht näher eingeht, birgt ein solches Vorgehen weitere Schwierigkeiten. Wird eine Idee erst durch ihren Nutzen beim Nachdenken über Kohärenz und Differenz fundamental, so bekommt sie einen sehr subjektiven Charakter. Damit drohen Fundamentale Ideen allerdings beliebig zu werden und somit ihre Orientierungsfunktion zu verlieren. Zudem stellt VOHNS richtigerweise fest, dass die Unwirksamkeit einer Idee im Mathematikunterricht nicht impliziert, dass sie nicht fundamental ist.

> Wenn ein bestimmtes als fundamentale Idee angenommenes Metakonzept im Kontext einer unterrichtlichen Umsetzung nicht als solches wahrgenommen wird, blie-

[190] In diesem und anderen Punkten folgt VOHNS einer Argumentation FISCHERs, der schon 1984 dafür plädiert hatte, Sinnfragen, unter denen er auch die Fragen nach Fundamentalen Ideen fasste, im Unterricht zu diskutieren. Er brachte das damals auf die Formel „letzte Instanz muß das Klassenzimmer bleiben“ (Fischer 1984, S. 69).

[191] VOHNS scheint zu übersehen, dass in den wichtigsten Arbeiten zum Thema stets die bewusste Thematisierung Fundamentaler Ideen eine Rolle spielt (vgl. Kapitel 3.5.1). FÜHRER spricht beispielsweise davon, dass Fundamentale Ideen „den Schülern im Laufe der Schulzeit zunehmend bewußter und in ihrer Vielschichtigkeit deutlicher zu machen“ sind (Führer 1997, S. 86). SCHREIBER spricht Fundamentalen Ideen sogar große Bedeutung für Schüler bei der lokalen Strukturierung von Inhalten zu.

> be ja immer noch die Möglichkeit, dass der im Unterricht realisierte Vollzug von Mathematik keinen Zugang zu dieser Reflexionsebene ermöglicht. Daraus kann man auf eine unpassende Reflexionsebene zunächst einmal genauso gut zurück schließen, wie auf einen unpassenden ‚Vollzug' – mangelnde Erfahrung im Umgang mit Mathematik, die überhaupt erst den Boden für eine Reflexion bieten könnte.
>
> (Vohns 2010b, o.S.)[192]

Ob ein Unterricht die geforderten Reflexionsmöglichkeiten bietet, kann sich VOHNS folgend nur in der Instanz des Klassenzimmers entscheiden. Die mathematische Fachdidaktik kann sich allerdings bemühen, im Vorfeld Fundamentale Ideen „als [mögliche] Kristallisationspunkte, der Möglichkeit der Erfahrung von Kohärenzen und Differenzen" zu identifizieren.

VOHNS neuerliche Konzeption Fundamentaler Ideen scheint gerade dieses Anliegen zu Gunsten konkret erschlossener „lokalen Ideen" aus dem Blick zu verlieren. Sowohl Hinweise zur Identifizierung Fundamentaler Ideen als auch deren Umsetzung im Mathematikunterricht fehlen in seiner Arbeit. Dennoch zielen seine abstrakteren Überlegungen, die maßgeblich an FISCHERs Konzeption Fundamentaler Ideen von 1984 anknüpfen, in eine fruchtbare Richtung zur Weiterentwicklung Fundamentaler Ideen. Ein lohnenswertes Ziel didaktischer Forschung ist der Vorschlag eines wissenschaftlich begründbaren Ideenkatalogs, der die Breite der Mathematik möglichst ganzheitlich erfassen kann und somit zur Basis für deren Nutzung im Mathematikunterricht wird.[193] Im Unterricht sollen Fundamentale Ideen dann der Reflexion des vermittelten Bildes von Mathematik dienen.

Aktuell hat VOHNS Impulse zur Verankerung einer Theorie Fundamentaler Ideen im stoffdidaktischen Diskurs gegeben (Vohns 2016). Bezugnehmend auf (Kirsch 2000) stellt er vier wesentliche Wege der Stoffdidaktik heraus, wie Mathematik für Lerner verständlich gemacht werden kann:

> (1) by concentration on the mathematical heart of the matter,
>
> (2) by including the „surroundings" of mathematics,
>
> (3) by recognizing and activating pre-existing knowledge,
>
> (4) by changing the mode of representation.
>
> (Vohns 2016, S. 214)

---

[192] Die hier zitierte Stelle ist der Manuskriptfassung des Artikels entnommen. Darin ist die Stelle nicht so gekürzt wie im Beitrag, der im Journal für Mathematik-Didaktik abgedruckt ist.

[193] Dies forderte allerdings schon SCHREIBER 1979 in seinem Arbeitsprogramm für Universelle Ideen, vgl. Kapitel 3.5.2.

VOHNS folgend können Fundamentale Ideen für die ersten drei Punkte entscheidende Hilfen leisten, da sie den Konzeptionen BRUNERS, SCHREIBERS und SCHWEIGERS nach gerade den Kern von Mathematik abbilden (lie at the heart of all science, Bruner 1960), einen Bezug zum Alltagsdenken herstellen („Sinn"-Kriterium SCHREIBERS) und im Sinne eines Spiralcurriculums an Vorwissen der Lerner anknüpfen (Vertikalkriterium SCHWEIGERS).

Mit der Verankerung innerhalb der Stoffdidaktik weist VOHNS auf eine mögliche Problematik hin. Er gibt zu bedenken, dass ein bisheriges Problem der Stoffdidaktik in der Überwindung einer Lücke zwischen didaktischer Theoriebildung und deren pragmatischer Nutzung im Mathematikunterricht bestand (Vohns 2016, S. 216).

Die vorliegende Arbeit liefert daher einen Diskussionsbeitrag für die Identifizierung Fundamentaler Ideen seitens der Mathematikdidaktik sowie zur unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen. Zum einen wird in Kapitel 4 ein aus der vorangegangenen historischen Analyse begründbarer Ideenkatalog dargestellt, der ein breiteres Bild von Mathematik widerspiegelt als bisher vorgeschlagene Ideenkataloge. Zum anderen wird der Vernetzungspentagraph zur unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen aus den Ideenkategorien hergeleitet (Kapitel 5). Somit werden Fundamentale Ideen im Sinne einer stoffdidaktischen Durchdringung von Unterrichtsmaterial mit Hilfe des Vernetzungspentagraphen zu Reflexionsanlässen für Lehrpersonen bei der konkreten Unterrichtsplanung. VOHNS hat zwar die Gruppe der Schüler als reflektierende Personen im Unterricht im Blick, im Rahmen der vorliegenden Arbeit scheint es allerdings sinnvoller, Fundamentale Ideen zunächst den Lehrpersonen zugänglich zu machen. Sind sich diese der Fundamentalen Ideen ihres Unterrichts und ihres Verhältnisses zu ihnen bewusst, können Fundamentale Ideen in einem weiteren Schritt auch mit Schülern reflektiert werden.

3.6 Zwischenfazit

Kontrastierend zu den Defiziten im Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen in der fachmathematischen Diskussion (Kapitel 3.4), wurden die mathematikdidaktischen Arbeiten in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellt. Frühe Arbeiten aus den 1970ern, welche den Begriff der Fundamentalen Ideen eher vage ließen, nutzen diese Konzeption bewusst gegen die Strukturmathematik und den lernzielorientierten Mathematikunterricht. Fundamentale Ideen werden als „wesentlicher Kern", „fruchtbarer Einfall", „leitende Fragestellung" beschrieben (Vollrath 1978, S. 449). Sie sind mehr als mathematische Strukturen, da sie „die Vorstellung einer geistiges Leben organisierenden Potenz" miteinschließen (Jung 1978, S. 170). Kurzum: Sie sollen im Mathematikunterricht Schüler zum Sinn mathematischer Objekte und mathematischen Handelns vordringen lassen. Fundamentale Ideen schaffen, indem sie helfen, „Sinnfragen" (Fischer 1984, S. 73) zu beantworten, Bedeutungshaltigkeit für die Inhalte, die sie repräsentieren. Somit dienen sie auch mathematisch Nichtprofessionalisierten als Denkwerkzeuge (Führer 1997, S. 72). Fundamentale Ideen sollen im Unterricht ein valides Bild von Mathematik mit all ihren produktiven, prozessorientierten und „Nichtkognitiven“ Aspekten abbilden.

Sich dieses großen Programms bewusst stellten erstmals SCHREIBER (später BENDER/SCHREIBER) und SCHWEIGER Ausarbeitungen Fundamentaler Ideen der Mathematik vor. Zu dieser systematischen Erschließung gehörten je ein kriterienorientierter Zugang von Seiten der logischen Begriffsbildung sowie ein Ideenkatalog zur prototypischen Begriffsbildung. Dieses zweigleisige Vorgehen zur Begriffsbildung hat sich bis heute gehalten, wobei aktuelle Arbeiten fast ausschließlich entweder auf BENDER/SCHREIBER oder SCHWEIGER zurückgreifen oder beide Theorien vereinen (vgl. (Schwill 1993)). Auffällig ist auf Seiten der logischen Begriffsbildung, dass Fundamentale Ideen möglichst vielfältige Vernetzungen ermöglichen sollen. Sie dienen der Verbindung mathematischer Gebiete untereinander und zwischen Mathematik und dem Alltagsdenken, schaffen Bezüge zur historischen Entwicklung der Mathematik und vernetzen Inhalte auf unterschiedlichen Niveaus. Aktuell sollen Fundamentale Ideen auch eine Verbindung zwischen Mathematik und ihrer Bildungswirkung und Lernbarkeit schaffen (Vohns 2007).

Besteht noch, bis auf individuelle Akzentuierungen, Einigkeit, welchen Kriterien Fundamentale Ideen genügen sollen, so divergieren die Ideenkataloge doch sehr stark. Dies ist symptomatisch für die Debatte um Fundamentale Ideen. Viele Autoren geben bei gleicher (oder ähnlicher) Theoriebasis ganz unterschiedliche Ideenkataloge an. Für die Mathematik kann nur ein sehr kleiner Ideenkonsens konstatiert werden. Die folgende Abbildung 18 zeigt eine reduzierte Übersicht Fundamentaler Ideen. Sie enthält die bei den einzelnen Autoren genannten Fundamentalen Ideen, die jeweils für die gesamte Mathematik gedacht waren.[194]

[194] In den Ideenkästen unter den jeweiligen Autorennamen sind die Ideen aufgelistet, die nur sie in ihren Ideenkatalogen nennen. Eine Verbindungslinie von einem Autorennamen zu einem Ideenkasten bedeutet, dass der Autor auch diese Ideen als fundamental ansieht. Beispielsweise nennt HISCHER die Ideen „Bruch“ und „Mittelwert“, aber auch „Zahl“, „Struktur“ und „Maß“. Die drei letztgenannten Ideen werden aber auch von VOHNS als fundamental angesehen.

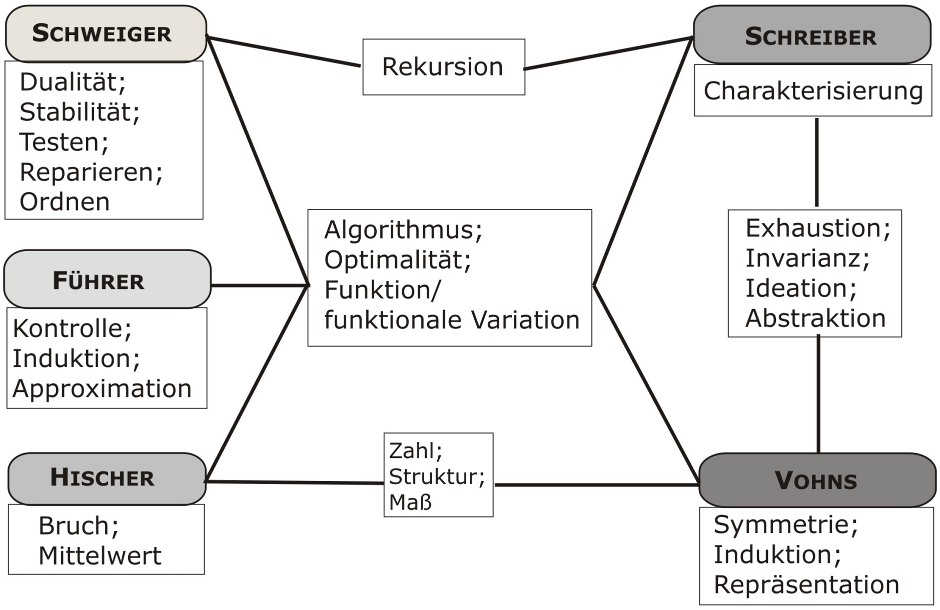


Abbildung 18 Reduzierte Übersicht über einige ausgewählte und teilweise unvollständige Ideenkataloge

Als gemeinsamer Kern von Fundamentalen Ideen zeichnen sich „Optimierung", „Algorithmus" und „Funktion".[195] Die jeweils anderen genannten Ideen der Autoren spiegeln das wider, was der jeweilige Autor von der Mathematik für den Mathematikunterricht als besonders wesentlich erachtet. Fundamentale Ideen transportieren demnach auch stets individuelle Sichtweisen auf Mathematik und Mathematikunterricht.

Gemeinsam ist den mathematikdidaktischen Arbeiten jedoch, dass der Schwerpunkt der genannten Ideen auf (innermathematischen) Tätigkeiten und mathematischen Inhalten liegt. Es wird demnach das betont, was im LAMBERTschen Ideenkatalog unter Tätigkeitsideen und Inhaltsideen gefasst wird. In den Arbeiten von SCHREIBER werden (zumindest implizit) durch die Unterteilung der genannten Schemata in Leitideen und Verfahren (und deren Unterteilung in Findungs- und Begriffsbildungsverfahren) auch heuristische Strategien (z.B. Abstraktion) als Fundamentale Ideen genannt.[196] Bei SCHWEIGER finden sich Strategien wie „Ordnen". Im Bereich der bereichsspezifischen Arbeiten, also Arbeiten, die für ein Teilgebiet der Mathematik Fundamentale Ideen erarbeiten, unterscheiden TIETZE/KLIKA/WOLPERS zwischen bereichsspezifischen Strategien (innermathematische Tätigkeiten) und zentralen Mathematisierungsmustern (zum Erfassen außermathematischer Situationen). Diese Unterscheidung findet sich

---

[195] Die bei einigen Autoren unterschiedlichen Bezeichner der Ideen blieben bei obiger Auflistung unberücksichtigt. Den Handlungsaspekt Fundamentaler Ideen betonend spricht SCHWEIGER beispielsweise von „Optimieren" als Fundamentaler Idee, während bei BENDER/SCHREIBER „Optimalität" eine Universelle Idee als Eigenschaft von Objekten und Verfahren ist.

[196] Da VOHNS u.a. den Ideenkatalog SCHREIBERS übernimmt, finden sich bei ihm ebenfalls Heuristiken.

in den Schnittstellenideen und Tätigkeitsideen auch im LAMBERTschen Ideenkatalog.

Anhand verschiedener Arbeiten konnten in der vorangegangenen Analyse auch Persönlichkeitsideen belegt werden. Beispielsweise spielt bei FISCHERs Konzeption von 1979 Intuition im Umgang mit reellen Funktionen, aber auch bei der Begriffsbildung eine wesentliche Rolle. Auch KLIKA stellt die Wichtigkeit intuitiver Handlungen beim Mathematiktreiben heraus. SCHWEIGER betont die Wichtigkeit von Kreativität bei der handlungsorientierten Auseinandersetzung mit Fundamentalen Ideen im Mathematikunterricht.

Zusammenfassend konnten also für alle Kategorien des Ideenkatalogs nach LAMBERT Anknüpfungspunkte in der Forschungstradition Fundamentaler Ideen nachgewiesen werden. Lag der Fokus Fundamentaler Ideen in den 1960ern und frühen 1970er noch auf Theorie- und Begriffsideen und im weitesten Sinne durch PÓLYA und WITTMANN auf Prozessideen, so standen in der mathematikdidaktischen Diskussion ab Mitte der 1970er Jahre eher Tätigkeits- und Inhaltsideen im Vordergrund, wobei auch Persönlichkeitsideen zumindest teilweise mitgedacht wurden. Aktuell betonen vor allem die deutschen Bildungsstandards für das Fach Mathematik die Wichtigkeit von Schnittstellenideen.

Zudem liegen mit den bereichsspezifischen Ausarbeitungen Fundamentaler Ideen für einige Gebiete der Mathematik und für einzelne Ideen im Speziellen Vorschläge für deren unterrichtliche Umsetzung vor. Die Nutzung Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht hat zuletzt VOHNS erneut aufgegriffen. Als Analysewerkzeuge sieht er Fundamentale Ideen als Mittel zur begründeten Stoffauswahl.

Die vorliegende Arbeit greif zum einen die Entwicklungen in der mathematikdidaktischen Forschungstradition Fundamentaler Ideen auf, indem sie die eine Gesamtperspektive Fundamentaler Ideen zur Diskussion stellt, die wesentliche in Kapitel 3 vorgestellte Aspekte Fundamentaler Ideen enthält (Kapitel 4). Zum anderen wird die vorgestellte Gesamtperspektive genutzt, um Fundamentale Ideen für den Mathematikunterricht nutzbarer zu machen (Kapitel 5 und 6).

Teil II Eine Theorie für den Mathematikunterricht

4 Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen

4.1 Fundamental Ideas und Fundamentale Ideen

Die Analyse des Forschungsstandes in Kapitel 3 zeigt, dass die meisten Autoren BRUNERs Forderung nach einer Orientierung des Fachunterrichts an zentralen Aspekten der zugrunde liegenden Fachwissenschaft zustimmen. Auffällig ist dabei, dass sich die vorgeschlagenen Begriffsexplikationen und genannten Beispiele Fundamentaler Ideen teilweise stark unterscheiden. Fundamentale Ideen scheinen sich einer „systematischen Betrachtungsweise zu widersetzen“ (Schweiger 2010, S. 10). Neben den in Kapitel 3 aufgezeigten gesellschaftlichen, bildungspolitischen und nicht zuletzt individuellen Bedingungsfaktoren hierfür muss noch eine weitere (übersetzungsbedingte) Ursache berücksichtigt werden. Diese hat daher vor allem für die deutschsprachige Forschung Konsequenzen.

In Kapitel 3.1 wurde diskutiert, dass BRUNER 1960 mit der Veröffentlichung des Buches „The Process of Education“ den Begriff der „fundamental idea“ zunächst in die pädagogische Diskussion einbrachte. KNÖß kommt bei ihrer Analyse des Buches zu der Feststellung, dass BRUNER wohl keinen neuen Bezeichner prägen will, da er auch andere Bezeichner wie „fundamental concept“, „fundamental principle“ oder „fundamental structure“ synonym verwendet (Knöß 1989). FÜHRER wies in seiner Konzeption Fundamentaler Ideen darauf hin, dass der deutsche Ideenbegriff sich nur unzureichend mit dem englischen Begriff „idea“ deckt.[197] Während die deutsche Idee einen reinen Vernunftbegriff jenseits unserer sinnlichen Erfahrung meint, sind „ideas“ als (mentale) Handlungskonzepte zu verstehen, deren Konsequenzen sich in konkreten Situationen bewähren müssen. „Ideas“ liegen also weder außerhalb jeglicher Erfahrung, noch sind sie aprioristische Konstanten. Diese Begriffsdifferenz soll in der vorliegenden Arbeit genauer erschlossen werden. Dazu wird im Folgenden gezeigt, dass BRUNERs Verständnis des Begriffs „idea“ von der anglo-amerikanischen Philosophie des Pragmatismus geprägt ist, die von DEWEY zu einem nicht nur in den USA weg-

[197] Es ist FÜHRERs Verdienst, als erster im Diskurs zu Fundamentalen Ideen explizit auf die Unterschiede im Begriffsumfang zwischen dem englischen Begriff „idea“ und der deutschen „Idee“ hingewiesen zu haben (Führer 1997, Fn. 132). Der philosophische Zugang SCHREIBERs legt nahe, dass auch ihm diese Unterscheidung bewusst war. Allerdings schwingt sie nur implizit in seiner Theorie mit. Aktuell sind die Unterschiede im Begriffsverständnis allerdings völlig aus der Theoriebildung Fundamentaler Ideen verschwunden. Beispielsweise werden sie nicht von VOHNS berücksichtigt, der 2016 eine Zusammenfassung vorlegte, die einer internationalen Leserschaft einen Eindruck vom Forschungsstand Fundamentaler Ideen im deutschsprachigen Raum liefern soll (Vohns 2016).

weisenden Erziehungskonzept ausgearbeitet wurde.[198] Dazu muss zunächst die Philosophie des Pragmatismus und der dort vorherrschende Ideenbegriff erörtert werden.

Dies geschieht anhand der Theorien PEIRCEs, dem Begründer einer einflussreichen Richtung des Pragmatismus, und ihrer Weiterentwicklung durch DEWEY. DEWEYs Argumentation, die Erziehung zur Aufgabe einer im pragmatischen Sinne idealisierten demokratischen Gesellschaft macht (s.u.), eröffnet dabei einen demokratischen Diskurs über Erziehung. Merkmal einer demokratischen Gesellschaft ist ihre Fähigkeit, sich selbst durch einen öffentlich geführten Diskurs stetig weiterzuentwickeln. Aufgabe der Erziehung ist es, die Mitglieder einer demokratischen Gesellschaft zu befähigen, an dieser Weiterentwicklung zu partizipieren. Grundlage dafür sind die Fähigkeiten zum kritischen Hinterfragen von Begebenheiten und zur begründeten Urteilsbildung, welche DEWEY besonders durch den wissenschaftlichen Forschungsprozess geschult sieht. In solchen Prozessen generiert der Lerner Hypothesen („ideas“), deren Wahrheitsgehalt er bei der praktischen oder gedanklichen Anwendung an ihren Konsequenzen misst. Diese „ideas“ sind dabei keine Zufallsprodukte, sondern erwachsen aus der jeweiligen Situation, die zur Hypothesenbildung angeregt hat. In Bezug auf den schu-

---

198 DEWEYs Erziehungskonzept wurde u.a. auch in Deutschland vermehrt seit Mitte des 20. Jahrhunderts, also mit einiger zeitlicher Verzögerung, die auf fehlende Übersetzungen seiner Schriften zurückzuführen ist, diskutiert. DEWEYs zentrale Überzeugung, dass sich „pädagogische Absichten als Hypothesen verstehen und von den Konsequenzen her überprüfen lassen“, stieß zunächst auf heftige Kritik in Deutschland (Oelkers 2009, S. 13). Die Negation absoluter Werte und Wahrheiten, die DEWEYs Pragmatismus prägt, wurde im Widerspruch zu humanistischen Bildungsidealen gesehen, da sie den Wahrheitsanspruch der christlichen Erziehung in Frage zu stellen schien (Oelkers 2009). Neuerdings findet das pragmatisch ausgerichtete Erziehungskonzept DEWEYs verstärkt Anklang. OELKERs stellt DEWEY als „weltweit am meisten zitierte[n] Autor der Pädagogik“ neben PIAGET heraus (Oelkers 2009, S. 9). Ohne die Rezeptionsgeschichte DEWEYs an dieser Stelle zu vertiefen (vgl. dazu (Oelkers 1993) und (Oelkers 2009)), sei auf die großangelegten Forschungsprojekte „Mathe 2000“ und „Mathe 2000+“ hingewiesen, die DEWEY zu einem „Erzvater“ ihrer Konzeptionen machen. Die Projekte unter der Leitung von WITTMANN und GERHARD MÜLLER dienen der „Entwicklung des Mathematikunterrichts vom Kindergarten bis zum Abitur ‚aus einem Guss‘“ (Wittmann/Müller 2016). Dazu werden „praxistaugliche Lernumgebungen“ konstruiert und „Material für die Lehrerbildung“ erstellt (Wittmann/Müller 2016). Zusätzlich liegt mit dem „Zahlenbuch“ ein Schulbuch für das Fach Mathematik im Grundschulbereich vor, welches die dem Projekt zu Grunde liegenden Prinzipien wie eine konstruktivistische Lernauffassung und durchgängige Differenzierung transportiert. Mit „Das Mathematikbuch“ liegt eine Adaption des Grundschulwerks für die Sekundarstufe I vor. DEWEY wurde zum „Erzvater“ dieses mittlerweile schon 29 Jahre laufenden Projekts ernannt, da seine Schriften „herausragende Bedeutung für das Projekt“ haben, indem sie belegen, dass „das wohlverstandene Fach die wichtigsten Informationen für den Unterricht liefert“ (Wittmann/Müller 2016). WITTMANN verweist bei der Projektbeschreibung daher auch im Zusammenhang mit einer „Konzentration des Stoffes auf fachliche Grundideen“ auf DEWEY (Wittmann 2014, S. 29). Ein Hinweis auf DEWEYs Bedeutung für den Diskus Fundamentaler Ideen auch im deutschsprachigen Raum.

lischen Mathematikunterricht liefert DEWEYs Erziehungskonzept somit eine Verankerung Fundamentaler Ideen im Fachunterricht.[199]

In einem nächsten Schritt wird mithilfe BRUNERs eigener Bezugnahme auf DEWEY belegt, dass BRUNER in wesentlichen Positionen, u.a. im Begriffsverständnis von „ideas“ und deren Bedeutung im Lernprozess, mit DEWEY übereinstimmt. Aus dem Nachweis des ursprünglich intendierten Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen wird, zum Abschluss von Kapitel 4.1, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegende Verständnis Fundamentaler Ideen hergeleitet.

Die anglo-amerikanische Bildungsforschung ist nicht durch ein Bildungsideal im deutschen Sinne geprägt, sondern nach PEIRCE und DEWEY (u.a.) durch den Pragmatismus gekennzeichnet.[200] PEIRCE entwickelte im 19. Jahrhundert in scharfer Abgrenzung zum Idealismus eine Erkenntnistheorie, deren Ziel die Vereinbarung von Theorie und praktischem Handeln war (Martens 1975, S. 3).

Nach PEIRCE ist es dabei Aufgabe der Philosophie,

> Klarheit über Methoden und Bedingungen der Erkenntnis hervorzubringen und den Zusammenhang von Wissenschaft, Geschichte, Leben und Handeln des Menschen aufzuklären und so zur Meisterung der Zukunft der Menschenwelt beizutragen, indem sie die Menschen dazu anhält, ihr Bewußtsein zu entwickeln und auszubilden für die Bedingungen, ohne die Fortschritt, Wachstum und ein harmonisches Zusammenleben nicht mehr möglich sind.
>
> (Oehler 1968, S. 24)

---

[199] Zusätzlich liefert DEWEYs Pragmatismus auch einen theoretischen Rahmen für die wissenschaftliche Diskussion Fundamentaler Ideen. Dadurch, dass auch Fundamentale Ideen sich an ihren Konsequenzen, konkret an ihrem Nutzen für den Mathematikunterricht und das Lernen von Mathematik, messen lassen müssen, kann ein Katalog Fundamentaler Ideen immer nur vorläufigen Charakter haben. Diskussionen über zentrale Aspekte von Mathematik und Mathematikunterricht gilt es daher im Rahmen einer „demokratischen Gesellschaft“ zu führen und somit die vorher benannten Aspekte weiterzuentwickeln.

[200] „Der“ Pragmatismus stellt keine einheitliche philosophische Richtung dar. Unter ihm werden Methoden zur Begriffserklärung, Handlungs- und Konsenstheorien und Lebensphilosophien subsumiert. Da es im Kontext der vorliegenden Arbeit um die Klärung des Begriffs „idea“ und dessen Abgrenzung zum Begriff „Idee“ geht, wird keine Gesamtschau der pragmatischen Richtung gegeben, sondern auf einige zentrale Ansätze abgestellt. Hier zu nennen sind einmal die grundlegenden Arbeiten von PEIRCE „Fixation of belief“ (dt.: Die Festlegung einer Überzeugung, (Peirce 1975) und „How to make our ideas clear“ (dt.: Über die Klarheit unserer Gedanken, (Peirce 1968)). Für die Weiterentwicklung dieses philosophischen Ansatzes zu einem Erziehungskonzept werden die Arbeiten von DEWEY „Pragmatismus und Pädagogik“ (Dewey 1975) und „Erziehung und Demokratie“ (DE) hinzugezogen.

Eine Besonderheit in der Zitierweise DEWEYs muss an dieser Stelle berücksichtigt werden. So wie in der Forschung üblich, wird DEWEY auch in der vorliegenden Arbeit mit der wissenschaftlichen Zitierweise zitiert. Speziell werden verwendet MW= „The Middel Works“, LW= „The Later Works“ zitiert nach der Gesamtausgabe von DEWEYs Werken von JO ANN BOYDSTON, EE= „Psychologische Grunderfahrungen der Erziehung“, ÖP = Die Öffentlichkeit und ihre Probleme und DE= „Demokratie und Erziehung“. Alle Literaturangaben zu den Arbeiten sind im Literaturverzeichnis der vorliegenden Arbeit unter ihrem Verfasser DEWEY eingeordnet.

Philosophie ist demnach eine vermittelnde Wissenschaft, die vor allem auf die Zukunft gerichtete Erfordernisse begünstigen soll. Diese Ausrichtung findet sich auch in PEIRCEs Überlegungen zur Erlangung von Erkenntnis. In „How to make our ideas clear" entwickelt er, ausgehend von dem als unzureichend empfundenen Ansatz von RENÉ DESCARTES, eine Methode zur Bestimmung des Wahrheitsgehalts einer „idea". Ob eine „idea" „fürwahrgehalten" (engl.: belief) werden soll, hängt nicht davon ab, ob die „idea" klar oder deutlich ist,[201] sondern davon, ob ihre Konsequenzen beim handelnden Erproben mit der Realität vereinbar sind. Diese Überzeugung hält PEIRCE in der pragmatischen Maxime fest.

> Überlege, welche Wirkungen, die denkbarerweise praktische Bezüge haben könnten, wir dem Gegenstand unseres Begriffs [engl.: conception] in Gedanken zukommen lassen. Dann ist unser Begriff dieser Wirkungen das Ganze unseres Begriffs des Gegenstandes.

(Peirce 1968; S. 63)

Die pragmatische Maxime spricht nun von „concepts" und nicht von „ideas". Zum einen benutzt PEIRCE beide Begriffe synonym in seiner Abhandlung. Zum anderen weist KLAUS OEHLER darauf hin, dass PEIRCE „ideas" nicht im technischen Sinne verwendet; PEIRCE „bezieht sich auf die fundamentalen Zeichen, die das Denken schafft, und deren Möglichkeit klarer Faßbarkeit erörtert werden soll" (Oehler 1968, S. 97). Demnach ist es sinnvoll, um Verwechslungen zu vermeiden, die pragmatische Maxime mithilfe von „concept" zu formulieren. Wichtig ist allerdings, dass das Gesagte auch für „ideas" gilt. Die oben genannten „fundamentalen Zeichen" umschreiben „ideas" auch andere „Gebilde" wie „notion", „term", „belief" (s.u.), „thought" oder „proposition" (Oehler 1968, S. 97). Die Fokussierung auf die Wirkung von „concepts" und „ideas" beim handelnden Erproben machen deutlich, dass PEIRCE nicht das im Sinn hat, was in der deutschen philosophischen Tradition nach KANT unter einer „Idee" verstanden wird. Ideen sind dort transzendentale reine Vernunftbegriffe, für die kein übereinstimmender sinnlich wahrnehmbarer Gegenstand gefunden werden kann. Sie übersteigen demnach alle Erfahrung. Als unumstößliche aprioristische reine Vernunftbegriffe sieht KANT die Idee der Seele, die Idee der Welt/Freiheit und die Idee Gottes (Grondin, S. 73 f.). PEIRCE hingegen lehnt jegliche Aprioris ab.

> I only desire to point out how impossible it is that we should have an idea in our minds which relates to anything but conceived sensible effects on things.

---

[201] PEIRCE meint damit die Kriterien zur Wahrheitsfindung nach DESCARTES, wonach ein Begriff „klar" ist, wenn dieser „so erfaßt ist, daß er widererkannt wird, wo er auch angetroffen werden mag [...] und kein anderer Begriff mit ihm verwechselt wird" (Peirce 1968, S. 37). Ein Begriff ist „deutlich", wenn er „nichts enthält, was nicht klar ist. [...] wenn wir in abstrakten Termini eine präzise Definition von ihm geben können." (Peirce 1968, S. 39). Beide Kriterien gehören nach PEIRCE Philosophien an, „welche schon lange tot sind" (Peirce 1986, S. 39).

> Our idea of anything is our idea of its sensible effects [...]
>
> (Peirce 1968, S. 58)

Erkenntnis beruht also vollständig auf Erfahrung und wird durch das sogenannte pragmatische Experimentieren gewonnen. Das bedeutet, dass „ideas“ keinen absoluten Charakter besitzen, sondern Hypothesen sind, deren Wahrheitsgehalt sich an ihrem „Passen“ an der Realität misst. Der Begriff Realität darf hier nicht als absolut oder gar a priori angesehen werden. PEIRCE versteht darunter den „critical common-sensism“ einer Experimentiergemeinschaft (Oehler 1968, S. 21). Diese „Letztmeinung“ (Peirce 1968, S. 89) unterliegt jedoch ebenfalls dem Erkenntnisfortschritt der Wissenschaft und hat auch eine geschichtliche Dimension.[202] Das Erproben von „ideas“ im pragmatischen Sinne erfolgt nach einem „belief - doubt - belief“ - Schema. Dabei kommt „echter“ Zweifel, der als unangenehm empfunden wird und verunsichernd wirkt, an einem „Fürwahrhalten“ auf.[203] Dieser veranlasst das Individuum zum Übergang zu neuen „beliefs“, die sich in neuen „habits“ äußern. Das Wechselspiel von „belief“ und „doubt“ führt das Individuum mit letzter Gewissheit zur Letztmeinung der Experimentiergemeinschaft, denn

> verschiedene Köpfe können mit den gegensätzlichsten Ansichten beginnen, aber der Fortschritt der Forschung bringt sie durch eine Kraft, die außerhalb ihrer selbst liegt, zu einem und demselben Schluß. Diese Aktivität des Denkens, von der wir getragen werden, nicht wohin wir wünschen, sondern zu einem vorbestimmten Ziel, gleicht dem Walten des Schicksals. Keine Änderung des eingenommenen Standpunktes, keine Auswahl anderer Fakten für die Untersuchung, nicht einmal die natürliche Neigung des Geistes, können es einem Menschen ermöglichen, der vorbestimmten Meinung zu entkommen. Diese Hoffnung ist in dem Begriff [engl.: concept] der Wahrheit und der Realität verkörpert.
>
> (Peirce 1968, S. 87)

Die Realität oder das „Ding an sich“ ist demnach nicht Anfangspunkt der Erkenntnis, wie beispielsweise bei KANT, sondern deren Ende und Erfüllung. Diese unterliegt jedoch stetem Wandel und ist somit offen zu denken.[204]

---

[202] Dadurch, dass eine Anpassung der „ideas“ an die Letztmeinung der Experimentiergemeinschaft erreicht werden soll, hat das pragmatische Experiment auch eine ethische Komponente. Logik wird im sozialen Prinzip der Auseinandersetzung in der Gemeinschaft verankert (Nagel 1998, S. 28). Diesen Aspekt nutzt DEWEY zur Formulierung seiner Erziehungstheorie. Er interpretiert dabei das pragmatische Experiment als demokratischen Prozess (s.u.).

[203] Dieser Zweifel ist nicht der abstrakte Universalzweifel von DESCARTES, sondern an einen konkreten „belief“ gebunden, vgl. dazu (Nagel 1998, S. 32 f.).

[204] Auf das Wechselspiel von „belief“ und „doubt“, welches die Erkenntnis des Menschen auf die Letztmeinung der Experimentiergesellschaft zusteuern lässt, wird noch einmal in Kapitel 4.5 bei der Erläuterung der Persönlichkeitsidee „Intuition“ zurückgekommen. PHILIP DAVIS und REUBEN HERSH identifizieren dieses Wechselspiel für die mathematische Erkenntnis mit dem Abgleich

PEIRCEs Vorstellungen, die rein philosophischer Natur waren, haben durch eine Weiterentwicklung des Pragmatismus durch DEWEY nachhaltig auf das amerikanische Erziehungssystem gewirkt.

Auch DEWEY, der u.a. Schüler von PEIRCE war,[205] übernahm von diesem die „pragmatische Grundannahme“, dass „ideas“ als Handlungsregeln begriffen werden müssen, deren Wahrheitsgehalt aus der Untersuchung ihrer Konsequenzen resultiert (Oelkers 1993, S. 507). Daher beruht auch DEWEYs Begriff des Erkenntniserwerbs innerhalb eines stufigen Forschungsprozesses, ähnlich wie der von PEIRCE, auf einem „belief - doubt - belief“ - Schema. In seiner „Logic: The Theory of Inquiry“ unterscheidet DEWEY verschiedene Stadien des Erkenntnisprozesses, die ineinander übergehen und im Sinne einer Spirale mehrmals durchlaufen werden können (LW 12: 107 ff.).

- Stadium 1: Eine „indeterminate situation“ bildet den Ausgangspunkt des Prozesses,
- Stadium 2: Die Person erkennt, dass eine zweifelerregende Situation vorliegt, die erforscht werden muss,
- Stadium 3: Auf Basis gesammelter Daten werden Lösungsvorschläge als Hypothesen („ideas“) generiert,
- Stadium 4: Die generierten Hypothesen werden auf ihre Verträglichkeit mit der kognitiven Gesamtstruktur der Person überprüft und ggfs. revidiert,
- Stadium 5: Praktische Erprobung der „ideas“ und Feststellung ihres Wahrheitswerts anhand ihrer Konsequenzen. Erneutes Durchlaufen des Prozesses beim Scheitern der „idea“.

Die Ausgangslage bildet also eine „indeterminate situation“, die DEWEY als „disturbed, trubled, ambiguous, confused, full of conflicting tendencies, obscure, etc.“ charakterisiert (LW 12: 109). Solche Situationen erregen Zweifel, da zu ihrer Überwindung neue Hypothesen („ideas“) gebildet werden müssen, die vorher noch nicht zur Erkenntnis gehörten. Doch zuerst muss die Situation als zweifel-

---

von Intuitionen verschiedener Menschen untereinander und liefern somit einen erkenntnistheoretischen Rahmen für mathematische Intuition (Davis/Hersh 1985).

[205] DEWEY besuchte Vorlesungen von PEIRCE in Baltimore (Nagl 1998, S. 111) und schrieb selbst über die grundsätzliche Übereinstimmung seiner Theorie mit PEIRCEs Überlegungen: „The readers who are acainted with the logical writings of Peirce will note my great indebtedness to him in the generals position taken“ (LW 12: 17). In einem Briefwechsel distanzierte sich PEIRCE allerdings von DEWEYs Position. Grund dafür war DEWEYs Umgehung des Problems der Theorie des logischen Schließens, welche PEIRCE als unpräzise empfand (Oelkers 2009, S. 175 f.). PEIRCEs Kritik richtete sich dabei auf die von DEWEY postulierten Kontinuität zwischen Wissenschaft und Moral, wonach wissenschaftliches Schließen auch zur Gewinnung moralischer Urteile verwendetet werden kann. Davon unberührt bleibt die Art der Hypothesenbildung im pragmatischen Experiment, also die Natur der „ideas“.

erregend erkannt und analysiert („find out *what* the problem and problems are which a problematic situation presents to be inquired into“) werden (LW 12: 112). In diesem Stadium spricht DEWEY noch vom „precognitive“ Charakter der Situation, da ihr noch nichts Wissenschaftliches anhaftet, obwohl sie zum Ausgangspunkt des wissenschaftlichen Erkundens werden kann (LW 12: 111).[206]

Ausgehend davon entwickelt sich nun das, was DEWEY „progressive inquiry“ nennt. Das dritte Stadium des Erforschungsprozesses ist durch ein Wechselspiel von aus der Situation heraus gewonnenen Daten („facts“) und generierten Lösungsvorschlägen gekennzeichnet. Wahrgenommene Daten und generierte Lösungsvorschläge beeinflussen sich gegenseitig und lassen so zu einer passenden Lösung für das Problem vorstoßen.[207]

Diese Lösungsvorschläge nennt DEWEY „ideas“ und definiert sie als

> anticipated consequences (forecasts) of what will happen when certain operations are executed under and with respect to observed conditions [...] An idea is first of all an anticipation of something that may happen; it marks a *possibility*.
>
> (LW 12: 113)

DEWEY grenzt dieses pragmatische Verständnis von „idea“ scharf von anderen philosophischen Richtungen ab. Für ihn sind „ideas“ gerade keine mentalen Kopien der Wahrnehmung von Objekten. Erkenntnis durch die Entwicklung von „ideas“ beruht demnach nicht nur auf Erfahrung, wie es der Empirismus besagt. Eine Verbindung von Erfahrung und Verstand sieht DEWEY eher im Rationalismus nach KANT gewährleistet. Von diesem übernimmt er die Kernaussage „Gedanken ohne Inhalt sind leer, Anschauungen ohne Begriffe sind blind“ (Kant AA: 75), kritisiert allerdings die Verortung von Ideen als unumstößliche reine Vernunftbegriffe jenseits aller Erfahrung (LW 12: 114).[208] Im Prozess des Problemlösens sind Anschauung und Begriff („idea“) im pragmatischen Verständnis zweckgerichtet miteinander verbunden. Mittels Anschauung können relevante Daten des Problems gesammelt werden, auf deren Basis dann begriffliche Lösungsvorschläge („ideas“) entwickelt werden.

Dabei sind tatsächliche „ideas“ von bloßen „suggestions“ zu unterscheiden, obwohl jede „idea“ ihren Ursprung als „suggestion“ hat. „The suggestion becomes

---

[206] Zu beachten ist die Ähnlichkeit zur Konzeption Universaler Ideen von BENDER/SCHREIBER. Die Autoren sehen die mathematische Theoriebildung durch Universale Ideen angetrieben, die ebenfalls einem vorwissenschaftlichen Denken angehören (Kap. 3.5.2).

[207] Dieses Wechselspiel zwischen Daten (Mitteln) und zielgerichteten Lösungsvorschlägen (Zwecken) bildet den Kern von DEWEYs Kontinuitätstheorie zwischen Wissenschaft einerseits und Kultur und Moral andererseits (s.u.).

[208] DEWEY selbst zitiert die Aussage KANTs wie folgt: „apart from each other ‚perceptions are blinde and conceptions empty'“ (LW 12: 114). Bei seinen Erklärungen verwendet DEWEY „facts“ anstatt „perceptions“ und „ideas“ anstatt „conceptions“. Daher wird hier im Folgenden weiter von Daten und „ideas“ gesprochen.

an idea when it is examined with reference to its functional fitness; its capacity as a means of resolving the given situation“ (LW 12: 114). Um von einer „idea“ sprechen zu können, ist also ein weiterer Vorgang nötig, den DEWEY „reasoning“ nennt und mit dessen Hilfe bestimmte „suggestions“ als unbrauchbar zur Problemlösung herausgestellt werden. In diesem vierten Stadium werden die „ideas“, wie Hypothesen beim wissenschaftlichen Forschen, nicht nur an ihrem kontextuellen Bezug zur Situation, sondern auch auf ihre Verträglichkeit mit anderen „ideas“ geprüft und in das gedankliche Gesamtkonstrukt eingepasst. Somit sind DEWEYs „ideas“ gegen Extreme der Korrespondenztheorie einerseits und der Kohärenztheorie andererseits geschützt (Nagl 1998, S. 121 f.).[209] Im Prozess des „reasonings“ werden aus den „ideas“ auch Operationen entwickelt, die zum Testen der Anwendbarkeit der „idea“ an der ursprünglichen Situation geeignet sind. Im letzten Stadium des Erkenntnisprozesses werden diese Operationen im pragmatischen Experiment erprobt und bestätigt oder durch erneutes Durchlaufen des „progressive inquiry“ verbessert.

„Ideas“ sind demnach jene Konzepte, Begriffe, Gedanken, Einfälle, Handlungsoptionen, die der Mensch als potentielle Lösungsvorschläge bei der Bearbeitung einer unsicheren Situation gedanklich neu erschafft und operativ einsetzt.

Auf die Mathematik bezogen können solche Situationen beispielsweise im Lösen eines inner- oder außermathematischen Problems, einer Begriffsdefinition, der Anpassung eines Axiomensystems oder der Entwicklung eines effizienten Algorithmus vorliegen. Wichtig ist, DEWEY folgend, dass die Ausgangssituation tatsächlich unsicheren Charakter hat und die „ideas“ im Sinne der „progressive inquiry“ ständig angepasst und verbessert werden. Dieser Prozess des ständigen Wandels zeichnete schon den Pragmatismus von PEIRCE aus. DEWEYs Ansatz geht über PEIRCE deutlich hinaus, indem er den oben beschriebenen Forschungsprozess nicht nur auf die Wissenschaft, sondern auch auf gesellschaftliche Probleme anwendet. Da DEWEY somit nachhaltig auf die amerikanische Erziehungstheorie gewirkt hat, soll auch dieser Aspekt seiner Theorie im Folgenden skizziert werden.

DEWEY unterscheidet sich im Kernbestandteil seiner Auslegung des Pragmatismus, dem Instrumentalismus, deutlich von PEIRCE. Er geht von einer verbindenden Kontinuität von Wissenschaft und Moral aus. Kontinuität sieht DEWEY dabei zweifach.

---

[209] Die Korrespondenztheorie misst den Wahrheitsgehalt einer Aussage allein an deren „Passen“ auf die Realität. Andersherum gilt für die Kohärenztheorie eine Aussage als wahr, wenn sie in das Gesamtgefüge aller bereits vorhandenen Aussagen passt. DEWEYs „ideas“ tragen durch ihre Entwicklung aus gegebenen, realen Daten und der Prüfung ihrer Verträglichkeit mit bereits vorhandenen „ideas“ im Stadium des „reasoning“ Züge beider Theorien (Nagl 1998).

> [...] on one side [...] there is no breach of continuity between operations in inquiry and bioligical operations and physical operations. „Continuity“ on the other side, means that rational operations grow out of organic activities, without being identical with that from which they emerge.
>
> (LW 12:26)

Das verbindende Moment dieser beiden, in anderen Theorien als Dichotomien angesehenen Pole sieht DEWEY dabei in Situationen, die zu Ausgangspunkten für den Menschen zur Erweiterung seiner Erkenntnis werden. Solche Situationen erregen Zweifel und stellen den Menschen vor Probleme. Zu deren Lösung stehen ihm stets nur bestimmte Mittel zur Verfügung. Aus diesen wählt er diejenigen aus, die zur Überwindung des Zweifels geeignet scheinen. Wissenschaftliche Erkenntnis ist demnach nicht wertfrei, da sie stets einer bestimmten kulturell geprägten Situation entspringt.

> Neither inquiry nor the most abstractly formal set of symbols can escape from the cultural matrix in which they live, move and have their being.
>
> (LW 12: 28)

Demnach sind wissenschaftliche Erkenntnisse stets mit Werturteilen verknüpft und spiegeln somit auch gesellschaftliche und nicht zuletzt auch individuelle Einstellungen wider. Die Auswahl der Mittel unterliegt immer einem bestimmt Leitzweck. Diese Zwecke sind, wie bei PEIRCE, keine Konstanten, sondern können auch wieder zu Mitteln im weiteren Erkenntnisprozess werden. Um ihren situativen und vorläufigen Charakter zu verdeutlichen, nennt DEWEY sie „ends in view“ (LW 12: 17).[210] Wenn allerdings Leitzwecke auch zu Mitteln werden können, müssen sich auch moralische Regeln im pragmatischen Experiment beweisen. Damit wird die Existenz von unumstößlichen, nicht verhandelbaren Werten negiert.[211] Da nun auch die Gültigkeit moralischer Regeln getestet wird, bekommen solche Experimente eine gesellschaftliche Komponente, da sie Auswirkungen auf soziale Bereiche haben. Andererseits wirkt die vorherrschende Gesellschaftsform wieder auf das pragmatische Experiment zurück, da die zur Verfügung stehenden Mittel beim Problemlösen, insbesondere beim Bilden von Hypothesen („ideas“), und die Möglichkeit zu deren Erprobung im Austausch mit anderen beispielsweise von Rede- und Meinungsfreiheit abhängen (Nagl 1998, S. 130).

Als Leitbild einer Gesellschaft, die an der „intelligenten“, also mittels pragmatischer Experimente, Verbesserung ihrer Institutionen durch kritische, öffentliche

---

[210] In diesem Wechselspiel von Mittel und (Leit-)Zwecken deutet sich schon der prinzipiell offene Erkenntniskreislauf des pragmatischen Experimentierens an (s.u.).

[211] Zur Problematik dieser Argumentation mit Bezugnahme auf den „Wert des Menschen“ vgl. (Nagl 1998, S. 127).

Argumentationen interessiert ist, sieht DEWEY die demokratische Gesellschaft. In ihr finden Verbesserungsprozesse innerhalb öffentlicher Diskurse statt, an denen grundsätzlich alle Mitglieder teilhaben.[212] Sie gilt DEWEY als idealisierte Zielvorstellung, die nirgends verwirklicht ist. Das Potential einer demokratischen Gesellschaft resultiert aus ihrer Fähigkeit, ihren Innenraum, also ihre „tatsächlich vorhandenen Formen des Gesellschaftslebens", zu thematisieren und somit die „wünschenswerten Züge herauszuheben, von ihnen aus die unerwünschten zu kritisieren und auf Verbesserungen hinzuweisen" (DE 115). Normatives Kriterium für eine solche Gesellschaft ist, dass

> es [...] in ihr viele gemeinsame, von allen Gliedern geteilte Interessen [gibt], es zahlreiche Punkte [gibt], in denen eine mannigfaltige und freie Berührung mit anderen Formen des Zusammenlebens erfolgt.
>
> (DE 116)

Somit ist Demokratie nach DEWEY ein intern generiertes regulatives Ideal, da sie nichts Externes benötigt und aus dem Innenraum der Gesellschaft resultiert. Im Innenraum unterliegt sie jedoch stetem Wandel.

> Demokratie ist ein Ideal im einzig verständlichen Sinne eines Ideals: nämlich, die bis zu ihrer äußersten Grenze getriebene, als vollendet und vollkommen betrachtete Tendenz und Bewegung einer bestehenden Sache.
>
> (ÖP 129)

Um eine solche Gesellschaft zu ermöglichen, müssen ihre Mitglieder zur Teilhabe an pragmatischen Experimenten befähigt werden. Da Demokratie in obigem Sinne auf stete Verbesserung aus ist, besteht diese Teilhabe vornehmlich in der Fähigkeit zur Urteilsbildung. DEWEY sieht hier das Ziel von Erziehung.[213]

> Erziehung soll die Gewohnheit des aufgeschobenen Urteils, des Skeptizismus und des Wunsches nach Beweisstücken kultivieren, den Appell an die Beobachtung

[212] Inwiefern DEWEY dabei auch die außerhalb der US-amerikanischen Gesellschaft stehenden Gruppen wie Ureinwohner und Farbige im Blick hatte, ist wenig erforscht. OELKERs gibt ein konkretes Beispiel, welches nahelegt, dass DEWEY nicht immer diese Gruppen einbezog. 1915 veröffentlichte DEWEY das Buch „Schools of To-Morrow", in dem er die Arbeit von 14 Reformschulen beschreibt. Eine dieser Schulen ist die „Organic School Fairhope" in Alabama, die DEWEY in besonderer Weise als vorbildlich beschreibt. Diese Schule nahm allerdings nur weiße Schüler auf. OELKERs bemerkt dazu richtigerweise, dass wenn DEWEY schreibt, „'any child is welcome' [...] so reflektiert das nicht die reale Situation rassisch getrennter Schulen" (Oelkers 2016, S. 225). Aus dieser Begebenheit lässt sich zumindest vermuten, dass DEWEY nicht als besonders engagierter Bürgerrechtler auftrat.

[213] Generell beurteilt DEWEY Erziehungsziele in einer absoluten Formulierung kritisch. Ziele müssen grundsätzlich offen und reversibel gehalten werden. Er verortet das zitierte Ziel im Spannungsverhältnis von persönlicher Entwicklung und Nutzen für die Gesellschaft und betont, dass es eine besondere Aufgabe der Erziehung ist, „für ein Ziel zu kämpfen, in dem soziale Leistung und Persönlichkeitskultur nicht Gegensätze, sondern gleichbedeutend sind" (DE 167).

> statt das Gefühl, an die Diskussion statt an das Vorurteil, an die Forschung statt an die herkömmlichen Idealisierungen.
>
> (MW 13: 334)

Über die pragmatische Erkenntnistheorie gelingt es DEWEY, Demokratie mit Erziehung zu verbinden. Diese Verbindung war zwar schon in der amerikanischen Verfassung von THOMAS JEFFERSON verankert worden, ihre Umsetzung erfolgte zumeist allerdings nicht konsequent.[214] Nach DEWEY hielten seine Vorschläge für die konkrete Unterrichtsgestaltung Einzug in Curricula und wirken bis heute in pädagogischen Theorien nach. Beispielsweise plädierte DEWEY für einen handlungsorientierten Unterricht, der vom „Praktischen“ zum „Theoretischen“ schreitet. Wichtig sind dabei zwei Bedingungen. Zum einen darf das Praktische nicht nur aus der Beschäftigung mit konkreten Gegenständen und der Durchführung konkreter Handlungen bestehen. Vielmehr muss es geeignet sein,

> typische Probleme aufzuwerfen, die mit Hilfe der Überlegungen und durch das Experiment gelöst werden können, und das Wissen, das in diesem Zusammenhang erworben wurde, kann später zur Erlangung mehr spezialisierter wissenschaftlicher Erkenntnisse führen.
>
> (Dewey 1975, S. 227)

Die Güte des Praktischen misst sich demnach an der Möglichkeit, Denkprozesse zu entwickeln, die sich von der konkreten Situation entfernen können und zu theoretischem Denken führen. Im Sinne des pragmatischen Experiments ist das Theoretische dabei niemals Endziel, sondern auch jeweils ein „end in view“, welches wieder zu einem Mittel für weitere Ziele werden kann.

DEWEYs Ansatz wurde häufig in Verbindung mit der Projektmethode gebracht, wie sie 1918 von WILLIAM KILPATRICK formuliert wurde. Daran schloss sich eine Kritik der Überbetonung des Utilitaristischen in Verbindung mit einem Lernen nach Interesse der Schüler an. OELKERS hat in jüngster Zeit argumentiert, dass DEWEYs Forschungen zur Art von Denkprozessen (s.o.) dafür sprechen, dass

---

[214] Der Gedanke einer öffentlichen Bildung, also einer Bildung für alle, wurde maßgeblich durch JEFFERSON zum amerikanischen Leitgedanken (Oelkers 2009, S. 39 ff.). Er wirkte als Mitverfasser der amerikanischen Unabhängigkeitserklärung vom 4.7.1776 und ab 1801 als Präsident der neugegründeten souveränen Nation in allen staatstragenden Bereichen. Seine an Demokratie und Gleichberechtigung ausgerichteten Gedanken schlugen sich auch in Europa nieder. Die Erklärung der Menschen- und Bürgerrechte am 26.8.1789 im Zuge der französischen Revolution hatte ihr amerikanisches Pendant zum Vorbild.

Mit einer Bildung für alle waren durchaus auch damalige Sklaven einbezogen. JEFFERSON plädierte auch für ein „Anti-Sklaven-Gesetz“ in Virginia. Allerdings war er selbst Besitzer von 187 Sklaven, die auf seinem Anwesen in Charlottesville, Virginia, arbeiteten und über die er genau Buch führte. OELKERS interpretiert JEFFERSONs Autobiographie so, dass „die Gründungsväter der Vereinigten Staaten der Meinung waren, die Maxime der Gesetzgebung habe wohl >> freedom of all << zu sein, aber dass die in der Frage der Sklaverei widerstrebende öffentliche Meinung darauf erst vorbereitet werden müsse“ (Oelkers 2009, S. 37).

DEWEY kein Anhänger oder gar der Begründer einer radikalen Projektmethode war (Oelkers 2009, S. 182 ff; 188). DEWEYs Ansatz ist eher als Problemlösen zu bezeichnen, der zwar auf Initiative der Schüler setzt, bei dem aber auch Instruktion durch den Lehrer eine wichtige Rolle spielt.

> Es ist Teil der Aufgabe des Lehrers, zwei Dinge gleichermaßen zu beachten: erstens, daß das Problem sich aus den Bedingungen der gegenwärtigen Erfahrung ergibt und daß es im Bereich der Fähigkeiten der Schüler liegt: und zweitens, daß es sich um ein Problem handelt, das den Schüler zum aktiven forschen und zu neuen Ideen anregt.

(EE 288)

Dieser kurze Abriss der Erziehungstheorie DEWEYs soll hier genügen, um Übereinstimmungen mit BRUNERs Erziehungstheorie und dessen Konzept Fundamentaler Ideen aufzuzeigen. Dass BRUNER in sehr guter Kenntnis von DEWEYs Theorien war, zeigt ein von ihm verfasster Aufsatz, in dem er DEWEYs Theorien in die 1960er überträgt und mit den eigenen Vorstellungen zu Erziehung bestätigt und teilweise kontrastiert (Bruner 1969).

Die deutlichste Übereinstimmung zwischen DEWEY und BRUNER liegt wohl in deren Überzeugung, dass Lerninhalte von Schülern aktiv handelnd erfahren werden sollten. Was DEWEY als das „Praktische" beschreibt, findet sich in BRUNERs Erziehungstheorie im enaktiven Umgang mit neuen Unterrichtsinhalten. In diesem Zusammenhang weisen beide Wissenschaftler darauf hin, dass der aktive Umgang mit neuen Inhalten auch mit zunehmendem Alter der Lernenden nie ganz von einem rein theoretischen Zugang abgelöst wird. Lernen wird von beiden als lebenslanger Prozess angesehen, und die Art des Lernens unterscheidet sich nicht qualitativ. DEWEY fasst diese Erkenntnis in seiner Kontinuitätshypothese zwischen Forschung und Lernen.[215] Bei BRUNER findet sich selbiges in seiner berühmten Hypothese im Zusammenhang mit der Vermittlung Fundamentaler Ideen, „dass geistige Tätigkeit überall dieselbe ist, an den Fronten des Wissens ebenso wie in der Dritten Klasse" (Bruner 1970, S. 27).

Auf die Funktion von „ideas" im Forschungsprozess bei DEWEY wurde schon oben eingegangen. Obwohl auch BRUNER Schüler als Forscher im Unterricht sieht, die sich vom Lehrer geeignet ausgewählte Inhalte möglichst selbstständig erarbeiten, ist hier auf einen Unterschied hinzuweisen. BRUNER definiert zunächst „ideas" ebenfalls in einem pragmatischen Verständnis, wenn er über sie schreibt, „their power lies [...] in the fact that ideas provide instruments for experience" (Bruner 1969, S. 120). Anders als DEWEY denkt er sie allerdings vom Unter-

[215] Vgl. (Oelkers 2009, S. 191). Zu beachten ist, dass BRUNER der Kontinuitätsannahme DEWEYs im Bereich des Lernens und des wissenschaftlichen Forschens folgt, jedoch eine Kontinuität des sozialen und gesellschaftlichen Lernens und des schulischen Lernens ablehnt (Bruner 1969, S. 118).

richtsfach aus. BRUNER nennt Unterrichtsinhalte, die besonders geeignet scheinen, geistige Tätigkeiten anzuregen, „fundamental ideas of a science“ (vgl. Kapitel 3.1 und Kapitel 3.3). Bevor sie also durch Lernen zu geistigen Konstrukten des Lernenden werden, gehen „fundamental ideas“ vom Fach aus. Grundsätzlich stimmt BRUNER der Wirksamkeit von „ideas“ beim Problemlösen wie DEWEY sie beschreibt zu. Er widerspricht ihm allerdings in dem Punkt, dass die Fähigkeit des Problemlösens nur aus dem Lerner alleine kommen kann. DEWEY setzt als Ausgangspunkte des Problemlösens die Erfahrungswelt und Interessen des Lerners. BRUNER dagegen argumentiert, dass es Lerninhalte gibt, die nicht vom Lerner her kommen, sondern im Unterrichtsstoff begründet sind. Exemplarisch nennt er als Beispiel die Kommutativität.

> Die Bedeutung des Konzepts der Kommutativität in der Mathematik leitet sich nicht von der gesellschaftlichen Erkenntnis ab, dass zwei Häuser mit jeweils 14 Bewohnern nicht das gleiche sind wie vierzehn Häuser mit jeweils zwei Bewohnern. Es wird eher von der Idee getragen, eine Möglichkeit zu entwickeln, mit Zahlen möglichst elegant und fortsetzbar umzugehen.

(Bruner 1969, S. 121; eigene Übersetzung)

Solche „fundamental ideas“ einer Fachwissenschaft haben im Unterricht allerdings nur dann Berechtigung, wenn sie vom Lernenden (schon) erfasst werden können. Das Ziel des Lernprozesses sieht BRUNER allerdings, stärker als DEWEY, im Aufsteigen in eine theoretische Denkweise.

> Mathematik muss wie alle anderen Unterrichtsinhalte mit aktiver Erfahrung beginnen, aber sie muss zu Abstraktion und Verständnis fortschreiten und dafür ist eine Entwöhnung von der Darbietung oberflächlicher Erfahrungen nötig.

(Bruner 1969, S. 121; eigene Übersetzung)

Vergleicht man BRUNERs Ausführungen mit der Interpretation von DEWEYs Überlegungen oben, zeigt sich, dass diese sich auch im letzten Punkt, BRUNERs eigentlicher Kritik an DEWEY, ähneln. BRUNER stellt allerdings deutlich heraus, dass es die „fundamental ideas“ einer Fachwissenschaft sind, deren Betonung im Unterricht geistige Tätigkeit im Sinne der „progressive inquiry“ anregen können. In diesem Prozess werden „fundamental ideas“ einer Wissenschaft zu „ideas“ eines Lerners und befähigen ihn, über den gelernten Inhalt hinaus zu weiteren Problemlöseprozessen. BRUNERs Verständnis von „ideas“ deckt sich also mit dem DEWEYs. Für ihn sind sie allerdings Mittel zur Konstruktion von Lernarrangements.

All dies zeigt, dass im pragmatischen Verständnis „ideas“ beispielsweise Begriffe, Konzepte, Methoden, Gedanken oder Handlungsregeln sind, deren Wirksamkeit anhand ihrer Konsequenzen bei konkreten Experimenten erprobt wird. Dabei werden sie entweder für wahr angenommen oder im Forschungsprozess weiterentwickelt. Sie sind also variabel. BRUNERs „fundamental ideas“ sind ebenfalls in diesem pragmatischen Sinne zu verstehen. Sie sind allerdings vom Unterrichtsgegenstand aus gedacht und sollen Hinweise zur Planung von Curricula geben. Demnach deckt sich der deutsche Begriff „Idee“ nicht mit dem, was (eben auch von BRUNER) in der traditionellen Verbindung von Demokratie und Erziehung in den USA unter der englischen „idea“ verstanden wurde. Eine „Idee“ ist somit auch wesentlich abstrakter als eine pragmatische „idea“. Diese Tatsache wurde und wird in der deutschsprachigen Forschung kaum berücksichtigt. Bis auf Ausnahme von FÜHRER (Fundamentale Konzepte) nutzen alle Arbeiten den Begriff „Idee“ als Übersetzung für „idea“. Damit geht eine in fast allen Arbeiten nachweisbare, aber nur implizit bewusste Einengung des Begriffs der Fundamentalen Ideen einher. Die Unschärfe des Ideenbegriffs leistet einen Beitrag zur Uneinigkeit über den Begriff der Fundamentalen.[216]

Es gibt im deutschsprachigen Raum auch Versuche, den kantschen Ideenbegriff bei der Diskussion fundamentaler Ideen zu berücksichtigen. Der Informatikdidaktiker SCHWILL hat einen solchen Vorschlag unterbreitet. Er unterscheidet dazu den Begriff der Idee in der Philosophie (nach PLATON und KANT) und in der Pädagogik (nach BRUNER, SCHREIBER und SCHWEIGER), wobei er für beide den Bezeichner „Idee“ wählt. Seine Überlegungen zum KANTschen Ideenbegriff fasst er folgendermaßen zusammen: „Ideen sind idealisierte Vorstellungen, mit denen möglicherweise nicht erfahrbare Ziele verbunden sind; sie kanalisieren jedoch den menschlichen Forschungsdrang und leiten den Verstand an, seinen Erkenntnisbestand in Richtung auf das Ziel auszudehnen, ohne es womöglich jemals erreichen zu können“ (Schwill 2003, S. 78). Daraus leitet SCHWILL das „Zielkriterium“ für Fundamentale Ideen ab, nach dem Ideen „zur Annäherung an eine gewisse idealisierte Zielvorstellung [dienen], die jedoch faktisch möglicherweise unerreichbar ist“ (Schwill 2003, S. 85). Beispielweise ist die Zielvorstellung, die mit der Fundamentalen Idee „Algorithmisierung“ verfolgt wird, „alle Probleme ließen sich durch maschinell nachvollziehbare Verfahren, deren Korrektheit jederzeit gesichert ist, effizient lösen“ (Schwill 2003, S. 89). Letztendlich hat eine solche (Um-)Deutung der Ideentheorie kaum noch etwas mit KANTs Vorstellungen von Ideen (s.o.) gemein. Auch setzt SCHWILL somit voraus, dass Fundamentale Ideen doch als absolut anzusehen sind und auf eine aprioristische

[216] Je nach Auslegung und Zielsetzung ist die Bandbreite der genannten Ideen, wie schon in Kapitel 3.5 für die deutschsprachige Mathematikdidaktik gezeigt, recht groß. Für SCHUPP müssen Fundamentale Ideen Tätigkeiten sein. Nur so können sie das Kriterium der „Archetypizität“ erfüllen, da Handlungen früher vom Lerner erworben werden als Begriffe (Schupp 1992). Auch für SCHWEIGER kennzeichnen Fundamentale Ideen eher den Prozesscharakter von Mathematik, wenn er sie als „Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken“ definiert (Schweiger 1992, S. 207). Bei BENDER/SCHREIBER sind Fundamentale Ideen „wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen“ und können somit auch im Produkt Mathematik liegen (Bender/Schreiber 1985, S. 199).

Zielvorstellungen gerichtet sind. Im Sinne der Bedeutung der englischen „idea“ sollte dies aber gerade nicht der Fall sein.

Abgesehen davon gab es besonders in der zeitlich frühen deutschsprachigen Rezeption einige Ansätze, die zwar den Bezeichner Fundamentale *Idee* verwendeten, allerdings den Begriffsumfang der englischen „idea“ darunter verstanden. SCHREIBER beispielsweise versuchte 1983, die Einengung des deutschen Begriffsverständnisses noch zu umgehen. Er betont, dass zum Finden Universeller Ideen ein logisch-analytisches Verfahren nicht ausreicht. Es bedarf ebenfalls eines historisch-anthropologischen Vorgehens, da Ideen einem vortheoretischen Verständnis entspringen und „zur Sphäre des Alltagsdenkens, der ‚Lebenswelt gehören‘“, welche nicht von logisch-analytischen Untersuchungen erfasst werden kann (Schreiber 1983, S. 68). Somit können Ideen auch einem Wandel unterliegen und stellen daher „keine absoluten Invarianten menschlichen Denkens [dar] wie etwa Kant seine Kategorien als apriorische Stammbegriffe der Vernunft verstanden haben wollte“ (Schreiber 1983, S. 69). Auch die einschlägige Formulierung in SCHREIBERs Definition Universeller Ideen als „allgemeine Schemata, die im Prozess der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozess erst in Gang setzen oder weitertreiben“ verweist auf das pragmatische Verständnis von „ideas“ im Forschungsprozess, wie er von PEIRCE und DEWEY gedacht wurde (Schreiber 1979, S. 166).

Auch VOLLRATHs Begriffsverständnis von Ideen steht jenem von „ideas“ sehr nahe, wenn er darunter den „entscheidenden Gedanken eines Themas, den wesentlichen Kern einer Überlegung, den fruchtbaren Einfall bei der Lösung eines Problems, die leitenden Fragestellungen einer Theorie, die zentrale Aussage eines Satzes, die einem Algorithmus zugrundeliegenden Zusammenhänge und die mit Begriffsbildungen verbundenen Vorstellungen“ zählt (Vollrath 1978, S. 449).

Gerade durch die Arbeiten von SCHREIBER hat das Begriffsverständnis von „ideas“ zumindest implizit auch Einzug in zahlreiche weitere Arbeiten gefunden. Da dort aber meistens lediglich seine drei Kriterien zur Überprüfung der Universalität einer Idee zitiert und angewendet werden, findet keine Explikation des Ideenbegriffs statt. Damit bleiben wichtige Aspekte, die zu einer „idea“ gehören und gerade den Prozess des Mathematiktreibens betreffen, unberücksichtigt.

Die vorliegende Arbeit schließt sich daher für die Erklärung des Begriffs „Fundamentale Idee“ der englischen „idea“ an, behält allerdings den Bezeichner „Fundamentale Idee“ bei, da er in Deutschland zum Schlagwort geworden ist.[217]

[217] Dabei wird bewusst an die Konzeption Fundamentaler Ideen von HUMENBERGER und REICHEL angeknüpft, die auch Einstellungen als Ideen identifizierten und explizit publizieren (vgl. Kapitel 3.5.3).

Fundamentale Ideen sind für die Mathematik und das Mathematiktreiben zentrale Aspekte wie Inhalte, Handlungen und Einstellungen. Ihr Zusammenspiel macht das Wesen der Mathematik aus. Im Mathematikunterricht dienen sie der begründeten Stoffauswahl und der Vernetzung von unterrichtsrelevanten Aspekten von Mathematik wie Inhalten, Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und den Aspekten, welche die Person des Schülers betreffen.

Zu den Inhalten werden dabei auch beispielsweise fachtypische Fragestellungen, Strukturierungs- und Begründungsformen gezählt. Zu den Handlungen gehören nicht nur mathematische Tätigkeiten, sondern auch Heuristiken und weitere Strategien und Methoden. Die Aufnahme von fachtypischen Einstellungen in Anlehnung an die anglo-amerikanische „idea“ stellt die eigentliche Neuerung im Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen in der deutschsprachigen Forschung dar. Sie ermöglicht eine Integration von Persönlichkeitsideen (beispielsweise Kreativität und Intuition), die für den Forschungsprozess wichtig sind, diesen in Gang bringen und halten.

Ausgehend von der Erweiterung des logischen Begriffsverständnisses Fundamentaler Ideen wird nun ein Ideenkatalog vorgestellt, der Mathematik als Prozess und Produkt ganzheitlicher beschreibt.

4.2 Neue Ideen im Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik

Schon in Kapitel 1 wurde der Ideenkatalog von LAMBERT als grundlegend für diese Arbeit vorgestellt. Nun wird er in seiner ganzen Breite theoretisch fundiert. Vorab werden dazu einige grundlegende Erklärungen zur Einteilung der Ideen in die einzelnen Kategorien und deren Verortung auf einer abstrakteren und einer konkreteren Ebene gegeben. Zusätzlich findet eine Verknüpfung des Katalogs mit dem bisherigen Forschungsstand statt. Dies geschieht durch Einordnung der Ideenkategorien in das (zuvor erweitere) Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik. Dadurch wird ersichtlich, wo der Ideenkatalog nach LAMBERT Lücken im bisherigen Forschungsstand schließt.

LAMBERT weist in (Lambert 2012a) erstmals darauf hin, dass es neben den klassischerweise als Fundamentale Ideen diskutierten Prototypen (vgl. Kapitel 3) noch andere Ideen gibt, die für die Mathematik ganz wesentlich sind und bisher kaum Berücksichtigung fanden. Um also Mathematik ganzheitlicher durch eine Theorie Fundamentaler Ideen zu fassen, gibt LAMBERT folgende Kategorisierung an:

- *Inhaltsideen*: Zahl, Maß, Raum und Form, Funktion, Zufall;
- *Schnittstellenideen*: Kommunizieren, Modellieren, Argumentieren, Problemlösen, Darstellen, Fragen;
- *Begriffsideen*: Objekte, Netze, Ordnungen, Charakterisierung;
- *Prozessideen*: Strategien, Heuristiken, Handlungen;

- *Tätigkeitsideen*: Approximieren (insbesondere Optimieren), Algorithmisieren, Dualisieren, Vernetzen, Ordnen, Strukturieren, Formalisieren, Exaktifizieren, Passen[218], Verallgemeinern, Deduzieren;[219]
- *Theorieideen*: Gebiete, Erkenntnis- und Begründungskulturen, Systeme und Sprache.

Weiterhin betont er, dass besonders der Bereich „Nichtkognitiver" Ziele des Mathematikunterrichts von bisherigen Theorien Fundamentaler Ideen „nur unzureichend erfasst" ist (Lambert 2012a, S. 4). Daher wird in der vorliegenden Arbeit die Ideenkategorie der *Persönlichkeitsideen* hinzugefügt.[220] Diese umfasst

Interesse und Neugier, Intuition, Beharrlichkeit und Kreativität.

Weiter sei schon hier darauf hingewiesen, dass viele der Tätigkeitsideen auch metakognitiv eine Rolle spielen. Diese Eigenschaft der Ideen ist für die später folgende unterrichtspragmatische Reduktion und für die in Kapitel 6 vorgestellte unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen von Bedeutung. So hat das Bewusstmachen von Heuristiken beim problemorientierten Arbeiten im Unterricht metakognitive Auswirkungen. Auf solche wurde in der didaktischen Literatur schon mehrfach hingewiesen.[221] Die Ideen „Strukturieren" und „Ordnen" dienen nicht nur dem Erfassen und Bearbeiten mathematischer Situationen, sondern auch der (bewussten) Steuerung und Organisation eigener Denkprozesse.

Dies wird auch hier genutzt: Zusätzlich zur Erweiterung des Begriffsverständnisses scheint (deren unterrichtliche Nutzung im Blick habend) eine stärkere Strukturierung der Ideenkategorien angebracht. Es fällt auf, dass die oben genannten Ideen im Grad ihrer Konkretisierung differieren. Daher ist ihre Aufteilung in eine abstrakt(er)e Ebene und eine konkret(er)e Ebene sinnvoll.

Auf einer abstrakt(er)en Ebene können folgende Ideenkategorien geordnet werden …

---

[218]„Passen" umfasst hier (anders als bei BENDER/SCHREIBER) meta-mathematische Aspekte, z.B. das „(An-)Passen" eines Axiomensystems an einen Sachverhalt.

[219] Dies sind eher innermathematische Tätigkeiten, die in der Auflistung von mathematisch nach meta-mathematisch geordnet sind.

[220] Die Kategorie der Persönlichkeitsideen (vormals „Nichtkognitive" Ideen) hat sich im Laufe der Theoriebildung der vorliegenden Arbeit stark verändert. Die Entwicklung wird in Kapitel 4.5 thematisiert. Damals wie aktuell drückt sie aus, dass Mathematiker im Prozess des Forschens (und Lernens) bestimmte Einstellungen ausprägen, die nicht vollständig kognitiv beschrieben werden können. Die genannten Persönlichkeitsideen umfassen daher alle auch emotionale und affektive Komponenten.

[221] Vgl. (Führer 1997, S. 68 ff.).

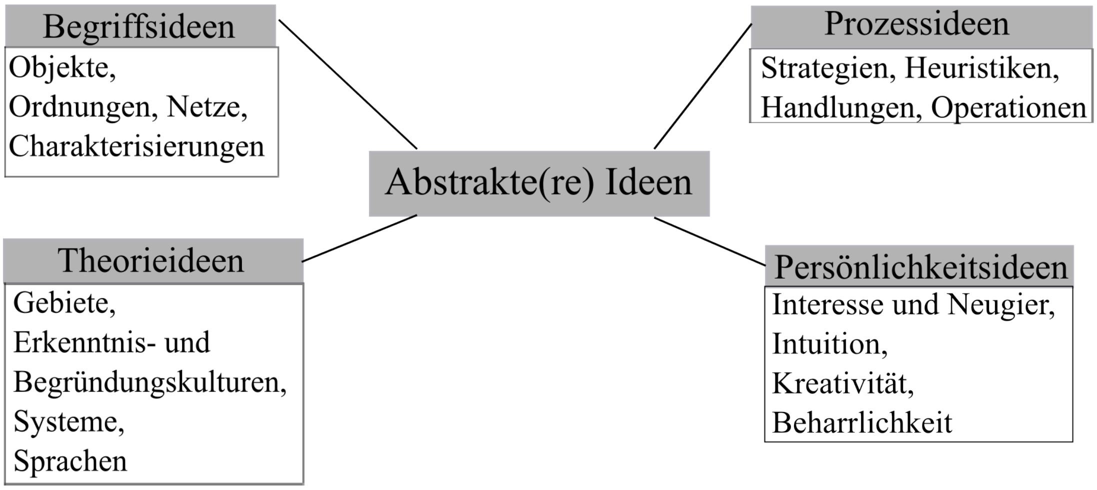


Abbildung 19 Abstrakte(re) Ideen (Poster)

… und auf einer konkret(er)en Ebene diese:

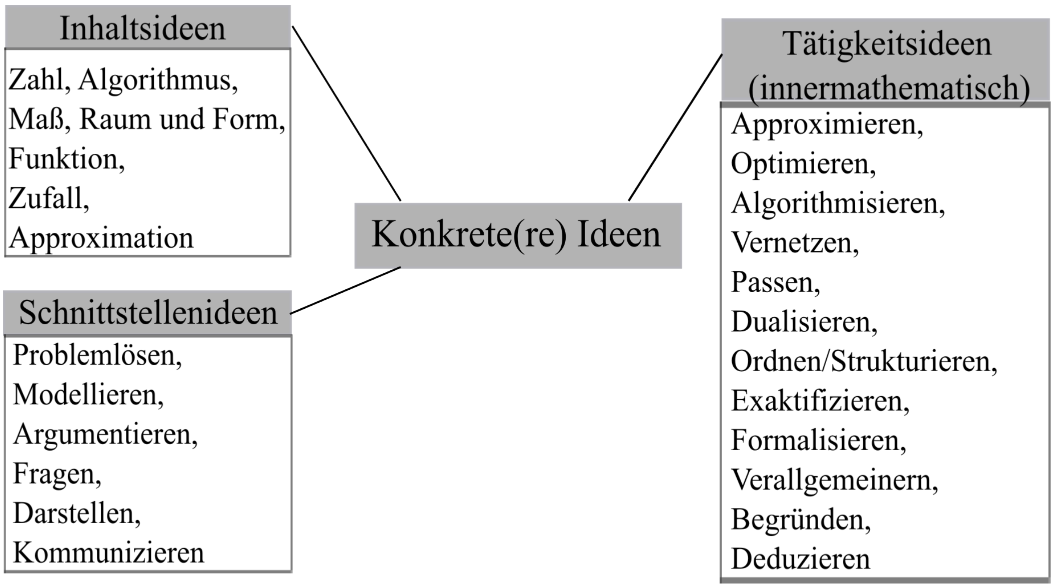


Abbildung 20 Konkrete(re) Ideen (Poster)

Die Auflistung der Ideen zeigt, dass die Ideen der zweiten Ebene nicht immer Konkretisierungen der abstrakten Ideen sind. Auf Entsprechungen bzw. Unterschiede zwischen den Ideen der beiden Ebenen wird bei der später vorgestellten unterrichtspragmatischen Reduktion eingegangen. Dort bilden die Unterteilung der Ideenkategorien nach ihrem abstrakteren und konkreteren Charakter sowie die Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien, wie sie in dargestellt sind, die Basis für die vorgestellte unterrichtspragmatische Reduktion (vgl. Kapitel 5).

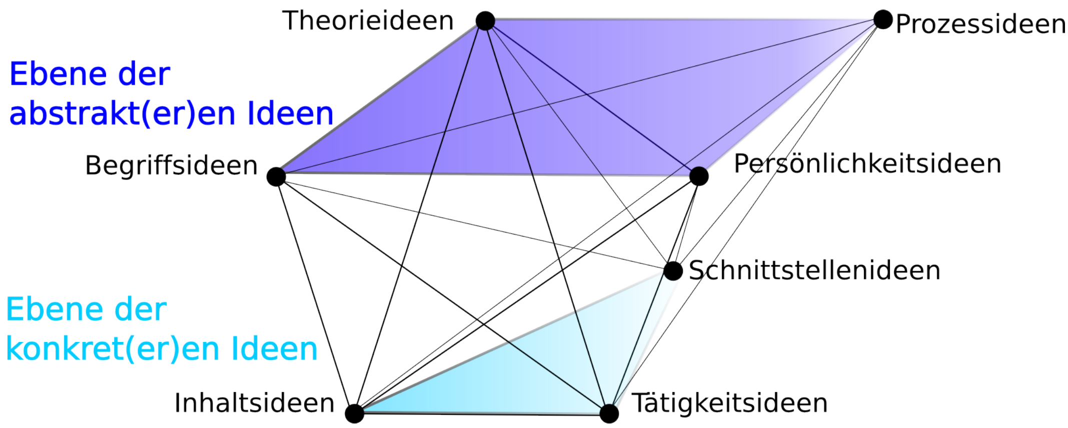


Abbildung 21 Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien (Poster)

In der Analyse verschiedener Beiträge aus der mathematischen Fachdidaktik zur Theorie Fundamentaler Ideen wurde gezeigt, dass Fundamentalen Ideen eine besondere Rolle bei der Beschreibung des Spannungsverhältnisses Welt/Mensch ←→ Mathematik zukommt. In den beiden Urtheorien von BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER dienen Fundamentale Ideen jeweils (u.a.) der Verankerung von Mathematik im Alltagsdenken. BENDER/SCHREIBER fassen diese Verbindung von Mathematik und Welt im „Sinn“-Kriterium Universeller Ideen zusammen. SCHWEIGER spricht von deren „Archetypizität“. Mit dieser Grundlegung in den Urtheorien ist die antizipierende Wirkung, die Fundamentale Ideen bei der Erschließung von Mathematik einerseits und bei der Nutzung von Mathematik in der Welt andererseits haben, in alle weiteren Arbeiten zu ihrer begrifflichen Fassung zumindest implizit eingegangen.

Gerade Arbeiten jüngeren Datums betonen diesen Aspekt wieder stärker. In Kapitel 2 wurde diskutiert, dass sich in den aktuell verbindlichen Leitideen und Kompetenzen der KMK-Bildungsstandards der Anwendungscharakter von Mathematik widerspiegelt. Auch HEYMANN sieht die Wirkung Fundamentaler Ideen grundsätzlich darin, dass sie zu „kultureller Kohärenz“ beitragen und somit Mathematik in Beziehung zur übrigen Kultur (zur Welt) setzen. Dabei gliedert HEYMANN seinen Ideenkatalog auch gerade nach der Verortung seiner Ideen im Spannungsverhältnis zwischen Wirklichkeit und Mathematik. Die mathematischen „Uraktivitäten“ Zählen, Messen und räumliches Strukturieren, die die gesamte Alltagskultur durchdringen, sind eher auf der Seite Wirklichkeit eingeordnet. Dagegen rücken die Ideen des funktionalen Zusammenhangs und des Algorithmus näher an die Seite Mathematik. Zwar spielen diese, besonders in der Lesart HEYMANNs, eine wichtige Rolle bei der Erschließung der außermathematischen Umwelt, doch sind sie nicht mehr sinnlich erfahrbar und somit von den erstgenannten zu trennen (Heymann 1995, S. 178). Die Einordnung der Ideen kann wie folgt im Spannungsverhältnis Welt ←→ Mathematik veranschaulicht werden.

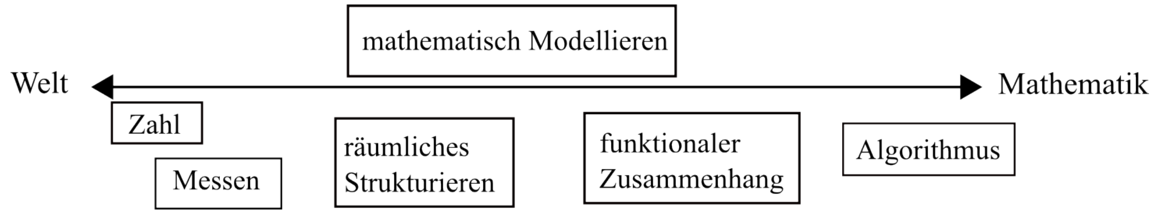


Abbildung 22 Visualisierung der von HEYMANN beschriebenen Einordnung seines Ideenkatalogs in das Spannungsverhältnis Welt←→Mathematik

Eine solch explizite Verortung in obiges Spannungsverhältnis wird auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit weiter verfolgt. Allerdings mit zwei wesentlichen Erweiterungen.

Zunächst wurde schon in Kapitel 2.1 darauf hingewiesen, dass die Überbetonung des Anwendungscharakters wesentliche Aspekte von Mathematik ausblendet. Diese Defizite werden im Vergleich mit den drei Grunderfahrungen nach WINTER deutlich.

> Mathematik kann zur Allgemeinbildung beitragen, wenn der mathematische Unterricht folgende Grunderfahrungen ermöglicht:
>
> (1) Erscheinungen der Welt um uns, die alle angehen oder angehen sollen, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahrnehmen und zu verstehen,
>
> (2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfung, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,
>
> (3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

(Winter 1996, S. 35)

Eine Theorie Fundamentaler Ideen sollte daher auch eine Beschreibung von Mathematik liefern, die Mathematik auch als geistige Schöpfung eigener Art berücksichtigt. Mithilfe der Theorie-, Begriffs- und Inhaltsideen des Ideenkatalogs nach LAMBERT wird dies geleistet.

Die zweite Erweiterung bezieht sich auf die Seite *Welt*. HEYMANN konzipiert seine Theorie Fundamentaler Ideen als Teil einer bildungstheoretischen Verankerung von Mathematik an allgemeinbildenden Schulen. Neben der Stiftung kultureller Kohärenz bezieht er in diesem größeren Theorierahmen auch Aspekte mit ein, die auf soziale und emotionale Entwicklung des Schülers zielen und durch Mathematik gefördert werden können. HEYMANN nennt hier speziell „kritischer Vernunftgebrauch“, „Verantwortungsbereitschaft“, „Verständigung und Kooperation“ und „Stärkung des Schüler-Ichs“ (Heymann 1995, S. 47). Im Zusammenhang mit diesen Aspekten wird Mathematik nicht als Werkzeugkasten zum Problemlösen in der Welt genutzt, sondern zielt auf die Entwicklung von Persönlichkeitsmerkmalen ab. Es geht also nicht mehr um die Welt, sondern um die

Person, die sich mit Mathematik beschäftigt. Diese Person bedient sich der Mathematik und Mathematik wirkt auch auf die Entwicklung der Person zurück, indem sie fachtypische Denkweisen und Einstellungen zum Forschen zur Verfügung stellt. Dabei wird die Herangehensweise, aber auch die Wahrnehmung von Problemen, um eine fachspezifische Art bereichert.

Um zu betonen, dass nicht nur Mathematik und Welt sich gegenseitig beeinflussen, sondern dem Menschen als handelnde Person eine zentrale Rolle zukommt, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit im Spannungsverhältnis die Seite Welt um den Menschen erweitert.

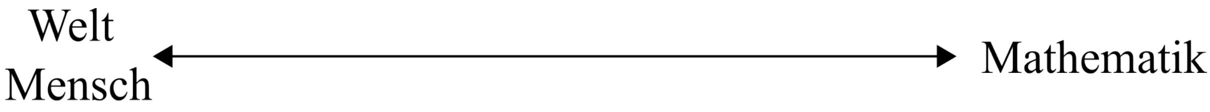


Abbildung 23 Erweitertes Spannungsverhältnis

4.2.1 Exkurs: Potentiale des erweiterten Spannungsverhältnisses

Abbildung 23 zeigt das für die vorliegende Arbeit ausgewählte erweitere Spannungsverhältnis, welches durch die vorgestellte Theorie Fundamentaler Ideen beschrieben werden kann. Grundsätzlich stellt sich das erweiterte Spannungsverhältnis, welches durch die Hinzunahme der dritten Komponente „Mensch" zu den Kompenenten „Welt" und „Mathematik" entstand, in einer allgemeineren Form dar.

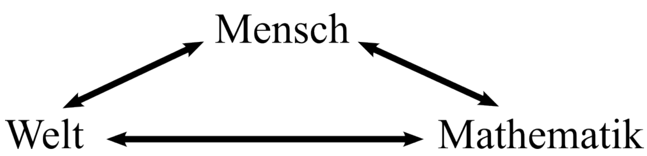


Abbildung 24 Spannungsverhältnis mit den Komponenten Mensch - Welt - Mathematik

Dadurch, dass das erweitere Spannungsverhältnis drei Komponenten enthält, ergeben sich verschiedene Möglichkeiten, wie diese zueinander in Verbindung gesetzt werden können. Je nach Blickwinkel kann eine Komponente als Vermittler der beiden anderen auftreten. Denkbar sind folgende drei Fälle:

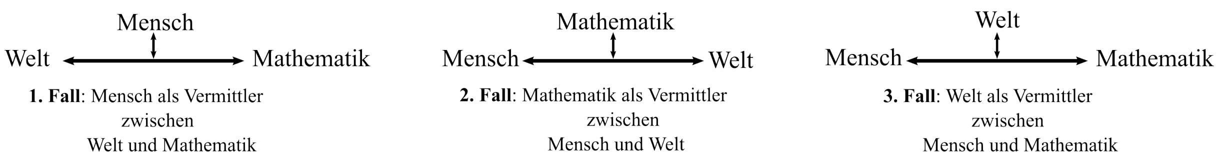


Abbildung 25 Drei Fälle, in denen jeweils eine Komponente des erweiterten Spannungsverhältnisses als Vermittler zwischen den anderen beiden auftritt

Alle drei Fälle spielen im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Rolle. Der erste Fall, in dem der Mensch als Vermittler zwischen Welt und Mathematik auftritt, wird in Kapitel 4.3.2 bei der Erläuterung der Begriffsidee „Objekte" exemplarisch mitdiskutiert. Bei der Suche nach Antworten auf die zentrale Frage, ob Mathematik vom Menschen erschaffen oder nachempfunden wird, versucht der Mensch

Welt und Mathematik in Beziehung zu setzen. Mögliche Antworten beschreibt der Mensch im Wesentlichen durch zwei vorherrschende konträre Theorien (Realismus und Konstruktivismus) und setzt somit Welt und Mathematik in Beziehung.

Der zweite Fall, in dem Mathematik als Vermittler zwischen Mensch und Welt auftritt, bettet die Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten in Bildungsdebatten. Mathematik kann als Medium einer palintropischen Beziehung zwischen Mensch und Welt verstanden werden. Diese Deutung von Mathematik wurde von SCHUPP aus philosophischen und pädagogischen Arbeiten in die mathematikdidaktische Diskussion eingebracht (Schupp 2004). Seine Argumentation liefert einen allgemeinen Rahmen für die Erläuterung der Wichtigkeit von Persönlichkeitsideen, die in Kapitel 4.5 der vorliegenden Arbeit erneut aufgegriffen wird.

Ebenfalls zur Erläuterung der Persönlichkeitsideen in Kapitel 4.5 dient der dritte Fall, in dem die Welt als Vermittler zwischen Mensch und Mathematik angesehen wird. Im Unterschied zum zweiten Fall beschreibt der dritte Fall den konkreten Umgang von Mensch mit Mathematik, die ja nicht losgelöst von der den Menschen umgebenden Welt stattfindet. Das Erfahrungsfeld des Menschen hat Einfluss auf die Art und Weise, wie dieser sich mit Mathematik beschäftigt. Auf die Wichtigkeit der Berücksichtigung individueller Sichtweisen auf Mathematik hat BOROVCNIK im Zusammenhang mit Intuitionen hingewiesen (Borovcnik 1992). Bei der Vorstellung der Idee „Intuition“ in der vorliegenden Arbeit wird daher auf diese Sichtweise des erweiterten Spannungsverhältnisses und BOROVCNIKs Argumentation zurückgekommen.

Für die nun folgende Erläuterung der Ideenkategorien wurden in der vorliegenden Arbeit die Komponenten „Mensch“ und „Welt“ zusammengefasst, da es hier bei der Entwicklung einer Theorie Fundamentaler Idee nicht vornehmlich um die Beschreibung der gegenseitigen Einflüsse von Mensch und Welt geht. Stattdessen wird der Katalog Fundamentaler Ideen genutzt, um Beziehungen zwischen *Mensch* und *Welt* auf der einen Seite und *Mathematik* auf der anderen Seite zu beschreiben.

4.2.2 Einordnung der Ideenkategorien in das erweitere Spannungsverhältnis

Oben wurde schon angedeutet, dass die Seite *Mathematik* und das Zusammenspiel beider Seiten durch obigen Ideenkatalog beschrieben werden kann. Auch die erweiterte Seite *Welt/Mensch* im Spannungsverhältnis kann durch die vorliegende Theorie Fundamentaler Ideen zumindest teilweise gefasst werden. Die Kategorie der Persönlichkeitsideen beinhaltet Persönlichkeitsmerkmale, Erkenntnisarten und Einstellungen, die für das Mathematiktreiben wesentlich sind. Sie ist daher auf der Seite *Welt/Mensch* zu verorten.

Somit kann das Ideensystem das erweiterte Spannungsverhältnis in größerer Breite beschreiben. Dazu sind die Ideenkategorien wie folgt eingeteilt.

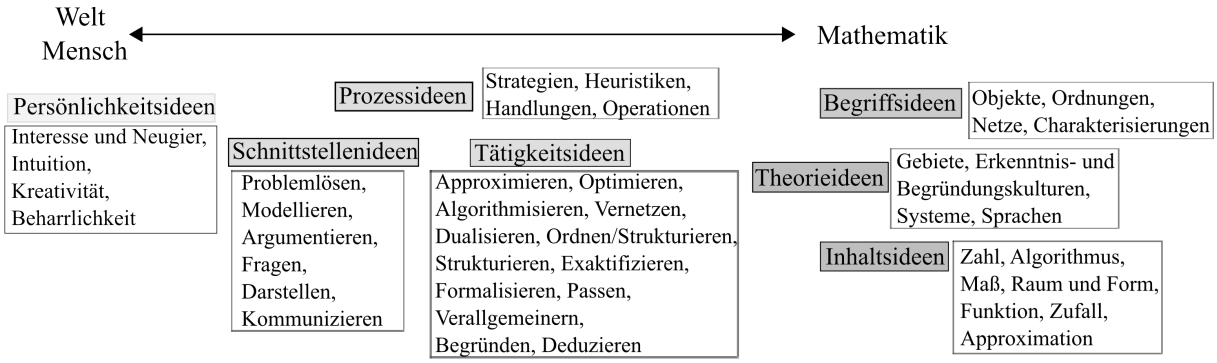


Abbildung 26 Die Ideenkategorien eingeordnet in das Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik (Poster)

Im genannten Spannungsverhältnis lassen sich die Begriffs-, Inhalts- und Theorieideen auf der Seite *Mathematik* verorten. Begriffs- und Inhaltsideen enthalten mathematische Inhalte verschiedener Gebiete und Ideen, die bei mathematischen Begriffen bedeutsam sind, wie beispielsweise die Objekte, die unter diese Begriffe fallen (sollen), und die Ordnungen dieser Begriffe zu (Begriffs-)Netzen. Diese beiden Ideenkategorien dienen also einer direkten Beschreibung und Ordnung von Mathematik. Gebiete und Erkenntnis- und Begründungskulturen, die in den Theorieideen zusammengefasst sind, beschreiben hingegen nicht in erster Linie Inhalte von Mathematik, sondern deren Rahmen. Sie enthalten wissenschaftshistorische Veränderungen und gesellschaftliche sowie bildungspolitische Einflüsse auf Mathematik(-unterricht). Beispielsweise unterliegt es einem stets wandelbaren wissenschaftlichen Zeitgeist, bestimmte Inhalte zu Gebieten zusammenzufassen, und einem bildungspolitischen Zeitgeist, aus den Gebieten der Mathematik jene für den Mathematikunterricht auszuwählen. Auch der geforderte Grad von Strenge bei Begriffsdefinitionen oder Beweisen kann sich verändern.[222] Die Theorieideen liegen daher auf einer Meta-Ebene, die sowohl Begriffsideen als auch Inhaltsideen beeinflusst.

Bei den Theorieideen deutet sich schon der Einfluss der Seite *Welt/Mensch* auf die Seite *Mathematik* an. Das direkte Zusammenspiel dieser beiden Seiten wird in obigem Modell durch Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen beschrieben. Die abstrakt(er)en Prozessideen stehen dafür, dass Mathematiker[223] bei der Beschäftigung mit Mathematik typische Vorgehensweisen entwickeln, die sich in Strategien, Heuristiken, Handlungen und Operationen (als umkehrbar denkbare Handlungen) einteilen lassen. Schnittstellen- und Tätigkeitsideen umfassen den

[222] Ein Beispiel hierfür sind die Auswirkungen der Strukturmathematik, vgl. Kapitel 3.2.2 und 3.2.3.

[223] Mit diesem Bezeichner sind hier alle Mathematiktreibenden gemeint und nicht nur beruflich Professionalisierte.

konkreten Umgang von Menschen mit Mathematik. Die Schnittstellenideen gehen dabei eher von der Mathematik aus, in dem Sinne, dass der Mensch ein konkretes mathematisches Problem löst und dazu modelliert, kommuniziert, fragt. Tätigkeitsideen sind (eher) umgekehrt gerichtet. Hier wirkt der Mensch auf Mathematik, indem er Operationen mit und auf mathematischen Inhalten (z.B. das Optimieren einer Zielfunktion) oder mit und auf Mathematik selbst (z.B. beim Formalisieren eines Sachverhaltes) ausführt.

Die Persönlichkeitsideen können auf der Seite *Welt/Mensch* eingeordnet werden. Diese Ideenkategorie ist der Diskussion um Fundamentale Ideen zumindest in solch expliziter Form neu. Ihre Begründung soll daher an dieser Stelle schon angerissen werden.

Zunächst ist unstrittig, dass Mathematik und der Prozess des Mathematiktreibens (ob als Wissenschaft oder im Unterricht) nicht nur aus kognitiven Komponenten besteht. Beispielsweise stellte GODFREY HEROLD HARDY 1940 in seinem Buch „A Mathematician's Apology" heraus, dass zum Mathematiktreiben Kreativität und Geschmack - typische Ziele eines ästhetischen Faches - gehören. Er beschreibt den Mathematiker als „maker of patterns", ähnlich wie Maler und Poeten (Hardy 2005, S. 13). Mathematiker unterscheiden sich allerdings von Malern und Poeten dadurch, dass ihre Muster unsterblich sind.

> If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas [...] A mathematician [...] has no material to work with but ideas, and so his patterns are likely to last longer, since ideas wear less with time than words.

(Hardy 2005, S. 13-14)

„Ideas" sind die Bausteine mathematischer Muster, die letzteren Bedeutung verleihen (Hardy 2005, S. 17). Dazu müssen „ideas" zwei Kriterien erfüllen, von denen das erste wesentlich für die Begründung der Persönlichkeitsideen ist.[224]

> The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.

(Hardy 2005, S. 14)

Ideen zeichnen sich also durch ästhetische Momente wie Harmonie und Schönheit aus. Das Kreieren von auf Ideen basierenden Mustern bildet für HARDY das Wesen von Mathematik. Er beschreibt Mathematik in diesem Sinne als „creative

[224] Als zweites Kriterium nennt HARDY „significance": „We may say, roughly, that a mathematical idea is 'significant' if it can be connected, in a natural and illuminating way, with a large complex of other mathematical ideas" (Hardy 2005, S. 16). Auch HARDY räumt „ideas" eine wichtige Rolle bei der Vernetzung mathematischer Inhalte ein. Darauf wird in Kapitel 5.1 zurückgekommen.

art“ (Hardy 2005, S. 30). Hierauf wird bei der Beschreibung der Idee „Kreativität“ in Kapitel 4.5 weiter eingegangen.

Auch in (manchen) kompetenzorientierten Bildungsstandards spielen Persönlichkeitsideen eine Rolle, wie ein Blick in die österreichischen Standards für die AHS Oberstufe zeigt. Dort findet sich der „Schöpferisch-kreative Aspekt“ von Mathematik, der Mathematik als Schule des Denkens, die Phantasie anregt und Kreativität fördert, betont (BMUKK 2004, S. 1).

Bruner wusste ebenfalls um die Bedeutung von Persönlichkeitsideen. Er weist darauf hin, dass es zusätzlich zum inhaltlichen Erfassen auch bestimmter Einstellungen, Freude beim Lernen und Kreativität beim Entdecken von Zusammenhängen bedarf, um einen Lerngegenstand ganzheitlich zu verstehen (vgl. von der Bank 2013, S. 102).

Auch Winter stellt in seinem Klassiker „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“ die Wichtigkeit von kreativen Prozessen beim entdeckenden Lernern heraus.

> Und genau die hier vertretene These, dass Lernprozesse umso erfolgreicher sind, je mehr die Lernenden bei der Entwicklung ihrer eigenen Handlungskompetenzen selbst aktiv (einschließlich emotionaler Eingebundenheit) beteiligt sind, macht das Betrachten kreativer Prozesse didaktisch interessant.

(Winter 2016, S. 217)

Besonders im Zusammenhang mit den unterschiedlichen Schritten des Problemlösens nach Pólya sieht Winter Möglichkeiten, kreatives Arbeiten im Mathematikunterricht zu verankern (vgl. Kapitel 4.5).

Sich Bruner anschließend haben andere Fachwissenschaften die Wichtigkeit „Nichtkognitiver“ Aspekte erkannt und diskutieren sie in ihren Theorien Fundamentaler Ideen mit. Der Ideenkatalog von Schwill, der für die Informatikdidaktik prägend ist, enthält die Idee „Teamarbeit“ (Schwill 1993). Weiter findet sich im Vorschlag für Bildungsstandards für das Fach Informatik der GI der Inhaltsbereich „Informatik, Mensch und Gesellschaft“, der einen verantwortungsvollen Umgang mit digitalen Medien und Daten enthält und so auf bestimmte Werthaltungen abzielt (GI 2008).

Eine Betonung von Persönlichkeitsideen in der Mathematikdidaktik hat somit Anknüpfungspunkte in Mathematik und „verwandten“ Fachdidaktiken. Besonders auf die Diskussion von fachmathematischer Seite wird in Kapitel 4.5, bei der ausführlichen Begründung dieser Ideenkategorie, erneut eingegangen.

Es fällt auf, dass die im Spannungsverhältnis eingeordneten Kategorien teilweise mehr Fundamentale Ideen enthalten als der ursprüngliche Katalog von Lambert. Die Inhaltsideen, die im Katalog wichtige inhaltliche Aspekte der klassischen Stoffgebiete des Mathematikunterrichts repräsentieren, wurden um die

Ideen „Algorithmus“ und „Approximation“ erweitert. Diese Ideen liegen quer zu den vorher schon genannten Ideen und bieten somit Vernetzungsmöglichkeiten. Zudem verweisen sie auf Gebiete der Mathematik, die bisher noch kaum Berücksichtigung im Mathematikunterricht fanden, wie beispielsweise die Diskrete Mathematik. Zu den Prozessideen gehören nun auch Operationen als umkehrbar denkbare Handlungen. Diese Unterscheidung erfasst die Entwicklungstheorie PIAGETs besser und macht die im Lernprozess verfolgbaren kognitiven Stufen deutlicher. Auch einzelne Tätigkeitsideen sind nun stärker differenziert. Die Idee „Deduzieren“ wurde in „Begründen“ und „Deduzieren“ aufgeteilt, um zu verdeutlichen, dass es in der (Schul-)Mathematik auch Arten des Begründens gibt, die nicht deduktiv sind.[225] Die Kategorie der Persönlichkeitsideen machte die stärkste Entwicklung bei der Begriffsbildung Fundamentaler Ideen durch. Ausschlaggebend für die Einführung neuer Bezeichner und Begriffe in der vorliegenden Arbeit war die fälschliche Assoziation mit affektiven Zielen, wie sie in der Phase der Lernzielorientierung des Mathematikunterrichts von kognitiven und motorischen Zielen unterschieden wurden. Für eine ausführliche Begründung der Persönlichkeitsideen sei auf Kapitel 4.5 verwiesen.

Die Ausschärfung des Ideenkatalogs erfolgte, ähnlich wie bei SCHWEIGER,[226] durch wechselseitige Reflexion der vorhandenen Prototypen und der logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen. Anhand immer tieferer Analysen der in der fachdidaktischen Diskussion vorherrschenden Ideenkonzepte wurden die

---

[225] Auch in der Mathematik gibt es andere Formen des Beweisens, auch wenn diese in Teilen dann doch wieder deduktiv vorgehen. Ein Beispiel hierfür ist „FERMATs Letzter Satz“. Nachdem PIERRE DE FERMAT um 1937 seine Vermutung, dass es keine nichttriviale ganzzahligen Lösungen x, y, z für die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ mit einer natürlichen Zahl $n \geq 3$, gibt, als Randnotiz in den zweiten Band von DIOPHANTOS' *„Arithmetika“* schrieb, folgten Jahrhunderte lang Versuche, den Beweis zu formulieren. FERMAT berichtet in dieser Randnotiz ebenfalls, dass er einen „wirklich wunderbaren Beweis dieser Tatsache“ entdeckt habe, dieser Beweis findet sich allerdings nicht in seinen Nachlass (Lexikon der Mathematik 2001, S. 146). Erst 1995 gelang ANDREW WILES der Beweis der Aussage für allgemeine n. Zuvor waren Beweise von Teilaussagen geliefert worden, beispielweise konnte die Richtigkeit der Aussage für $n = 3; 4; 5$ gezeigt werden. Eine erste Reduktion des allgemeinen Falls stellte dann die Beschränkung auf Primzahlen größer als zwei für den Exponenten dar (Lexikon der Mathematik 2001, S. 147-148). Für die oben angesprochene Art des Begründens ist wichtig, dass alle Anstrengungen darauf gerichtet waren, die Gültigkeit der Vermutung von FERMAT zu zeigen. Man ging also davon aus, dass FERMAT als große mathematische Persönlichkeit seiner Zeit eine richtige Aussage formuliert hat, auch wenn er den Beweis nicht dokumentierte. Auch die später gängige Bezeichnung als „Satz“ und nicht als „Vermutung“ deutet an, dass die Aussage schon vor ihrem Beweis für wahr gehalten wurde. Zweifel wurde nur an der Formulierung des Beweises geäußert, da der Beweis im Nachhinein nicht so „wunderbar“, sondern mit großem technischen Aufwand und einigen Mitteln, die zu FERMATs Zeiten noch nicht zur Verfügung standen, zu verwirklichen war.

FISCHER und MALLE nennen die Art des Schließens, bei der Aussagen für wahr gehalten werden, wenn ihre Richtigkeit von einem „glaubwürdigen Zeugen“ (in obigem Fall wäre das FERMAT selbst) bestätigt wird, „Berufung auf eine Autorität“ (Fischer/Malle 2004, S. 179). Diese Art des Schließens sollte natürlich, so wie es bei „FERMATs letztem Satz“ auch geschah, von weiteren Arten des Schließens begleitet werden, da sich auch Autoritäten irren können.

[226] Vgl. Kapitel 3.5.2.

Prototypen des vorliegenden Katalogs an der hier fokussierten Zielsetzung, der unterrichtlichen Nutzung Fundamentaler Ideen, gemessen. Dies führte dann in der vorliegenden Arbeit zur Erweiterung und stärkeren Präzision der Ideen.[227]

Die Gliederung der Ideenkategorien nach ihrem abstrakteren und konkreteren Charakter und ihre Einordnung in das Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik bildet eine Basis zur ausführlichen Beschreibung der einzelnen Ideen, die nun erfolgen soll. Dabei wird sich zeigen, dass einige der Ideenkategorien von LAMBERT sich aus bereits vorhandenen Ideenkatalogen ableiten und diese stärker strukturieren. Mit den Kategorien, die sich im Spannungsverhältnis eher auf Seite der Mathematik befinden, wird nun begonnen.

4.3 Die Seite Mathematik

Die Ideenkategorien der Theorie-, Begriffs- und Inhaltsideen sind im erweiterten Spannungsverhältnis auf der Seite *Mathematik* eingeordnet. Die Theorie- und Begriffsideen wurden dabei als abstrakter charakterisiert als die Inhaltsideen, da die in ihnen zusammengefassten Ideen wie „Gebiete“ oder „Begriffe“ abstrakter sind als die Ideen der Inhaltsideen wie beispielweise „Zahl“, die schon auf konkrete mathematische Inhalte abzielen.

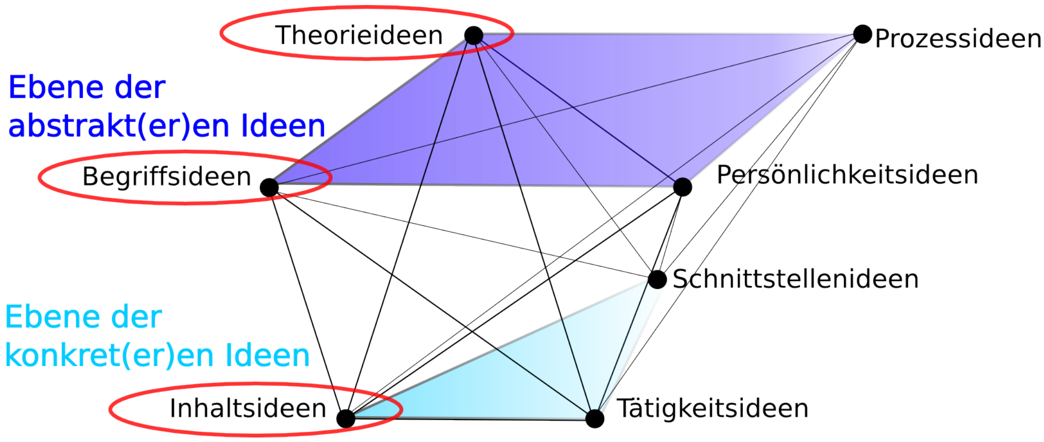


Abbildung 27 Abstraktere Theorie- und Begriffsideen sowie konkretere Inhaltsideen

4.3.1 Die Kategorie der Theorieideen

Theorieideen liegen auf einer Meta-Ebene der Seite *Mathematik,* da sie Begriffs- und Inhaltsideen beeinflussen. Sie tragen der Tatsache Rechnung, dass das vorherrschende Bild von Mathematik einem ständigen Wandel unterliegt. Nicht selten haben neue inhaltliche (Weiter-)Entwicklungen zu einem veränderten Verständnis von Gebieten, Erkenntnis- und Begründungskulturen, von Systemen

[227] Dieses Verfahren der wissenschaftlichen Analyse und damit verbundener Entwicklung des Katalogs ist prinzipiell nicht abgeschlossen. Obiger Katalog ist demnach grundsätzlich reversibel und offen zu denken. Für das hier angestrebte Ziel stellt er in seiner jetzigen Form eine solide Diskussionsgrundlage dar.

und der zu verwendenden Sprache geführt. „Theorien sind Sichtweisen (von Menschen)" halten FISCHER und MALLE treffend fest (Fischer/Malle 2004, S. 142). Sie haben eine Entwicklung durchlaufen und dienen bestimmten Zwecken, welche inner- oder außermathematischer Natur sein können. Zudem sind in ihnen (und in den Begriffen, die eine Theorie verwendet) gewisse sozial-kommunikativen Interessen codiert, die zu ihrer Entstehung beigetragen haben. Ihr Ausblenden beim Umgang mit Mathematik führt zu Kommunikationsproblemen zwischen Experten und Laien und kann dadurch Lernprozesse hemmen (Fischer/Malle 2004, S. 146).

Solche Merkmale, wie das Verhältnis von Anschauung und logischer Deduktion bei Erkenntnis- und Begründungskulturen mathematischer Inhalte, der Grad an Strenge und Formalismus der verwendeten Sprache und die jeweils betrachteten Systeme, die zur Gliederung der Mathematik in unterschiedliche Gebiete herangezogen werden, gilt es daher bei einer Theorie Fundamentaler Ideen mitzudiskutieren. Schon in den Konzeptionen Universeller Ideen BENDERs und SCHREIBERs sowie den Überlegungen FISCHERs zum allgemeinbildenden Wert Fundamentaler Ideen finden sich Hinweise hierzu.[228] Problematisch sind diese Überlegungen dahingehend, dass gerade der historisch-anthropologische Aspekt Fundamentaler Ideen in der aktuellen Forschung häufig ausgeblendet wird.[229] Die Kategorie der Theorieideen bezieht diesen Aspekt wieder explizit in die Forschungsdebatte ein.

Die Wichtigkeit der genannten Merkmale wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit exemplarisch an Entwicklungen innerhalb der Fachwissenschaft Mathematik, aber auch an Veränderungen im Mathematikunterricht verdeutlicht. Alle zu behandelnden Entwicklungsrichtungen können dabei hier nur angerissen werden. Zur Erläuterung der Ideen „Erkenntnis- und Begründungskulturen" und „Systeme" dienen die Entwicklungen innerhalb der Mathematik, die im Zusammenhang mit dem modernen axiomatischen Aufbau der Geometrie nach HILBERT und der Anwendung des Formalismus auf die gesamte Mathematik einhergingen. Für den schulischen Mathematikunterricht wird auf die Entwicklungen, die unter den Schlagworten „Los von Euklid!" zusammengefasst werden können, ab-

---

[228] Vgl. Kapitel 3.5.1 und 3.5.2. In abgeschwächter Form findet sich ein Bezug zwischen Fundamentalen Ideen und der Genese der Mathematik auch bei SCHWEIGER. FISCHERs Einbezug sozial-kommunikativer Aspekte, die in Fundamentalen Ideen codiert sein sollen, wurde zuletzt von BOROVCNIK zum Aufstellen eines Katalogs Fundamentaler Ideen der Stochastik genutzt. Seine Ausführungen wurden in Kapitel 3.5.3 diskutiert.

[229] Exemplarisch sei hier auf das veränderte Verständnis der Leitidee „Zahl" bei JUNG (Jung 1978) und den KMK Bildungsstandards (KMK 2003) hingewiesen. Während für JUNG gerade die Behandlung von historischen und wissenschaftstheoretischen Überlegungen den Zahlbegriff für die Schule interessant macht, werden solche Überlegungen aktuell gar nicht berücksichtigt. Die Leitideen der Bildungsstandards sind von vornherein auf inhaltliche Aspekte, die auch schon vor einer Formulierung als Leitidee im Lehrplan verankert waren, beschränkt.

gestellt. Dabei liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit auf jenen Veränderungen, die sich für den Geometrieunterricht der Gymnasien ergaben, wie sie von LIETZMANN festgehalten wurden (Lietzmann 1916). Die Theorieidee „Sprache“ wird exemplarisch am Begriff des Grenzwerts verdeutlicht, welcher seit der Grundlegung der Epsilontik in der Analysis sehr unterschiedlich, je nach dem, ob Anschaulichkeit oder formalistische Strenge angestrebt werden, formuliert werden kann. Zuletzt kann die Idee „Gebiete“ an den Entwicklungen der Algebra, die sich im ausgehenden 19. und frühen 20. Jahrhundert von einer Wissenschaft des Gleichungslösens hin zur Untersuchung von Strukturen entwickelte, erläutert werden.

Im 19. Jahrhundert rückten EUKLIDs „Elemente“ als Versuch, Mathematik deduktiv aufzubauen, verstärkt in den Fokus mathematischer Grundlagenforschung. Anlass war die Untersuchung des dort enthaltenen Parallelenaxioms und die Feststellung, dass „geometrische Systeme logisch möglich sind, in denen neben den übrigen euklidischen Axiomen eine Negation des Parallelenaxioms gültig ist“ (Schuberth 1971, S. 27). Eine Folge dieser Entdeckung war die Entwicklung neuer mathematischer Untersuchungsgebiete. Neben die bis dahin vorherrschende euklidische Geometrie trat die nichteuklidische Geometrie, deren Erkenntnisse nicht mehr an die Anschauung gebunden waren. Fortan beeinflusste das Logisch-Denkbare und nicht mehr unbedingt das Geometrisch-Anschauliche das moderne mathematische Denken. Auf der Basis dieser Erkenntnisse vollzog sich ein Wandel im Verständnis des Systems Mathematik. Mathematik, insbesondere die Geometrie wurde zu einem Spiel des Geistes, dessen „gewonnene Aussagen [...] nicht mehr Anspruch darauf erheben [konnten], unmittelbar für die äußere Welt konstitutiv zu sein“ (Schuberth 1971, S. 29).

Diese neue „Freiheit“ im mathematischen Denken veranlasste beispielsweise HILBERT in seiner Schrift „Grundlagen der Geometrie“ von 1899, Geometrie als ein rein deduktives widerspruchsfreies System aufzubauen, welches ganz ohne Vorstellungsbilder auskam. In diesem System wurde, dem logischen Aufbau geschuldet, auf eine Definition seiner Grundbegriffe verzichtet, und stattdessen wurden die Beziehungen zwischen den Elementen als wesentlich herausstellt. Somit schuf HILBERT die Anfänge der „modernen axiomatischen Methode“[230], die sich in Verbindung mit der strukturbetonten Auffassung der Algebra zu Beginn des 20. Jahrhunderts weiterentwickelte (Lexikon der Mathematik 2001, S. 405). Zwei berühmte Zitate HILBERTs verdeutlichen das Vorgehen der modernen Axiomatik.

[230] Die moderne Axiomatik unterscheidet sich insofern von der klassischen EUKLIDischen Axiomatik, als dass Letztere noch auf Vorstellungsbilder ihrer Grundbegriffe zurückgegriffen hatte (Schuberth 1971).

> Wir denken uns drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir Punkte und bezeichnen sie mit A, B, C, [...] die Dinge des zweiten Systems nennen wir Geraden und bezeichnen sie mit a, b, c, [...]
>
> (Hilbert 1962, S. 2)

> Man muss jederzeit an Stelle von Punkte, Geraden, Ebenen, Tische, Stühle, Bierseidel sagen können.
>
> (Hilbert 1970, S. 403)

Mit dieser Betonung des Logisch-Denkbaren war ein Umdenken über die Arbeitsweise von Mathematik verbunden. Hatten bisher Mathematiker Gesetzmäßigkeiten untersucht, die aus der Welt kamen und für diese konstruktiv waren, so war es nun denkbar, solche Gesetzmäßigkeiten (Axiome) frei zu setzen.

> Der moderne Formalist setzt seine Axiome, und es wird nicht gefragt, woher er sie hat. Es kommt nur darauf an, daß sie widerspruchsfrei sind und geeignet, eine für den ein oder anderen Zweck brauchbare Theorie aufzubauen.
>
> (Meschkowski 1967, S. 158 f.)

Die Bezeichnung „moderner Formalist“[231] von MESCHKOWSKI deutet auf eine weitere Entwicklung in der Grundlagenforschung der Mathematik hin, die nachhaltig auf die akzeptierten Erkenntnis- und Begründungskulturen wirkte. Angeregt durch die Formulierung der Mengenlehre GEORG CANTORs und die mit ihr einhergehenden Antinomien der Mengenlehre, versuchte u.a. HILBERT das gesamte mathematische Denken zu formalisieren (HILBERT-Programm). Ziel war die Widerspruchsfreiheit.

CANTOR betrachtete 1874 erstmals verschiedene Stufen von Unendlichkeit, indem er zeigte, dass sich zwar die algebraischen Zahlen bijektiv auf die natürlichen Zahlen abbilden lassen, es eine solche Bijektion zwischen reellen und natürlichen Zahlen allerdings nicht gibt (Lexikon der Mathematik 2001). RICHARD DEDEKIND, der in engem Austausch mit CANTOR stand, stellte 1888 einen „ersten mengentheoretischen Aufbau des Zahlensystems von den natürlichen bis zu den reellen Zahlen“ vor (Lexikon der Mathematik 2001, S. 284). Einige Jahre später zeigte sich dann, dass die CANTORsche Mengenlehre allerdings nicht geeignet war, die gesamte Mathematik zu begründen, da sich insbesondere aus der unendlichen Menge Widersprüche ergaben. Ein berühmter Widerspruch ist die

---

[231] Für DAVIS und HERSH, auf die schon bei der Beschreibung des pragmatischen Verständnisses einer „idea“ hingewiesen wurde (Kapitel 4.1), stellt der Formalismus eine der drei grundsätzlichen philosophischen Sichtweisen auf Mathematik dar. Neben Formalismus (nur die Spielregeln zählen, mathematische Objekte haben keinerlei inhaltliche Bedeutung) diskutieren die Autoren den Realismus (mathematischen Objekte existieren in einer idealisierten Realität) und Konstruktivismus (der menschliche Geist konstruiert mathematische Objekte aus der Erfahrung) (Davis/Hersh 1985). Auf Realismus und Konstruktivismus wird bei der Erläuterung der Begriffsidee „Objekte“ in der vorliegenden Arbeit zurückgekommen (Kapitel 4.3.2).

RUSSELLsche Antinomie von 1902. Vereinfacht gesprochen besagt sie, dass die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht zum Element hat, zu Widersprüchen führt. Eine bekannte Einkleidung dieser Antinomie ist die Geschichte eines Barbiers, der alle Männer seines Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren, und nur diese. Die zugehörige Frage lautet: Rasiert der Barbier sich selbst?

Etwa zur gleichen Zeit gab GOTTLOB FREGE ein Axiomensystem für die Mengenlehre an, welches ebenfalls zu Widersprüchen führte. „Dennoch stellt Freges Arbeit praktisch den Anfang der axiomatischen Mengenlehre“ und den Beginn einer Reihe von Versuchen die Mathematik durch ein widerspruchsfreies Axiomensystem zu beschreiben dar (Lexikon der Mathematik 2001, S. 285). Auch HILBERT stellte einen solchen Versuch vor. Er entwickelte einen formalen Logikkalkül, der konsequent inhaltliches und formales Denken trennte und mit dessen Hilfe er hoffte, „grundsätzliche Sicherheit vor Widersprüchen zu gewinnen“ (Schuberth 1971, S. 34).

> Alles, was im bisherigen Sinne die Mathematik ausmacht, wird streng formalisiert, so daß die eigentliche Mathematik oder die Mathematik im engeren Sinne zu einem Bestand an Formeln wird. Diese unterscheiden sich von den gewöhnlichen Formeln der Mathematik nur dadurch, daß außer den gewöhnlichen Zeichen noch die logischen Zeichen insbesondere die für folgt ($\rightarrow$) und für nicht ($\overline{}$) darin vorkommen [...]
>
> (Hilbert 1922, S. 151)

Ohne an dieser Stelle weiter ins Detail gehen zu können, wird in diesem Zitat eine Veränderung in der Sprache der Mathematik deutlich. Neben der metamathematischen Bedeutung dieses Zitats (die Möglichkeiten der Mathematik selbst werden zum Objekt mathematischer Forschung) werden mathematische Zeichen nicht mehr nur genutzt, um Objekte zu bezeichnen, sondern um mathematisches Schließen selbst auszudrücken (Schuberth 1971, S. 34).

Auch macht HILBERTs Aussage deutlich, welche Ansprüche fortan an mathematische Beweise gestellt werden. „Das inhaltliche Schließen wird durch ein äußeres Handeln nach Regeln ersetzt“ und somit wird auch für die Axiome „der strenge Übergang von naiver zu formaler Behandlung vollzogen“ (Hilbert 1925, S. 177). Mit einer auf mehr formale Strenge ausgelegten Erkenntniskultur, die das System Mathematik und die verwendete mathematische Sprache notwendigerweise veränderte, ging auch eine neue Begründungskultur einher.[232]

[232] Obwohl das HILBERT-Programm seit 1931 durch den GÖDELschen Unvollständigkeitssatz als gescheitert angesehen werden kann, wurden das dort vorherrschende Systemdenken und der Formalismus zu grundlegenden Instrumenten in der mathematischen Forschung. Beispiele hierfür sind die Arbeiten von ANDREI NIKOLOJEWITSCH KOLMOGOROV für die Wahrscheinlichkeitstheorie und von EMMY NOETHER für die Algebra (Otte 1974, S. 11 f.).

So wie in der Fachwissenschaft Mathematik lassen sich auch für den Mathematikunterricht Strömungen ausmachen, welche die dort vorherrschende Erkenntnis- und Begründungskulturen verändern können. Als exemplarisches Beispiel dient in der vorliegenden Arbeit die Bewegung „Los von Euklid!“ bezogen auf den Geometrieunterricht der Gymnasien. Hauptaugenmerk liegt auf Ausführungen LIETZMANNs, der am Beispiel des Innenwinkelsatzes unterschiedliche Möglichkeiten zur schulischen Behandlung der zugehörigen Beweise diskutiert.

Mitte des 19. Jahrhunderts kam Kritik an der Ausrichtung des Geometrieunterrichts an EUKLIDs Elementen auf. Der axiomatische Aufbau des kongruenzgeometrisch geprägten Lehrgangs, der aus folgerichtigen Schlüssen bestand, die zu neuen Sätzen führten, schien den Aufgaben der Schule im Industriezeitalter nicht mehr zu entsprechen. Zentrale Forderungen der Reformbewegungen, die mit den Meraner Vorschlägen von 1905 formuliert wurden, waren für den Bereich der Geometrie eine propädeutische Behandlung der Geometrie, die Betonung der Anschauung und von praktischen Anwendungen sowie die Fusion von Stereometrie und Planimetrie (Rembowski 2013, S. 7). In wie weit die einzelnen Forderungen wann und wie konkret umgesetzt wurden, soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter erörtert werden. Für die komplexen Beziehungsgeflechte im Umfeld der Meraner Reform sei erneut auf die Literatur verwiesen; beispielsweise (Inhetveen 1976), (Krüger 2000) und für die Begriffsbildung (Rembowski 2013).

Wichtiger für die Argumentation zur Begründung der Theorieideen ist die Tatsache, dass überhaupt didaktische und methodische sowie bildungspolitische Einflüsse derart auf den Geometrieunterricht wirkten, dass die vorherrschende Erkenntnis- und Begründungskultur hinterfragt und verändert wurde.

LIETZMANN setzt sich für den Geometrieunterricht mit dem zu wählenden Maß an Strenge beim Gewinnen und Beweisen neuer Erkenntnisse auseinander und wägt dabei ab, wann Anschauliches ausreicht und wann logisch deduktiv vorgegangen werden sollte (Lietzmann 1916). Zentral sind dabei folgende Fragestellungen für ihn:

> Die Frage nach der Strenge im mathematischen Unterricht [...] Wie stellt sich die höhere Schule zur Axiomatik?

(Lietzmann 1916, S. 115)

> Welche verschiedenen Wege [kann] man einschlagen [...], um einen geometrischen Lehrsatz den Schülern gegenüber als richtig zu erweisen [...]

(Lietzmann 1916, S. 128)

> Soll man zu einem Lehrsatz einen und nur einen Beweis geben oder soll man auch mehrere zulassen?

(Lietzmann 1916, S. 141)

Der Systematik dieser Fragestellungen wird auch in der vorliegenden Arbeit gefolgt, um Veränderungen in der Erkenntnis- und Begründungskultur im Mathematikunterricht zu verdeutlichen.

Grundsätzlich bejaht LIETZMANN eine Behandlung der Axiomatik im Mathematikunterricht nicht nur in der Oberstufe. Es kommt ihm allerdings auf das richtige Maß an Strenge dabei an. Zum Verhältnis zur Axiomatik in der Schule nennt LIETZMANN vier unterschiedliche Vorgehensweisen, von denen er aus persönlicher Sicht die erste und letzte für den schulischen Unterricht begründet ausschließt, da erste zu streng und letztere für Gymnasien ungeeignet ist (Lietzmann 1916, S. 116).

- A. Streng logische Methode.
- B. Empirische Grundlegung, logische Beweismethode.
    - B_A. Alle notwendigen Axiome sind ausgesprochen.
    - B_B. Ein Teil der Axiome ist ausgesprochen.
    - B_C. Nur solche Axiome sind ausgesprochen, die nicht absolut evident sind.
- C. Anschauliche Betrachtungen und deduktive Methode wechseln sich ab.
- D. Anschaulich-experimentelle Methode.

Weg B_A hält LIETZMANN ebenfalls für deutsche Gymnasien für ungeeignet, da „insbesondere bei dem frühen Anfang des systematischen Lehrganges der Geometrie, dem nur ein sehr kurzer propädeutischer Kurs vorangegangen ist“, unmöglich alle Axiome angesprochen werden können (Lietzmann 1916, S. 119). Weg B_C scheidet aus, da er für LIETZMANN eine „Verlegenheitsposition“ darstellt, da eine „naive“ Auswahl der Axiome getroffen wird, die auch daher rührt, dass die Schulbuchautoren „ganz offenbar mit den Fragen der Axiomatik nicht vertraut sind“ (Lietzmann 1916, S. 120).

Wege B_B und C sind demnach die Vorgehensweisen seiner Wahl, wobei LIETZMANN betont, dass es Aufgabe des Lehrers ist, daraus einen für seine Schüler passenden Lehrgang zu entwickeln.

> Ein guter Pädagoge, der die Fassung seiner Schüler richtig einschätzt, ihnen zur rechten Zeit die Strenge der Mathematik zu kosten gibt, wird mit beiden Methoden Gutes erreichen [...]
>
> (Lietzmann 1916, S. 121)

Wie stark der Mathematikunterricht an Anschaulichkeit oder logischer Strenge ausgerichtet sein soll, hängt demnach nicht nur von der Fachsystematik ab, sondern im Wesentlichen von der „Entwicklung des kindlichen Geistes“ (Lietzmann 1916, S. 121). LIETZMANN plädiert für eine Erkenntnis- und Begründungskultur, die von der kognitiven Leistungsfähigkeit der Schüler ausgeht und sich somit nach pädagogischen Bedingungen richtet.

> Wir lassen ein aus der Anschauung entnommenes Fundament zu, verlangen aber, daß nun von einem bestimmten Punkte an ein gewisser Grad an logischer Strenge herrscht [...] wie weit ich den Rahmen für die der Anschauung entnommenen Tatsachen wähle, das ist zunächst ganz beliebig, wird auch je nach dem Schülermaterial wechseln können.
>
> Wesentlich ist nur, daß irgendwo eine feste Grenze gezogen ist.

(Lietzmann 1916, S. 121)

Um diese Grenze für seinen Unterricht festlegen zu können, braucht der Lehrer zum einen umfangreiches Wissen über unterschiedliche Wege geometrische Lehrsätze zu beweisen und zum anderen einen „gewissen geometrischen Takt" (Lietzmann 1916, S. 132). LIETZMANN verdeutlicht dies am Beispiel unterschiedlicher Beweise des Innenwinkelsatzes für Dreiecke. Er nennt drei Beweismethoden.

- Methode des Physikers (die Winkel verschiedener Dreiecke werden ausgemessen und jeweils addiert),
- Experimentelle Methode (Zusammenfalten der Ecken des Dreiecks),
- Deduktive Methode (Ausnutzung von Parallelenlehre zur Gewinnung von Aussagen über die Winkel).

Da die Anschauung, auf die die beiden ersten Methoden fußen, täuschen kann, ist die deduktive Methode diesen beiden in Bezug auf die Allgemeingültigkeit ihrer Aussagen überlegen. LIETZMANN weist aber daraufhin, dass sie nicht die Methode ist, mit der neue Erkenntnisse gewonnen werden.

> [Sie] ist die letzte ausgeglättete Form, die wir dem Beweis eines Lehrsatzes geben, den wir vielleicht erst mit induktiven Methoden, vielleicht auch durch eine mehr oder weniger geniale Intuition gefunden haben, dem wir dann mit der Deduktion mit der nötigen Vorsicht zuleibe gegangen sind, um schließlich hinter die wahren Gründe der geometrischen Tatsachen zu kommen. Jetzt bildet der elegante, möglichst knappe Beweis, der nachher in Veröffentlichungen oder auch im Leitfaden steht, den Schlußpunkt, der wenig von der vorangegangenen Arbeit verrät, ja manchmal darüber geradezu einen Schleier deckt.

(Lietzmann 1916, S. 136)

Da im Unterricht „nicht Beweise, sondern das Beweisen das Ziel" ist, sei es demnach wichtig, mit den Schülern nicht nur einen Beweis zu erarbeiten, sondern unterschiedliche Beweise zuzulassen (Lietzmann 1916, S. 136). Anhand unterschiedlicher Beweise kann dann mit den Schülern deren „Einfachheit, Eleganz, Anschaulichkeit, Durchsichtigkeit" beurteilt werden, welche LIETZMANN als wertevolle Arbeit im Unterricht ansieht, die das Interesse der Schüler packen kann (Lietzmann 1916, S. 141).[233]

Zusammenfassend skizziert LIETZMANN eine Erkenntnis- und Begründungskultur für den Mathematikunterricht, deren Maß an Strenge sich an der geistigen Fähigkeit der Schüler orientiert. Wichtig ist, dass nicht allein die Fachsystematik über das Verhältnis von Anschauung und logischem Schließen entscheidet. Im Wechselspiel von Anschauung und Deduktion sollen die Schüler zur logischen Struktur der Mathematik vorstoßen.

Anhand ausgewählter Entwicklungen in der Fachwissenschaft Mathematik und des Mathematikunterrichts konnte also in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, dass akzeptierte Erkenntnis- und Begründungskulturen einem steten Wandelt unterliegen, der durch neue Entdeckungen und aufkommende Fragestellungen sowohl mathematischer als auch für den Mathematikunterricht pädagogischer Natur geprägt ist.

Die Wichtigkeit der Idee „Sprache" soll im Folgenden exemplarisch am Begriff „Grenzwert" erläutert werden. Dieser für die Analysis zentrale Begriff machte zusammen mit dem ebenfalls zentralen Begriff der Konvergenz von den Anfängen über deren Begründung bis hin zur „exakten Grundlegung der Analysis", mit der u.a. die Namen AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY, NIELS HENDRIK ABEL, CARL GUSTAV JACOBI, KARL WEIERSTRAß, BERNHARD RIEMANN, DEDEKIND und CANTOR verbunden sind, einen Wandel vom intuitiven Verständnis hin zur formalen Präzisierung durch (Hischer/Scheid 1995, S. 113). Für die Vorstellung der Idee „Sprache" in der vorliegenden Arbeit ist besonders die Arbeit von WEIERSTRAß von Bedeutung. Im Zuge seiner Arbeiten zum Konvergenzbegriff verwendete er erstmals durchgehend den „ε-δ-Formalismus", wie er auch heute zur formalen Definition von Grenzwerten und von Konvergenz verwendet wird (Lützen 1999, S. 237).[234]

Mit der Zielsetzung der Erläuterung der Idee „Sprache" kann in der vorliegenden Arbeit nicht weiter auf Entwicklungen in der Analysis, die sich beispielsweise aus der Erforschung von pathologischen Funktionen und der damit verbundenen Abkehr von Anwendungen ergaben, eingegangen werden. Stattdessen wird am Beispiel der Behandlung des Begriffs „Grenzwert" anhand ausgewählter Lehrwerke aufgezeigt, wie sich die bei dessen Definition verwendete mathematische Sprache in der universitären und schulischen Lehre zwischen Anschauung und formalistischer Strenge bewegt.

[233] LIETZMANN bezieht explizit auch „Nichtkognitive" Aspekte des Lernens wie Interesse mit ein. Zudem spricht er als Möglichkeit zur Findung von Lehrsätzen und Beweisen die Wichtigkeit von Intuition an. Auf diese Aspekte wird in der vorliegenden Arbeit in Kapitel 4.5 zurückgekommen.

[234] Zwar waren Schreibweisen im Sinne der Epsilontik schon vor WEIERSTRAß bekannt, doch nutzte dieser sie nicht nur bei komplizierten Konvergenzbeweisen, so wie damals üblich, sondern wandte diese Technik in allen Beweisen und Definitionen an (Lützen 1999).

Exemplarisch wurde für eine Einführung des Grenzwertbegriffs, die eher anschaulich ist, das Schulbuch „Die Elemente der Mathematik. Arithmetik, Algebra und Analysis", erstmals 1952 herausgegeben von GERHARD WOLFF (Wolff 1960) und ein Vorlesungsskript von COURANT „Vorlesungen über die Differential- und Integralrechnung", welches erstmals 1927 veröffentlicht wurde (Courant 1954), gewählt.[235] Diesen beiden Lehrwerken wird dann ein Schulbuch aus der Zeit der Strukturmathematik gegenübergestellt, welches den Grenzwertbegriff mit ausgeprägter Epsilontik einführt. Doch zunächst zu den beiden erstgenannten Lehrwerken.

Im Vorwort der ersten Auflage des Schulbuchs „Die Elemente der Mathematik. Arithmetik, Algebra und Analysis" heißt es bezüglich der Behandlung der Differentialrechnung wie folgt.

> Wir schlossen uns konsequent der realistischen Auffassung an, die anschaulich und jugendgemäß das „am charakteristischen Dreieck" erkennbare Differential als Grundelement entwickelt. In dieser Neubearbeitung sind wir auf der alten Bahn weitergeschritten, und wir haben demgemäß auch der Lehre vom Grenzwert einen viel breiteren Raum gewährt; es ist unsere feste Absicht, den gefährlichen Formalismus nicht aufkommen zu lassen [...]

(Wolff 1960; Vorwort)

Nach der Wiederholung des Folgenbegriffs anhand einiger Beispiele wird der Grenzwert einer Zahlenfolge definiert. Dazu heißt es vorbereitend:

> Der Begriff des Grenzwertes ist neben dem der Funktion grundlegend in der höheren Mathematik. Der Grenzwert beschreibt ein bestimmtes Verhalten gewisser Zahlenfolgen.

(Wolff 1960, S. 142)

Grenzwerte werden demnach als weitere Eigenschaft einer Folge schon bekannten Eigenschaften (endlich vs. unendlich, steigend vs. fallend, konstant, mit Bildungsgesetz vs. ohne Bildungsgesetz) beigestellt. Diese naive Vorstellung des Grenzwertes knüpft an eine propädeutische Vorbereitung des Begriffs bei der Behandlung von Folgen an, die im Schulbuch im Kapitel „Probleme der Arithmetik" von der „Infinitrechnung" abgekoppelt sind. Dort wurde der Grenzwert als „Häufungspunkt" einer Punktfolge definiert. Diese Vorstellung wird auch nun wieder aufgegriffen.

---

[235] COURANT definiert den Grenzwertbegriff im Gang seiner Vorlesung auch formalistisch, allerdings erst nach einer anschaulichen Einführung. Zudem schließt sich in seinem Skript ein Abschnitt zur „Motivierung der Begriffsbildung" des Grenzwertes an, in dem es u.a. heißt: „Die (ε, δ)-Definition des Grenzwertes ist das kondensierte Resultat jahrzehntelanger Bestrebungen, diesen Begriff auf eine strenge mathematische Basis zu bringen" (Courant 1954, S. 45). COURANT zeichnet sodann die Entwicklung des Begriffs und die Notwendigkeiten seiner Präzisierung nach.

3. In den Beispielen a) bis g) treten keine Grenzwerte auf. Solche lernen wir bei den unendlichen geometrischen Folgen und Reihen kennen, bei denen $|q| < 1$ ist [S. 27]:

i) $3, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \cdots, \frac{3}{2^{n-1}}, \cdots$

Eine geometrische Folge, deren Glieder gegen Null streben. Die zugehörigen Punkte auf der Zahlengerade nähern sich dem Punkte 0. Dieser Punkt wird als **Häufungspunkt** der Punktfolge bezeichnet, weil sich bei ihm (in seiner Umgebung) unendlich viele Punkte der Folge anhäufen.

Abbildung 28 Anschauliche „Definition“ des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Wolff 1960, S. 142), eigener Satz

Erst nach weiteren Beispielen von Zahlenfolgen und deren Grenzwerten kommt es zur Formalisierung des Grenzwertbegriffs, der als ein Zahlenwert beschrieben wird, gegen den die Glieder einer Folge streben.

2. Erklärungen zum Grenzwertbegriff. a) Nähern sich die Glieder a_n einer unendlichen Zahlenfolge einem bestimmten Zahlenwert g, so daß sie sich bei genügend hoher Nummer davon beliebig wenig unterscheiden, so sagt man, die Folge **strebt oder konvergiert gegen g.** Man schreibt entweder

(1) $\quad \boldsymbol{a_n \to g \quad (für\ n \to \infty)}$ **oder** $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = g.}$

g heißt der Grenzwert der Folge oder ihr **Limes**.
Veranschaulicht man die Zahlenfolge durch eine Punktfolge auf der Zahlengeraden, so entspricht dem Grenzwert der Häufungspunkt der Punktfolge.

Abbildung 29 Formale Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Wolff 1960, S. 143), eigener Satz

Auch bei der formaleren Definition wird die geometrische Anschauung weiterhin beibehalten. In einer weiteren Übungsaufgabe fordert das Schulbuch dann zur Erläuterung der „Umgebungsdefinition“ sowie der „ε-Definition“ eines Grenzwertes auf.

9. Erläutere folgende Erklärungen einer Nullfolge:
a) Eine Folge ist eine Nullfolge, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung von 0 unendlich viele Glieder der Folge liegen und nur endliche viele außerhalb (Umgebungsdefinition!)
b) Eine Folge (a_n) ist eine Nullfolge, wenn nach Wahl einer beliebigen (kleinen) positiven Zahl ε sich stets ein Index N so angeben läßt, daß für alle $n \geq N$ die Ungleichung $|a_n| < \varepsilon$ erfüllt ist (ε-Definition!). (Vgl. Aufg. 10!)

10. Die Folgen **a)** $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \cdots, \frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}, \cdots$ **b)** $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \cdots, \frac{3}{2n}, \cdots$
sind Nullfolgen. Bestimme N so, daß alle Glieder mit höheren Nummern als N kleiner als $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ $\left[\frac{1}{5000}\right]$ sind.
Beispiel: Zu **a)** $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Es soll also $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}} < \frac{1}{100}$ sein. Daraus folgt, $2 \cdot 3^{n-1} > 100$, $3^{n-1} > 50, n-1 \geq 4, n \geq 5$, d. h. $N = 5$. Für alle $n \geq N = 5$ sind die Glieder, da fallend, stets kleiner als $\frac{1}{100}$.

Abbildung 30 „Umgebungsdefinition“ und „ε-Definition“ des Grenzwertes aus (Wolff 1960, S. 144), eigener Satz

Die „Umgebungsdefinition" liefert wieder eine anschauliche Beschreibung der formalistischen „ε-Definition". Alle drei Definitionen (Grenzwert als Zahlenwert, gegen den die Glieder einer Folge streben, „Umgebungsdefinition" und „ε-Definition") werden als gleichberechtig in den folgenden Übungsaufgaben behandelt.

Auch an den Universitäten wurde Vorlesungen gehalten, welche es sich zur Aufgabe machten, „ohne Verzicht auf Präzision, den Stoff in einer undogmatischen lesbaren Form darzustellen und abstrakte Begriffe anschaulich zu motivieren" (Courant 1954, Vorwort). Zu nennen ist hier COURANT mit seinem erstmals 1927 veröffentlichten Skript zu „Vorlesungen über die Differential- und Integralrechnung" (Courant 1954). COURANT gibt nach verschiedenen Einführungsbeispielen folgende, ebenfalls geometrisch anschaulich motivierte, Beschreibung des Grenzwertes an.

Diesen Sachverhalt bringen wir dadurch zum Ausdruck, daß wir sagen: Die Zahlen a_n *streben* mit wachsendem n gegen 0, oder sie besitzen den *Grenzwert (Limes)* 0, oder die Zahlenfolge $a_1, a_2, a_3, \cdots$ *konvergiert* gegen 0.
Anschaulich bedeutet dies bei der Darstellung der Zahlen durch Punkte auf der Zahlengeraden, daß die Punkte $\frac{1}{n}$ sich mit wachsendem n immer dichter gegen den Grenzwert 0 andrängen.
Symbolisch pflegt man die Konvergenz der Zahlenfolge gegen 0 durch die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

oder auch gelegentlich durch die Abkürzung

$$a_n \to \infty$$

auszudrücken. Die Buchstaben lim sind eine Abkürzung für das Wort limes (Grenze).

Abbildung 31 Anschauliche „Definition" des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Courant 1954, S. 26), eigener Satz

Der letzte Satz, indem „lim" als Abkürzung und nicht als Operator beschrieben wird, macht besonders deutlich, wie sehr COURANT an einer „undogmatisch, lesbaren Form" seiner Inhalte interessiert ist.[236]

Erst aus weiteren Beispielen erfolgt die Definition des Grenzwertes in formalisierter „ε-Schreibweise". Diese wird verbal-begrifflich formuliert und danach in symbolische Schreibweise übersetzt (Courant 1954, S. 33). An diese Definition

[236] Einige Jahre nach der Veröffentlichung seiner Vorlesung gehörte COURANT zu den Unterzeichnern des Memorandums „Über den mathematischen Unterricht an höheren Schulen" (Wittenberg 1962), welches sich gegen den Einzug der Strukturmathematik in die Schulen richtete und schon in Kapitel 3.2.3 der vorliegenden Arbeit diskutiert wurde. Auch in COURANTs Standardwerk „Was ist Mathematik?", welches erstmals 1941 erschien und bis heute immer wieder aufgelegt wird, weist er darauf hin, dass eine abstrakte Formulierung des Grenzwertbegriffs für Lerner kaum zu erfassen ist. Er kritisiert, dass „manche Lehrbuchverfasser [...] bedauerlicherweise die beinahe snobistische Ansicht [haben], man könne dem Leser diese Definition ohne Vorbereitung vorsetzen – als ob eine nähere Erklärung unter der Würde eines Mathematikers liege" (Courant/Robbins 2010, S. 222).

schließt sich ein Abschnitt zur „Motivierung der präzisen Grenzwertdefinition" an (Courant 1954, S. 42-43). Courant begründet diese Präzisierung mit der Unmöglichkeit, die von der Anschauung suggerierte dynamische Idee eines Grenzwertübergangs als Resultat einer Bewegung mathematisch exakt zu fassen. Stattdessen muss für jedes beliebig kleine Intervall um den vermuteten Grenzwert a der Folge a_n mit einer natürlichen Zahl n geprüft werden, ob für genügend große n nur noch endliche viele Folgeglieder außerhalb des Intervalls liegen.

> Auf diese Weise werden wir zur präzisen Definition des Limes geführt, indem wir den Ausdrücken „beliebig kleine Schranke" und „genügend großes n" symbolische Namen ε und N geben.

(Courant 1954, S. 43)

Zusammenfassend wird in beiden soeben vorgestellten Lehrbüchern ein Weg vom anschaulichen Verständnis des Begriffs zu seiner formalen Beschreibung mit Epsilontik begangen, wobei zumindest in (Wolff 1960) diese mit den anderen Definitionen gleichberechtigt behandelt wird. COURANT stellt begründet heraus, in welchen Situationen die Definition mit Epsilontik für universitäre Anwendungen tragfähiger ist. Beiden Werken ist zudem gemeinsam, dass sie auch nach der formalen Definition durch vielfältige Beispiele wieder auf eine anschauliche Ebene rückkoppeln und Erkenntnisse auch in Alltagssprache festgehalten werden dürfen.

Ein anderes Bild zeigt sich bei einem Blick in ein durch die Strukturmathematik geprägtes Schulbuch. Als Beispiel dient hier „Infinitesimalrechnung" von KARL WÖRLE, JOHANNES KRATZ und KARL-AUGUST KEIL (Wörle 1970), wo es im Vorwort heißt:

> Soweit wie möglich treten moderne mathematische Bezeichnungsweisen und Begriffsbildungen in den Vordergrund. Vor allem wird von der Sprache der Mengenlehre [...] häufig Gebrauch gemacht und ihre Symbolschrift verwendet. [...] Um den Grenzwertbegriff mathematisch einwandfrei behandeln zu können, werden einige Eigenschaften der reellen Zahlen vorangestellt. Außerdem sollen die Kapitel über endliche arithmetische und geometrische Folgen und Reihen das Verständnis für unendliche Prozesse vorbereiten.

(Wörle 1970, Vorwort)

Im Vorwort deutet sich schon an, dass zwischen „mathematisch einwandfreien" und anderen Definitionen unterschieden wird und dass erstere in einer formalistischen Symbolschrift gegeben werden.

Der Grenzwertbegriff wird dann auch im Zusammenhang mit der Untersuchung des Verhaltens der Teilsummenfolge einer geometrischen Reihe $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \cdots + a_1q^{\nu-1}$ für die Fälle $|q| < 1; q > 1$ und $q < -1$ für $\nu \to \infty$ eingeführt. Nach dem deduktiven Beweis der Konvergenz der Teilsummenfolge für $|q| < 1$, in dem die BERNOULLI-Ungleichung Anwendung findet, wird Folgendes festgehalten.

Für diesen Sachverhalt schreibt man kurz: $|a_1 q^\nu| \to \infty$ mit $\nu \to \infty$, falls $|q| < 1$ oder:

$$\lim_{\nu\to\infty} |a_1 q^\nu| = 0\,, \text{falls } |q| < 1$$

Für das allgemeine Glied s_ν der zugehörigen Teilsummenfolge können wir schreiben:

$$s_\nu = a_1 \frac{q^\nu - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^\nu}{1 - q} = \frac{a_1}{1 - q} - \frac{a_1 q^\nu}{1 - q} \qquad (3)$$

Für $\nu \to \infty$ gilt dann wegen (3): $\frac{a_1 q^\nu}{1-q} \to 0$, so daß sich bei genügend hoher Platzziffer ν die Summe s_ν beliebig wenig von $\frac{a_1}{1-q}$ unterscheidet. Wir sagen: s_ν hat für $\nu \to \infty$ den Grenzwert $\frac{a_1}{1-q}$, schreiben

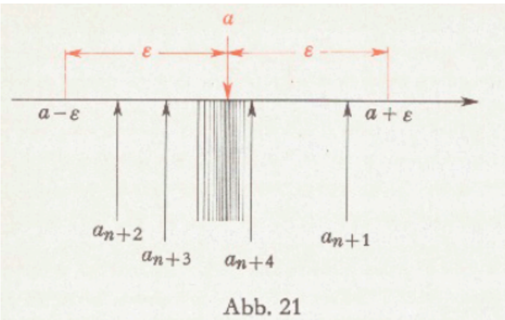
$$\lim_{\nu\to\infty} s_\nu = \frac{a_1}{1 - q} \qquad (4)$$

und meinen damit, daß der Differenzbetrag $\left|\frac{a_1}{1-q} - s_\nu\right|$ beliebig klein gemacht werden kann, sofern ν genügend groß gewählt wird. Die unendliche geometrische Reihe heißt in diesem Fall *konvergent*. Sie hat den *Summenwert* $s = \frac{a_1}{1-q}$.

Abbildung 32 Definition des Grenzwerts einer Teilsummenfolge in (Wörle 1970, S. 43)

Auffällig sind die symbolische Darstellung, die fast völlig auf Zahlenbeispiele verzichtet, und der formal-abstrakte Charakter der Definition.[237]

An das Beispiel der geometrischen Reihe schließen sich Betrachtungen von Nullfolgen an, die dann zur Definition von Grenzwerten beliebiger Zahlenfolgen genutzt werden (Wörle 1970, S. 51-53). Hier heißt es als beigestellte verbal-begriffliche Beschreibung: „Eine Zahlenfolge heißt konvergent zum Grenzwert a, wenn die um a verminderten Glieder der Folge eine Nullfolge bilden“ (Wörle 1970, S. 53).



Demzufolge gilt für eine Zahlenfolge $a_1; a_2; a_3; \cdots$ mit dem Grenzwert a: Zu *jeder noch so kleinen Zahl* $\varepsilon > 0$ läßt sich eine natürliche Zahl n so bestimmen, daß $|a_\nu - a| < \varepsilon$ für alle $\nu > n$ gilt. Dafür schreiben wird kurz: $a_\nu - a \to 0$ mit $\nu \to \infty$ oder $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ (Abb. 21).

Abbildung 33 Formalistische Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Wörle 1970, S. 54), eigener Satz

[237] Zwar findet sich auch eine geometrische Veranschaulichung der Konvergenz bzw. Divergenz der Teilsummenfolgen der geometrischen Reihe im Anschluss an diese Definition, diese ist allerdings wieder nur mit formal-algebraischen Rechnungen verständlich und nicht intuitiv zugänglich (Wörle 1970, S. 44).

Zwar findet sich hier eine Veranschaulichung der Situation, allerdings fehlt es einer begrifflichen Beschreibung. Stattdessen werden Konvergenz und Grenzwert mittels Epsilontik beschrieben. Insgesamt spiegelt diese Einführung des Grenzwertbegriffs ein hohes Maß an Formalität und Strenge wider, welches einen großen Begriffsapparat vorbereitend erarbeitet und auf mathematisch präzise Formelsprache achtet.

Im Vergleich mit dem Lehrwerk WOLFFs (und der Vorlesung COURANTs) wird deutlich, wie sehr die Lehre von Mathematik einem vorherrschenden Zeitgeist unterliegt. Diese Tatsache sollte bei der Analyse von mathematischen (Unterrichts-)Inhalten stets Berücksichtigung finden und wird im Ideenkatalog durch die Theorieideen repräsentiert.

Damit sei noch einmal auf die Beschreibung und Bedeutung der Theorieideen für den Ideenkatalog zurückgekommen. Bisher wurden die Ideen Erkenntnis- und Begründungskultur, System und Sprache aus exemplarischen Entwicklungen der Mathematik abgeleitet und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht herausgestellt. Nun soll abschließend die Idee „Gebiete“ erläutert werden, die der Tatsache Rechnung trägt, dass sich das Verständnis davon, welche mathematischen Inhalte zu einem Gebiet zusammengefasst werden, ebenfalls wandeln kann. Exemplarisch wird dies am Gebiet Algebra verdeutlicht, welches sich im beginnenden 20. Jahrhundert grundlegend von der Lehre des Gleichungslösens hin zur Beschreibung und Untersuchung mathematischer Strukturen wandelte.

Prägend für das Gebiet Algebra war bis zum 20. Jahrhundert die Ausrichtung an den Leitbegriffen Zahl, Term und Gleichung. Damit spiegelte sich im Wesentlichen eine Vorstellung von Algebra wider, wie sie schon 1770 von LEONHARD EULER in seinem einflussreichen Lehrwerk „Vollständige Anleitung zur Algebra“ formuliert wurde.

> Der Hauptzweck der Algebra sowie aller Theile der Mathematik besteht darin, den Werth solcher Größen zu bestimmen, die bisher unbekannt gewesen, was aus genauer Erwägung der Bedingungen geschieht. Daher wird die Algebra auch als Wissenschaft definiert, welche zeigt, wie man aus bekannten Größen unbekannte findet.
>
> (z.n. VOLLRATH 1994a, S. 5)

Zunächst wurde durch die Meraner Reform der Anwendungsbereich der Algebra erweitert. Durch die Fokussierung des funktionalen Denkens und der damit verbundenen Etablierung des Funktionsbegriffs als Leitbegriff des Curriculums war das Lösen von Gleichungen zur Beschreibung von Funktionen genutzt worden. So traten beispielweise Gleichungen bei der Bestimmung von Nullstellen auf und machten diese algebraisch zugänglich. Andersherum beeinflusst der enge Bezug zum Funktionenbegriff nun auch das graphische Lösen von Gleichungen. Es ergaben sich durch die graphische Darstellung von Funktionen (Geraden, Parabeln etc.) Verknüpfungen zwischen Algebra und Geometrie (Vollrath 1994a, S. 6).

Somit führte die Neuausrichtung des Unterrichts zu einer Neuinterpretation dessen, was noch wenige Jahre vorher unter dem Gebiet Algebra im Mathematikunterricht verstanden wurde.

Veränderungen im Verständnis mathematischer Gebiete können sich allerdings auch wesentlich gravierender vollziehen. Dies ist ebenfalls am Beispiel der Algebra, zunächst an den Universitäten, und mit zeitlichem Abstand auch in den Schulen, wahrnehmbar.

VOLLRATH folgend kam es zu Beginn des 20. Jahrhunderts zu einem Paradigmenwechsel im Verständnis der Algebra (Vollrath 1994b). Es hatte sich neben der klassischen Algebra eine moderne Algebra entwickelt. Einer der wichtigsten Vertreter dieser modernen Algebra war HELMUT HASSE. Er erklärt den Unterschied wie folgt.

> [...] Früher betrieb man die Algebra, wie überhaupt jede rechnende mathematische Disziplin im Bereich der reellen oder wo nötig der komplexen Zahlen. Heute pflegt man abstrakte Körper oder auch nur Integritätsbereiche, Ringe zugrunde zu legen.
>
> (Hasse 1930, S. 22-23)

HASSE sieht in dieser neuen Methode der Algebra drei Vorteile. Zum einen „sucht man *die größtmögliche Allgemeinheit dem Inhalte nach*“, denn je „allgemeiner die Vorrausetzungen sind, von denen man beim Aufbau einer Theorie ausgeht, umso mehr umspannt diese Theorie“ (Hasse 1930, S. 23). Demnach geht es darum, den Anwendungsbereich einer Theorie durch ihre allgemeine Formulierung zu erweitern. Ein weiterer Vorteil liegt in der „*größtmöglichen Beschränkung der Hilfsmittel*“ (Hasse 1930, S. 23). HASSE argumentiert, dass Begriffe wie „Körper“ durch Abstraktion aus den elementaren Rechenoperationen gewonnen wurden. Eine Theorie, die sich auf diese Begriffe stützt, nutzt demnach auch nur diese und lässt somit beispielweise den Limesbegriff für die Lösung von Gleichungen außen vor (Hasse 1930, S. 25). Der dritte Vorteil liegt darin, dass „die moderne algebraische Methode keineswegs auf den klassischen Bestand der Algebra beschränkt [ist], sondern [...] darüber hinaus [greift] und [...] eigentlich die ganze Mathematik [durchsetzt]“ (Hasse 1930, S. 33).[238]

Zusammenfassend hält HASSE fest.

---

[238] Der dritte Vorteil unterscheidet sich von den beiden erstgenannten. Er bezieht sich inhaltlich nicht mehr auf die Algebra, sondern auf die Theoriebildung der Algebra. Nach HASSE stellt sie eine für die gesamte Mathematik fruchtbare Methode dar. Dies ist kein neuer Gedanke. Schon im 18. Jahrhundert charakterisierte ETIENNE BONNOT DE CONDILLAC, beeinflusst durch die philosophischen Untersuchungen zum Ursprung der Sprache von JOHANN GOTTFRIED HERDER, die Algebra als eine Sprache, die der gesamten Mathematik zugrundeliegt (Alten 2000, S. 312-313).

> Charakteristisch für die neue Methode ist [...] das Bestreben, ein vorgelegtes mathematisches Gebiet auf seine allgemeinsten und daher einfachsten begrifflichen Grundlagen zurückzuführen und dann eben mit deren alleiniger Hilfe auf- und auszubauen.

(Hasse 1930, S. 26)

Mit der veränderten Ansicht der Theoriebildung verlagerte sich auch das Forschungsinteresse im Bereich der Algebra. Ging es der klassischen Algebra um die Lösung von Gleichungen, sind diese bei der modernen Algebra nicht mehr von vorrangigem Interesse. Stattdessen steht die Untersuchung von Lösungsstrukturen im Vordergrund. HASSE macht dies an der Galoistheorie deutlich. Diese wurde nach ihrer Formulierung im 19. Jahrhundert durch ÉVARISTE GALOIS genutzt, um mittels Symmetrien Aussagen über die Lösbarkeit von Gleichungen zu gewinnen. Die moderne Algebra setzt die Theorie nun für Strukturuntersuchungen, bei denen durch Galoisgruppen Körpererweiterungen möglich sind, ein (Hasse 1930, S. 26).

Es kam also zu einer Neuinterpretation inhaltlicher Aspekte der klassischen Algebra sowie, durch die Ausweitung der algebraischen Methode, zu Verschmelzungen mit anderen Gebieten, z.B. der analytischen Geometrie. Das Verständnis der Algebra hatte sich in wenigen Jahren grundlegend verändert.

Diese Veränderung zeigt VOLLRATH sehr deutlich durch den (in Abbildung 34 dargestellten) kontrastierenden Vergleich zweier grundlegender Werke der Algebra für die Universitätslehre (Vollrath 1994b, S. 10-11).[239]

[239] VOLLRATH stellt dem „Lehrbuch der Algebra“ von HEINRICH WEBER aus dem Jahre 1912 das bis heute immer wieder aufgelegte Lehrbuch „Moderne Algebra“ von VAN DER WAERDEN von 1930 gegenüber.

WEBER: Lehrbuch der Algebra	VAN DER WAERDEN: Moderne Algebra
1. Determinanten	1. Zahlen und Mengen
2. Zahlen und ganze Funktionen	2. Gruppen
3. Symmetrische Funktionen	3. Ringe und Körper
4. Wurzeln	4. Ganze rationale Funktionen
5. Kubische und biquadratische Gleichungen	5. Körpertheorie
6. Der STURMsche Lehrsatz	6. Fortsetzung der Gruppentheorie
7. Genäherte Berechnung der Wurzeln	7. Die Theorie von GALOIS
8. Gruppen	8. Geordnete und wohlgeordnete Mengen
9. Die GALOISsche Theorie	9. Unendliche Körpererweiterungen
10. Zyklische Gleichungen	10. Reelle Körper
11. Kreisteilung	11. Eliminationstheorie
12. Auflösung der Kreisteilungsgleichung	12. Allgemeine Idealtheorie der kommutativen Ringe
13. Algebraische Auflösung von Gleichungen	13. Theorie der Polynomideale
14. Zahlen und Funktionale eines algebraischen Körpers	14. Ganze algebraische Größen
15. Anwendung auf Kreisteilungskörper	15. Lineare Algebra
	16. Theorie der hyperkomplexen Größen
	17. Darstellungstheorie der Gruppe und hyperkomplexen Systeme

Abbildung 34 Gegenüberstellung der Algebralehrwerke von WEBER und VAN DER WAERDEN. Entnommen aus (Vollrath 1994b, S. 10-11)

Anhand der Algebra konnte in der vorliegenden Arbeit verdeutlicht werden, dass die vorherrschende inhaltliche und methodische Auffassung eines mathematischen Gebietes wissenschaftlichen und didaktisch-pädagogischen Einflüssen unterliegt. Solche Prozesse sind für das heutige Verständnis von Mathematik prägend. Sie beeinflussen somit auch, welche mathematischen Inhalte in der Schule gelehrt werden. Ihre Kenntnisse sollten daher zumindest zum Metawissen des Lehrers gehören, wenn nicht sogar explizit im Unterricht thematisiert werden (Vollrath 1994b, S. 23).

4.3.2 Die Kategorie der Begriffsideen

Als Nächstes gilt es, die abstrakteren Begriffsideen (Objekte, Charakterisierungen, Ordnungen und Netze) zu erläutern. Die Idee „Objekte“ umfasst, dass Mathematik bestimmte Vorstellungen von der Natur mathematischer Objekte ausbilden. Exemplarisch werden in der vorliegenden Arbeit die Sichtweise des Realismus und Konstruktivismus anhand der Überlegungen von CHANGEUX und CONNES gegenübergestellt. Dass mathematische Objekte unterschiedlich charakterisiert werden können, je nachdem in welchem Zusammenhang sie genutzt werden, ist unstrittig. Zur Idee „Charakterisierung“ wird daher eine knappe Begründung gegeben. Die Ideen „Ordnung“ und „Netze“ werden als letzte Ideen dieser Kategorie am Beispiel des „Hauses der Vierecke“ in unterschiedlichen Schulbüchern erläutert.

Mathematik ist eine Wissenschaft, die sich mit dem Entwickeln und Ausschärfen von Begriffen beschäftigt. Diese Begriffe stehen nicht zusammenhanglos nebeneinander, sondern bilden vernetzte Grundbestandteile von Theorien. FISCHER und MALLE halten zum Verhältnis von Theorie und Begriffen Folgendes fest.

> Wichtige Begriffe stellen gewissermaßen Anfangspunkte von Theorien dar und werden ihrerseits durch die Theorien erklärt. Dabei ist es eine nützliche Sichtweise, solche Begriffe als den Ausdruck von Beziehungen im Rahmen eines Netzwerks von Beziehungen, eben der Theorie, zu sehen. „Theoretische Begriffe“ der Mathematik, wie wir diese Begriffe auch nennen wollen, stehen für wesentliche Relationen und entstehen nicht bloß durch Weglassen von Eigenschaften (sogenannte „empirische Abstraktion“) aus anderen Begriffen. Die Entfaltung dieser im Begriff angelegten wesentlichen Relationen führt zu jenem Netzwerk, das wir Theorie nennen.

(Fischer/Malle 2004, S. 151)

Beispiele solcher Begriffe sind nach FISCHER und MALLE die Teilbarkeit für die Zahlentheorie oder der Stetigkeitsbegriff für die Topologie.

Genau wie Theorien unterliegen mathematische Begriffe somit auch historisch-anthropologischen Entwicklungen. Dabei ist bei der Formung eines Begriffs das sozial-kommunikative Moment besonders stark herauszustellen.[240]

> Wir sehen theoretische Begriffe außerdem als Ausdruck bestimmter Sichtweisen von Menschen, als <u>soziale, kommunikative Konstrukte</u> an. Sie ergeben sich nicht notwendig, zwangsläufig aus der Natur, aus unserer Wahrnehmung, sie sind hingegen Ausdruck eines bestimmten Wollens; Ausdruck dessen, daß uns ein bestimmter Gesichtspunkt wichtig ist. (Fischer/Malle 2004, S. 151)

[240] Das kommunikative Moment unterteilen die Autoren in einen Exaktifizierungs- und einen Rechtfertigungsprozess. Auch diese beiden Tätigkeiten fasst der in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Ideenkatalog. Sie werden der Kategorie der Tätigkeitsideen zugeordnet und haben dort auch meta-mathematischen Charakter, vgl. Kapitel 4.4.3.

Wenn mathematische Begriffe, wie in obigem Zitat, als Konstrukte gedeutet werden, wirft dies die Frage nach der Natur mathematischer Objekte auf, die durch diese Begriffe bezeichnet werden. Mögliche Antworten können im Rahmen der vorliegenden Arbeit nur sehr knapp angerissen werden. Exemplarisch wird diese Frage anhand des Buchs „Gedanken-Materie" des Neurobiologen JEAN-PIERRE CHANGEUX und des Mathematikers ALAIN CONNES skizziert (Changeux/Connes 1992). Der Reiz des Buchs liegt in seinem interdisziplinären Ansatz und in seiner Dialogform. Somit werden die unterschiedlichen Sichtweisen der beiden Wissenschaftler gegenüberstellt und Berührpunkte zwischen Mathematik und Neurobiologie aufgezeigt.

Im Wesentlichen unterscheiden die Autoren „zwei diamentral entgegengesetzte Standpunkte" zur Natur mathematischer Objekte; die Position des Realismus und des Konstruktivismus nach. Vertreter des Realismus gestehen mathematischen Objekten eine von der sinnlichen Welt verschiedene Realität zu. Berühmte Mathematiker wie DIEUNDONNÉ, dessen Ansichten schon in der vorliegenden Arbeit im Zusammenhang mit der BOURBAKI-Gruppe diskutiert wurden, und DESCARTES sind Anhänger des Realismus. CHANGEUX zitiert zur Verdeutlichung der Sichtweise des Realismus eine Aussage DESCARTES.

> Wenn ich mir ein Dreieck denke, selbst wenn es vielleicht an keinem Orte der Welt außerhalb meines Denkens eine solche Figur gibt und sie je gegeben hat, so hat diese Figur dennoch eine gewisse Natur oder Form oder wohlbestimmte Essenz, die unveränderlich und ewig ist, die ich nicht erfunden habe und die in keiner Weise von meinem Verstand abhängt.

(z.n. Changeux/Connes 1992; S. 8)

Dem gegenüber steht die konstruktivistische Auffassung, dass die mathematischen Objekte im Denken von Mathematikern geschaffen werden und an keine Welt eigener Realität gebunden sind. CONNES argumentiert für die Existenz einer mathematischen Realität unabhängig vom Menschen mit der Fähigkeit,[241] über die mathematischen Objekte hinauszugehen. Somit schaffen Mathematiker eine mathematische Realität, „die ganz ohne materielle Unterstützung" auskommt (Changeux/Connes 1992, S. 9). CHANGEUX wendet dagegen ein, dass mathematische Objekte als mentale Objekte „weitgehend mit physikalischen Zuständen unseres Gehirns identisch" sind und daher von einer materiellen Existenz abhängen (Changeux/Connes 1992, S. 10).

[241] CONNES hat hier insbesondere die axiomatische Methode im Blick (Changeux/Connes 1992, S. 9).

Letztendlich ist die Frage (noch?)[242] nicht abschließend zu beantworten. Mit der „Didaktischen Phänomenologie“ FREUDENTHALs liegt allerdings eine für den Mathematikunterricht nutzbare „Aussöhnung“ der beiden Standpunkte vor (Freudenthal 1983). FREUDENTHAL sieht mathematische Objekte dabei als „noumena“ an, die allerdings auch ein stückweit als „phänomenon“ erfahrbar sind. Als Phänomenologie bezeichnet er dann

> discribing this noumenon in its relation to the phenomena of which it is the means of organising, indicating which phenomena it is created to organise, and to which it can be extended, how it acts upon these phenomena as a means of organising, and with what power over these phenomena it endows us.
>
> (Freudenthal 1983, S. 28)

Diese Phänomenologie wird dann didaktisch, wenn das Verhältnis von noumenon und phänomenon in einem Lehrprozess Berücksichtigung findet und somit dem Lernenden zugänglich wird. Da in einer solchen Phänomenologie gerade auch Aspekte berücksichtigt werden, die zur Genese eines Begriffs gehören, werden durch sie wieder sozial-kommunikative Prozesse im Sinne FISCHERs und MALLEs sichtbar.[243]

Neben dem Wesen mathematischer Objekte, die durch Begriffe gefasst werden, ist die Art, über sie zu sprechen, sie zu charakterisieren, von Bedeutung. Dass Begriffe unterschiedlich charakterisiert werden, je nachdem in welcher Sprache über sie gesprochen wird, soll mit der Idee „Charakterisierung“ im vorgeschlagenen Ideenkatalog verdeutlicht werden. Beispielsweise wird im Schulbuch (Wolff 1960) der Begriff Grenzwert in der Sprache der Geometrie als Häufungspunkt und algebraisch als Verhalten einer Zahlenfolge im Unendlichen beschrieben (s.o.). Auch hat sich die Charakterisierung von Begriffen historisch teilweise stark gewandelt. Galt die Parabel in der antiken griechischen Geometrie noch als

---

[242] CHANGEUX bemerkt dazu, dass mathematische Objekte als physikalische Zustände des Gehirns „*im Prinzip* von außen mit zerebralen Abbildungsverfahren [zu] beobachten“ sind, aber derzeit die Auflösung der Messgeräte noch zu gering für eine Darstellung ist (Changeux/Connes1992, S. 10). Auch aktuell werden Werkzeuge der Hirnforschung genutzt, um mathematisches Denken zu visualisieren und somit besser erklären zu können. So konnten die französischen Forscher MARIE AMALRIC und STANISLAS DEHAENE jüngst Regionen im Gehirn identifizieren, die bei mathematische Professionalisierten besonders ausgeprägt sind und bei der Behandlung mathematischer Fragestellungen stark durchblutet werden (Amalric/Dehaene 2016).

[243] Die Frage nach der Art der mathematischen Realität wird bei der Diskussion der Persönlichkeitsideen in Kapitel 4.5 erneut aufgegriffen. Zur Legitimierung dieser Ideenkategorie wird genutzt, dass unabhängig von der Antwort auf die Frage, ob Mathematik gefunden oder gemacht wird, die mit der Mathematik handelnde Person eine zentrale Rolle im Entstehungsprozess von Mathematik hat. Der Mensch wird somit zum Vermittler zwischen Welt und Mathematik, was dem ersten Fall des erweiterten Spannungsverhältnisses, welches in Kapitel 4.2.1 beschrieben wurde, entspricht (vgl. Abbildung 25). Sowohl der Prozess der Rekonstruktion von Mathematik als auch ihre Erschaffung durch den Mathematiker haben Einfluss auf dessen Persönlichkeit. Jene Aspekte, die Persönlichkeitsmerkmale betreffen und mit Mathematik zu tun haben, werden in der vorliegenden Arbeit als Persönlichkeitsideen identifiziert (vgl. Kapitel 4.5).

Ort der Punkte, die von einem beliebigen Punkt und einer Gerade den gleichen Abstand haben, so trat diese Ortskurveneigenschaft zeitweise hinter der analytischen Beschreibung der Parabel als Graph einer quadratischen Funktion zurück und erlebt in der didaktischen Diskussion seit dem Einzug von Dynamischer Geometrie Software eine Renaissance, die sich auch in manchen Schulbüchern niederschlägt.[244] Solche unterschiedlichen Charakterisierungen der Begriffe „Grenzwert" und „Parabel" verdeutlichen nochmals die Vorstellung FISCHERs und MALLEs, dass die Betonung bestimmter Aspekte von Begriffen immer Ausdruck eines Wollens ist.[245]

Wie oben schon angerissen, stehen Begriffe nicht isoliert nebeneinander, sondern werden in Beziehung gesetzt. Dadurch entstehen mathematische Theorien. Je nachdem, für welche Fragestellungen, Probleme oder Anwendungen diese Begriffsnetze nützlich sein sollen, ergeben sich aus ihnen unterschiedliche Ordnungen. Die Ideen „Ordnungen" und „Netze" sollen nun am bekannten Beispiel „Haus der Vierecke" verdeutlicht werden.

Bei diesem Begriff ist schon der Numerus irreführend, da es eine Vielzahl solcher „Häuser" gibt, deren Aufbau jeweils verschiedene Zielrichtungen verdeutlicht. KLAUS VOLKERT hat 1999 verschiedene Ordnungsprinzipien zusammengestellt, die auch in der vorliegenden Arbeit genutzt werden (Volkert 1999). Er unterscheidet neben logischen, merkmalsorientierten und genetischen Prinzipien solche, bei denen übergeordnete Aspekte (bspw. Symmetrie) die Ordnung bestimmen. Diese verschiedenen Ordnungsprinzipien finden sich in Schulbüchern und geben somit Aufschluss über jeweils angestrebte Ziele.

Im durch die Strukturmathematik beeinflussten Gymnasialschulbuch Lambacher Schweizer „Geometrie 1" von 1970 findet sich ein genetischer Aufbau des

---

[244] Im Schulbuch „Das Mathematikbuch 9" findet sich beispielsweise eine komplette Lernumgebung zu Ortskurven. Dabei wird auch die Konstruktion einer Parabel mit Hilfe ihrer Ortskurveneigenschaft mit einem DGS gefordert (Affolter 2011, S. 62-63).

[245] Verschiedenheiten bei der Bedeutung eines Begriffs sind nur eine Möglichkeit von Mehrdeutigkeiten beim Umgang mit Begriffen. In (Rembowski 2016) wird, ausgehend von einem semiotischen Dreieck mit den Ecken „Bezeichner", „Objekt" und „Begriff", ausgeführt, dass eben auch Mehrdeutigkeiten zwischen den Ecken „Objekt" und „Bezeichner" und „Objekt" und „Begriff" existieren. Damit überlagern sich verschiedene semiotische Dreiecke. Es entsteht ein Begriffsfeld, welches als semiotisches Dreiecksprisma visualisiert werden kann und ein Vokabular für Begriffsbildung bereitstellt. Das semiotische Dreiecksprisma liefert dabei auch eine Sprache für die in Kapitel 4.3.1 der vorliegenden Arbeit aufgeführten verschiedenen Zugänge zum Grenzwertbegriff. Für Formalisten liegt bei den dargestellten verschiedenen Definitionen der Fall 3 der Mehrdeutigkeit vor, bei dem „Objekte aus der Schnittmenge verschiedener Kontexte zu zwei verschiedenen Begriffen abstrahiert [werden], die [...] durch den selben Bezeichner bezeichnet werden" (Rembowski 2016, S. 135), also formalistische Definition mit Epsilontik und eher anschauliche Definitionen nicht zum gleichen Begriff führen. Dagegen hat COURANT argumentiert, dass beide Arten der Definition zum selben Grenzwertbegriff führen und die Epsilontik lediglich eine symbolische Schreibweise darstellt (Courant 1954, S. 43).

„Hauses der Vierecke“ (Schweizer 1970). Geordnet werden die Vierecke[246] dabei nach der Anzahl der Stücke, die zu ihrer Konstruktion nötig sind. Vorab wird bewiesen, dass ein „allgemeines Viereck“[247] durch fünf Stücke bestimmt ist. Somit ergibt sich folgende Ordnung der Vierecke, bei der zu beachten ist, dass Vierecke mit In- und Umkreis und der schiefe Drache vom Trapez unterschieden werden.

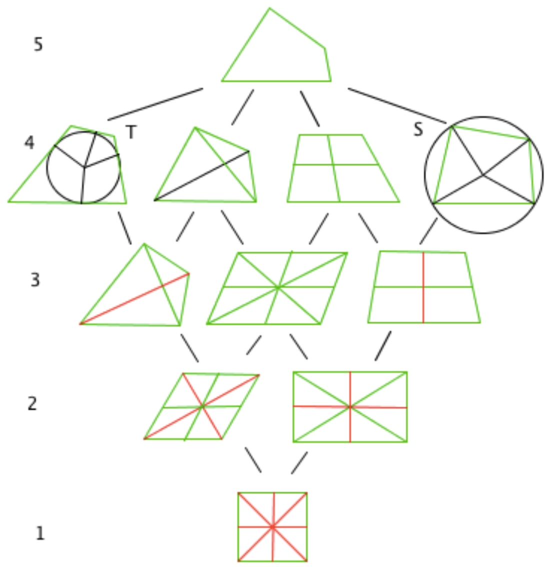


Abbildung 35 Ordnung der Vierecke nach der Anzahl der bestimmenden Stücke, wie sie sich in (Schweizer 1970) findet

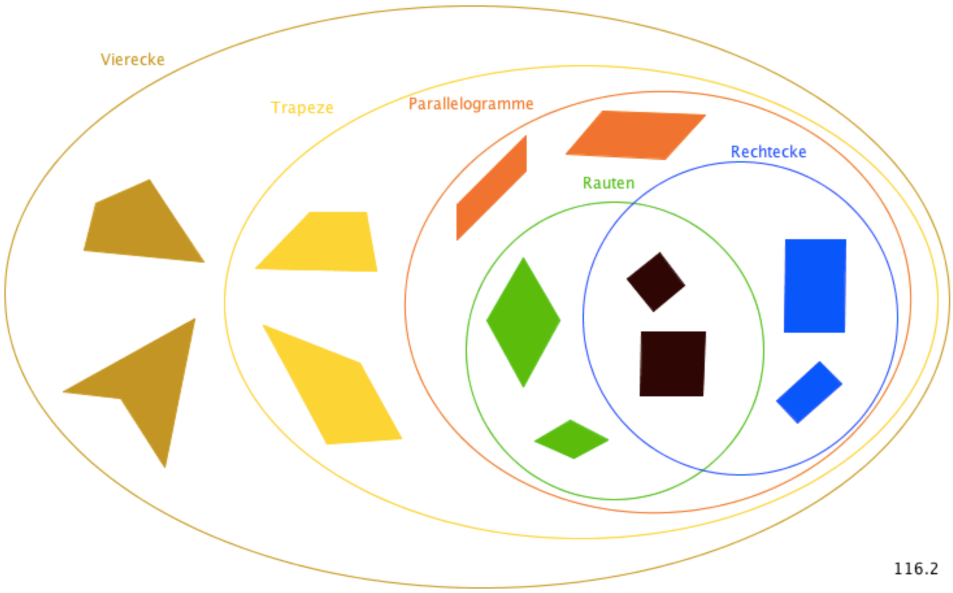
Diese Ordnung dient der Festlegung, für welche Vierecke wie viele Stücke jeweils angegeben sein müssen, um die jeweiligen Vierecke eindeutig konstruieren zu können. Dieser genetische Aufbau der Vierecksordnung führt den logischen Aufbau des Schulbuches fort. Er greift nämlich auf die zuvor behandelten Kongruenzsätze und die Konstruktion von Dreiecken zurück.

Eine andere Ordnung schlägt dieselbe Schulbuchreihe einige Jahre später vor. In Lambacher Schweizer „Geometrie 1“ von 1983, das ebenfalls für Gymnasien konzipiert ist, steht ein logisches Ordnungsprinzip im Vordergrund (Schweizer 1983). Hier wird das „Haus der Vierecke“ als Venn-Diagramm veranschaulicht

[246] Es handelt sich hierbei um Parallelogramme, Rechtecke, Quadrate und Rauten (als besondere Parallelogramme), Trapeze, Drachen und allgemeine Vierecke. Dabei werden besonders die Beziehungen zwischen den Vierecken in Form von zu beweisenden Lehrsätzen herausgestellt. Zu beweisen sind beispielsweise folgende Sätze: „Wenn ein Parallelogramm eine Achse hat, die zu einer Seite parallel ist, dann ist es ein Rechteck“ (Schweizer 1970, S. 74) oder „Jede Raute ist ein Parallelogramm“ (Schweizer 1970, S. 73).

[247] Vierecke werden, wie andere ebene Figuren, in diesem Schulbuch als Mengen von Punkten aufgefasst. Flächen werden als Teilmengen einer Ebene definiert (Schweizer 1970, S. 6).

und daher auch von der „Menge aller Vierecke“[248] gesprochen (Schweizer 1983, S. 116).



116.2

Die in Fig. 116.2 ausgedrücke Beziehung der Vierecke untereinander beruht auf der Definition von Trapez, Parallelogramm, Rechteck, Raute, Quadrat. Danach gilt ein Satz, der z.B. für Parallelogramme bewiesen wurde, insbesondere für spezielle Parallelogramme wie Rechtecke, Rauten und Quadrate; er muß also für sie nicht nochmals bewiesen werden.

Abbildung 36 Menge aller Vierecke in (Schweizer 1983, S. 116)

Die Veranschaulichung als Venn-Diagramm zusammen mit dem erklärenden Satz darunter legt ein logisches Ordnungsprinzip nahe. Speziellere Vierecke werden als Teilmengen allgemeinerer Vierecke dargestellt. Sinn dieser Ordnung ist es, die logische Struktur, die mithilfe von bewiesenen Sätzen für eine allgemeinere Vierecksmenge gefunden wurde, auf speziellere Vierecke zu übertragen.

Auch in Büchern der gleichen didaktischen Epoche finden sich unterschiedliche Zielvorstellungen, unter denen das „Haus der Vierecke“ geordnet wird. Dazu sei als drittes auf das Schulbuch „Plus 8“ von 1977, herausgegeben u.a. von SCHUPP, hingewiesen (Schupp 1977). Schon bei der Definition des Begriffs „Viereck“ in „Plus 5“ geht diese Schulbuchreihe einen anderen Weg als die zuvor vorgestellten Bände von Klett „Lambacher Schweizer“. Vierecke oder allgemeiner Flächen sind keine Punktmengen in der Ebene, sondern „Begrenzungen“ von „geometrischen Körpern“ (Schupp 1985, S. 20). Exemplarisch wird dies im Schulbuch am Beispiel eines Quaders, der auf Papier gelegt wird und dessen Kanten mit einem Bleistift

[248] In dieser Ausgabe des Schulbuchs wird keine explizite Definition des Begriffs „Viereck“ gegeben. Da Vierecke allerdings auf Dreiecke zurückgeführt werden und Letztere an andere Stelle im Schulbuch als Ebenenstücke, die durch drei Geraden begrenzt sind, erklärt werden, liegt nahe, dass hier auch Vierecke wieder Teilmengen von Ebenen sind (Schweizer 1983, S. 44).

nachzuziehen sind, verdeutlich. Das zeichnerische Ergebnis dieser Handlung wird als Rechteck bezeichnet (Schupp 1985, S. 26).

In „Plus 8“ wird dann eine Ordnung der schon vorher behandelten Vierecke nach dem übergeordneten Aspekt der Symmetrie festgelegt.[249]

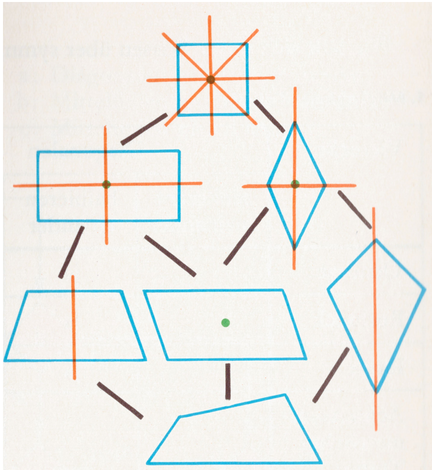


Abbildung 37 Ordnung der Vierecke nach dem übergeordneten Aspekt der Symmetrie in (Schupp 1977, S. 187)

Daneben findet sich in „Plus 8“ ein merkmalsorientierter Zugang, welcher der übersichtlichen „Speicherung“ des Gelernten über symmetrische Vierecke dienen soll (Schupp 1977, S. 188). Dazu werden zunächst die Merkmale „Diagonale“ und „Mittellinie“ unterschieden und in jeweils drei Kategorien („senkrecht zueinander“, „halbieren einander“ und „gleich lang“) gegliedert. In tabellarischer Form werden nun für die bekannten Vierecke diese Merkmale festgehalten, was auch zu einer vollständigen Systematisierung dieser führt. Dies lässt eine eindeutige Beschreibung eines Vierecks mittels der zugrunde gelegten Merkmale zu, welche die Formulierung des Hauses der Vierecke als Entscheidungsproblem in einem Flussdiagramm ermöglicht.

[249] Solche Ordnungen, die sich an übergeordneten Aspekten ausrichten, sind aktuell wieder vorherrschend, wie ein Blick in eine aktuelle Auflage des Lambacher Schweizers zeigt (Zimmermann 2008, S. 110). In seiner Einteilung von Ordnungsprinzipien sieht VOLKERT aber gerade solche als besonders problematisch, da sie inkonsequent sein können. Zum einen wird häufig nur beim Parallelogramm die Punktsymmetrie verwendet, sonst über Achsensymmetrie geordnet. Zum anderen kann das Trapez nur ohne Bezug zum allgemeinen Viereck eingeordnet werden, da es ebenfalls weder achsen- noch punktsymmetrisch ist (Volkert 1999, S. 27). Somit kann die Ordnung vom Schüler als willkürlich empfunden werden.

In „Plus 8“ wird allerdings häufig über Punkt- und Achsensymmetrie argumentiert und zudem in einer vorangegangenen Lerneinheit Punktsymmetrie auf Achsensymmetrie zurückgeführt (Schupp 1977, S. 148). Es werden also bewusst Voraussetzungen geschaffen, damit die Ordnung nach Symmetrien konsistent ist.

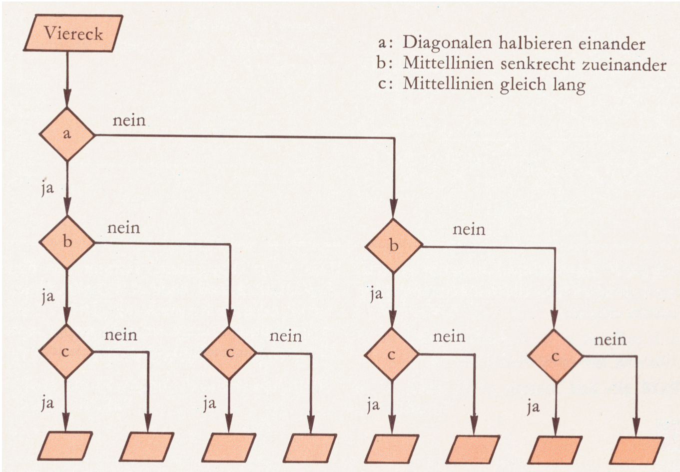


Abbildung 38 Flussdiagramm zur Ordnung von Vierecken zur Analyse von Vierecken in (Schupp 1977, S. 189)

Das Ziel einer solchen Darstellung und der damit verbundenen Ordnung des „Hauses der Vierecke“ ist, Verbindungen zwischen Mathematik und der zu dieser Zeit verstärkt in das schulische Interesse rückenden Informatik erkennbar zu machen.

Die gebrachten Beispiele der drei Schulbücher zeigen deutlich, wie sehr die Ordnung eines Begriffsnetzes von den jeweiligen Zielsetzungen abhängt und wie sich daraus unterschiedliche Theorien ergeben. Ein weiterer Aspekt bei der Ordnung von Begriffen sei noch abschließend erwähnt. Ordnungen spielen nicht nur bei der Strukturierung konkreter Unterrichtsinhalte eine Rolle, sondern auch in der didaktisch motivierten Klassifikation von Begriffen. Zum Beispiel schlug Gerhard Holland eine Einteilung geometrischer Begriffe nach „inhaltlichen, logischen, axiomatischen und strukturellen Gesichtspunkten“ vor (Holland 1988, S. 153). Wie auch beim Haus der Vierecke ist dies nur eine mögliche Ordnung. Eine weitere Klassifikation besteht aus der Unterteilung geometrischer Begriffe in Objekt-, Eigenschafts-, Relations- und Maßbegriffe, wie sie von Katharina Gaab vorgeschlagen wird (Gaab 2015, S. 114).

4.3.3 Die Kategorie der Inhaltsideen

Wie oben beschrieben, existieren gewisse Vorstellungen darüber, was zu einen Gebiet der Mathematik zusammenzufassen ist. Diese Vorstellungen sind historisch gewachsen und keinesfalls irreversibel. Neben der Bewusstmachung dieser Tatsache stehen die Inhaltsideen im Ideenkatalog der vorliegenden Arbeit für die Möglichkeit, verschiedene mathematische Inhalte einem größeren Komplex zuzuordnen und somit Ordnung zu schaffen. Zur Zeit werden auf bundesdeutscher

Ebene von der KMK die Ideen „Zahl“, „Maß“, „Raum und Form“, „Funktion“ und „Zufall“ vorgeschlagen.[250]

Diese Auswahl ist auch für obigen Ideenkatalog dienlich, da sie als Inhaltsideen klassische Stoffgebiete der Schulmathematik abdeckt (Zahl für Arithmetik und Algebra, Maß und Raum und Form für die Geometrie, Funktion und Maß für die Analysis und Zufall für die Stochastik). Betont sei, dass diese Inhalte ihren Ideencharakter erst durch einen sinnvollen Bezug zu den in ihnen codierten Theorieideen erhalten. Neben inhaltlichen Aspekten gilt es, auch den „Sinn“ dieser Ideen und der ihr zugeordneten Inhalten zu erfassen. Bei der Definition des Sinns einer Idee wird JUNGs Überlegungen zu Fundamentalen Ideen gefolgt.[251] Zur Sinnkonstitution ist eine Reflexion der Inhalte nötig. Dies kann durch Klärung von Fragen folgender Art angeregt werden.

- Was machte einen Inhalt erforschenswert?
- In welchem Verhältnis steht er im geistesgeschichtlichen Prozess zum gesamten Wissen?
- Wie kann er als Teil des geistigen Lebens im Schüler wirksam werden und diesem somit Teilhabe ermöglichen?

Exemplarisch sei dies an der Idee „Maß“ verdeutlicht. Die KMK fasst hierunter das Messen von Längen, Flächen und Volumina (KMK 2003, S. 10). Für die Erfassung der Idee „Maß“ wäre es nach JUNG unabdingbar, herauszustellen, dass gerade die Länge einer Strecke keine ihrer Eigenschaften ist. Es sind also unterschiedliche Maße denkbar. Diese Einsicht kann genutzt werden, um zusätzlich zur euklidischen Geometrie andere Geometrien als Gedankenspiele zu betrachten. Durch Reflexion der Möglichkeiten von Geometrien mit und ohne Parallelenaxiom kann bewirkt werden, dass „wir das Selbstverständliche des täglichen Lebens zum ersten Mal eigentlich *sehen*“ (Jung 1978, S. 174).

Ganz bewusst enthält der Ideenkatalog weitere Inhaltsideen, die quer zu den klassischen Stoffgebieten der Schulmathematik liegen. Sowohl die Idee der Approximation als auch die Idee des Algorithmus sind hier genannt.[252] Beide Ideen sind zwar in der fachdidaktischen Forschungsdebatte um Fundamentale Ideen schon länger etabliert (Kapitel 3.5 und 2.1.2, hier v.a. HEYMANN 1995), sind al-

[250] Dass sich die im Ideenkatalog gewählten Bezeichner nicht mit denen der KMK decken, dient der Vereinheitlichung der Bezeichner innerhalb der Ideenkategorien. Als Inhaltsidee liegt der Fokus auf dem „Maß“ und nicht auf der Tätigkeit des Messens. Warum in den Leitideen der KMK Messen als Tätigkeit angegeben ist - in den Preußischen Lehrplänen von 1925 stand noch „Maß“, vgl. Kapitel 2.3 - und alle anderen Ideen im weitesten Sinne mathematische Objekte sind, wurde bis heute nicht von der KMK begründet.

[251] Vgl. Kapitel 3.5.1.

[252] Auf die Tätigkeiten des Algorithmisierens und Approximierens wird bei der Beschreibung der Kategorie der Tätigkeitsideen eingegangen, vgl. Kapitel 4.4.3.

lerdings erst seit kurzer Zeit für den Mathematikunterricht durch die KMK institutionalisiert.

Besondere Bedeutung kommt dabei der Idee des Algorithmus zu, die nun auch (zumindest für die Oberstufe) explizit als Leitidee der KMK in den Bildungsstandards verankert ist (KMK 2012). Algorithmen finden sich in allen Gebieten der Schulmathematik. Sie bieten somit die Chance, durch Vernetzung der Stoffisolation entgegenzuwirken. Der GAUß-Algorithmus zum Lösen von Gleichungssystemen vernetzt die Lineare Algebra mit der analytischen Geometrie. Algorithmen zum Erzeugen von Zufallszahlen verbinden Stochastik mit algebraischen und analytischen Inhalten. Beispielsweise lassen sich die durch den Linearen Kongruenzgenerator erzeugten Zufallszahlen als diskrete Funktionen darstellen, deren Graphen Hyperebenen sind (Jonischkat/Müller-Clostermann 2006). Welche reichhaltigen Vernetzungen zwischen Geometrie, Algebra und Zahlentheorie, Analysis, Diskreter Mathematik und Informatik durch die Behandlung von Algorithmen angeregt werden können, wird in (von der Bank 2016) exemplarisch anhand des EUKLIDischen Algorithmus und des HERON-Verfahrens gezeigt. Der Fokus liegt dabei auch auf einer reichhaltigen Vernetzung weiterer Aspekte von Mathematikunterricht wie der Repräsentation der Inhalte, der möglichen Tätigkeiten, der Genese der Inhalte und den „Nichtkognitiven" Zielen von Unterricht.

Im Sinne der KMK stehen im Mathematikunterricht allerdings häufig die Kenntnis von Algorithmen und deren Anwendung im Vordergrund. Um von einer Idee sprechen zu können, muss auch dieses Verständnis erweitert werden. Berücksichtigt werden sollte u.a. der „Sinn" des Algorithmus, nämlich die „Abspaltung von Anwendungswissen aus dem Erkenntniszusammenhang" (Heymann 1996, S. 180). Da zur Ausführung eines Algorithmus kein Wissen über seine Entstehung und den Grund seines Funktionierens gebraucht wird, stellt er eine Arbeitserleichterung dar. Prinzipiell können algorithmisierbare - oder auch schon vorab algorithmisierte - Probleme der Schulmathematik auch einem Computer überlassen werden. Dies ist ein Grund, weshalb Algorithmen in der Mathematik so große Bedeutung zukommt. Damit soll natürlich nicht gesagt werden, dass die Reflexion von Algorithmen vernachlässigbar ist. Die Idee des Algorithmus im Ideenkatalog fasst auch Überlegungen zu deren Entstehung und Analyse (Laufzeit, Effizienz). Damit kann die Idee des Algorithmus in besonderer Weise als Schnittstelle zwischen Mathematik und Informatik, zu deren Fundamentalen Ideen sie ja auch gehört, gesehen werden. Sie ermöglicht, informatische Inhalte im Mathematikunterricht zu behandeln.[253]

---

[253] Mit Möglichkeiten, Informatik und Mathematikunterricht zusammenzuführen, beschäftigt sich der Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Informatik" der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Sowohl 1995 als auch 2005 wurde ein Tagungsband dieser Thematik gewidmet. Im

Die Idee der Approximation ist zur Zeit noch nicht so stark verankert wie die des Algorithmus, steht aber in engem Zusammenhang mit dieser. Die beiden oben genannten Approximationsalgorithmen belegen, dass Approximation im Mathematikunterricht eine Rolle spielt, auch wenn ihr keine Funktion als Leitidee eingeräumt wird.[254] Neben diesen algorithmischen Aspekten der Approximation werden in der vorliegenden Arbeit unter dieser Idee auch Inhalte verstanden, die klassischerweise im Mathematikunterricht der Optimierung zugeordnet werden. Für den Mathematikunterricht seien geometrische Optimierungsprobleme (bspw. das isoperimetrische Problem)[255] oder die Lineare Optimierung genannt. Auch „kleinere" Formen der Approximation wie Schätzungen und Überschläge gehören zu dieser Idee. Approximation spielt auch über mathematische Inhalte hinaus eine Rolle. Jeder Modellierung liegt die Approximation eines Modells an die Wirklichkeit zugrunde. Von besonderer Bedeutung sind dabei die Reflexion der Modellannahmen und damit die Fehlerabschätzung.

In (von der Bank 2013) wird anhand von ausgewählten Optimierungsproblemen gezeigt, dass auch diese zur Vernetzung der Stoffgebiete des Mathematikunterrichts geeignet sind. Dort wurde noch keine klare Unterscheidung von Approximation und Optimierung eingehalten. Das nun im Ideenkatalog von der Idee der Approximation und nicht der Idee des Optimierens gesprochen wird, hängt zum einem mit dem angestrebten inhaltlich weitergefassten Verständnis von Approximation zusammen. Zum anderen soll damit zum Ausdruck gebracht werden, dass Approximation, anders als Optimierung, nicht nur das Ziel (das Optimum/Minimum/Maximum) im Blick hat, sondern den gesamten Prozess der Annäherung betont.[256]

Auch im Bereich der Approximation werden aktuell verstärkt diskrete Probleme in den Blick genommen. Mit der Veröffentlichung ihrer Dissertation und einem daran geknüpften Forschungsprojekt setzte u.a. BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL er-

1995 herausgegebenen Tagungsband „Fundamentale Ideen der Mathematik und Informatik" ging es um die Herausarbeitung von Gemeinsamkeiten und Unterschieden Fundamentaler Ideen von Mathematik und Informatik. Im Tagungsband „Informatische Ideen im Mathematikunterricht" von 2005 wurden Ansätze zur Etablierung Fundamentaler Ideen der Informatik im Mathematikunterricht vorgestellt. Darin zeigten beispielweise LAMBERT und PIA SELZER, dass (durch den Einsatz des Computers unumgängliche) „Diskretisierung" eine Schnittstelle von Mathematik und Informatik ist, deren bewusste Thematisierung im Unterricht zur Reflexion über Möglichkeiten und Grenzen des Werkzeugs Computer anregt (Lambert/Selzer 2005, S. 87-100).

[254] Ein inhaltlich und methodisch ausgearbeiteter Vorschlag Mathematikunterricht curricular an der Leitlinie „Optimieren" auszurichten, liegt mit (Schupp 1992) vor.

[255] In (Bender/Schreiber 1985) wird im geometrischen Kontext von Exhaustion gesprochen.

[256] Bei den später vorgestellten Tätigkeitsideen wird zwischen Approximieren und Optimieren unterschieden, je nachdem zu welchem Ziel die Tätigkeit eingesetzt wird. Eine solche Unterscheidung scheint aber im Bereich der Inhaltsideen nicht sinnvoll, da so eine zu enge Strukturierung von Inhalten einhergehen würde.

neut[257] Impulse im Diskurs über Kombinatorische Optimierung im Mathematikunterricht. Dieser führte zur Aufnahme ausgewählter Inhalte der Graphentheorie zum Wahlbereich des Lehrplans in Berlin (SBJS 2006, S. 58-59).[258]

Zusammenfassend enthalten die Inhaltsideen mathematische Inhalte, die in den klassischen Gebieten der Schulmathematik geordnet sind. Darüber hinaus sind mit der Idee des Algorithmus und der Approximation zwei Ideen aufgenommen, die quer zu den Gebieten der Schulmathematik liegen. Sie dienen deren Vernetzung und ermöglichen, Inhalte im Mathematikunterricht zu berücksichtigen, die bis jetzt noch nicht in Lehrplänen verankert sind. Insbesondere sind dies für die vorliegende Arbeit Inhalte der Diskreten Mathematik und der Informatik.[259]

4.4 Das Zusammenspiel

Schon bei den Theorieideen deutete sich an, dass Mathematik und Mathematikunterricht sich unter dem Einfluss des Menschen entwickeln. Das Zusammenspiel von *Welt/Mensch* und *Mathematik* ist durch einen handelnden Umgang des Menschen mit Mathematik geprägt. Genau diese mathematischen Tätigkeiten werden traditionell (neben inhaltlichen Aspekten) als Fundamentale Ideen diskutiert. Besonders stark an mathematischen Tätigkeiten sind die Konzeptionen SCHWEIGERs und SCHUPPs ausgerichtet. SCHWEIGER definiert Fundamentale Ideen als „Bündel von Handlungen, Strategien oder Techniken“ (Schweiger 1992, S. 207).[260] Auch SCHUPP betont, dass Fundamentale Ideen Tätigkeiten sein müssen, damit sie möglichst frühzeitig vom Lerner antizipiert werden können. Er nennt diese Eigenschaft Fundamentaler Ideen „Archetypizität“ (Schupp 2004, S. 7). Neben diesen „Reinformen“ einer tätigkeitsorientierten Definition Fundamentaler Ideen spielen mathematische Tätigkeiten bei allen Konzepten Fundamentaler Ideen eine Rolle.[261]

---

[257] In den 1970er Jahren gab es bereits Vorschläge, Approximation in Form von kombinatorischer Optimierung im Unterricht zu etablieren, vgl. (Winter 1971).

[258] Dass diskrete Inhalte zwar als wichtig angesehen werden, allerdings im Mathematikunterricht der Schule zur Zeit verzichtbar scheinen, zeigt die Revision des Rahmenlehrplans Mathematik für das achtstufige Gymnasium in Hamburg. Dort wurden Themen der Graphentheorie zunächst als Wahlpflichtgebiet für die Klassenstufen 9 und 10 vorgeschrieben, dann aber 2007 wieder gestrichen (BBS 2007, S. 33).

[259] Da in vielen Bundesländern Informatik als eigenständiges Schulfach zumindest in der Mittelstufe (noch) nicht institutionell in Lehrplänen verankert und somit auch nicht flächendeckend etabliert ist, können informatische Inhalte zumindest teilweise im Mathematikunterricht integriert werden. Wie dies geschehen kann und soll, wurde schon vielfach in der Mathematik- und Informatikdidaktik diskutiert, vgl. (Hischer 1994).

[260] Wie in Kapitel 3.5.2 gezeigt, wendet SCHWEIGER seine Definition nicht konsequent auf die Prototypen seines Ideenkatalogs an. Hier finden sich mathematische Begriffe wie Funktion oder Modell, die nicht als Tätigkeiten formuliert sind (Schweiger 2010).

[261] In (Bender/Schreiber 1985) finden sich neben Eigenschaften auch Prozeduren als Universelle Ideen. Aktuell werden Fundamentale Ideen bewusst als mathematische Tätigkeiten und Begriffe aufgefasst. So sind Fundamentale Ideen HISCHER folgend als „Symbiose“ von Handlung und Be-

Um diese Vielzahl von Konzepten und die daraus resultierenden Ideen zu strukturieren, wird das direkte Zusammenspiel der beiden Seiten *Welt/Mensch* und *Mathematik* in obigem Modell durch Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen beschrieben (Abbildung 39).

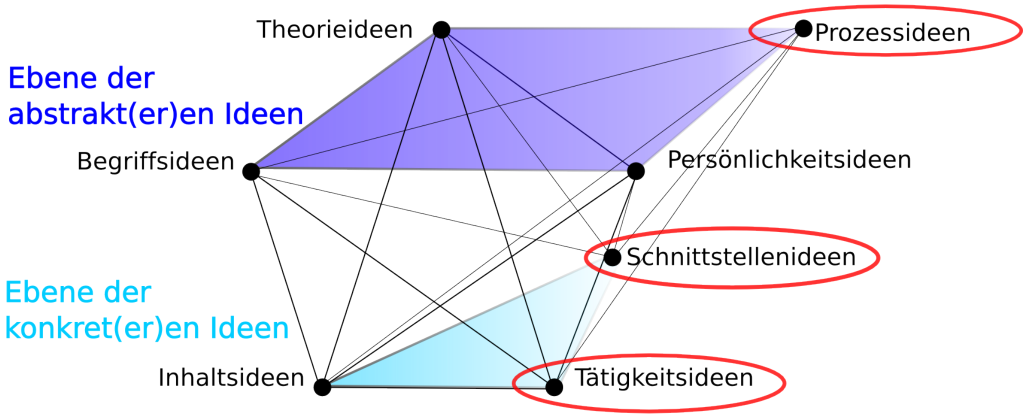


Abbildung 39 Abstraktere Prozessideen und konkretere Schnittstellen- und Tätigkeitsideen

Die abstrakt(er)en Prozessideen stehen dafür, dass (Nicht-)Mathematiker bei der Beschäftigung mit Mathematik typische Vorgehensweisen entwickeln, die sich in Strategien, Heuristiken (als Strategien, die zum Problemlösen eingesetzt werden), Handlungen und Operationen (als umkehrbar denkbare Handlungen) einteilen lassen. Schnittstellen- und Tätigkeitsideen umfassen den konkreten Umgang von Menschen mit Mathematik. Die Schnittstellenideen gehen dabei eher von der Mathematik aus, in dem Sinne, dass der Mensch ein konkretes Problem löst und dazu modelliert, kommuniziert, fragt etc. Tätigkeitsideen sind (eher) umgekehrt gerichtet. Hier wirkt der Mensch auf Mathematik, indem er Operationen mit und auf mathematischen Inhalten (z.B. das Optimieren einer Zielfunktion) oder mit und auf Mathematik selbst (z.B. beim Formalisieren eines Sachverhaltes) ausführt. Die Unterscheidung ist nicht immer trennscharf, dient aber dennoch der Gliederung der Ideenkategorien und schafft somit Ordnung im Ideenkatalog.

4.4.1 <u>Die Kategorie der Prozessideen</u>

Die Kategorie der Prozessideen gliedert die bisherigen Theorien Fundamentaler Ideen stärker und dient für Schnittstellen- und Tätigkeitsideen als abstrakter Überbau. Die prozesshaften Züge von Mathematik, welche sich im Umgang des Mathematikers mit mathematischen Inhalten und mit Mathematik selbst zeigen, können in Handlungen und Operationen und Strategien und Heuristiken unterteilt werden. Dabei wurde die Unterscheidung zwischen Handlung und Operati-

griff zu sehen (Hischer 2015, S. 7). Auch VOHNS betont, dass es zum Wesen Grundlegender Ideen gehört, „begriffliche, handlungsmäßige, technisch-methodische und heuristisch-strategische Elemente“ zu vereinen (Vohns 2007, S. 91).

on für die vorliegende Arbeit durch die Theorie PIAGETs gewählt. Strategien und Heuristiken lassen sich jedoch nicht immer trennscharf ausmachen.

In Kapitel 3.2.2 wurde bereits auf die Äquilibrationstheorie und die stufengemäße Entwicklung der Intelligenz nach PIAGET eingegangen. An dieser Stelle wurde ebenfalls auf die enge Verbindung zwischen intellektueller Entwicklung und mathematischen Strukturen hingewiesen. Die Überführung von Handlungen in (formale) Operationen bildet den Kern der Stufentheorie PIAGETs. Während des sensomotorischen Stadiums (ca. 0-1,5 Jahre) sind konkrete Handlungen das „fundamentale Mittel" des Kindes zur Wechselwirkung mit seiner Umwelt und somit zu deren Erkenntnis (Wittmann 1981, S. 62). Im Laufe des präoperativen (ca. 1,5-7 Jahre) und konkret-operativen Stadiums (ca. 7-11/12 Jahre) werden die Handlungen stetig abstrakter. Zunächst können sie zwar verinnerlicht werden, sind aber noch an Zeichen und Symbole geknüpft, die eine strukturelle Ähnlichkeit zum repräsentierten Gegenstand aufweisen. Später können Handlungen rein gedanklich vollzogen werden. Der Übergang zwischen den beiden Stadien gilt als abgeschlossen, wenn innerliche Handlungen reversibel werden, d.h., wenn ihre Umkehrung gedacht werden kann. Während die Umkehrungen zunächst noch an konkrete Situationen gebunden sind, sind im formal-operativen Stadium (ab 11/12 Jahren) auch Operationen mit abstrakten, rein gedanklichen Gegenständen möglich. Somit können Gedanken und das Denken selbst zum Gegenstand operativen Handelns werden. Im Kontext der Mathematik bedeutet dies, dass nicht mehr nur mit mathematischen Objekten operiert werden kann, sondern dass nun „formallogische Schlüsse [...] von wahren Aussagen unabhängig von deren Inhalt wieder zu wahren Aussagen" führen (Wittmann 1981, S. 76). Mit dem Prinzip der Deduktion können nun mathematische Strukturen auf einer Meta-Ebene selbst zum Gegenstand des Nachdenkens werden.

Für das Lernen von Mathematik hat sich die Unterscheidung von Handlung und Operation im operativen Prinzip nach WITTMANN und dem operativen Üben niedergeschlagen (Wittmann 1981). Dabei werden Aufgaben so gestaltet, dass die Möglichkeiten des formal-operativen Denkens bewusst angesprochen werden. Dies geschieht durch Umkehrung der Aufgabenstellung (Reversibilität) oder Verkettung von Aufgaben und Übergang zu Nachbaraufgaben (Komposition). Die Unterscheidung von Handlung und Operation ist nicht auf den schulischen Mathematikunterricht begrenzt. Die bewusste Überführung von zunächst noch konkreten, dann gedanklichen Handlungen zu gedanklichen Operationen mit und über Inhalte ist eine Aufgabe, die auch den forschenden Mathematiker beispielweise bei der Nutzung von Computermodellen zur Simulation komplexer Zusammenhänge begleitet.[262]

Die (nicht immer trennscharfe) Unterteilung von prozesshaften Elementen von Mathematik bei der Aufstellung Fundamentaler Ideen findet sich schon in einigen der vorgestellten Konzeptionen (vgl. Kapitel 3.5.2 und 3.5.3). BENDER und SCHREIBER unterscheiden zwischen „Prozeduren“ und „Komponenten von Begriffsbildungsprozessen“ (Schreiber 1983, S. 70). Unter Prozeduren fassen die Autoren beispielsweise Exhaustion zur Flächenausschöpfung, Iteration als schrittweises Vorangehen oder Algorithmus als mechanisches Hintereinanderausführen von Anweisungen. Komponenten von Begriffsbildungsprozessen bilden die (geistigen) Prozesse, die nötig sind, um im Sinne einer operativen[263] Genese einen mathematischen Begriff zu bilden. Speziell sind dies „Ideation“, „Abstraktion“ und „Repräsentation“ (Bender/Schreiber 1985, S. 199).

Auch TIETZE/KLIKA/WOLPERS unterscheiden neben den produktorientierten „Leitideen“ prozesshafte Elemente von Mathematik in „zentrale Mathematisierungsmuster“ und „bereichsspezifische Strategien“. Hier fassen zentrale Mathematisierungsmuster Methoden des Mathematisierens in nicht-mathematischen Wissenschaften und in der Erfahrungswelt. Bereichsspezifische Strategien sind „wichtige Ergänzungen allgemeinerer heuristischer Verfahrensregeln“, die in einem Teilgebiet der Mathematik besonders wichtig sind (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 42). Darunter verstehen die Autoren nicht nur Ausprägungen von Heuristiken, sondern auch Strategien zur Begriffsbildung.

Die Unterscheidung nach dem potentiellen Anwendungscharakter einer Methode oder einer mathematischen Tätigkeit spiegelt sich in der Aufteilung der konkreteren Ideenkategorien nach Schnittstellen- und Tätigkeitsideen implizit wider. Die Unterscheidung von Heuristiken als Strategien, die zum Problemlösen im engeren Sinne eingesetzt werden, und Strategien, die sich auf Mathematisierungen und Begriffsbildung beziehen, wird auch im Katalog nach LAMBERT genutzt, um die Theorie Fundamentaler Ideen stärker zu gliedern. Unter Heuristiken werden dabei die „größeren“ Problemlösestrategien nach PÓLYA (Aufgabe verstehen, Plan ausdenken, Plan ausführen und Lösung prüfen) verstanden (Pólya 1980), zusammen mit Heurismen (z.B. ein Problem in Teilprobleme zerlegen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten usw.), die beim Ausdenken und Durchführen

[262] In solchen Computermodellen stecken natürlich schon Operationen. Der Einsatz dieser Modelle dient aber einer konkreten Handlung, die somit zur Operation werden kann.

[263] Operative Begriffsbildung nach BENDER und SCHREIBER ist nicht zu verwechseln mit dem auf PIAGET basierenden operativen Prinzip (s.o.), vgl. dazu (Rembowski 2015, S. 211 ff.).

eines Plans eingesetzt werden.[264] Strategien sind im LAMBERTschen Katalog Verfahren, die nicht primär auf das Lösen von Problemen im engeren Sinne gerichtet sind. Darunter fallen z.B. Formalisieren und Exaktifizieren von Axiomensystemen, Passen von Begriffen, Ordnen und Vernetzen von Begriffen usw.

Es sei nochmals betont, dass die Kategorie der Prozessideen die Theorie gliedert. Das bedeutet, dass sie gerade nicht die konkret genannten Handlungen, Operationen, Strategien und Heuristiken „enthält". Die Nennung dieser exemplarischen Beispiele diente der Erläuterung der angestrebten Einteilung. Konkrete Tätigkeiten sind in den Ideenkategorien der Schnittstellen- und Tätigkeitsideen aufgehoben. In der in Kapitel 5.2 vorgestellten unterrichtspragmatischen Reduktion findet sich eine Liste von konkreten Heuristiken nach SCHREIBER, die im Knoten „Aktivitäten" des Vernetzungspentagraphen eine Rolle spielen.

4.4.2 Die Kategorie der Schnittstellenideen

Eine Unterteilung von Fundamentalen Ideen, die den Prozesscharakter von Mathematik betonen, in eher inner- und eher außermathematische Aspekte wurde schon in der didaktischen Literatur vorgenommen. TIETZE/KLIKA/WOLPERS unterscheiden in diesem Bereich zwischen „bereichsspezifischen Strategien" und „zentralen Mathematisierungsmustern" (Tietze 1979, S. 145).[265] Während die Autoren unter bereichsspezifischen Strategien eher innermathematische Tätigkeiten fassen, die in einem Teilgebiet der Mathematik besondere Bedeutung haben, sind zentrale Mathematisierungsmuster

> solche Muster, [...] [die] sich einmal auf verbreitete Methoden des Mathematisierens in nicht-mathematischen Wissenschaften beziehen [...]. Wir subsumieren hierunter aber auch Mathematisierungen in Sinne allgemeiner Erfahrungen [...]

(Tietze 1979, S. 145)

Als Fundgrube für Fundamentale Ideen kommen demnach „Verwendungssituationen [...] in [...] den Volks- und Sozialwissenschaften, der Psychologie, den Naturwissenschaften und der technischen Fächer" in Frage (Tietze 1979, S. 149). Als zweite Quelle dient die Mathematisierung der allgemeinen Erfahrung z.B. durch den Raum-, Abstands-, Richtungs- oder Orientierungsbegriff. Für die lineare Algebra und analytische Geometrie stellt TIETZE einen Katalog zentraler Mathematisierungsmuster zusammen, der 30 Fundamentale Ideen enthält.[266] Diese

---

[264] Für eine ausführliche Aufstellung verschiedener Heurismen vgl. (Schreiber 2008). Eine Auflistung der von Schreiber zusammengestellten Heurismen findet sich in der vorliegenden Arbeit in Kapitel 5.2.1. Dort spielen die Heurismen im Knoten „Aktivitäten" eine wichtige Rolle.

[265] Diese Überlegungen klingen auch noch in (Tietze/Klika/Wolpers 2000) an, in der wichtigen Vorarbeit von TIETZE sind sie allerdings ausführlicher dargelegt. Daher wird in der folgenden Argumentation (Tietze 1979) gefolgt.

[266] In (Tietze/Klika/Wolpers 2000) finden sich solche Kataloge auch für die Analysis und Stochastik.

entsprechen im Wesentlichen allen wichtigen Begriffen und Methoden, die sich als Kapitelüberschriften in Lehrbüchern finden. Beispielsweise nennt TIETZE Vektoren (Punkte, Pfeile) als zentrales Modell zur Beschreibung von außermathematischen Situationen (Preislisten, Materiallisten, Testlisten, Produktionsvektoren, Populationsvektoren, Wahrscheinlichkeitsvektoren, Zeiger in der Physik) (Tietze 1979, S. 153).

Mit der Unterscheidung in Schnittstellen- und Tätigkeitsideen wird die von TIETZE vorgenommene Einteilung grundsätzlich beibehalten. Allerdings sind die hier vorgestellten Schnittstellenideen wesentlich allgemeiner gehalten und nicht an konkrete Inhalte gebunden. Unter ihnen werden Tätigkeiten verstanden, die typisch für die Anwendung von Mathematik in außermathematischen Situationen sind. Mathematik wird damit als Werkzeugkasten verstanden, welcher befähigt „Erscheinungen der Welt um uns, die alle angehen oder angehen sollen, aus Natur, Gesellschaft und Kultur in einer spezifischen Art wahr[zu]nehmen und zu verstehen“. Zusätzlich sollen sie helfen, „Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben“ (Winter 1996, S. 35). Als übergeordnete „allgemeine Qualifikationen des Anwendens von Mathematik“ (Fischer/Malle 1985, S. 85) sind als Schnittstellenideen „Problemlösen“, „Modellieren“, „Argumentieren“, „Fragen“, „Darstellen“ und „Kommunizieren“ zusammengefasst.

Natürlich spielen bei Anwendungen auch Tätigkeitsideen eine Rolle wie Algorithmisieren oder Exaktifizieren, doch werden diese eher innerhalb eines für das jeweilige Problem ausgewählten mathematischen Modells verwendet. Im Sinne des oben aufgezeichneten Spannungsverhältnisses Welt/Mensch ←→Mathematik kehren Schnittstellenideen in gewisser Weise die „Richtung“ des Verhältnisses um. Während Tätigkeitsideen vom Menschen bei der Bearbeitung mathematischer Probleme eingesetzt werden und somit der Mensch auf die Mathematik wirkt (Richtung: Welt/Mensch → Mathematik), nutzt der Mensch mithilfe der Schnittstellenideen eher den mathematischen Werkzeugkasten zur Lösung außermathematischer Probleme (Richtung: Welt/Mensch ← Mathematik). Genau wegen dieser Bedeutung der Schnittstellenideen für Anwendungen von Mathematik auf die Welt ist diese Kategorie im Spannungsverhältnis näher an der Seite Welt/Mensch eingeordnet.

Den Anwendungscharakter betonend überrascht es nicht, dass sich die meisten dieser Schnittstellenideen in den pragmatisch ausgelegten KMK Bildungsstandards für Mathematik aufgehoben finden.[267] Dort finden sich als allgemeine

[267] SCHUPP weist darauf hin, dass die Betonung des Anwendungscharakters von Mathematik in deutschen Lehrplänen eine lange Tradition hat (Schupp 1988). Für das Gymnasium ging eine erste Welle der Anwendungsorientierung mit der Meraner Reform einher. Im Zuge der „Neuen Mathematik“ in den 1970er Jahren bedeutete Anwendungsorientierung dann keine „echte“ An-

Kompetenzen mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, modellieren, mathematische Darstellungen verwenden und kommunizieren (KMK 2003). Lediglich die Tätigkeit des Fragens findet sich dort nicht als eigenständige Kompetenz. Sie dient der Beschreibung der Kompetenz „mathematisch argumentieren", die beinhaltet „Fragen [zu] stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind („Gibt es ... ?", „Wie verändert sich ...?", „Ist das immer so ... ?")" (KMK 2003, S. 8). Da jedoch das gezielte mathematische Fragen eine elementare Tätigkeit darstellt, die den Prozess des Problemlösens beschleunigen und lenken kann, wird sie in der vorliegenden Arbeit als eigenständige Schnittstellenidee betont.

Innerhalb der Schnittstellenideen kommt dem Problemlösen eine übergeordnete Rolle zu. Problemlösen ist in gewissem Maße der Zweck der anderen Ideen dieser Kategorie. Diese Tätigkeit ist bewusst sehr allgemein formuliert, um bei ihrer Anwendbarkeit keine Einschränkungen in Kauf nehmen zu müssen. Problemlösen meint hier beispielsweise nicht nur die Bewältigung komplexer Situationen, sondern fängt schon im Kleinen bei alltäglicheren Situationen, die mit mathematischen Hilfsmitteln bearbeitet werden, an. Um ein Problem in der Welt zu lösen, nutzt der Mensch dann die anderen Schnittstellenideen. An vorderster Stelle steht dabei das Modellieren, in dessen Zuge auch die anderen Schnittstellenideen zum Tragen kommen (s.u.).

Die einzelnen Schritte des Modellierens sind in folgendem Modellbildungskreislauf nach SCHUPP visualisiert, der die Ebenen Welt/Mathematik und die Seiten Problem/Lösung unterscheidet und übersichtlich darstellt.

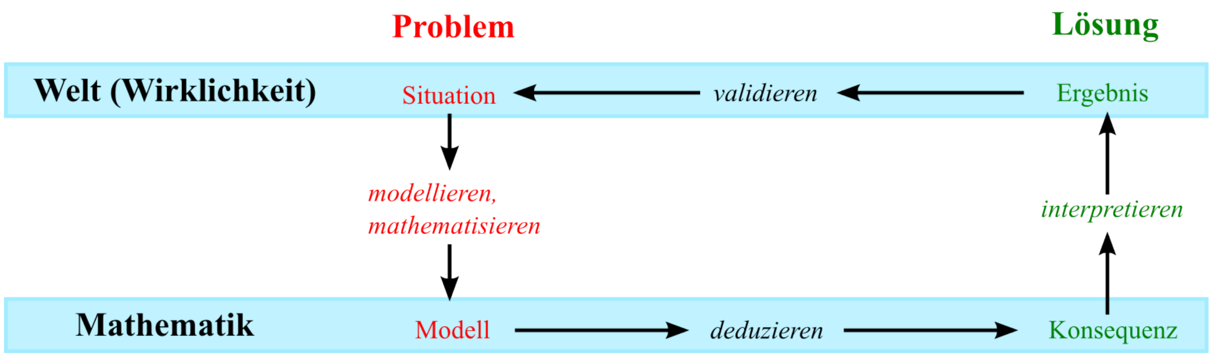


Abbildung 40 Modellbildungskreislauf nach (Schupp 1988)

SCHUPP erläutert seinen Modellbildungskreislauf wie folgt.

> Das in einer außermathematischen Situation auftretende Problem wird zunächst in ein innermathematisches Problem überführt und dieses dann mit den dortigen

wendung von Mathematik mehr, sondern ein Lernen mathematischer Modelle auf Vorrat. Häufig überstieg die Anwendung dieser Modelle den schulischen Kontext. Seit Mitte der 1980er Jahre werden (bis heute) wieder vermehrt außermathematische Anwendungen im Mathematikunterricht thematisiert.

> Mitteln gelöst. Die mathematische Lösung wird nun wieder in die Ausgangssituation übertragen und schließlich überprüft, ob die so erhaltenen Informationen zu deren Klärung in der Tat beitragen. Wenn nicht, sollte der Lösungsprozeß fortgesetzt werden, ist insbesondere zu prüfen, welche der bisherigen Maßnahmen geeignet abzuändern sind.

(Schupp 1988, S. 11)

Anhand des Modellbildungskreislaufs wird der enge Zusammenhang zwischen den Schnittstellenideen deutlich. Das Modellieren erfordert ein Auswählen und Anpassen eines Modells an die Wirklichkeit. Dieses ist dann als „Bild der Wirklichkeit" eine mathematische Darstellung der Situation (Schupp 1988, S. 10). Damit dies gelingt, ist es wichtig, verschiedene mathematische Darstellungsformen zu kennen und gezielt eine geeignet erscheinende auszuwählen. Um die Entscheidung für eine Darstellung treffen zu können, müssen vorher Daten über das Problem gesammelt worden sein. Dies geschieht durch gezieltes Fragen.[268] Die somit gesammelten Daten müssen dann zu mathematischen Argumenten für oder gegen eine Darstellung übersetzt werden. Das Interpretieren und Validieren des Ergebnisses erfolgt wiederum durch Argumentieren für oder gegen dessen Gültigkeit. Dazu sind die begangenen Lösungswege offenzulegen. Diese Argumentationen müssen in einem sozialen Prozess kommunizierbar sein, da nun vornehmlich außermathematische Bedingungen Berücksichtigung finden. Bei diesem Prozess können nun weitere Probleme auftauchen, welche die Anpassung des Modells nötig machen. Damit beginnt der Zyklus von Fragen, Darstellen, Argumentieren und Kommunizieren erneut.

Nachdem gerade der Übersetzungsvorgang von der Welt in ein mathematisches Modell und umgekehrt sowie zudem die Validierung der gewonnenen Ergebnisse mittels Fundamentaler Ideen beschrieben wurde, soll nun mit den Tätigkeitsideen das innermathematische Handeln in den Blick genommen werden.

4.4.3 Die Kategorie der Tätigkeitsideen

Der fundamentale Charakter der in dieser Kategorie enthaltenen Tätigkeiten wurde schon vielfach in der fachdidaktischen Diskussion herausgestellt. Kaum eine dieser Ideen findet sich nicht schon in einem früheren Katalog Fundamentaler Ideen. Zwei Ausnahmen bilden das Verallgemeinern und Deduzieren. Diese werden häufig unter anderen Ideen zusammengefasst. SCHWEIGER ordnet diese Tätigkeiten seiner Idee der Sprache unter (Schweiger 2010). Bei FÜHRER klingt

[268] Damit ist nur ein kleiner Teil dessen angesprochen, was unter Fragen gefasst werden kann. Fragen ist allerdings eine so elementare Aktivität mit einem sehr weiten Spektrum, dass, um sie für eine Theorie Fundamentaler Ideen der Mathematik nutzbar zu machen, gewisse Aspekte des Fragens fokussiert werden müssen.

das Deduzieren im Zusammenhang mit der Idee „Kontrolle“ durch stringente Begründungen an (Führer 1997, S. 85).

Die folgende Auflistung (Abbildung 41) zeigt die Nennungen der Tätigkeitsideen in den einzelnen schon in Kapitel 3 diskutierten Theorien Fundamentaler Ideen. Sie kann allerdings nur schwer Anspruch auf Vollständigkeit erheben: Dies ist zum einen im Umfang der vorhandenen Literatur begründet, und zum anderen wird bei der Formulierung Fundamentaler Ideen in der Literatur nicht immer zwischen Begriff und Tätigkeit unterschieden. So nennt FÜHRER die Idee „Approximation“ und fasst darunter prozesshafte Elemente des Approximierens. In solchen Fällen werden die Arbeiten auch der jeweiligen Tätigkeitsidee zugeordnet. Schwieriger ist die Entscheidung, wenn Aspekte der jeweiligen Tätigkeitsidee in anderen Fundamentalen Ideen eines Kataloges aufgehoben sind. Aspekte der Tätigkeitsidee Verallgemeinern finden sich in der Fundamentalen Idee Induktion als Schließen vom Speziellen zum Allgemeinen, die von VOHNS (u.a.) genannt wird. In diesen Fällen wurden die Konzeptionen Fundamentaler Ideen der Tätigkeitsidee zugeordnet, allerdings mit einem Verweis auf die eigentlich in der Literatur genannte Idee.

Trotz dieser Unschärfe kann mithilfe der Auflistung ein Transparenz schaffender Überblick der Verankerung der Tätigkeitsideen in der mathematikdidaktischen Diskussion Fundamentaler Ideen gewonnen werden.

Approximieren	(Bender/Schreiber 1985; Exhaustion), (Schweiger 1992; Linearisierung), (Humenberger/Reichel 1995), (Borovcnik 1997; Verbesserung durch Präzision), (Führer 1997), (Tietze/Klika/Wolpers 2000), (Vollrath 2001)
Optimieren	(Schupp 1992), (Schweiger 1992), (Humenberger/Reichel 1995), (Tietze/Klika/Wolpers 2000), (Hischer 2012)
Algorithmisieren	(Jung 1978), (Bender/Schreiber 1985), (Humenberger/Reichel 1995), (Führer 1997), Heymann 1999), (Vollrath 2001), (Vohns 2007), (Hischer 2012), (KMK 2012)
Vernetzen	(Humenberger/Reichel 1995), (Baumann 1996)
Passen	(Bender/Schreiber 1985)
Dualisieren	(Schweiger 1992)
Ordnen/Strukturieren	(Bruner 1970), (Fischer 1976), (Heymann 1999), (Vohns 2007), (Schweiger 2010)
Exaktifizieren	(Fischer 1976)
Formalisieren	(Fischer 1976), (Dörfler 1984; Formale Darstellung), (Baumann 1996)
Verallgemeinern	(Borovcnik 1997; Repräsentativität), (Führer 1997; Induktion), (Vohns 2007; Induktion)
Begründen	(Führer 1997; Induktion, Kontrolle), (Vohns 2007; Induktion), (Schweiger 2010; Testen und Bestätigen)
Deduzieren	keine Nennung

Abbildung 41 Nennung der Tätigkeitsideen in der mathematikdidaktischen Literatur

Anders als die Schnittstellenideen stehen Tätigkeitsideen eher für innermathematische Operationen. Das heißt, der Mathematiker arbeitet mit mathematischen Objekten. Dabei kann auch Mathematik selbst zum Gegenstand seiner Arbeit werden.[269] Ist dies der Fall, werden die Tätigkeiten, die ausgeführt werden, als meta-mathematisch bezeichnet.[270] Die folgende Abbildung zeigt eine Ordnung der Tätigkeitsideen von mathematisch nach meta-mathematisch.

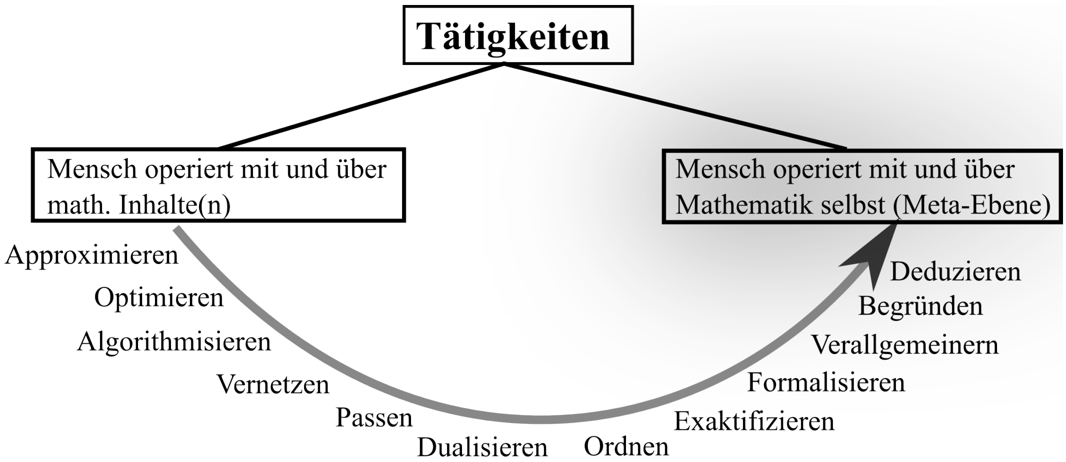


Abbildung 42 Ordnung der Tätigkeitsideen von mathematisch nach meta-mathematisch[271] (Poster)

Die hier getroffene Unterscheidung zwischen mathematischer und meta-mathematischer Tätigkeit soll am Beispiel der sich nahestehenden Ideen „Approximieren", „Optimieren", „Exaktifizieren" und „Passen" erläutert werden.

Schon bei den Inhaltsideen wurde das in der vorliegenden Arbeit vertretene Verhältnis von Approximation und Optimierung erklärt. Diese gilt auch für die zugehörigen Tätigkeiten. Während Optimieren auf ein Ziel ausgerichtet ist, steht beim Approximieren der Prozess des Annäherns an ein möglicherweise nicht erreichbares Ziel im Vordergrund. Beide Tätigkeiten sind hier als mathematische Tätigkeiten eingeordnet, da sie sich auf den Umgang mit mathematischen Objekten beziehen. Sie sind also auf konkrete mathematische Inhalte gerichtet. Das NEWTON-Verfahren approximiert die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion mit beliebiger Genauigkeit. Beim linearen Optimieren wird aus einer polyederförmigen, zulässigen Menge derjenige Punkt bestimmt, der unter gegebenen Be-

---

[269] Die in Kapitel 4.3.1 skizzierten Entwicklungen im 19. und 20. Jahrhundert, als der gesamte Aufbau der Mathematik und auch die Aussagekraft der durch die axiomatischen Methode gewonnenen Erkenntnisse hinterfragt wurde, sind Beispiele für meta-mathematische Überlegungen.

[270] Auf die meta-mathematische Komponente Fundamentaler Ideen weist auch BOROVCNIK explizit hin (Borovcnik 1997, S. 22). Für ihn zeichnet sich eine Fundamentale Idee gerade dadurch aus, dass sie mathematische Inhalte strukturiert und somit auf einer Meta-Ebene liegt, vgl. dazu auch Kapitel 3.5.3.

[271] Die Schatten hinter den Textfeldern sollen deren Lage auf einer Meta-Ebene bezüglich der anderen Textfelder visualisieren.

dingungen eine Zielfunktion maximiert bzw. minimiert. Hier operiert der Mathematiker mit mathematischen Inhalten wie Algorithmen, Nullstellen, Funktionen und Punktmengen.

Die Tätigkeit des Annäherns ist allerdings nicht auf den Umgang mit mathematischen Inhalten beschränkt. Begriffsbildungen sind häufig dadurch geprägt, dass ein vorhandenes Begriffsverständnis nicht ausreicht. Ein Begriff muss exaktifiziert werden, damit er angewendet werden kann. FISCHER und MALLE, deren Überlegungen auch schon bei der Erklärung der Kategorie der Begriffsideen genutzt wurden, seien auch hier wieder treffend zitiert.

> In der Regel ist die Klärung der Begriffe mit einer Exaktifizierung verbunden. Auftretende Widersprüche, Nichtfunktionieren der Methode in bestimmten Fällen, oder auch die Frage, was mit einem Begriff eigentlich gemeint ist, was die wesentlichen Eigenschaften sind, ob er auf andere Begriffe zurückgeführt werden kann etc., führen zu einer immer präziseren Gestalt der Begriffe. Dies hat Rückwirkungen auf die Theorie insgesamt: stillschweigend gemachte Voraussetzungen werden bewußt, neue Beweise müssen gefunden werden. Manchmal führt dieser Prozeß bis an die Grenzen der Mathematik: Grundlagenprobleme stellen sich.

(Fischer/Malle 2004, S. 152)

Im Zuge des Exaktifizierens wird Mathematik selbst zum Gegenstand des handelnden Mathematikers, da über ihr Gefüge und ihre Struktur nachgedacht wird und diese verändert werden. Beim Exaktifizieren richtet der Mathematiker sein Augenmerk auf die Syntax von Mathematik. Als Beispiel für einen solchen Prozess sei auf die Ausführungen zur Präzisierung des Grenzwertbegriffs mittels Epsilontik in Kapitel 4.3.1 erinnert.

Das Passen im Sinne von Anpassen ist eine Tätigkeit, die wieder eher die Semantik von Mathematik fokussiert. Von Passen und nicht von Exaktifizieren wird im hier vertretenen Verständnis gesprochen, wenn beispielsweise ein Axiomensystem oder ein Begriffssystem an einen inhaltlichen Sachverhalt angepasst wird. Am Beispiel des Grenzwertbegriffs würde dessen inhaltliche Rückführung auf den Begriff der Konvergenz als Passen bezeichnet werden. Dabei wird in der vorliegenden Arbeit in Anlehnung an FREUDENTHALs Unterscheidung zwischen globalem und lokalem Ordnen (Freudenthal 1963) auch zwischen globalem und lokalem Passen getrennt. Während es im Rahmen der Wissenschaft Mathematik darum geht, grundsätzliche Axiome oder abstrakte Begriffe in das Gesamtkonstrukt Mathematik einzuordnen und gegenseitig verträglich zu machen (globales Passen), sind im Mathematikunterricht eher überschaubare Begriffssysteme an Sachverhalte anzupassen, was somit als lokales Passen bezeichnet wird.

Die Liste der Tätigkeitsideen ist grundsätzlich offen zu denken. Wie die didaktische Literatur zeigt, entstehen bei anderer Akzentuierung teils sehr unterschiedlichen Ideenkataloge. In der vorliegenden Arbeit wird eine Gesamtperspektive angestrebt, daher ist der Ideenkatalog auch im Bereich der Tätigkeitsideen umfangreicher. Im konkreten Umgang mit Mathematik werden die Tätigkeitsideen meist im Verbund angewendet. In Kapitel 4.3.2, bei der Erläuterung der Begriffsideen, spielten die Tätigkeitsideen Vernetzen, Ordnen und Strukturieren gemeinsam eine zentrale Rolle. Bei der Begriffsbildung ist das Vernetzen von Begriffen, deren Ordnen zu Hierarchien und das damit verbundene Strukturieren einer Theorie kaum voneinander zu trennen. Damit zeigt sich eine Stärke dieser Ideenkategorie. Durch ihre Detailliertheit werden Vernetzungen als gemeinsames Auftreten der einzelnen Ideen deutlich. Tätigkeitsideen stehen nicht beziehungslos nebeneinander, sondern treten beim Mathematiktreiben vernetzt und vernetzend auf. Zudem ermöglichen sie auch Verbindungen zu anderen Aspekten von Mathematik, die in der Literatur als fundamental herausgestellt wurden. In engem Zusammenhang mit der Idee Algorithmisieren stehen Iteration und Rekursion, die sich als Universelle Ideen bei BENDER und SCHREIBER finden. Auch erscheinen verschiedene Tätigkeitsideen als wichtiges Hilfsmittel beim Einsatz anderer Tätigkeitsideen. So sieht SCHUPP das Dualisieren als zentrales Hilfsmittel des Optimierens (Schupp 1992).

Zusammenfassend gliedern Tätigkeitsideen, Schnittstellenideen und die abstrakteren Prozessideen vorhandene Theorien Fundamentaler Ideen im Bereich des Prozesses Mathematik stärker und stellen Vernetzungen zwischen ihnen her. Somit wird das Zusammenspiel der Seiten *Welt/Mensch* und *Mathematik* des erweiterten Spannungsverhältnisses beschrieben.

4.5 Die Seite Welt/Mensch

Die Ideenkategorie der Persönlichkeitsideen (Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität, Beharrlichkeit) mag bei einer Zusammenstellung Fundamentaler Ideen zunächst verwundern, da sie in solch expliziter Form ein Novum in der Diskussion darstellt. Es gilt diese also genauer zu erläutern und zu begründen.

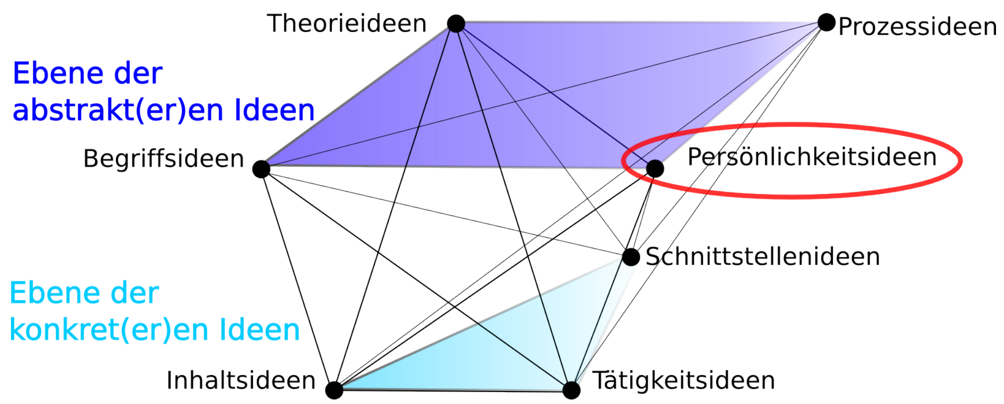


Abbildung 43 Persönlichkeitsideen im Zusammenspiel mit den anderen Ideenkategorien

In Kapitel 4.2 wurde schon argumentiert, dass das anerkannte Spannungsverhältnis zwischen Welt und Mathematik auf der Seite der Welt um den Menschen zu erweitern ist. Dadurch wird der Mensch als handelndes und erlebendes Subjekt ernst genommen. Der Begriff „Mensch“ ist sehr vielschichtig und in der Forschung nicht eindeutig definiert: Menschen werden u.a. als biologische Lebensform, als Krone der Schöpfung, als Abbild Gottes oder als vernunftgebundene Wesen angesehen. Für die vorliegende Theorie Fundamentaler Ideen der Mathematik gilt es, den Menschen im Umgang mit Mathematik genauer zu beschreiben. Dazu ist besonders die letztgenannte Deutung fruchtbar. Für den Mensch als Wesen, welches sich durch Vernunft, Freiheit und Sprache auszeichnet, ist der Begriff der Person in der psychologischen und pädagogischen Forschung etabliert (Weigand 2004, S. 53). Der Begriff der Person zielt dabei auf kognitive, soziale und emotionale Bereiche des Menschseins ab und weniger auf biologische Mechanismen. Gleichzeitig beinhaltet er die wechselseitige Beziehung zwischen dem Menschen als Individuum und seiner Sozietät (Dorsch 2014, S. 1239). Die palintropische Beziehung zwischen Mensch und Welt, auf die SCHUPP erneut hingewiesen hat[272] und bei der in der vorliegenden Arbeit die Sache Mathematik als Vermittler dienen soll, ist somit in diesem Begriff der Person aufgehoben. Damit liegt Fall 2 der unterschiedlichen Blickwinkel auf das erweiterte Spannungsverhältnis vor, Mathematik wirkt als Vermittler zwischen Mensch und Welt (vgl. Abbildung 25).

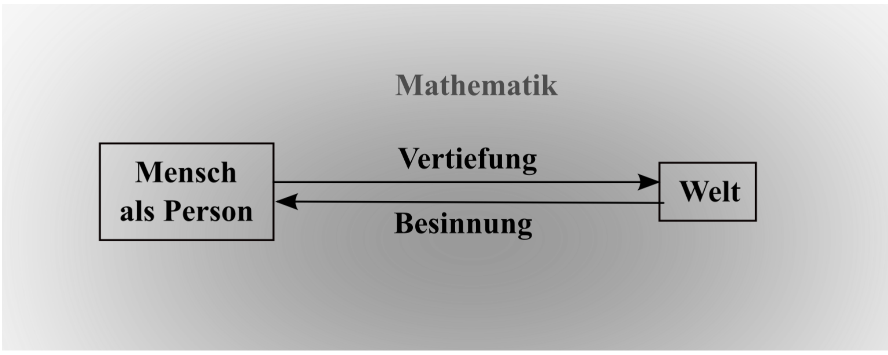


Abbildung 44 Palintropische Beziehung zwischen Mensch und Welt nach (Schupp 2004)

Personsein wird im pädagogischen Verständnis[273] sowohl als Prinzip als auch als Prozess verstanden. Zum einen ist der Mensch von Geburt an und zu jeder Lebensphase Person. Zum andern wird der Mensch durch seine Lebensgeschichte zur Person. Die Verbindung von Prinzip der Person und des Prozesshaften fasst GABRIELE WEIGAND, WINFRIED BÖHM folgend, in der Formel, dass Person „Ausgang und durchtragender Grund“ ist (Weigand 2004, S. 67). Da das Personwerden ein prinzipiell nicht abgeschlossener Prozess ist, der durch die Lebensge-

[272] SCHUPP folgt einer Argumentation von THEODOR BALLAUFF, der nachgewiesen hat, dass solche palintropischen Beziehungen zwischen Mensch und Welt die „deutsche und europäische Philosophie und Pädagogik, ja sogar Belletristik, in zahlreichen ihrer hervorragendsten Vertreter vom 17. Jahrhundert (Leibniz) bis zur Gegenwart (Heidegger, Piaget) durchzieht“ (Schupp 2004, S. 9).

[273] Andere Interpretationen und Anwendungen des Personenbegriffs wie beispielsweise in den Rechtswissenschaften, die als Person Rechtssubjekte und damit auch wirtschaftliche Gesellschaften fassen, sind für die hier vorgestellte Theorie unbrauchbar.

schichte des Menschen geprägt wird, hat das Umfeld (Familie, Schule, Beruf etc.) des Menschen Einfluss darauf. Demnach gibt es Bereiche der Person, auf die auch die Beschäftigung mit Mathematik Auswirkungen hat.

Persönlichkeit wird in der psychologischen Forschung definiert als die „Gesamtheit aller überdauernder individueller Besonderheiten im Erleben und Verhalten“ einer Person (Dorsch 2014, S. 1244). Die Psychologie beschreibt Persönlichkeit durch verschiedene Persönlichkeitsmerkmale, die individuell ausgeprägt sind und sich in der Lebensgeschichte weiterentwickeln können.[274] Diese Merkmale werden als Dispositionen, also als Tendenzen, Situationen in bestimmter Weise zu erleben und sich in bestimmter Weise zu verhalten, verstanden (Dorsch 2004, S. 1244). Persönlichkeitsmerkmale werden typischerweise nach folgenden Bereichen gegliedert; von denen jene, die in der vorliegenden Arbeit für die vorgestellten Persönlichkeitsideen von Wichtigkeit sind, durch Unterstreichungen hervorgehoben sind: Temperament, Selbstregulation (<u>Informationsverarbeitung</u>), kognitive und soziale Kompetenzen, <u>Kreativität</u>, Motive und <u>Interesse</u>, <u>Bewährungsstile im Umgang mit Belastungen</u>, Werthaltungen, spezifische Einstellungen (z.B. Präferenzen für Parteien), individuelle Besonderheiten im Selbstkonzept.[275] Neben kognitiven Komponenten enthalten Persönlichkeitsmerkmale auch soziale und emotionale Aspekte wie soziale Kompetenzen, Werthaltungen und Temperament. Solche Aspekte werden im Weiteren „Nichtkognitive“ Aspekte genannt.

Wie oben schon angemerkt, hat die Beschäftigung mit Mathematik Auswirkungen auf die Entwicklung von Personen,[276] indem bestimmte Persönlichkeitsmerkmale individuell ausgeprägt werden.[277] Der lerntheoretische Ansatz der

---

[274] Gerade diese Entwicklung und die Einflussnahme der Gesellschaft vereint die philosophische Richtung des Personalismus. Deren Anhänger sehen die Persönlichkeit als Grundlage aller anderen Werte und ihre „Vervollkommnung“ als höchstes sittliches Ziel (Dorsch 2014, S. 1242).

[275] Zur Beschreibung von Persönlichkeitsmerkmalen wurde nicht das „Fünf-Faktoren-Model“ angeführt (Dorsch 2014, S. 1245), da diese Kategorisierung zu grob für die Begründung der Persönlichkeitsideen ist.

[276] Forschungen zu solchen Auswirkungen sind in der Mathematikdidaktik aktuell wenig ausgeprägt. Eine Suche in den „Beiträgen zum Mathematikunterricht“ bis in das Jahr 2005 zurückgehend brachte nur drei Arbeiten hervor, die sich mit dem Zusammenhang von Persönlichkeitsmerkmalen und der Art, wie mathematische Probleme gelöst werden, beschäftigen (Pundsack 2011), (Fritzlar 2013) und (Borromeo Ferri 2014). Arbeiten zu einzelnen Persönlichkeitsideen wie Kreativität (Rosebrock 2011) und Intuition (Käpnick 2012) beziehen sich meist auf Begabtenförderung im Mathematikunterricht oder auf den Einsatz Neuer Medien (Kortenkamp 2015). Zur Idee „Interesse“ ergab die Suche die meisten Treffen (insgesamt 7), die sich mit unterschiedlichen Maßnahmen zur Förderung von Interesse beschäftigen. Exemplarisch werden aus diesen in der vorliegenden Arbeit die Überlegungen von ANGELIKA BIKNER-AHSBAHS vorgestellt. Die Idee „Beharrlichkeit“ wird meist unter anderen Bezeichnern beispielsweise Ausdauer indirekt mitdiskutiert (Guljamow/Vollstetdt 2015).

[277] Im schulischen Unterricht wird versucht, eine Entwicklung von positiven Persönlichkeitsmerkmalen zu fokussieren. Gerade die Abneigung, die viele Schüler gegen das Fach Mathematik in der Schule entwickeln, zeigt allerdings, dass im Bildungsprozess auch negative Merkmale wie

Persönlichkeitsforschung geht von einer wechselseitigen Beeinflussung von Lernen und Persönlichkeitsentwicklung aus. Zum einen bildet sich die Persönlichkeit eines Menschen unter wesentlicher Beteiligung von Lernprozessen aus. Zum anderen bringt der Mensch individuelle Persönlichkeitsmerkmale als Prädispositionen zum Lernen mit, die wiederrum das Lernen bedingen. Fasst man die Beschäftigung mit Mathematik, sei es in der Schule, im Alltag oder als berufliche Professionalisierung, als Lernprozess auf, so kann obige wechselseitige Beziehung wie folgt beschreiben werden: Zur Beschäftigung mit Mathematik nutzt der Mensch jene Dispositionen, die ihm geeignet scheinen und bringt sie bestmöglich ein, um beispielsweise ein Problem zu lösen; gleichzeitig wirkt die Beschäftigung mit Mathematik wieder auf den Menschen zurück, indem die eingebrachten Dispositionen ausgeprägt und weiterentwickelt werden.

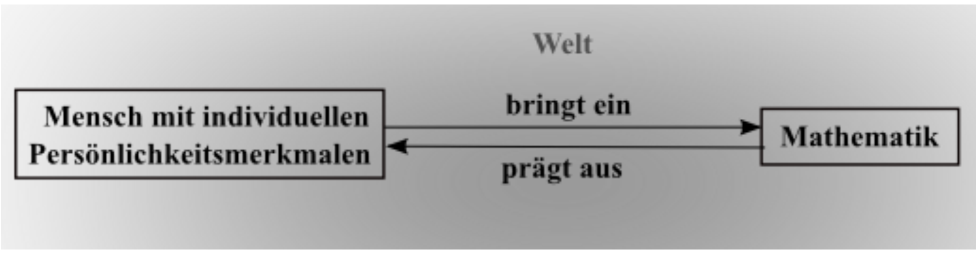


Abbildung 45 Wechselwirkung zwischen Persönlichkeitsmerkmalen und Mathematik

Somit liegt der dritte Blickwinkel auf das erweiterte Spannungsverhältnis vor, bei dem die Welt den Rahmen für die Wechselwirkung von Mensch und Mathematik bildet.

Dieses Wechselspiel von Persönlichkeit und Sache (hier Mathematik) wurde schon von DEWEY beim Durchlaufen des pragmatischen Forschungsprozesses herausgestellt. Dabei betonte er, dass zum Forschen stets auch persönliche Einstellungen wie Interesse und Kreativität gehören. Letztgenannte im engen Bezug zur Entwicklung von „ideas“ (vgl. Kapitel 4.1). Auch BRUNER misst der Persönlichkeit des Lerners und den mit ihr verbundenen „Nichtkognitiven“ Aspekten von Lernen große Bedeutung bei der Auseinandersetzung mit Fundamentalen Ideen zu.

> Mastery of the fundamental ideas of a field involves not only the grasping of general principles, but also the development of an attitude towards learning and inquiry, towards guessing and hunches, towards the possibility of solving problems on one's own […]. To install such attitudes by teaching requires something more than the mere presentation of fundamental ideas […] but it would seem that an important ingredient is a sense of excitement about discovery – discovery of regu-

Frustration und Ängstlichkeit „erlernt“ werden. FISCHER wies 1984 daraufhin, dass im Mathematikunterricht eine Abwehrhaltung gegenüber der Mathematik entstehen kann, die FISCHER „Mathophobie“ nennt und die zu einer Spaltung der Kultur in eine „mathematisch-naturwissenschaftlich-technische“ und eine „geisteswissenschaftlich-künstlerisch-humanistische Orientierung“ führen kann (Fischer 1984, S. 55 f.)

> larities of previously unrecognized relations and similarities between ideas, with a resulting sense of selfconfidence in one's abilities.
>
> (Bruner 1960, S. 20)

Es ist also plausibel anzunehmen, dass BRUNER schon bei der ursprünglichen „Definition" Fundamentaler Ideen sowohl inhaltliche Aspekte („general pirnciples") als auch prozesshafte Aspekte des Problemlösens im Blick hatte. Hinzukommen „Nichtkognitive" Komponenten von Lernen („attitude towards learning"), die im Zusammenhang mit Fundamentalen Ideen stehen und sich in der im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellten Theorie in den Persönlichkeitsideen wiederfinden.[278]

Obige Auflistung der psychologisch begründbaren Persönlichkeitsmerkmale kann durch eine Theorie Fundamentaler Ideen nicht vollständig abgedeckt werden. Viele Persönlichkeitsmerkmale liegen im affektiven Bereich und rühren eher von den Umständen der Beschäftigung mit Mathematik denn von der Beschäftigung selbst her. Temperament, soziale Kompetenzen und Werthaltungen sind sicherlich einer Beschreibung durch Fundamentale Ideen kaum zugänglich und liegen eher im „Atmosphärischen", also im institutionellen Rahmen der Beschäftigung mit Mathematik (Führer 1997, S. 80). Dagegen werden Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und Beharrlichkeit häufig zu den grundlegenden Einstellungen im Umgang mit Mathematik gezählt (s.u.).[279]

Die Persönlichkeitsideen liefern somit keine vollständige Beschreibung der Persönlichkeit und erst recht nicht der handelnden Person. Die Ideen dieser Kategorien spiegeln vielmehr Bereiche der Persönlichkeit (individuelle Erkenntnisarten und Einstellungen) wider, die bei der Beschäftigung mit Mathematik angeregt und entwickelt werden. Leitend bei der Benennung der einzelnen Ideen war die Frage, was eine Person von der Beschäftigung mit Mathematik mitnehmen kann, das über Inhalte und Tätigkeiten hinausgeht. Die einzelnen Ideen dieser Kategorie werden in den nun folgenden Ausführungen aus der Analyse des mathematischen Forschungsprozesses, wie er von großen Mathematikern beschrieben wird, ganz im Sinne BRUNERs,[280] gewonnen. Exemplarisch dienen die Arbeiten von

---

[278] Eine Verbindung von Fundamentalen Ideen mit typischen Einstellungen zur Mathematik und zum Mathematiktreiben findet sich erstmals in (Humenberger/Reichel 1995), vgl. dazu Kapitel 3.5.3.

[279] Intuition kann als eine Art der Informationsverarbeitung gezählt werden, und Beharrlichkeit ist eine Bewährungsform bei Belastungen. Somit lassen sich beide Ideen den oben genannten Persönlichkeitsmerkmalen zuordnen.

[280] In den Kapiteln 3.1 und 3.3 wurde schon herausgestellt, dass BRUNER zum Finden Fundamentaler Ideen auf die Zusammenarbeit von Wissenschaftlern und Pädagogen setzt. Da BRUNER folgend „jeder praktizierende Wissenschaftler [...] im allgemeinen etwas über die Denkweisen oder Einstellungen sagen [kann], die zu seinem Beruf gehören", müssen demnach Wissenschaftler gefunden werden, die bei der Lehrplanentwicklung mithelfen, indem sie genau diese zentralen Denkweisen und Einstellungen offenlegen (Bruner 1970, S. 39).

Henri Poincaré, Jacques Hadamard und Hardy als Grundlage.[281] Diese beschreiben aus ihrer eigenen mathematischen Tätigkeit heraus, welche Einstellungen und Denkweise wesentlich für das Mathematiktreiben sind und ohne die eine Beschäftigung mit Mathematik unmöglich wäre. Die Erörterung der einzelnen Ideen wird in der vorliegenden Arbeit durch Hinzunahme weiterer didaktischer Literatur gestützt.

Interesse bezeichnet eine Person-Gegenstands-Relation. Die Gegenstände können sowohl Objekte als auch Tätigkeiten oder Inhalte eines Themenbereichs sein. Die Beziehung zwischen Person und Gegenstand entsteht, indem die Person dem Gegenstand einen subjektiven Wert oder eine subjektive Bedeutung für ihre eigenen Bedürfnisse zuweist. Dabei widmet sie dem Gegenstand kognitive Aufmerksamkeit und möchte gleichzeitig ihr Wissen über diesen Gegenstand erweitern (Dorsch 2014, S. 806). Für die Mathematikdidaktik wurde vor allem die Aktivierung der Person durch den Gegenstand hervorgehoben.

> Das Interesse einer Person regt diese zu gegenstandsbezogenen Aktivitäten an, die auf Erkenntniszuwachs ausgerichtet sind, als wertvoll empfunden werden und vorrangig mit positiven Emotionen verbunden erlebt werden.
>
> (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 17)

Damit ist Interesse eine wichtige Bedingung für (schulisches) Lernen. Die Fokussierung auf den Gegenstand ermöglicht ein besseres Behalten von Inhalten. Interesse zeichnet sich demnach durch die kognitive Komponente der Wissenserweiterung aus. Zusätzlich spielen aber auch emotionale Aspekte eine Rolle, da Interesse mit einem positiven Erleben eines Gegenstandes und dessen positiver Wertschätzung verbunden ist. Im schulischen Kontext können diese „Nichtkognitiven" Aspekte zur Grundlage für Lernfreude und Lernmotivation werden (Krapp 2010, S. 311 f.).

In der psychologischen Forschung wird individuelles Interesse als Persönlichkeitsmerkmal von situativem Interesse unterschieden. Letzteres wird durch besondere Reizbedingungen einer Situation hervorgerufen (Krapp 2010, S. 312). Sie ist für die Betrachtung Fundamentaler Ideen der Mathematik von Bedeutung. Mathematische Fragestellungen und Probleme können solche Situationen darstellen, an denen sich Sachinteresse (Interesse an diesen Fragestellungen), Fachinteresse (Interesse an Mathematik im Ganzen) bzw. sogenanntes topologisches Interesse (Interesse an fachtypischen Kontexten und Tätigkeiten) entwickelt. Dazu muss, ganz im Sinne der pragmatischen Definition einer Idee, die Person mit einer Situation konfrontiert werden, die durch ihre Unterdetermi-

[281] Diese wurden aus der Vielzahl großer Mathematiker ausgewählt, da sie sich explizit zu solchen Aspekten, wie sie in der vorliegenden Arbeit zu Persönlichkeitsideen zusammengefasst sind, äußern.

niertheit zu Zweifel anregt und die Person in einen instabilen Zustand des neugierigen Interessiertseins versetzt. Diesen Zustand, in dem das Interesse auch leicht wieder verloren gehen kann, gilt es, in ein anhaltendes situatives Interesse zu transformieren. Langfristiges Ziel ist dann die Herausbildung eines stabilen individuellen Interesses, welches Voraussetzung zur Identifizierung mit Mathematik und eines emotionalen Erlebens ist (Krapp 2010, S. 316 f.). Somit kann Interesse wiederum zur treibenden Kraft bei der Beschäftigung mit Mathematik werden und diese begünstigen, indem, wie oben beschrieben, Motivation und Freude die Wissensbeschaffung in diesem Bereich begleiten. ANGELIKA BIKNER-AHSBAHS hat die Wichtigkeit von Interesse beim Lernen von Mathematik erforscht und Lernumgebungen entwickelt, in denen „situatives kollektives Interesse" gefördert wird (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 15). Sie hebt besonders hervor, dass Interesse hilft, Belastungen und Anstrengungen zu moderieren.

> Mathematisch interessierte Schülerinnen und Schüler erfahren herausfordernde mathematische Aktivitäten als persönlich wertvoll und wenig anstrengend. Vielfach erleben sie konzentrierte Verbundenheit mit der mathematischen Aktivität, die sie alles um sie herum vergessen lässt – das sind flow-nahe Erlebnisformen, in denen anstrengungsarm viel geleistet wird.

(Bikner-Ahsbahs 2001, S. 1)

Ihr Ansatz fokussiert die soziale Umgebung des Lernprozesses und identifiziert diese als wichtigen Faktor für die Initiierung von Interesse. Demnach kann Interesse nicht nur durch bestimmte Inhalte gefördert werden, sondern „kann aus sozial-inhaltlichen Unterrichtsprozessen erwachsen und ist daher ein soziales Phänomen" (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 2). Mithilfe dieser sozialen Komponente gliedert BIKNER-AHSBAHS psychologische und pädagogische Interessenstheorien stärker und führt sie in einem „Interessenswürfel" zusammen (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 15).

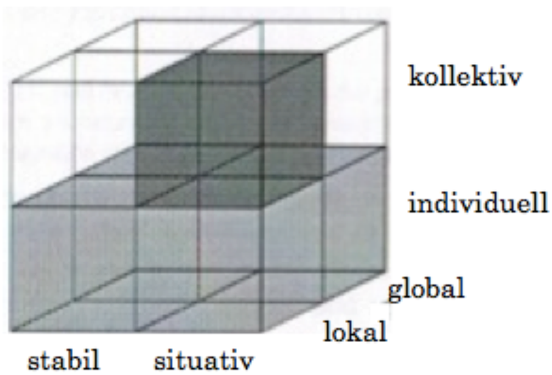


Abbildung 46 Der Interessenwürfel, wie er sich in (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 15) findet

Interesse kann zum einen nach dem situativen oder stabilen Charakter gegliedert werden (s.o.). Zum anderen danach, ob es sich lokal auf einen bestimmten Bereich eines Gegenstandes bezieht (bspw. Interesse an Geometrie) oder global den ganzen Gegenstand umfasst. Die dritte Komponente unterscheidet das Interesse einer einzelnen Person von dem einer Gruppe. Diese Unterscheidung ist nach BIKNER-AHSBAHS nötig, da es im Unterricht Situationen gibt, die nicht durch individuelles Interesse beschrieben werden können, sondern „in denen eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern oder auch die ganze Klasse spontan Interesse für den Unterrichtsgegenstand zeigt, Erkenntnisprozesse voranbringt, sich engagiert" (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 2). Während BIKNER-AHSBAHS in ihrer Untersuchung den Teilwürfel „situativ-lokal-kollektiv" fokussiert, um einzelne Unterrichtssituationen zu identifizieren, die das Interesse einer ganzen Lerngruppe hervorrufen können, ist in der vorliegenden Arbeit eher der Teilwürfel „stabil-global-individuell" von Bedeutung. Mittels Fundamentaler Ideen soll im Unterricht eine Beschäftigung mit Mathematik angeregt werden, die ein länger anhaltendes („stabiles"), auf die gesamte Mathematik gerichtetes („globales") und für die einzelne Person bedeutendes („individuelles") Interesse hervorruft. Generell ist allerdings darauf hinzuweisen, dass die Unterteilung im Interessenwürfel in der vorliegenden Arbeit nicht als absolut angesehen wird. Zur stärkeren Gliederung der Theorie von BIKNER-AHSBAHS ist die Unterteilung von Wert, sie sollte allerdings nicht so verstanden werden, dass im schulischen Unterricht ein Teilwürfel isoliert angesprochen werden könnte.

Um überhaupt Interesse hervorzurufen, muss ein Gegenstand die *Neugier* einer Person wecken können. Neugier wird als die Tendenz definiert, „Neues zu erleben, zu untersuchen, zu erkunden, zu erfahren und geht [daher] mit explorativen Verhaltensweisen einher" (Dorsch 2014, S. 1158). Neugier steht also am Anfang eines neuen Erkenntnisprozesses oder eines Problemlöseprozesses und geht von einer konflikthaltigen Situation aus, in welcher der Person Informationen fehlen (Dorsch 2014, S. 1158). Ausgehend davon werden in der pädagogischen Psychologie drei Formen der Neugier unterschieden. (1) Epistemische Neugier richtet sich auf Problemlösen und Lernen in symbolisch repräsentierten Kontexten. Hierbei beschäftigt sich die Person gedanklich mit zu lösenden Konflikten. Alle mathematischen Problemstellungen, die geistig durchdacht werden (Lösen einer Gleichung, Modellieren einer Situation, Entwickeln eines Algorithmus) können epistemische Neugier anregen, und diese wiederum kann die Person zur Beschäftigung mit den Problemstellungen antreiben. (2) Perzeptuelle Neugier bezieht sich auf den Erkenntnisgewinn mittels Sinneserfahrungen. In der Mathematik kann diese Art von Neugier beispielsweise durch Trugschlüsse in der Anschauung hervorgerufen werden. (3) Interpersonelle Neugier bezieht sich auf bestimmte Personen, deren Lebensleistung mit der eigenen Biografie in Verbindung gebracht wird, sie gelten somit als Vorbilder. Solche Idole müssen nicht zwingend große Mathematiker sein, sondern können auch in der Person des Lehrers gefunden werden.[282] Da interpersonelle Neugier aus dem Zwischenmenschlichen herrührt, kann sie von einer Theorie Fundamentaler Ideen der Mathematik nicht erfasst werden. Sie wird daher dem „Atmosphärischen“ des Unterrichts zugesprochen (Führer 1997, S. 80). Die anderen beiden Ausprägungen ((1) und (2)) können aus der Sache Mathematik durch konkret stimulierende Gegebenheiten angeregt werden. In Form eines spezifischen Neugierverhaltens „bemühen sich Menschen, Informationen zu sammeln, um die bei ihnen durch konkrete Sachverhalte ausgelöste Unsicherheit zu reduzieren“ (Dorsch 2014, S. 1159).[283] Neugier ist, wie auch Interesse, eine typische Einstellung von Mathematikern zur Mathematik und zum Mathematiktreiben, die zur treibenden Kraft für Lern- und Forschungsprozesse werden kann.

Mit der Idee der *Intuition* wird der Bereich des bewusst Gedachten oder Wahrgenommenen verlassen. Sowohl philosophisch als auch psychologisch wird Intuition als eine Art der Wahrnehmung definiert, deren einzelne Stationen nicht mehr voll bewusst werden (Dorsch 2014, S. 830). Intuition ist demnach ein unmittelbares Erkennen und Erfassen des Ganzen eines Sachverhaltes (Metzler 2008, S. 279). Intuitiv gewonnene Erkenntnisse sind nicht weiter begründbar, gehen aber mit einem (subjektiven) Gefühl der Gewissheit und mit „einem Gefühl für die Wahrheit der Dinge und der Welt“ einher (Mérö 2002, S. 283). Um diese emotionalen Komponenten zu fassen und das Moment des Unbewussten zu betonen, wird Intuition häufig als Einsicht mit Offenbarungscharakter (Inspiration) bezeichnet (Dorsch 2014). Intuition verbindet also kognitive Erkenntnisse mit Emotionen. Diese Verbindung scheint beim mathematischen Forschen besonders anregend zu sein. LEONE BURTON zieht aus zahlreichen Interviews mit forschenden Mathematikern den Schluss,

> 65 of the 79 (83%) were comfortable with the notion that something operated in their learning process to which they were happy to give the name intuition, or insight [...]

(Burton 2004, S. 75)

Diese 83 Prozent der Befragten sind sich einig, dass ohne Intuition keine mathematische Forschung möglich wäre, und beschreiben Intuition als „gut feelings“, „Ahas“, „a feel for how things connect together“ oder „a sense of the possible or even likely“ (Burton 2004, S. 77 ff.). Auch POINCARÉ spricht der Intuition eine wesentliche Rolle beim mathematischen Forschen zu. Für ihn ist sie das „Gefühl für mathematische Ordnung [...], welches [...] verborgene Relationen und

[282] Vgl. dazu die Überlegungen zur Person des Lehrers bei der Vermittlung Fundamentaler Ideen von FISCHER (Fischer 1984) und FÜHRER (Führer 1997).

[283] Die Ähnlichkeit zur „progressive inquiry“ und der pragmatischen Definition von „ideas“ nach DEWEY ist deutlich erkennbar.

Harmonien erraten läßt“ (Poincaré 1973, S. 39). Im Forschungsprozess[284] zeichnen sich „wirkliche“ Mathematiker durch jenes ästhetische Gefühl aus, das eine „Sensibilität“ für „mathematische Schönheit“ vermittelt. POINCARÉ nennt dieses Gefühl Intuition oder Inspiration (Poincaré 1973, S. 48).[285]

Obwohl Intuition als wichtiges Element der mathematischen Forschung beschrieben wird, zeigen sich auch einige Mathematiker skeptisch. Sie verwehren sich dem Begriff Intuition, da er für sie ins Mystische und zugleich „Mysteriöse“ reicht und somit nicht zur logischen Wissenschaft Mathematik gehört (Burton 2004, S. 75 und van der Waerden 1953, S. 121). Intuitives Denken wird auch als Komplement des wissenschaftlich-diskursiven Denkens angesehen (Dorsch 2014, S. 830). Diese Haltung wird dadurch begründet, dass intuitive Erkenntnisse durch das begleitende Gefühl der Gewissheit subjektiv unmittelbar überzeugen. Diese Überzeugungen sind allerdings nur sehr schwer kommunizierbar, da sie sehr vage und noch nicht in der symbolischen Sprache der Mathematik formuliert sind.

DAVIS und HERSH nehmen diese scheinbare Widersprüchlichkeit des Begriffs „Intuition“ zum Anlass, mathematische Intuition erkenntnistheoretisch einzuordnen (Davis/Hersh 1985). Nach dem Wesen der Mathematik fragend unterscheiden sie drei philosophische Richtungen, die alle auf die Notwendigkeit intuitiven Denkens abstellen, wenn auch aus unterschiedlichen Motiven. Die Autoren untersuchen den Realismus, Konstruktivismus und Formalismus als mögliche erkenntnistheoretische Sichtweisen auf Mathematik.[286]

Zunächst erörtern die Autoren das problematische Verhältnis der Realisten zur Intuition. Da der Realist die mathematischen Objekte als ideale, nicht materielle Welt annimmt, die vom Mathematiker nur entdeckt und nicht konstruiert werden können, stellt sich die Frage, wie der menschliche Geist Kontakt zu dieser Welt der idealisierten mathematischen Objekte aufnehmen kann. Wenn ein mit den zur Verfügung stehenden Mitteln unlösbares Problem auftaucht, so ist für den Realisten klar, dass diese Situation nur ein Zeichen seiner Unwissenheit ist. Hier setzt die Notwendigkeit der Intuition an, denn dem Realisten

---

[284] Auf den von POINCARÉ beschriebenen Forschungsprozess wird im Rahmen der Idee „Kreativität“ detaillierter eingegangen.

[285] POINCARÉ spricht Intuition nur „wirklichen“ Mathematikern zu und bestreitet, dass jeder Intuition entwickeln kann (vgl. Poincaré 1973, S. 39). Andere Mathematiker wie beispielsweise VAN DER WAERDEN und aktuelle psychologische Forschungen legen allerdings nahe, dass Intuition grundsätzlich jeder Person möglich ist. Mittlerweile gilt Intuition als förderbare Schlüsselqualifikation von Managern und Grundlage wirtschaftlicher Innovationen (Hauser 1991).

[286] Diese drei Richtungen wurden auch schon in der vorliegenden Arbeit angesprochen. Der Formalismus im Zusammenhang mit Erkenntnis- und Begründungskulturen der Theorieideen in Kapitel 4.3.1 und Realismus sowie Konstruktivismus im Zusammenhang mit der Natur mathematischer Objekte bei den Begriffsideen in Kapitel 4.3.2.

> dient die Intuition dazu, eine Verbindung herzustellen zwischen dem menschlichen Bewusstsein und der mathematischen Realität. Doch diese Intuition ist ein schwer zu fassendes Ding. [...] [Der Realist] versucht gar nicht, sie zu beschreiben, geschweige denn, ihre Natur zu analysieren.
>
> (Davis/Hersh 1985, S. 417)

Da der Realist die Frage nach der Natur der Intuition ausblendet, halten die Autoren fest, dass Intuition für den Realisten dem entspricht, „was die Seele für denjenigen ist, der an ein Jenseits glaubt. Wir wissen - sie ist da, sie entzieht sich aber allen fragenden Zugriffen" (Davis/Hersh 1985, S. 418).

Für den Konstruktivisten stellt sich die Frage nach der Intuition anders dar.

> Er akzeptiert als intuitiv gegeben die Vorstellung des Konstruktiven und der natürlichen Zahlen - das heißt die Vorstellung einer Operation, die iterierbar ist, die jederzeit noch einmal wiederholt werden kann.
>
> (Davis/Hersh 1985, S. 418)

Die Annahme, das intuitive Konstrukt der natürlichen Zahlen sei universell, ist allerdings „im Lichte historischer, pädagogischer oder anthropologischer Erfahrungen nicht haltbar" (Davis/Hersh 1985, S. 418). So war schon die philosophische Schule des Intuitionismus nach LUITZEN EGBERTUS JAN BROUWER, die sich gegen den Formalismus wendete und BROUWER zu einem Protagonisten im Grundlagenstreit der Mathematik zu Beginn des 20. Jahrhunderts machte, nicht frei von Meinungsverschiedenheiten über die Intuition bei den natürlichen Zahlen.

Für Anhänger des Formalismus löst sich die Frage nach intuitivem Denken nur scheinbar durch den Verzicht auf alles Inhaltliche und die Fokussierung auf logische Spielregeln. Denn bei der Erklärung,

> wie es unsere unaufgeklärten Vorfahren fertigbrachten, richtige Sätze mittels falscher Schlüsse zu finden, kann [...] [der Formalist] nur so sagen: <<Intuition.>>
>
> (Davis/Hersh 1985, S. 419)

Intuition wird dabei als unbewusstes Formalisieren verstanden, welches im Unterbewusstsein Schlüsse zieht, die dem Bewusstsein verborgen bleiben. An dieser Stelle bekommt also, DAVIS und HERSH folgend, die Intuition ihre „mystische" Komponente, da sie die Kluft zwischen „Darstellung der Mathematik als einem nach bestimmten Spielregeln gespieltem Spiel und der tatsächlichen Erfahrung der Mathematik, wo häufig durch das Übertreten von Regeln mehr erreicht wird als dadurch, daß man sie einhält" überbrückt (Davis/Hersh 1985, S. 420).

DAVIS und HERSH halten diese Widersprüchlichkeit und Begriffsunschärfe der Intuition dann für problematisch, wenn es darum geht, Mathematik als „Außenstehender" zu verstehen.

> Es mag dumm und kontraproduktiv sein, doch ein Lehrer kann durchaus Mathematik unterrichten, ein Forscher kann Arbeiten schreiben, ohne sich um das Problem der Intuition zu kümmern. Wenn man jedoch selbst keine Mathematik betreibt und lediglich denjenigen zuschaut, die das tun, und zu verstehen versucht, was da vor sich geht, dann wird das Problem der Intuition zentral und unumgänglich.

(Davis/Hersh 1985, S. 415)

Die Autoren geben eine Antwort auf die Frage der Natur der Intuition, die am pragmatischen Verständnis von Erkenntnissen ausgerichtet ist, wie sie in der vorliegenden Arbeit am Beispiel der Philosophie PEIRCEs und der Pädagogik DEWEYs nachgezeichnet wurde (Kapitel 4.1).

> Intuition ist nicht die direkte Wahrnehmung von etwas, was außerhalb und ewig ist. Sie entsteht aus dem Effekt, den gewisse Erfahrungen auf den menschlichen Geist haben, Erfahrungen, die sich aus dem Umgang, der Handhabung konkreter Objekte (in einem fortgeschritteneren Stadium genügen Schriftzeichen oder selbst geistige Vorstellungen) ergeben. Als Folge dieser Erfahrung bleibt etwas (eine Spur, eine Prägung) im Geist des Schülers haften, was *seine* Vorstellung [...] ist.

(Davis/Hersh 1985, S. 421)

Intuitionen, die in geistigen Vorstellungen von mathematischen Objekten begründet sind, werden durch wiederholte Erfahrung erworben. Sie erhalten ihren Wahrheitswert durch den Abgleich mit den geistigen Vorstellungen anderer. Der Prozess des gegenseitigen Anpassens von Intuitionen ist prinzipiell offen zu denken und nie abgeschlossen. Damit stellen DAVIS und HERSH auf das ab, was PEIRCE als Streben auf die „Letztmeinung der Experimentiergesellschaft" und DEWEY als Prozess der „progressive inquiry" beschrieben haben.

Diesen, von DAVIS und HERSH eher aus philosophischer Richtung gedachten, Austausch von Intuitionen verbindet BOROVCNIK, dessen Konzeption Fundamentaler Ideen der Stochastik in Kapitel 3.5.3 vorgestellt wurden, unterrichtspragmatisch mit seiner Theorie von primären und sekundären Intuitionen (Borovcnik 1992). Er bettet die Wichtigkeit von Intuition in das Dilemma von Offener und Geschlossener Mathematik nach FISCHER ein (vgl. Kapitel 3.5.1). Geschlossene Mathematik bezeichnet eine axiomatisch fundierte Theorie, die in sich ruhend und statisch ist. Offene Mathematik hingegen rückt den Prozess des Entstehens von Theorien (als mögliche Sichtweisen) in den Vordergrund. Dabei wird die Vorläufigkeit mathematischer Theorien betont, und tragfähige Begriffe sind jene, die hohen Erklärungswert haben. Intuitionen dienen für BOROVCNIK vor allem, um aus Geschlossener Mathematik wieder Offene Mathematik zu machen.

> Begriffe und Konzepte werden [...] durch Beziehungen zwischen Objekten festgelegt. Nur ein Teil dieser Beziehungen ist kodifizierbar, diese dienen zur Grundlegung der Begriffe. Aus der vollen Bandbreite an Beziehungen sind jene von Interesse, welche ein Mathematiker im Hinterkopf hatte, als er einen neuen Satz gefunden und bewiesen hat. Diese Intuitionen sind Teil des angesprochenen Dilem-

> mas, da sie durch den symbolischen Beweis nicht erfasst werden, obwohl sie zum Verständnis nötig sind. Wenn Lernende die offizielle Darstellung einer mathematischen Theorie lesen, dann müssen sie Zugang zu dieser Welt der intuitiven Vorstellungen des Mathematikers bekommen, ansonsten werden sie kein tieferes Verständnis für die Theorie entwickeln können.

(Borovcnik 1992, S. 7)

Die Auseinandersetzung des Lernenden oder genereller der mathematiktreibenden Person (S) mit der mathematischen Theorie (T) fasst BOROVCNIK ebenfalls in einem Spannungsverhältnis zusammen. Damit liegt Fall 3 der unterschiedlichen Blickwinkel auf das erweiterte Spannungsverhältnis vor; die Welt (bei BOROVCNIK „Realität") wirkt als Vermittler zwischen dem Menschen (bei BOROVCNIK „Subjekt") und der Mathematik (bei BOROVCNIK „Theorie") (vgl. Abbildung 25).

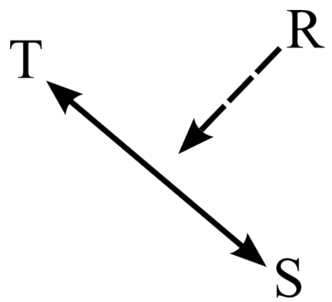


Abbildung 47 Spanungsverhältnis zwischen Subjekt und Theorie, veranlasst durch die Realität (R), wie es sich in (Borovcnik 1992, S. 8) findet

Das Wechselspiel beschreibt BOROVCNIK mittels Intuitionen, wozu er die Unterscheidung zwischen primärer und sekundärer Intuition nach EFRAIM FISCHBEIN nutzt.

> Primary intuitions develop in individuals independently of any systematic instruction as an effect of their personal experience [...] We assume that under a systematic, instructional influence new intuitions, new cognitive beliefs may be created; these we term secondary intuitions.

(Fischbein 1987, S. 202)

Primäre Intuitionen sind also jene Vorstellungen, die eine Person ohne systematische Unterweisung ausbildet. Sekundäre Intuitionen entstehen durch angeleitetes systematisches Durchdringen einer Theorie. BOROVCNIK interpretiert das Wechselspiel von Person (S) und Mathematik (T) nun wie folgt.

> Ausgehend von sehr vagen Vorstellungen, den primären Intuitionen I_0 wird eine vorläufige mathematische Theorie T_1 entwickelt. Dies wird von einem Wechsel auf der Ebene der Intuitionen begleitet [I_1] [...] Die intuitiven Auffassungen I_1 sind wiederum ein Ausgangspunkt für weitere Mathematisierungsversuche und so weiter.

Veränderungen der offiziellen Mathematik

$$\begin{array}{ccccccccc} & T_1 & & T_2 & \cdots & T_n & \\ / & & \backslash / & & \backslash \cdots / & & \backslash \\ I_0 & & I_1 & & I_2 & & I_n \end{array}$$

Veränderungen der intuitiven Vorstellungen

(Borovcnik 1992, S. 9); eigene Abbildung

Obige Ausführungen belegen, dass der Intuition eine zentrale Rolle im mathematischen Forschungsprozess zukommt. Nicht nur in der Phase der bewussten Ablenkung von mathematischen Problemen, wenn das Unterbewusstsein weiter arbeitet, sondern auch beim Lernen von Mathematik sind Intuitionen elementar. Daher hat diese Idee, als einzige der hier genannten Persönlichkeitsideen, auch explizit Einzug in einige Kataloge Fundamentaler Ideen gefunden. In (Fischer 1976) kommt der Intuition bei der Behandlung reeller Funktionen große Bedeutung zu (vgl. Kapitel 3.5.3). Sowohl bei der Definition von Begriffen als auch beim Finden von Begründen und Beweisen soll „stets von intuitiven Vorstellungen ausgegangen" werden (Fischer 1976, S. 189). Dieses Vorgehen stellt sicher, dass mathematische Inhalte an die gedankliche Struktur des Schülers angeschlossen werden. Ziel ist es, dass Schüler einen Sinn für Mathematisches entwickeln. KLIKA, der seinen Katalog Fundamentaler Ideen der Analysis ausgehend von FISCHER aufstellt, weist ebenfalls auf die zentrale Rolle von Intuition beim mathematischen Arbeiten hin (Klika 1981). Auch bei VOLLRATH, der unter anderem zündende und fruchtbare Einfälle als Fundamentale Ideen definiert, spiegelt sich die Idee Intuition wider.

Als nächste Idee wird Kreativität in den Blick genommen. Dazu wird der Forschungsprozess, wie ihn POINCARÉ beschreibt, erneut wichtig.

Der Begriff der *Kreativität* ist historisch gesehen problematisch. Seit der Epoche des „Sturm und Drangs" ab der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts bis in die Mitte des 20. Jahrhunderts, herrschte das Genie-Konzept vor. Kreativität galt als Persönlichkeitsmerkmal einzelner besonders schöpferischer Menschen, die auch leicht dem Wahnsinn verfallen konnten. Ihre Kreativität äußerte sich in von ihnen geschaffenen Produkten. Seit den 1950ern wird Kreativität neben Intelligenz als neue Dimension von Begabung angesehen. Als „besondere Qualität des Problemlösens" steht sie grundsätzlich allen Personen als Entwicklungsmöglichkeit offen (Dorsch 2014, S. 947).[287] Auch BRUNER beschäftigte sich in seiner

[287] Auch wenn das Genie-Konzept heute als überholt gilt, wird Mathematikern gerne nachgesagt, dass bei ihnen Genie und Wahnsinn nahe beieinander liegen. Der Mathematiker ALEXANDER GROTHENDIECK beispielweise lehnte 1966 die ihm verliehene Fields-Medaille ab und wandte sich auf dem Höhepunkt seines mathematischen Schaffens religiösen und pazifistischen Bewegungen zu. Zuletzt wohnte er abgeschottet von der Außenwelt auf einen Einsiedlerhof in den französischen Pyrenäen. WINFRIED SCHARLAU hat das Wirken GROTHENDIECKs und seine Abkehr von der Öffentlichkeit und Zuwendung zur Esoterik in einer vierbändigen Bibliographie GROTHENDIECKs zusammengetragen. Darin zeichnet er zwei Seiten GROTHENDIECKs nach: Zum einen den erfolg-

Lerntheorie mit der Entwicklung kreativer Ideen. Eine Idee galt ihm dann als kreativ, wenn sie eine Überraschung erwirkte, die kontextuell bedeutsam und wirksam war. So unterschied er kreative Ideen von absonderlichen Ideen, die keine Bedeutung für den Kontext haben (Bruner 1962).

In diesem Sinne können vier Dimensionen von Kreativität unterschieden werden: das kreative Produkt, der kreative Prozess, die kreative Persönlichkeit und die Kreativität fördernde Umgebung. Diese vier Dimensionen sollen nun nacheinander beleuchtet werden.

Auch wenn Kreativität „spielerisch, nicht auf bestimmte Ziele oder Ergebnisse hin festgelegt, sondern flexibel, eher ziellos“ ist, liefert sie keinesfalls „Zufallsprodukte“ (Metzler 2008, S. 947). Kreative Produkte zeichnen sich sowohl durch ihr Neuheit[288] aus als auch durch ihre Angemessenheit und Brauchbarkeit für ein zu lösende Problem. Als Indikatoren für kreative Produkte werden in der psychologischen Forschung sowohl „interne Eleganz“ und „Verallgemeinerungsfähigkeit“ diskutiert (Croples/Reuter 2010, S. 403). Dies sind zwei Eigenschaften, an denen auch mathematische Objekte im ästhetischen Sinne gemessen werden. HARDY stellt beispielsweise die Eleganz und Schönheit des Beweises für die Unendlichkeit der Primzahlfolge von EUKLID und eines Widerspruchsbeweises zur Irrationalität von $\sqrt{2}$, der auf die pythagoreische Schule zurückgeht, heraus (Hardy 2005, S. 17 ff.). Auch aktuell drückt gerade Eleganz Wertschätzung gegenüber besonders gelungenen mathematischen Objekten aus. Der Beweis zur Unendlichkeit der Primzahlfolge nach EUKLID wurde beispielsweise auch in „Das BUCH der Beweise“ aufgenommen (Aigner/Ziegler 2015). Darin sind Beweise mathematischer Aussagen zusammengefasst, die sich durch „brillante Ideen, schlaues Vorgehen, wunderschöne Einsichten und überraschende Wendungen“ auszeichnen (Aigner/Ziegler 2015, S. V). Die Bezeichnung „Das BUCH“ ist eine Anlehnung an PAUL ERDŐS Erzählungen „von dem BUCH, in dem Gott die perfekten Beweise für mathematische Sätze aufbewahrt“ (Aigner/Ziegler 2015, S. V).[289] Brillanz, Schönheit und Überraschung sind demnach Attribute, mit denen mathematischer Objekt ausgezeichnet werden. Auch HARDY, der in Kapitel 4.2 schon zur Begründung der Persönlichkeitsidee „Kreativität“ zitiert wurde, betont, dass mathematische Objekte ästhetischen Merkmalen genügen müssen.

---

reichen Mathematiker und zum anderen einen von Wahnvorstellungen geplagten Menschen, der 1990 in einem Brief „das bevorstehende Jüngste Gericht und ein danach anbrechendes Goldenes Zeitalter“ vorhersagte (Scharlau 2016, S. 6).

[288] Neuheit bezieht sich hier auf das jeweilige Kognitionssystem, in dem das Produkt entwickelt wurde. Das Produkt kann also absolut-historisch schon bekannt sein und dennoch als kreativ gelten, wenn die entwickelnde Person keine Kenntnis vom Vorhandensein des Produkts hatte (Dorsch 2014).

[289] ERDŐS ging sogar noch einen Schritt weiter, indem er sagte, „dass man nicht an Gott zu glauben braucht, aber dass man als Mathematiker an das BUCH glauben sollte“ (Aigner/Ziegler 2015, S. V).

> The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas like the colours or the words, must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.
>
> (Hardy 2005, S. 14)

Mathematische Produkte zeichnen sich demnach durch Kreativität aus und sind ihrerseits wiederum Ausdruck eines kreativen Schaffensprozesses von Mathematikern. Mit HARDYs Worten ist gerade diese im kreativen Prozess geschaffene Mathematik die einzige, die zählt:

> It will be obvious by now that I am interested in mathematics only as a creative art.
>
> (Hardy 2005, S. 30)

Der Prozess des kreativen Problemlösens wurde von POINCARÉ durch introspektive Analysen seines mathematischen Schaffens beschrieben (Poincaré 1973). Bis heute beschreibt die psychologische Forschung kreative Prozesse durch ein Modell, welches auf POINCARÉ zurückgeht und von HADAMARD (Hadamard 1996) in vier Phasen eingeteilt wurde (Dorsch 2014). Demnach gliedern sich kreative Prozesse in Präparation, Inkubation, Illumination oder Inspiration und Evaluation oder Verifikation.

Während der „Präparation“ werden Informationen über das Problem gesammelt. Dabei müssen zwar die vom Problem indizierten Denkstrukturen beachtet werden, das eigene Denken darf dadurch allerdings nicht an Flexibilität verlieren. Diese erste Phase der bewussten Arbeit an einem Problem ist häufig mit enormen „Anstrengungen [...] [verbunden], die gänzlich unfruchtbar zu sein [...] [scheinen] und bei denen man die Hoffnung etwas zu erreichen schon vollständig aufgegeben hatte“ (Poincaré 1973, S. 45). Die Präparation kann also zunächst frustrieren.[290] Sie ist aber nach POINCARÉ unverzichtbar für den Erfolg der nächsten Phase, in der das Unterbewusstsein weiter an dem Problem arbeitet. Auch VAN DER WAERDEN betont die enge Verbindung von bewusster Präparation und dem folgenden Einfall (Inspirationsphase).

> Wenn ich nun nachträglich den Einfall genauer analysiere, so sehe ich, dass die bewussten Überlegungen, die wir zuerst [...] angestellt hatten, bevor der Einfall kam, ganz wesentlich waren. Sie führten bereits ganz nahe an die Lösung. Der Einfall war nur der Funke, der übersprang als die beiden Pole ganz nahe zusammengebracht waren.
>
> (van der Waerden 1953, S. 128)

[290] Ein Beleg für die Wichtigkeit der Idee „Beharrlichkeit“, ohne die der kreative Forschungsprozess an dieser Stelle schon ohne Ergebnisse beendet sein könnte.

WINTER beschreibt die Präparation kognitionspsychologisch mit der Äquilibrationstheorie PIAGETs.

> Alle assimilativen Anstrengungen, also solche, die darauf gerichtet sind, das Problem, mit den verfügbaren geistigen Mitteln zu verstehen und seine Widerstände durch Umformung in bekannte und überwindbare Hürden zu brechen, sind gescheitert. Es muss jetzt (wenn es überhaupt mit eigener Kraft weitergehen soll) etwas Neues passieren; auf der Seite des erkennenden Subjekts, des Problemlösers, muss eine Umorganisation seiner kognitiven Struktur, eben eine Angleichung an die Problemlage (Adaption) erfolgen.

(Winter 2016, S. 214)

In der sich anschließenden „Inkubationsphase“ wird die bewusste Lösungsfindung ausgesetzt und mittels divergentem Denken eine Umstrukturierung des Problems herbeigeführt. Besonders für diese Phase liegen vermehrt Vorschläge vor, die dem Unterbewusstsein Raum zur Arbeit geben sollen. Zeitliche und räumliche Trennungen vom Problem[291] beispielsweise durch Spaziergänge sollen die Illumination anregen (Weth 1991). Die dabei angestrebte gedankliche Umstrukturierung des Problems kann in der dritten Phase zur plötzlichen Einsicht, zur „Erleuchtung“, führen.[292] Daher wird diese Phase auch „Illumination“ oder „Inspiration“ genannt. In dieser Phase spielt die oben erläuterte Idee „Intuition“ die entscheidende Rolle.

Die gefundene Lösung gilt es in der letzten Phase, der Elaboration, am Problem zu evaluieren, wozu konvergentes Denken nötig ist (Dorsch 2014, S. 947). Auch diese Phase der erneuten bewussten Beschäftigung mit dem Problem ist unverzichtbar. POINCARÉ begründet deren Wichtigkeit mit den starken Gefühlen, welche intuitive Einfälle der Inspiration begleiten.

> Ich sprach oben von dem Gefühl absoluter Gewissheit, das die Inspiration begleitet [...] dieses Gefühl kann oft sehr lebhaft sein und uns dennoch täuschen und wir bemerken unseren Irrtum erst, wenn wir den Beweis festlegen wollen.

(Poincaré 1973, S. 45)

Gerade die letzte Phase sichert, dass kreative Produkte auch auf die Situation passen und im wissenschaftlichen Diskurs objektiv beweisbar sind. Neben der Verifikation beschreibt HADAMARD zwei weitere Funktionen dieser Phase. Zum einen müssen intuitive Einfälle meist mathematisch präzisiert werden, da sie nur sehr vage den zündenden Gedanken enthalten. Dies geschieht mit der Veri-

[291] Besonders solche Notwendigkeiten sind mit Blick auf die Rahmenbedingungen des realen Mathematikunterrichts höchst problematisch. Dieser ist an fast allen Schulen zeitlich genau getaktet und bietet kaum Raum für „kreative“ Pausen.

[292] THOMAS WETH weist zu Recht darauf hin, dass bei der Illumination eigentlich nicht von „Phase“ gesprochen werden kann, da ihr Charakteristikum gerade ihr plötzliches und unvermitteltes Eintreten ist (Weth 1999).

fikation zusammen. Zum anderen kann aus Verifikation und Präzision noch ein weiterer Nutzen gezogen werden. Durch die genauere Analyse des Einfalls kann dieser wieder zum Startpunkt weiterer kreativer Forschung werden, indem seine Beziehungen zu bereits vorhandenem Wissen erkundet werden (Hadamard 1996).

Für die Mathematik fokussiert WETH den kreativen Forschungsprozess auf eine Komponente, die bei POINCARÉ und HADAMARD nicht explizit vorkommt. Für WETH gehört zum kreativen Arbeiten nicht ausschließlich das Finden kreativer Problemlösungen, sondern vornehmlich der „schöpferische Akt des Bildens von Problemen, des Schaffens von mathematischen Begriffen und die anschließende intellektuelle Auseinandersetzung“ (Weth 1999, S. 18). Damit erweitert WETH den kreativen Schaffensprozess um einen Aspekt, den einige Autoren in Bezug auf Fundamentale Ideen unter der Idee „Intuition“ diskutiert haben. Oben wurde schon darauf hingewiesen, dass vor allem FISCHER und BOROVCNIK mit der Idee „Intuition“ den intuitiven Zugang zu Begriffen verbinden. Für WETH steht nun besonders die kreative Begriffsbildung im Vordergrund, die Schülern die selbstständige Begriffsbildung ermöglicht und sie somit ein „Stückchen eigene[...] Mathematik“ erschaffen lässt (Weth 1999, S. 39).

Abschließend sollen für die Idee „Kreativität“ noch individuelle Merkmale einer kreativen Persönlichkeit in den Blick genommen werden. Diese zeichnet sich dadurch aus, im Problemlöseprozess besonders wirksam divergentes und konvergentes Denken zu verbinden. Wo das konvergente Denken auf die Entwicklung einer speziellen Lösung ausgerichtet ist, ermöglicht das divergente Denken ein Durchbrechen konventioneller Denkmuster, ein Entwickeln neuer Strategien und eine neue Kombination gespeicherten Wissens (Croples/Reuter 2010).[293] Obwohl Kreativität stark mit kognitiven Fähigkeiten (nicht unbedingt mit Intelligenz) korreliert, enthält sie auch „Nichtkognitive“ Aspekte. Oben wurde schon mit HARDY ein Bezug zur Ästhetik geschaffen. Kreativität als Persönlichkeitsmerkmal einer kreativ handelnden Person umfasst zahlreiche emotionale und motivationale Bereiche. Neben intrinsischer Motivation werden Selbstvertrauen und Mut, Risikobereitschaft, Neugier und Beharrungsvermögen benötigt (Croples/Reuter 2010). WETH stellt in Bezug auf mathematische Kreativität besonders die Neugier und Ausdauer heraus und ergänzt die Auflistung durch Erfolgszu-

[293] Ohne den Bezeichner „Kreativität“ zu benutzten, misst POINCARÉ der Entwicklung neuer Kombinationen von gespeichertem Wissen die zentrale Rolle in der unbewussten Phase des Problemlöseprozesses zu. Als Auswahlkriterium, welche der gedachten Kombinationen als Lösung des Problems dem Bewusstsein vorgeschlagen wird, dient das „Gefühl für mathematische Schönheit“ (Poincaré 1973, S. 48). Schönheit und Eleganz sind demnach die Eigenschaften, die eine richtige Lösung auszeichnen. Somit sieht POINCARÉ auch das mathematische Forschen als ästhetische Erfahrung (Spies 2013).

versicht, Autonomie, Ich-Stärke und Kontrollierte Regressionsfähigkeit (Weth 1999, S. 8 f.).[294]

Als letzte Persönlichkeitsidee wird *Beharrlichkeit* vorgestellt, deren in der vorliegenden Arbeit so gewählter Bezeichner einer Vorbemerkung bedarf. Beharrlichkeit findet sich in den Bezugswissenschaften der Mathematikdidaktik nicht als kodifizierter Fachbegriff.[295] In der Psychologie werden verwandte Begriffe wie Ausdauer oder Begriffe, in denen Beharrlichkeit implizit mitschwingt, zum Beispiel Motivation gebraucht. Mathematiker selbst sprechen von einer gewissen Resistenz gegenüber Frustrationen. Obwohl nicht gebräuchlich, wurde der Bezeichner „Beharrlichkeit" gewählt, um die hier gemeinte Idee zu beschreiben, da dies eine freie Definition der Idee ermöglicht. Die Idee Beharrlichkeit wird in der vorliegenden Arbeit definiert als erfolgreicher Umgang mit Belastungen durch Ausdauer, Frustrationstoleranz und Durchhaltevermögen[296] und Unbeirrbarkeit.

Als Form eines individuellen „Bewältigungsstil[s] im Umgang mit Belastungen" ist Beharrlichkeit ein Persönlichkeitsmerkmal (Dorsch 2014, S. 1245). In der psychologischen Tradition wird der Umgang mit psychischen Belastungen unter dem Fachbegriff „coping" diskutiert. Belastungen werden dabei allgemein als Situationen oder Ereignisse definiert, „welche die Ressourcen einer Person berühren oder übersteigen" (Dorsch 2014, S. 356). Grundannahme ist, dass Personen Belastungen nicht passiv ausgeliefert sind, sondern durch aktives Handeln Strategien zu deren Bewältigung entwickeln können. Neben negativen Bewältigungsstrategien wie Verdrängung und Betäubung durch Drogen gibt es jene, die eine Person stärken und zur erfolgreichen Bewältigung befähigen. Dazu zählt das aktive Problemlösen, in dem die Person eine selbstständige Veränderung der Belastung anstrebt. Da eine Veränderung meist nicht sofort erwirkt werden kann, gehört zum erfolgreichen Umgang mit Belastungen eben auch Beharrlichkeit.

Nun kann und soll die Fundamentale Idee „Beharrlichkeit" hier sicher nicht dazu dienen, psychologische Belastungen in jeglicher Lebenssituation erfolgreich zu überwinden. Primär ist sie für das mathematische Forschen gedacht, in dessen

[294] Anhand der überlieferten Charaktereigenschaften einiger als besonders kreativ empfundener Mathematiker weist WETH andererseits auch negative Merkmale nach. Dabei beruft er sich auf eine ältere Arbeit von KURT BIERMANN, der den Verdacht äußert, dass „psychopathische Züge [...] Kontaktarmut, übersteigerter Ehrgeiz, Empfindlichkeit, Reizbarkeit und auch Rücksichtslosigkeit [...] Begleitmerkmale mathematischer Kreativität sind". Trotz der negativen Charaktereigenschaften einzelner Mathematiker kommt BIERMANN zu dem Schluss, dass nicht ernsthaft angenommen werden kann, dass „Psychopathie eine notwendige und hinreichende Bedingung sei, um in der Mathematik etwas zu leisten" (Weth 1999, S. 9 f.).

[295] Zumindest konnte kein Eintrag in den gängigen Lexika und Handbüchern gefunden werden.

[296] Im Zusammenhang mit Durchhaltevermögen wird häufig auch von Disziplin gesprochen. Dieser Begriff wurde hier bewusst nicht gewählt, da mit ihm eine Vielzahl negativer Komponenten wie Drill, Totalitarismus, Gehorsam und Zwang verbunden sind. Durchhaltevermögen impliziert dagegen eher, dass der eigene Wille zur Bewältigung der Belastung vorhanden ist und nicht von außen oktroyiert wird.

Prozess sie schon oben mehrfach erwähnt wurde.[297] Besonders in den Phasen des bewussten Denkens (Präparation) ist Ausdauer, also die Fähigkeit, eine Tätigkeit lange ausüben zu können, unerlässlich. POINCARÉ beschrieb diese Phase des Forschens als mit „Anstrengungen [...] [verbunden], die gänzlich unfruchtbar zu sein [...] [scheinen] und bei denen man die Hoffnung etwas zu erreichen schon vollständig aufgegeben hatte“ (Poincaré 1973, S. 45). Um erfolgreich mit den Belastungen dieser Phase umzugehen, bedarf es jedoch mehr als bloßer Ausdauer. Um die Anstrengungen zu bewältigen und eben nicht die Hoffnung aufzugeben, reicht es nicht, nur lange genug am Ball zu bleiben. An dieser Stelle benötigt der Mathematiker auch eine Toleranz gegenüber Frustrationen und Durchhaltevermögen. Diese beiden Einstellungen beinhalten eher als nur Ausdauer, dass der Forscher auch den Willen besitzt, diese Phase zu überstehen. Dass er sich bewusst Anstrengungen aussetzt und diese meistert, um zu einem Ergebnis zu gelangen.

Der letzte Aspekt, der hier mit der Idee „Beharrlichkeit“ verbunden wird, ist die Unbeirrbarkeit. Diese wird hauptsächlich in der letzten Phase des Forschungsprozesses, der Elaboration, benötigt. Hier geht es darum, eine durch Inspiration gefundene Lösung am Problem zu evaluieren. Da im Forschungsprozess intuitive Lösungen von besonderer Bedeutung sind, diese aber meist zunächst nur subjektiven Wahrheitsgehalt haben, liegt die Schwierigkeit dieser Phase darin, intuitive Lösungen dem wissenschaftlichen Diskurs zugänglich zu machen. Einerseits darf dabei nicht auf der gefundenen Lösung stoisch beharrt werden, womit sie gerade einem Diskurs verwehrt würde. Andererseits muss die Lösung aber mit Überzeugung vertreten und gegen Zweifel verteidigt werden. Die Kreativitätsforschung nennt dieses Verhalten „Unbeirrbarkeit in der Phase der Produktvalidierung“ (Cropley/Reuter 2010, S. 403).

Zusammenfassend lassen sich die Persönlichkeitsideen als Einstellungen zum Forschen entlang des Problemlöseprozesses, wie er von POINCARÉ und HADAMARD beschrieben wurde, anordnen. Die Ideen Interesse und Neugier bringen in gewissem Sinn diesen Prozess in Gang, da sie die Aufmerksamkeit des Mathematikers auf einen Gegenstand fokussieren. Während der Präparation ist Beharrlichkeit im Sinne von Ausdauer, Frustrationstoleranz und Durchhaltevermögen eine treibende Kraft. Sie begünstigen einen erfolgreichen Umgang mit den auftretenden Anstrengungen. Wird die Problemfindung dann zugunsten ihrer unbewussten Weiterentwicklung aufgesetzt, spielen Kreativität und, im Moment der Inspiration, Intuition die entscheidenden Rollen. Bei der Elaboration kommt es dann

[297] Dennoch geht die Wirkung der Idee „Beharrlichkeit“ über ihre mathematische Anwendung hinaus. Dies belegt eine Beschreibung des Nutzens der Mathematik für das tägliche Leben von ROLAND SPEICHER. Bei „Jugend forscht“ formuliert er seinen persönlichen Nutzen aus der Beschäftigung mit Mathematik. "Bei Jugend forscht habe ich gelernt, dass man nicht gleich aufgeben darf und dass sich Hartnäckigkeit auszahlt" (Speicher 2016).

wieder auf den „weichen“ Teil von Beharrlichkeit, der Unbeirrbarkeit im wissenschaftlichen Sinne, an.

Nachdem die Explikation der einzelnen Ideen auch über Arbeiten aus der Pädagogischen Psychologie erfolgte, muss auf eine wesentliche Eigenschaft der Persönlichkeitsideen hingewiesen werden.

Im Bereich der Persönlichkeitsideen - vormals „Nichtkognitiven“ Ideen - hat sich der vorgestellte Ideenkatalog am stärksten verändert. In (von der Bank 2013) gehörten zu dieser Ideenkategorie Beharrlichkeit, Geschmack, Freude und Motorik. Nun enthält der Katalog die Ideen *Interesse* und *Neugier, Intuition, Beharrlichkeit und Kreativität.* Die Umformulierung wurde im Wesentlichen durch Kritik am Vernetzungspentagraphen angestoßen. Es zeigte sich, dass die ursprünglichen Ideen im wissenschaftlichen Diskurs zu wenige Anknüpfungspunkte an die anderen Ideenkategorien boten. Sie wurden daher häufig als Pendant der affektiven Lernziele verstanden, wie sie sich in der, in den späten 1970ern etablierten, Dreiteilung von Lernzielen widerfand. Die Kategorie der „Nichtkognitiven“ Ideen drohte somit, zusammenhanglos neben den anderen Ideenkategorien zu stehen, deren Vernetzungen eher ersichtlich waren. Auch mit Blick auf den unterrichtlichen Einsatz der erarbeiteten Theorie Fundamentaler Ideen mithilfe des Vernetzungspentagraphen sollten diese Ideen nicht als bloße „Wollenziele“ verstanden werden. Vielmehr repräsentieren sie typische Einstellungen, die beim Mathematiktreiben wesentlich sind. Dieser Charakter der „Nichtkognitiven“ Ideen soll durch die Umformulierung herausgestellt werden. Die neuen Bezeichner spiegeln ihre Wirksamkeit und Notwendigkeit im Erkenntnisprozess (vgl. Kapitel 4.1) stärker wider.

4.6 Zwischenfazit

Zunächst wurde gezeigt, dass sich der deutsche Begriff „Idee“ nicht mit der englischen „idea“ deckt. „Ideas“ sind in ihrer pragmatischen Definition wesentlich konkreter als Ideen. Um Fundamentale Ideen auch für den Mathematikunterricht wirksam zu machen, wurde ihr Begriffsverständnis in der vorliegenden Arbeit durch bisher fehlende Komponenten erweitert. Unter ihnen werden hier nun <u>Inhalte, Handlungen und Einstellungen</u> verstanden, die <u>zentral für Mathematik und das Mathematiktreiben</u> sind und somit das <u>Wesen von Mathematik</u> ausmachen. Diese Definition erweitert bisherige logische Begriffsbildungen um den Bereich der Einstellungen. Diese sind, wie gezeigt, für den Forschungsprozess ebenso unabdingbar wie inhaltliche Kenntnisse und handlungsmäßige Optionen.

Zum erweiterten logischen Begriffsverständnis galt es dann, passende Beispiele Fundamentaler Ideen zu formulieren. Dazu diente der in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Ideenkatalog, der das um den Menschen erweiterte Spannungsverhältnis Welt/Mensch←→Mathematik in seiner Breite beschreibt. Die dort genannten Ideenkategorien konnten teilweise aus der Forschungsdiskussion hergeleitet werden. Dazu zählen Schnittstellen-, Tätigkeits- und Inhaltsideen. Andere Kategorien wurden bei Theorien Fundamentaler Ideen häufig mitgedacht, aber bisher noch nicht explizit ausgearbeitet. Prozess-, Theorie- und Begriffsideen fallen darunter. Persönlichkeitsideen sind der Diskussion um Fundamentale Ideen neu. Ihre Wichtigkeit konnte aus der pragmatischen Definition einer „idea“ und aus Berichten von Mathematikern über ihre Tätigkeit begründet werden.

Neben den bisher fehlenden Ideenkategorien in einer Theorie Fundamentaler Ideen ist es bis jetzt noch nicht gelungen, das Konzept für die Unterrichtspraxis wirksamer zu machen. Zwar nutzt VOHNS Grundlegende Ideen zur Analyse von Unterrichtsinhalten, gibt aber (bewusst) keine Hinweise, wie mithilfe der Ideen Inhalte für den Unterricht begründet gewonnen und aufbereitet werden können. Der Problematik, eine Brücke zwischen Theorie und Praxis zu bauen, wird deshalb im folgenden Kapitel nachgegangen.

Teil III Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht

5 Unterrichtliche Nutzung Fundamentaler Ideen

5.1 Fundamentale Ideen, Vernetzungen und Mathematikunterricht

Bis heute steht eine feste Etablierung Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht aus. Zwar wird der Ausrichtung des Mathematikunterrichts an zentralen Aspekten von Mathematik aktuell durch die Leitideen und Kompetenzen in den deutschen Bildungsstandards ein hoher Stellenwert eingeräumt, doch repräsentieren gerade diese „Ideen" nicht die Reichhaltigkeit der mathematikdidaktischen Diskussion Fundamentaler Ideen.[298]

Eine fehlende Verankerung Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht mag zunächst verwundern, da BRUNER Fundamentale Ideen von Anfang an als zentrale Bausteine von Unterricht gedacht hatte. Auch in der mathematikdidaktischen Forschungstradition sind Forderungen nach der Entwicklung von Curricula, die Fundamentale Ideen betonen, häufig formuliert worden. SCHREIBER forderte schon 1979 in seinem „Arbeitsprogramm" zur Erforschung Fundamentaler Ideen, dass deren Einsatz im Unterricht zu untersuchen ist. Dazu müssten Inhalte gefunden werden, die Fundamentale Ideen am geeignetsten repräsentieren (Schreiber 1979). Für SCHWEIGER macht die Eigenschaft einer Idee, Curricula vertikal zu gliedern, gerade ihren fundamentalen Charakter aus.

Die Vorteile für den Lernprozess der Schüler bei einer Orientierung des Unterrichts an Fundamentalen Ideen sind ebenfalls schon häufig benannt worden. BRUNERs Annahmen waren, dass Unterrichtsgegenstände dadurch „fasslicher" und vor dem Vergessen bewahrt werden, der nichtspezifische Transfer erleichtert und die Kluft zwischen elementarem und fortgeschrittenem Wissen verringert wird (Bruner 1970, S. 35 ff.). SCHWEIGER betont, dass Fundamentale Ideen „den Mathematikunterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger" machen (Schweiger 1992, S. 207). Nach PICKER werden Unterrichtsinhalte durch Fundamentale Ideen für Schüler „interessanter", „wirklichkeitsnäher" und „herausfordernder" (Picker 1985b, S. 70). HUMENBERGER und REICHEL schließen sich diesen Vorteilen an und ergänzen, dass mithilfe Fundamentaler Ideen ein besseres Verständnis durch angemessene Vorstellungen zu erzielen ist, grundlegende Methoden der Mathematik im Unterricht sichtbar werden und „Sinn bzw. Freude beim Anwenden von Mathematik"[299] erfahren werden können. Zudem wird Mathematik als Prozess erfahrbar dadurch, dass „Entwicklungen, Entdeckungen, schritt-

[298] Vgl. dazu die Kritik an den Bausteinen und der Konzeption der Bildungsstandards für das Fach Mathematik in Kapitel 2.1.

[299] Die Autoren betonen, dass auch das Aufzeigen von „Grenzen der Mathematik" dabei eine wichtige Rolle spielt (Humenberger/Reichel 1995, S. 28).

weise Präzisierungen, Standpunktverlagerungen [...] deutlicher werden“ (Humenberger/Reichel 1995, S. 28). Für SCHREIBER als auch für FISCHER stellen Fundamentale Ideen eine Möglichkeit dar, ein „unverfälschte[s] Bild[...] von Mathematik“ bei den Schülern zu erzeugen, da sie den Kern der Mathematik abbilden (Fischer 1976, S. 185). Dadurch kann verhindert werden, dass „die Mehrzahl der Menschen [...], wenn überhaupt, ein extrem bruchstückhaftes Bild von Mathematik als einer esoterischen Wissenschaft [...]“ im Mathematikunterricht vermittelt bekommt (Schreiber 1983, S. 66).

Um ein valides Bild von Mathematik im Mathematikunterricht anhand Fundamentaler Ideen vermitteln zu können, muss an ihnen die ganze Breite von Mathematik rekonstruierbar sein.[300] Fundamentale Ideen müssen also reichhaltige Bezüge durch Vernetzungen[301] zu allen Aspekten von Mathematik ermöglichen. In der mathematikdidaktischen Forschungstradition Fundamentaler Ideen lässt sich nachweisen, dass mit Hilfe Fundamentaler Ideen stets verschiedene Vernetzungen angestrebt wurden.

So war es schon ein Ziel der Meraner Reformen, die der vorliegenden Arbeit als historischer Rückbezug für eine Orientierung des Mathematikunterrichts an zentral erscheinenden Aspekten von Mathematik dienten, mathematische Inhalte im Unterricht möglichst reichhaltig zu vernetzen.[302] Die RICHERTschen Lehrpläne, die in der Tradition der Meraner Vorschläge standen, verankern dazu innermathematische Vernetzungen zwischen verschiedenen Teilgebieten der Schulmathematik, außermathematische Vernetzungen durch Anwendungen in der Wirklichkeit und in anderen Fächern sowie kultur-historische Vernetzungen zur Genese der Inhalte (Brinkmann 2002, S. 10 ff.). Während der Phase der Strukturmathematik kam es zu einer starken Reduzierung der vormals geforderten Vernetzungen. Fortan wurde der Mathematikunterricht an strukturmathematischen Begriffen wie „Menge, Struktur und Abbildung“ ausgerichtet. Diese Begriffe zeichneten sich zwar dadurch aus, dass sie im Rückblick auf einen vollzogenen Lehrgang innermathematisch eine Vielzahl von Inhalten strukturieren, allerdings sind sie kaum dazu geeignet, schulrelevante mathematische Inhalte so

[300] Dies forderte schon BRUNER, um dem Vergessen von Inhalten vorzubeugen. Fundamentale Ideen lernen heißt, dass „ein Erinnerungsverlust keinen völligen Verlust bedeutet, daß das, was übrig bleibt, uns nötigenfalls ermöglicht, die Einzelheiten zu rekonstruieren“ (Bruner 1970, S. 37).

[301] Vernetzungen könne sowohl Produkt als auch Prozess sein. ASTRID BRINKMANN definiert den Begriff Vernetzung in ihrer Dissertation als die einem Netzwerk zu Grunde liegende Relation zwischen seinen Vernetzungsknoten. Gleichzeitig bezeichnet sie auch den Prozess des „Inrelationsetzens“ zweier Knoten als Vernetzung (Brinkmann 2002, S. 36). Für die weiteren Überlegungen in der vorliegenden Arbeit ist der Prozess des Vernetzens mittels Fundamentaler Ideen von Wichtigkeit (s.u.).

[302] Vgl. Kapitel 2.3.

zu gliedern, dass an ihnen vernetztes Wissen *erworben* werden kann.[303] Als Reaktion auf die Folgen dieser Neustrukturierung in den 1960er und 1970er Jahren entstanden u.a. die in Kapitel 3.5.1 zitierten Arbeiten von WITTENBERG, JUNG, VOLLRATH und FISCHER. Sie plädieren für Vernetzungen zwischen Mathematik und Wirklichkeit, um im Mathematikunterricht verständiges Lernen zu ermöglichen.

In der mathematikdidaktischen Diskussion wurden reichhaltige Vernetzungen mittels Fundamentaler Ideen systematisch in den verschiedenen Kriterienkatalogen zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen gefasst. BENDER/SCHREIBER fordern Vernetzungen zwischen verschiedenen Stoffgebieten („Weite"-Kriterium zur horizontalen Vernetzung) und zwischen Wirklichkeit und Mathematik („Sinn"-Kriterium) durch Fundamentale Ideen (Bender/Schreiber 1985, S. 99).[304] Darüber hinaus sieht SCHWEIGER auch Vernetzungspotential zwischen Inhalten und deren historischer Genese sowie zwischen Inhalten auf verschiedenen Niveaus (Vertikalkriterium) (Schweiger 2010). TIETZE/KLIKA/WOLPERS nutzen Fundamentale Ideen, um Mathematik als Produkt („Leitideen") mit prozesshaften Elementen von Mathematik („bereichsspezifische Strategien" und „zentrale Mathematisierungsmuster") zu verbinden (Tietze/Klika/Wolpers 2000, S. 41). Ihnen geht es also um Vernetzungen zwischen Inhalten und Tätigkeiten. Mit dem Einzug des Computers in den Mathematikunterricht wurden neben neuen informatischen Inhalten[305] auch neue (digitale) Repräsentationen von Inhalten möglich. GUIDO PINKERNELL nutzt beispielsweise den sinnstiftenden Einsatz der „Neuen Medien" zur reichhaltigen Repräsentation der Fundamentalen Idee „Funktion" im Mathematikunterricht (Pinkernell 2013). Einen Überblick der neuen Vernetzungsmöglichkeiten zwischen Inhalten und deren Repräsentation gibt (Hischer 2010).

Ausgehend von der pragmatischen Definition Fundamentaler Ideen (Kapitel 4.1) geben diese darüber hinaus auch Aufschluss über typische Einstellungen zum Forschen. Sie können demnach auch die Verbindung von mathematiktreibenden Personen und Mathematik offenlegen.

In der vorliegenden Arbeit wird daher zusammengefasst: Sollen Fundamentale Ideen also im Mathematikunterricht wirksam werden, müssen sie ein valides Bild von Mathematik abbilden, aus dem zentrale Aspekte von Mathematik wie-

---

[303] Vgl. Kapitel 3.2.2 und 3.2.3.

[304] Die Leitideen der Bildungsstandards sollen ebenfalls die klassischen Gebiete der Schulmathematik vernetzen. An Leitideen soll „sachgebietsübergreifendes, vernetzendes Denken und Verständnis grundlegender mathematischer Begriffe erreicht werden" (KMK 2003, S. 6), vgl. Kapitel 2.1.

[305] Vgl. Kapitel 3.5.3. Für diese Entwicklung sei auf die reichhaltige didaktische Literatur verwiesen. Überblicke liefern die Tagungsbände des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik der GDM von 2008, 2011 und 2014.

der rekonstruierbar sind. Dazu ist Mathematik als Wissenschaft anzusehen, deren Inhalte, Tätigkeiten und fachtypische Einstellungen eng miteinander verknüpft sind.

Fundamentale Ideen sollten daher im Mathematikunterricht Vernetzungen zwischen Inhalten, deren Repräsentationen, Aktivitäten mit und über Inhalten, deren historischer Genese und der Person des Mathematiktreibenden erkennen lassen.

Diese Forderung an Fundamentale Ideen wird in der vorliegenden Arbeit „Vernetzungskriterium" genannt.[306]

Für eine konkrete Verankerung Fundamentaler Ideen im Mathematikunterricht wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit die Richtung der Forschungstradition umgekehrt. Anstatt ein Curriculum neu zu formulieren, das an Fundamentalen Ideen ausgerichtet ist, werden im Sinne SCHREIBERs Inhalte (z.B. repräsentiert in Schulbüchern) gesucht, welche die zugrundeliegenden Fundamentalen Ideen besonders gut repräsentieren.

Als erster setzte VOHNS Fundamentale Ideen zur deskriptiven Analyse von bereits etablierten Unterrichtsinhalten ein (Vohns 2007). Er nutzte dazu eine didaktisch orientierte Inhaltsanalyse. Diese erweitert die fachwissenschaftliche Sachanalyse nach HEINZ GRIESEL[307] um pädagogische Zwecke bestimmter Unterrichtsinhalte. Somit soll eine Balance zwischen der Objektivität mathematischer Inhalte und einem subjektiven Zugang zu ihnen erzielt werden (Vohns 2007, S. 85).[308]

VOHNS' Überlegungen, die eher auf einzelne Aufgaben gerichtet sind, werden nun weitergeführt. Der folgenden Analyse liegen das erweiterte Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen und der entsprechend ausgebaute Ideenkatalog nach LAMBERT zugrunde. Die Reichhaltigkeit der dort enthaltenen Ideen macht den Katalog für einen direkten Einsatz im Unterricht zu komplex. Es bedarf einer stärkeren Gliederung und Konkretisierung der Ideen. Dies wird durch eine Reduktion der Theorie auf ihren unterrichtspragmatischen Kern erreicht. Als solcher werden hier folgende Aspekte des Mathematikunterrichts angenommen, die sich aus den für Fundamentale Ideen geforderten Vernetzungsbereichen ergeben:

Inhalte, Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und *Person.*

---

[306] Eine bewusste Herstellung von Vernetzungen zwischen diesen Bereichen stellt vielerorts einen, je nach Studienseminartradition anders akzentuierten, Kern didaktischer Analysen von Unterrichtsinhalten dar. Mit Hilfe der hier vorgestellten Theorie Fundamentaler Ideen wird diese Tradition für die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit fachdidaktisch begründet.

[307] (Griesel 1972).

[308] Darauf wird in Kapitel 6 zurückgekommen.

Welche Vernetzungen zwischen diesen Aspekten im Unterricht möglich bzw. durch vorliegendes Material (Aufgaben, Schulbücher) impliziert sind, kann mit folgendem Vernetzungspentagraph visualisiert werden:

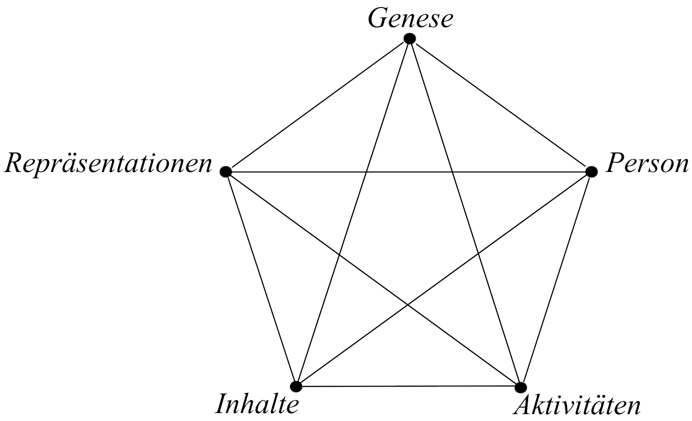


Abbildung 48 Vernetzungspentagraph

Der Vernetzungspentagraph ist ein vernetztes System, dessen Systemkomponenten seinen Knoten entsprechen. Anders als in (Brinkmann 2002) entsprechen die Knoten dieses Netzwerks nicht ausschließlich mathematischen bzw. außermathematischen Objekten. Die Knoten sind hier reichhaltiger angelegt, da sie als unterrichtspragmatischer Kern der oben vorgestellten Ideenkategorien auch Aktivitäten, historische Genese und Aspekte der Person berücksichtigen. Die Knoten des Vernetzungspentagraphen stehen in vielfältiger Weise in Beziehung zueinander. Diese sind durch die Kanten repräsentiert. Sie drücken in der Analyse von Schulbüchern die Relation „steht in Verbindung mit“ aus. Von Vernetzung wird demnach gesprochen, wenn eine Verbindung zwischen zwei Knoten im untersuchten Schulbuch beispielsweise durch gezielte Aufgabenstellungen impliziert wird.

Ausgehend von diesen Vorüberlegungen gilt es nun, die unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie Fundamentaler Ideen zu erläutern.

5.2 Unterrichtspragmatische Reduktion der Theorie

Ausgangspunkt für die Reduktion stellen die Ideenkategorien mit ihrer Verortung auf einer eher abstrakten und einer eher konkreten Ebene dar.

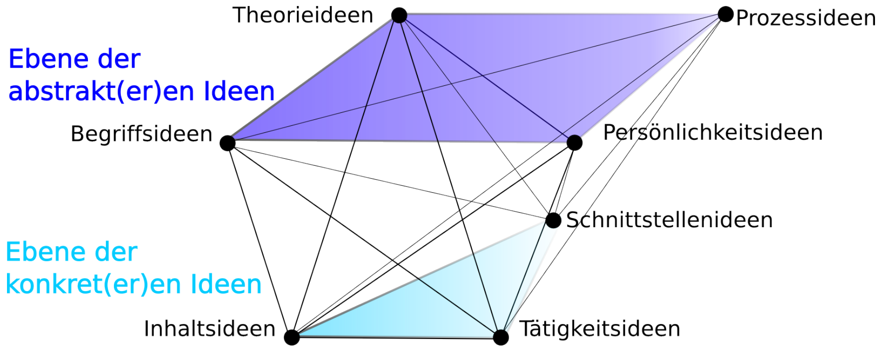


Abbildung 49 Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien

Wichtig erscheint hier, dass nicht nur mittels Fundamentaler Ideen vernetzt wird, sondern dass auch die Ideenkategorien untereinander vielfältig vernetzt sind. Diese Verbindungen sind schon in der Beschreibung der jeweiligen Ideenkategorien in Kapitel 4.3, 4.4 und 4.5 implizit bzw. auch explizit thematisiert worden und werden daher im Folgenden nur knapp zusammengefasst.

Theorie-, Begriffs- und Inhaltsideen liefern eine Beschreibung von Mathematik als Produkt. Dabei konkretisieren sich Aspekte der Begriffs- und Theorieideen in den Inhaltsideen. Das „Haus der Vierecke" stellt beispielsweise eine Konkretisierung von Ordnungen von Begriffen unter der Inhaltsidee Raum und Form dar. Die dort beschriebenen kulturhistorisch bedingten Veränderungen der Ordnungskriterien sind wiederum in den Theorieideen aufgehoben.

Prozessideen gliedern die konkreteren Tätigkeits- und Schnittstellenideen. Tätigkeits- und Schnittstellenideen sind über den Prozess des Problemlösens eng miteinander verknüpft. Tätigkeitsideen beschreiben die Arbeit innerhalb eines zuvor ausgewählten Modells, während Schnittstellenideen die weiteren Schritte der Modellbildung abbilden (vgl. Abbildung 40). In diesem Zusammenhang wurde bereits herausgestellt, dass die Tätigkeitsideen prozessuale Entsprechungen mathematischer Produkte wie z.B. Ordnungen oder Algorithmen sind. Daraus ergeben sich die Vernetzungen zwischen Ideenkategorien, die Mathematik als Produkt bzw. Prozess betonen.

Vernetzungen zu den Persönlichkeitsideen ergeben sich für alle anderen Ideenkategorien daraus, dass der Mathematiker Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und Beharrlichkeit beim Prozess des Mathematiktreibens (Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen) einsetzt und somit das Produkt Mathematik prägt (Theorie-, Begriffs- und Inhaltsideen).

Diese hier nur sehr allgemein beschriebenen Vernetzungen werden bei der nun folgenden Herleitung der Knoten und Kanten des Vernetzungspentagraphen erneut aufgegriffen und konkretisiert.

5.2.1 Herleitung der Knoten

Für den Unterricht ist ein solch differenziertes Modell, wie es Abbildung 49 zeigt, zunächst weniger zweckmäßig. Die Vielzahl der in ihm aufgehobenen Ideen macht es für die konkrete Analyse von Unterrichtsinhalten zu komplex. Es bedarf einer Ordnung, Zusammenfassung und teilweise einer Konkretisierung der Ideen. Dies wird durch eine Reduktion der Ideenkategorien auf einen unterrichtspragmatischen Kern erreicht, der mit der vorliegenden Arbeit in die didaktische Diskussion eingebracht wird. Dabei ergeben sich neben Konkretisierungen auch Umorientierungen der Ideenkategorien für den Mathematikunterricht.

Die Reduktion ist in der folgenden Abbildung durch Pfeile[309] angedeutet und wird nun Schritt für Schritt erläutert.

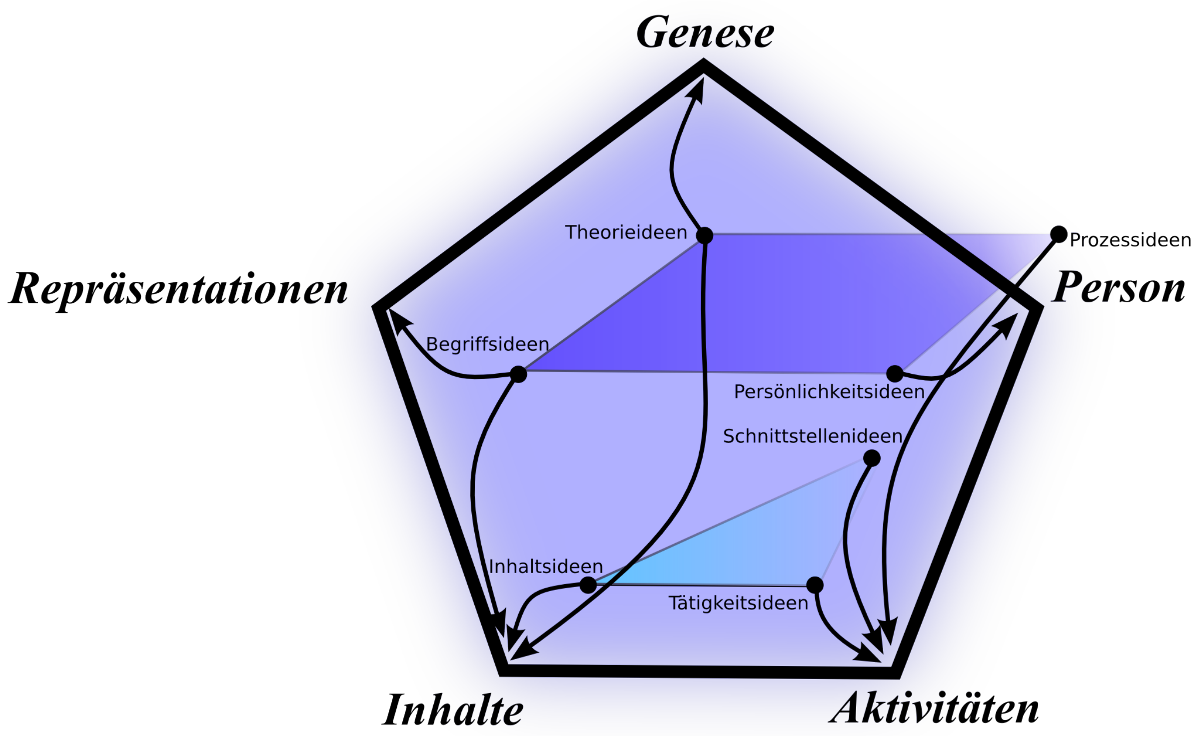


Abbildung 50 Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen (Poster)

Aktivitäten[310] der Schüler spielen im Unterricht eine zentrale Rolle. In ihnen konkretisieren sich die Prozessideen, die einen abstrakten Überbau für die von Anfang an konkreter gedachten Tätigkeits- und Schnittstellenideen bilden. Unter den Prozessideen waren Handlungen und Operationen sowie Strategien und Heuristiken gefasst (Kapitel 4.4.1). Heuristiken manifestieren sich im Unterricht beispielsweise als Aktivitäten wie Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten oder systematisches Probieren. Eine ausführliche Liste von Heurismen hat SCHREIBER zusammengestellt (Schreiber 2008).

---

[309] Zum Beispiel bedeutet der Pfeil von Theorieideen zu Inhalten, dass sich die Theorieideen im Unterricht in den Inhalten widerspiegeln.

[310] In (von der Bank 2013) wurde dieser Knoten mit „Tätigkeiten" bezeichnet. Der neue Bezeichner drückt präziser aus, dass es im Mathematikunterricht auf die Selbsttätigkeit der Schüler ankommt. Schüler sollen im Mathematikunterricht idealerweise selbstgesteuert aktiv werden. Zudem wird so deutlicher, dass dieser Knoten auch mentale Aktivitäten beim Umgang mit zu erwerbendem und erworbenem Wissen umfasst.

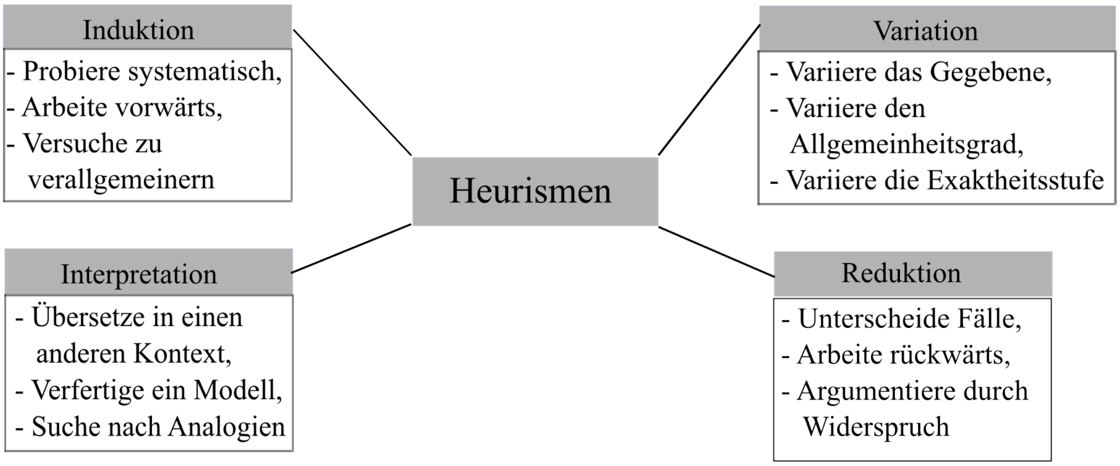


Abbildung 51 Heurismen nach (Schreiber 2008)

Neben Heurismen zum Problemlösen sind Strategien zum Bilden von Begriffen (Exaktifizieren, Formalisieren, Konkretisieren etc.) im Mathematikunterricht von großer Bedeutung. Diese sind ebenfalls als Konkretisierungen der Prozessideen im Knoten „Aktivitäten" aufgehoben. Andere Strategien wie Visualisieren spielen nicht nur als Aktivität eine Rolle im Unterricht, sondern können auch als Darstellungsform zum Knoten „Repräsentationen" gezählt werden.

Im Mathematikunterricht gilt es, den Übergang von Handlungen zu Operationen anhand mathematischer Aktivitäten bewusst zu machen. Eine Möglichkeit dazu bietet das sogenannte operative Üben (vgl. Kapitel 4.4.1). Handlungen und Operationen konkretisieren sich in den im Mathematikunterricht ausgeübten Aktivitäten. Ausgehend vom eingenommenen pragmatischen Standpunkt sind dabei Schnittstellenideen und die im Modell eher innermathematischen Tätigkeitsideen zusammenzufassen. Die meta-mathematische Komponente der Tätigkeitsideen spielt dabei auch im Unterricht eine Rolle. Neben dem Ordnen und Strukturieren mathematischer Sachverhalte dienen solche Ideen auch dazu, den eigenen Lernprozess in den Blick zu nehmen. Den Umgang mit zu erwerbendem und bereits erworbenem Wissen rückt JOHANN SJUTS mit verschiedenen Aufgabenarten in den Fokus. Dabei regen die Aufgabenstellungen gezielt Aktivitäten an, die zur Exploration, Organisation und Reflexion von Wissen und Denkprozessen dienen (Sjuts 2001). Durch die Fokussierung des Prozesses des Wissenserwerbs soll die Monotonie von produktorientierten Aufgaben in Schulbüchern durchbrochen werden (Sjuts 2001, S. 47). Der Bereich „Exploration" bezieht sich auf die Entwicklung von heuristisch gefundenen Lösungen, von divergenten Ideen und Vorschlägen zur Lösungsfindung sowie die Betonung der Beziehungshaltigkeit von inner- und außermathematischen Situationen. Aufgaben zur Wissensorganisation können das inhaltliche Erfassen von Texten („texterschließend"), das Anfertigen von Texten („expositorisch") sowie die Festlegung und Vereinbarung von Namen und Zeichen für Symbole („syntaktisch") sein (Sjuts 2001, S. 52). Aufgaben zur Wissensreflexion richten sich auf die Suche nach Fehlern in vorgegeben

Aufgaben, auf den Vergleich gegebener Aussagen und auf die Reflexion des eigener „Lern-, Denk-, und Verstehensvorgänge“ (Sjuts 2001, S. 54). Der unterrichtspraktische Wert der Arbeit von SJUTS besteht in der Angabe von Operatoren, die er den einzelnen Merkmalen des Wissensumgangs zuordnet und somit zum einen deren Identifikation in Aufgabenmaterial ermöglicht und zum anderen die Formulierung von Aufgaben, die gezielt einen Bereich ansprechen, erleichtert.

Unter dem Oberbegriff „***Inhalte***“ können im Unterricht die mathematischen Gebiete der Theorieideen sowie Objekte und Ordnungen der Begriffsideen gefasst werden. Die Gebiete konkretisieren sich in den klassischen Bereichen der Schulmathematik und bei deren inhaltlicher Bearbeitung (Analysis, Algebra und Arithmetik, Geometrie und Stochastik). Dabei führen die Inhaltsideen ganz bewusst zu Überschneidungen, die Vernetzungen zwischen den einzelnen Gebieten zulassen. Beispielsweise vernetzt die Idee „Maß“ Geometrie (Maße für Strecken, Flächen, Körper), Analysis (Integral als Flächenmaß) und Stochastik (Streumaß). Die Ideen Algorithmus und Approximation wurden von vornherein quer zu den anderen Inhaltsideen gewählt. Sie ermöglichen die Behandlung von Inhalten aus Gebieten der Mathematik, die bis jetzt noch nicht verbindlich im Mathematikunterricht verankert sind (z.B. Diskrete Mathematik). Andersherum bietet der Bereich der Diskreten Mathematik durch den Einsatz der Neuen Medien vielfältige Anknüpfungspunkte zu bereits etablierten Themen der Schulmathematik. Der Computereinsatz ermöglicht nicht nur neue Repräsentationen von Inhalten (s.u.), sondern führt auch inhaltlich zu neuen Fragestellungen. Als Beispiel sei hier auf den Aliasing-Effekt verwiesen (Hischer 2002, S. 296 f.). Diese Fehldarstellung tritt auf, wenn die Abtastrate eines Funktionsplotters im darstellenden Intervall der Funktion „ungünstig“ gewählt ist. Der Effekt kann auf die Fragen führen, wie Funktionenplotter funktionieren und wie Computer im Rahmen ihrer diskreten Modelle arbeiten.

Die angesprochenen Vernetzungen unter den Gebieten der Mathematik können ebenfalls in einem Vernetzungsgraphen visualisiert werden.

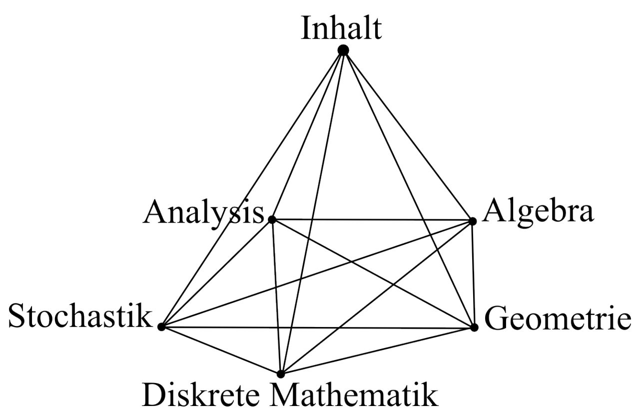


Abbildung 52 Möglichkeiten zur Vernetzung von Gebieten der Mathematik durch Inhalte im Mathematikunterricht

Begründungskulturen und Sprachen der Theorieideen sind wieder zweifach bedeutsam. Zum einen gehören Begründungen, Herleitungen und Beweise zu den Inhalten der Schulmathematik. Zum anderen sind sie durch unterschiedliche Darstellungsformen für die Repräsentationen im Unterricht wichtig (s.u.). Zwar könnten auch historische Betrachtungen zu den Inhalten von Mathematikunterricht zählen - diese bleiben im Unterricht allerdings häufig unberücksichtigt. Um ihr Vorhandensein oder Fehlen schon bei der unterrichtsvorbereitenden Analyse von Material verstärkt in den Blick zu nehmen, sind sie im eigenständigen Knoten „Genese“[311] aufgehoben.

Aus dem Bereich der Begriffsideen gehören Begriffe und deren Charakterisierung zu Inhalten des Mathematikunterrichts. Ordnungen werden zwar selten im Unterricht explizit behandelt, sie tauchen dennoch als Metatätigkeit (s.o.) und als Ordnungsrelationen auf.[312] Exemplarisch werden Ordnungen und Begriffsnetze in der Geometrie am „Haus der Vierecke“ im Mathematikunterricht thematisiert (vgl. Kapitel 4.3.2).

Neben den oben angesprochen Ideen, die sich in den Knoten ***„Repräsentationen“*** einordnen lassen, sind hier auch unterschiedliche Darstellungsformen von Objekten und Begriffen enthalten. Diese können sich aus der Vernetzung verschiedener Inhaltsgebiete ergeben. Beispielsweise können Funktionen im analytischen oder geometrischen Gewand auftauchen. Ein klassisches Beispiel hierfür sind isoperimetrische Probleme, die sich im Mathematikunterricht oft eingekleidet als „Kaninchenstall“-Aufgaben finden (von der Bank 2013). Verschiedene Darstellungsformen spielen auch bei unterschiedlichen Lösungswegen eine Rolle. In der Tradition der epistemologischen Zugänge zur Mathematik von KLEIN und BURTON unterscheidet LAMBERT drei geregelte Symbolsysteme der mathematischen Sprache, derer sich Mathematiker bedienen können (Lambert 2003 und Lambert 2012b). Aufgaben und Probleme können demnach „formal-algebraisch“, „konstruktiv-geometrisch“ und „verbal-begrifflich“ bearbeitet werden. Die ver-

[311] Um an dieser Stelle Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf verwiesen, dass der Begriff „Genese“ im Modell des Vernetzungspentagraphen keine ontogenetischen Aspekte enthält. Zwar können in der Mathematikdidaktik unter diesem Begriff auch psychologische Aneignungsformen verstanden werden, in der vorliegenden Arbeit werden darunter allerdings bewusst kulturhistorische Einflüsse gefasst, um diese bei einer Analyse mit dem Vernetzungspentagraphen gezielt wahrnehmen zu können. Ontogenetische Aspekte sind im Knoten „Repräsentationen“ gefasst. Dies wurde im Vernetzungspentagraphen vorgenommen, um auch bei der Analyse von Repräsentationen den Schüler als individuellen Lerner im Blick zu haben und zu halten. Auch wenn innerhalb der Mathematikdidaktik unter den Begriffe „Genese“ und „Repräsentation“ andere Aspekte diskutiert werden können, dient die im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgenommene Einteilung doch der angestrebten Zielsetzung, den Vernetzungspentagraphen durch seine Knoten als differenzierendes Analysewerkzeug nutzbar zu machen. Ein weiteres Beispiel für die treffende Feststellung von FISCHER und MALLE, dass Begriffe stets Ausdruck eines bestimmten Wollens sind (Fischer/Malle 1985).

[312] Als „Anordnungssymbole“ schon in Klasse 5 (MKBW 2003, S. 3).

schiedenen Symbolsysteme bilden dabei keine Hierarchie, sondern bleiben stets durch ihre Gleichzeitigkeit geprägt.[313] Der Wechsel zwischen den Symbolsystemen sollte im Mathematikunterricht bewusst geübt werden. Dies kann beispielsweise anhand von Präsentation und Besprechung unterschiedlicher Lösungswege verwirklicht werden.

Neben unterschiedlichen Darstellungen sind ebenfalls verschiedene Aspekte von Begriffsbildung im Knoten Repräsentationen enthalten. Grundlegend ist zunächst die Unterscheidung zwischen Darstellung und Vorstellung, wobei Darstellungen als Vermittler zwischen Vorstellungen auftreten.

<table>
<tr><th colspan="2">Person A</th><th colspan="2">Person B</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Vorstellung A</td><td colspan="2">EIS-Darstellung</td><td rowspan="4">Vorstellung B</td></tr>
<tr><td colspan="2">Konkretes Objekt
und konkrete Handlung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Abbildendes (statisches
oder dynamisches) Zeichen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Symbol und Operation
(„Spielregeln“)</td></tr>
<tr><td>„Gemeintes“</td><td>„Gesagtes“</td><td>„Gehörtes“</td><td>„Aufgefasstes“</td></tr>
</table>

Abbildung 53 Unterscheidung zwischen Vorstellung und Darstellung in (Lambert 2012b, S. 8)

Im Bereich der Vorstellungen verweist der Knoten insbesondere auf die Wichtigkeit der Ausbildung von sogenannten „Grundvorstellungen“ zu mathematischen Inhalten. Eine erste theoretische Grundlegung in diesem Bereich lieferte BENDER, der von Grundvorstellungen und -verständnissen (GVV) spricht (Bender 1991).[314] Das Bestimmungswort „Grund“ verweist auf die allgemeine Verbindlichkeit, Verankerung in der Lebenswelt und den fundamentalen Charakter für das jeweilige Teilgebiet.[315] Mit „Vorstellungen“ sind (innere) anschauliche Reprä-

---

[313] Im Gegensatz zu den Anschauungsstufen von VAN HIELE (s.u.).

[314] Die vorliegende Arbeit folgt der Konzeption BENDERs und nicht, wie für den Begriff der Grundvorstellungen weit verbreitet, den Überlegungen von VOM HOFE (vom Hofe 1995 und 2003). Dies ist in der Vagheit und Allgemeinheit des Grundvorstellungskonzepts von VOM HOFE begründet, wodurch das Konzept theoretisch zu unverbindlich wird - ungeachtet dessen ist es von pragmatischem Wert für die Praxis. Darüberhinaus finden sich die meisten Aspekte von Grundvorstellungen VOM HOFEs ebenfalls bei BENDER, vgl. (Rembowski 2015).

[315] Dabei ist zu beachten, dass BENDER keine Eigenschaften Fundamentaler Ideen in Zusammenhang mit Grundvorstellungen und -verständnissen bringen will. Zum einen hätte er dann sicherlich den Bezeichner „universell“ gewählt. Zum anderen grenzt er die beiden Konzepte an vermeintlichen Berührpunkten wie dem Lebensweltbezug klar voneinander ab. „Während die Verankerung in der Lebenswelt für das Konzept der Universellen Ideen der Mathematik im Sinne SCHREIBERs (Schreiber 1983) eine ontologische Konstituente darstellt, ist sie in Bezug auf das GVV-Konzept zwar auch entscheidend, aber nicht als epistemologischer Teil des jeweiligen Begriffs, sondern als didaktisches Mittel, das den Begriff dem Individuum (psychologisch) zugäng-

sentationen von Objekten, Handlungen und Situationen gemeint, die erneut aktiviert werden können. „Verständnisse" beinhaltet das Verstehen von Sachverhalten, Äußerungen und von Menschen, Handlungen und Situationen. Sowohl Vorstellungen als auch Verständnisse gehören zum GVV-Konzept, da „Verständnis [...] nicht ohne Vorstellungen und Vorstellungen [...] nicht ohne Verständnis möglich" ist bzw. sind (Bender 1991, S. 55).

Ein Werkzeug zur Gestaltung eines auf Grundvorstellungen und -verständnisse zielenden Mathematikunterrichts ist von VERENA REMBOWSKI entwickelt worden (Rembowski 2016).[316] Sie unterscheidet dabei die drei Dimensionen Prozesshaftigkeit, Aktivität-Operativität und kognitive Präferenzen.[317]

> Der prozesshafte Charakter soll sich genauer auf den Veränderungsprozess von einer ganzheitlichen (im Falle geometrischer Begriffe einer visuell-geometrischen) über eine beschreibende (eine konzeptuell-begriffliche) bis hin zu einer definitorischen (einer formal-begrifflichen) Anschauungsstufe beziehen. Der aktiv-operative Charakter kann verwirklicht werden in dem Ausgehen von selbsttätigen Handlungen (der enaktiven Repräsentationsebene), wobei möglichst mittels bildlicher Darstellungen (der ikonischen Repräsentationsebene) die Eigenschaften eines Begriffs verstanden werden sollen, was diesen mit zuvor nicht bekannten Spielregeln auflädt (auf der symbolischen Repräsentationsebene) [...] Vor dem Hintergrund von Vorstellungen und Verständnissen nach BENDER [...] wirkt außerdem die Berück-

---

lich macht" (Bender 1991, S. 50). GVV können also auch durch Metaphern in Einkleidung erfasst werden, wohingegen Universelle Ideen einer tatsächlichen Verankerung im Alltag bedürfen (Sinn-Kriterium von BENDER/SCHREIBER). „Fundamental" bedeutet im Zusammenhang mit GVV, dass diese nicht nur als „Aufhänger zur Einführung eines Teilgebiets" dienen, sondern „den Grund legen für eine kontinuierliche, oder auch nur sporadische, inhaltliche Interpretation der weiter zu entwickelnden Begrifflichkeit (die auch Sätze, Regeln, Verfahren usw. umfasst)" (Bender 1991, S. 51). VOHNS stellt in seinen Arbeiten wieder stärkere Bezüge zwischen Fundamentalen Ideen und Grundvorstellungen heraus (Vohns 2007) und (Vohns 2010), vgl. Kapitel 3.5.4.

[316] REMBOWSKI konzipierte ihr Modell speziell für den Geometrieunterricht. In der vorliegenden Arbeit wird es als Teil des Knoten Repräsentationen für den gesamten Mathematikunterricht gedacht. Dies geht mit einer Modifikation, die allerdings die Unschärfe einer Dimension des Modells zu Folge hat, einher. Wohingegen die Dimensionen „Aktivität-Operativität" und „kognitive Präferenzen" unmittelbar auch auf nicht geometrische Inhalte übertragen werden können, sind die Anschauungsstufen nach VAN HIELE rein von der Geometrie aus gedacht. Die Dimension „Prozesshaftigkeit" beschreibt eine Theorie, die einen Unterrichtsgang, der vom „Konkreten zum Abstrakten" geometrischer Inhalte schreitet. Für andere Gebiete der Schulmathematik liegt eine solche Theorie (noch) nicht vor. Im Sinne eines Unterrichtsgangs, der von konkreten Beispielen zu abstrakteren Begriffen schreitet, ist diese Dimension auch für andere Gebiete nutzbar. Mit der somit vorgenommenen begrifflichen Erweiterung wird diese Dimension allerdings vage, und eine Einteilung in die differenzierte Skala dieser Dimension ist nicht mehr möglich. Die damit einhergehende Unschärfe des Modells wird, die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit (pragmatische Nutzung des Vernetzungspentagraphen als Analysewerkzeug für Unterrichtsinhalte über die Geometrie hinaus) im Blick habend, hier in Kauf genommen.

[317] Daneben verortet REMBOWSKI auch „methodische Überlegungen" in ihrem Werkzeug. Diese beziehen sich auf explorative, organisatorische und reflexive Momente des Unterrichtsprozesses (Rembowski 2016, S. 193). Diese Aspekte sind im Vernetzungspentagraphen im Knoten „Aktivitäten" gefasst, da sich solche methodischen Entscheidungen im zu analysierenden Unterrichtsmaterial in den dort angeregten Aktivitäten widerspiegeln.

> sichtigung der kognitiven Präferenzen – prädikativ und funktional – angemessen. Denn unter Umständen erlaubt nur eine Kommunikation eines Sachverhalts entsprechend einer spezifischen kognitiven Präferenz eine (innere) Repräsentation dieses Sachverhalts [...] Andererseits kann wiederum das Übersetzen in eine andere kognitive Präferenz notwendig sein, um selbst verstanden zu werden [...]
>
> (Rembowski 2016, S. 192-193)

Die sich durch die Unterscheidung ergebenden didaktischen Entscheidungsfelder gilt es, im Prozess des Begriffsbildens zusammenzuführen. REMBOWSKI visualisiert ihr Werkzeug als „offene Matrix", welche von methodischen Entscheidungen bzgl. des explorativen, organisatorischen oder reflektierenden Unterrichtsprozesses begleitet wird.

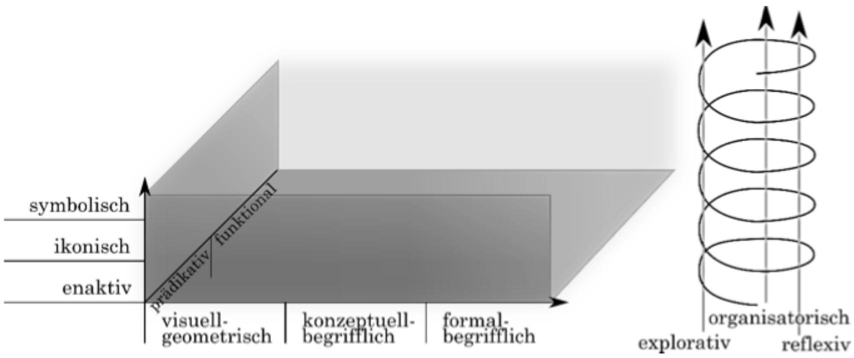


Abbildung 54 Offene Matrix als Werkzeug zur Gestaltung eines auf Grundvorstellungen zielenden Unterrichts (Rembowski 2016, S. 194)

Die Dimension der Prozesshaftigkeit fußt auf den fünf Anschauungsstufen von PIERRE und DINA VAN HIELE, die REMBOWSKI zu den drei Stufen „visuell-geometrisch", „konzeptuell-begrifflich" und „formal-begrifflich" zusammenfasst (Rembowski 2016, S. 195). Im Sinne einer Begriffsbildung, die von konkreten Beispielen zu abstrakten Begriffen schreitet, ist diese Dimension, die durch diese Erweiterung entstehende Unschärfe in Kauf nehmend, nicht auf den Kontext der Geometrie beschränkt. Die Trias enaktiv – ikonisch – symbolisch (Aktivität-Operativität)[318] wird zwar häufig mit BRUNER in Verbindung gebracht, ist aber wesentlich älter.[319] Eine Präzisierung im Sinne einer didaktisch motivierten Begriffsbildung findet sich in (Lambert 2012b). Besonders wurde dort die Unterscheidung zwischen ikonischer und symbolischer Darstellung, die in der Literatur der 1970er noch präsent war und im Laufe der Jahre verblasste, erneut geklärt. Diese vollzieht sich nicht etwa anhand von gezeichneten Bildern zu mathematischen Formeln, sondern bezieht sich auf die Unterscheidung, dass das

[318] Handlungen und Operationen, die im Mathematikunterricht angeregt durch Material vorkommen, sind im Knoten „Aktivitäten" gefasst (s.o.). Im Knoten „Repräsentationen" geht es um verschiedene Stufen der Begriffsbildung, die anhand von enaktiven, ikonischen und symbolischen Repräsentationen durchlaufen werden.

[319] Vgl. (Lambert 2012b) und (Rembowski 2015).

Zeichen zum Symbol wird, wenn die im Zeichen latent enthaltene Regel vollständig vom Lerner verstanden wurde. „**Symbole sind** dabei **Zeichen mit Kontexten, die ihnen (Spiel-)Regeln auferlegen**“ heißt es dazu in (Lambert 2012b, S. 17-18). Dabei kann epistemologisch die Ausprägung von Zeichen bzw. Symbolen als Wort, Bild oder Formelzeichen unterschieden werden (Lambert 2013, S. 597):

ikonisch	→	**symbolisch, wenn ergänzt um ...**
Wort	→	verbal-begriffliche Regel
Bild	→	konstruktiv-geometrische Regel
Formelzeichen	→	formal-algebraische Regel

Abbildung 55 Epistemologische Unterscheidung eines Zeichens/Symbols nach (Lambert 2013)

Diese präzisierende Unterscheidung wird auch bei der Anwendung des Vernetzungspentagraphen verwendet.

Die dritte Dimension bezieht sich auf die kognitiven Präferenzen, die auf die Forschung von INGE SCHWANK zurückgehen (Schwank 1998). Sie untersucht, wie Begriffe im Denken des Schülers konstruiert werden, und hält dabei fest, dass es individuelle Vorlieben und Präferenzen gibt, wie Problemlösesituationen wahrgenommen werden. Für mathematische Inhalte unterscheidet sie eine prädikative und eine funktionale Präferenz. Prädikatives Denken bezieht sich auf ein Erfassen von Begriffen mittels Prädikaten und Relationen zwischen verschiedenen mathematischen Objekten. Dies führt zu einem Denken in Beziehungen, welches durch Ausbau einer statisch greifenden internen begrifflichen Repräsentation gekennzeichnet ist. Funktionale Präferenz zeichnet sich hingegen durch ein Denken in Wirkungsweisen aus. Strukturen und Begriffe werden in Form von Funktionen und Operationen auf und mit mathematischen Gegenständen erfasst, wodurch eine dynamisch greifende interne begriffliche Repräsentation aufgebaut wird (Schwank 1998, Kap. 8). Für den Mathematikunterricht spielt diese Unterscheidung für viele Inhalte eine Rolle. Für Kongruenzbetrachtungen wurde darauf in (Rembowski 2016) hingewiesen. Die Erschließung der Auswirkungen eines Parameters auf die Gestalt der Lösungsmenge von quadratischen Gleichungen wird in Kapitel 6 der vorliegenden Arbeit erläutert.

Besonders für Schüler mit funktionaler Präferenz bietet der Computer neue Chancen. BENDER bemerkte dazu schon vor über zwanzig Jahren, dass DGS (Dynamische-Geometrie-Software) und CAS (Computer-Algebra-Systeme) „Sinn durch Konkretisierung und Visualisierung von abstrakten Begriffen [stiften]: Viele mathematische Begriffe lassen sich durch ein Tafelbild nur unzureichend veranschaulichen, vor allem jene, die sich aus Parameteränderung ergeben“ (Bender/Schwill 1996, S. 52). Durch Geometriesoftware und Funktionenplotter mit Schiebereglern können Veränderungen nun beweglich dargestellt werden, anstatt nur durch Vergleich von stehenden Bildern.[320] Diese „neuen“ Darstellungsmöglichkeiten sind auch im Knoten „Repräsentationen“ beachtet.

Der Knoten „***Genese***“ wird als eigenständiger Knoten etabliert, da kulturhistorische Entwicklungen von Mathematik Prozesse eigener Art sind, die sonst im Mathematikunterricht häufig vernachlässigt werden. Zudem bietet die Behandlung von historischen Aspekten von Mathematik die Chance zum fächerübergreifenden Arbeiten mit den Gesellschaftswissenschaften, speziell mit dem Fach Geschichte. Inhaltlich sind historische Entwicklungen von Theorie- und Begriffsideen, zumindest soweit sie bekannt sind,[321] in diesem Knoten zusammengefasst.

Zu unterscheiden sind dabei zwei Ebenen, auf denen historisch-genetische Aspekte bei der Analyse von Material eine Rolle spielen. Zum einen sollten solche Begebenheiten zum Hintergrundwissen des Lehrers gehören. Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik haben sowohl eine „Erinnerung“ als auch einen „Entwurf“ (Lyotard 2009, S. 76).[322] Das bedeutet, dass sich ihre Erkenntnisse nicht von selbst beglaubigen sollten, sondern stets im wissenschaftlichen Diskurs an ihren Argumenten gemessen werden müssen. Um also als Lehrer im Mathematikunterricht professionell handeln zu können, ist Wissen über aktuelle mathematikdidaktische Epochen und die Möglichkeiten deren Weiterentwicklung in aktiv zu verfolgenden zukünftigen Epochen (Entwurf) sowie über ihre historischen Vorläufer (Erinnerung) notwendig.

---

[320] Da solche Vergleiche von stehenden Bildern prädikativ denkenden Schülern entgegenkommen, sollten sie auch weiterhin im Mathematikunterricht berücksichtigt werden. Der Computer bietet hier ebenfalls neue Möglichkeiten, da zu vergleichende Bilderfolgen schnell produziert werden können. Aufgabe des Lehrers ist es an dieser Stelle, die Präferenzen seiner Schüler zu kennen und daher kompetent über den Einsatz von beispielsweise beweglichen Funktionsplots und reichhaltigen Einzelbilderfolgen zu entscheiden.

[321] Die mangelnde Darlegung des methodischen Vorgehens beim Forschen veranlasste schon ADOLF DIESTERWEG 1833 zu der Forderung, dass Mathematiker (wie auch von Schülern verlangt wurde) die „Wege, die sie wandeln, genau bezeichnen“ sollen (z.n. von Sallwück 1899, S. 300 f.).

[322] JEAN-FRANÇOIS LYOTARD argumentiert in seinem „Bericht“ über „Das postmoderne Wissen“, dass mit dem Übergang ins „postmoderne Zeitalter“ auch das Wissen seinen „Status wechselt“ (Lyotard 2009, S. 29). Ohne in der vorliegenden Arbeit auf das weite Diskussionsfeld des Begriffs „Postmoderne“ eingehen zu können, sei dies bemerkt: LYOTARD sieht das Wissen nun als Ware für den „Verkauf [...] für eine Verwertung in einer neuen Produktion“ (Lyotard 2009, S. 31). Er rückt in seiner Arbeit daher die Sprache zur Weitergabe von Wissen in den Vordergrund und unterscheidet zwei Arten von Wissen, die sich unterschiedlicher sprachlicher Spielzüge bedienen. Zum einen das „narrative Wissen“, welches sich „beglaubigt [...] durch [...] Übermittlung, ohne auf Argumentationen und Beweisführungen zurückzugreifen“ (Lyotard 2009, S. 78). Zum anderen die Wissenschaft, deren Aussagen sich in schon vorhandene Aussagen einordnen müssen. Als Sender einer Aussage gilt man dabei als „wissenschaftlich, wenn man verifizierbare oder falsifizierbare Aussagen über einen den Experten zugänglichen Referenten auszusprechen imstande ist“ (Lyotard 2009, S. 74 f.). Dieser Prozess des Einordnens verlangt reflektiertes Handeln und die Fähigkeit, den mit anderen geteilten Grundkanon einer Wissenschaft zu hinterfragen (Lambert 2002, S. 36).

Die zweite Ebene betrifft den konkreten Umgang mit historischen Aspekten im Mathematikunterricht. Hierzu zählen u.a. Betrachtungen historisch bedingter unterschiedlicher Begründungskulturen, Entstehung und Neustrukturierung von Gebieten der Mathematik sowie Darstellungen von Objekten.[323] Bleiben solche historischen Entwicklungen im Unterricht unberücksichtigt, kann ein statisches Bild von Mathematik als fertigem Produkt entstehen (vgl. Fischer/Malle 1985; S. 147 ff.). Entwicklungsprozesse, das Ringen um Beweise und auch historische Irrwege bleiben den Schülern verborgen. Um ein angemessenes Bild von Mathematik als Prozess und Produkt zu vermitteln, sollte an geeigneten Problemen und Lösungen auch auf deren Genese eingegangen werden.

Des Weiteren bieten historische Betrachtungen eine zusätzliche Chance, die besonders in der persönlichen Identifikation der Schüler mit ihrer Familienhistorie durch die Beschäftigung mit Mathematik liegt.[324] Werden nicht nur mathematische Entwicklungen im Unterricht thematisiert, sondern auch mathematikdidaktische bzw. bildungspolitische, so ermöglicht dies eine Verbindung zur Familienhistorie der Schüler. In Kapitel 3.2.3 wurde aufgezeigt, wie stark Mathematikunterricht von solchen Entwicklungen beeinflusst werden kann. Die erfahrbare Familiengeschichte durch Zeitzeugen (Eltern- und Großelterngeneration) geht aktuell für viele Schüler noch bis in die direkte Nachkriegszeit des 2. Weltkrieges zurück. In der Auseinandersetzung mit diesen Generationen, die explizit im Geschichtsunterricht angestrebt wird, spielt auch das Themenfeld Schule und Unterricht eine Rolle.[325] Für den Mathematikunterricht stehen mit historischen Schulbüchern und Zeitzeugeninterviews[326] ausgezeichnete Quellen zur Verfügung, die von Schülern im Unterricht präsentiert und auf ihre Bedeutung hin untersucht werden können. Dazu bietet sich eine fächerübergreifende Zusammenarbeit mit dem Fach Geschichte an, welches methodische Grundlagen in den Bereichen Erschließung von und kritischer Umgang mit Realien erarbeitet. Somit besteht die Chance, dass Mathematik Teil eines kulturellen Prozesses wird. Mathematikunterricht kann dabei durch die Erzeugung von historischen „Vorstellungsbildern“ einen Beitrag zur persönlichen Identifikation mit Mathematik und durch die Auseinandersetzung mit Schulbüchern, die von Eltern und Großel-

---

[323] Vgl. dazu auch Kapitel 2.3 und 4.3.1 der vorliegenden Arbeit.

[324] Hier wird wieder der Fall 2 des erweiterten Spannungsverhältnisses aufgegriffen, bei dem Mathematik als Vermittler zwischen Mensch und Welt fungiert.

[325] Vor allem im geschichtlichen Anfangsunterricht (Klasse 6 bzw. 7), aber auch während einer vertieften Auseinandersetzung mit der deutschen Geschichte ab 1914 bis heute (Klassen 9 und 10 bzw. in der Oberstufe) wird dieses Thema immer wieder unter verschiedenen Fragestellungen aufgegriffen (MBKS 2014).

[326] Solche Interviews können in „Kleinform“ ohne großen methodischen Aufwand beispielsweise als Hausaufgabe vorgenommen werden. Das zur Verfügung stehende Material aus der Geschichtsdidaktik ist gut zugänglich, vgl. beispielsweise (Sauer 2013, S. 234-241).

tern genutzt wurden, auch einen Beitrag zu Identifikation mit der eigenen Familienhistorie leisten (Völkel 2012).

Im letzten Knoten „***Person***“ werden von der, in der vorliegenden Arbeit vorgestellten, Theorie Fundamentaler Ideen die Persönlichkeitsideen gefasst. Dabei wird, wieder die Intention einer pragmatischen Nutzung des Vernetzungspentagraphen im Mathematikunterricht im Blick habend, zur Bezeichnung dieses Knotens bewusst der Begriff „Person“ gewählt, da im Mathematikunterricht nicht nur die Persönlichkeit des Schülers eine Rolle spielen sollte. Die Person des Schülers ernst nehmen bedeutet, ihn als Individuum wahrzunehmen und seine soziale und emotionale Entwicklung zu achten. Diese Aspekte können - wie in Kapitel 4.5 diskutiert - nicht von einer Theorie Fundamentaler Ideen der Mathematik in Gänze beschrieben werden. Sie gehören zu den Bereichen des Mathematikunterrichts, die von zwischenmenschlichen Begegnungen geprägt sind. Diese atmosphärischen Aspekte sollten bei der Unterrichtsplanung ebenso berücksichtigt werden wie die Einstellungen zum Forschen, die als Persönlichkeitsideen formuliert sind.

Besonders Interesse und Neugier sind in der Lage, da sie die Aufmerksamkeit lenken, kognitive Prozesse zu erleichtern und können somit zu einer erhöhten Gedächtnisleistung führen (Bikner-Ahsbahs 2005). Diese positive Beeinflussung des Lernprozesses kann durch einige notwendige, aber sicher nicht grundsätzlich hinreichende Faktoren im Mathematikunterricht hervorgerufen werden. Neugier kann „in kognitiven und sozialen Anregungssituationen wie Gruppenarbeit, Knobeln oder auch Computernutzung, sofern diese nicht zu den Routineerfahrungen gehören“ geweckt werden (Bikner-Ahsbahs 2005, S. 36). Dabei trägt der Aspekt der Neuartigkeit. Um längerfristiges Interesse zu erzeugen, muss Schülern die Chance gegeben werden, Inhalte und Aktivitäten als sinnvoll und persönlich gewinnbringend zu erfahren sowie eigenständig am Lernprozess teilzunehmen. Dies kann, neben den in den Knoten „Inhalte“ und „Repräsentationen“ gefassten sinnkonstituierenden Zugängen zur Mathematik, in besonderer Weise durch Autonomieerfahrungen (Mitbestimmung in Themen- und Methodenwahl, Selbstständigkeit beim Arbeiten) angestoßen werden.

Auf die Unverzichtbarkeit von intuitiven Erkenntnissen im Mathematikunterricht wurde schon in Kapitel 4.5 eingegangen. Förderlich hierfür scheint ein Mathematikunterricht zu sein, der individuelle Begriffsbildungen als Chance sieht und sich durch eine offene Fehlerkultur auszeichnet. Für die Unterrichtsplanung anhand von Schulbüchern bedeutet dies, dass dort keine „Geschlossene Mathematik“ im Sinne FISCHERs präsentiert wird. Stattdessen sollen soziale Kommunikation[327] über Inhalte angeregt und Raum zu deren Reflexion gegeben sein. Hier ergeben sich Berührpunkte zu den Knoten „Aktivitäten" und „Repräsentationen", in denen ebenfalls explorative, organisierende und reflexive Momente von Unterricht berücksichtigt wurden.

Auch der Bereich des kreativen Arbeitens im Mathematikunterricht kann sich auf Begriffsbildungen beziehen. WETH weist in diesem Zusammenhang explizit darauf hin, dass sich Kreativität nicht in der Bearbeitung gestellter Aufgaben erschöpft, sondern dass der „schöpferische Akt des Bildens von Problemen, des Schaffens von mathematischen Begriffen und die anschließende intellektuelle Auseinandersetzung damit" ihre Kernbestandteile für den Unterricht sind (Weth 1999, S. 18). Gefördert werden kann dies durch einen Mathematikunterricht, der allen Phasen des kreativen Forschungsprozesses Raum lässt. Speziell nennt WETH Offenheit (für Einfälle und gegenüber Fehlern), Problematisieren (als kritische Fragehaltung gegenüber erreichten Zielen), Assoziieren („Erzeugung" von Einfällen durch Freiheit und Ruhe), Experimentieren (als bewusste Sprengung von Systemen) und Bisoziieren (Schaffung einer Umgebung, die sowohl Freiheit als auch Struktur bietet) als kreativitätsfördernde Maßnahmen.

WETHs Bedingungen für kreatives Arbeiten werden auch dadurch bestärkt, dass WINTER, der eine Möglichkeit, kreative Prozesse im Mathematikunterricht zu fördern, im Problemlösen im Sinne PÓLYAs sieht, eine sehr ähnliche Liste von kreativitätsfördernden Bedingungen im Mathematikunterricht angibt.

> Von den diversen Vorschlägen zum Trainieren von Kreativität, die es in der psychologischen Literatur gibt, halte ich mit Blick auf den Mathematikunterricht die Folgenden am ehesten für theoretisch rechtfertigbar und praktisch realisierbar, wenn auch keinesfalls für trivial, wie sie möglicherweise klingen:
>
> (1) Probleme (nicht geben, sondern) aus Kontexten heraus entwickeln, die herausfordernd erscheinen, zum Fragen anreizen
>
> (2) Möglichkeiten zum freien Experimentieren, insbesondere auch sinnlicher Natur, an die Hand geben und zum Vermuten ermuntern
>
> (3) Lern-/Entdeckungshilfen genügend weit halten, weniger Ergebnisfindungshilfen als mehr Hilfen zum Selbstfinden des Ergebnisses anbieten
>
> (4) für warmes Lernklima sorgen, insbesondere Zurückhaltung in der Bewertung (falsch/richtig) von Schülerbeiträgen, Abbau von Scheu vor ungewöhnlichen Vorschlägen
>
> (5) heuristische Strategien bewusst machen und allgemein über Denken, Ausdrücken, Darstellen, Sichmerken, Erinnern, Vergessen, Fehlermachen, Üben, usw. sprechen

[327] Dazu zählt nicht nur die Kommunikation der Schüler untereinander und mit dem Lehrer, sondern auch die historische Genese mathematischer Inhalte, vgl. (Fischer/Malle 1985).

(6) Inhaltliche oder „formale“ Bedeutsamkeit des Themas deutlich werden lassen.

(Winter 2016, S. 219)

WINTERs Liste enthält Punkte, die im Mathematikunterricht selbstverständlich sein sollten. Doch sind sie auch bei der Routine täglichen Unterrichts und dessen Planung stets im Blick zu halten.

Beharrlichkeit spielt zwar im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle, ist allerdings schwer zu fördern, da sie nur anhand von zu bewältigenden und bewältigten Anstrengungen erworben werden kann. Durch Fokussieren der Aufmerksamkeit auf die Sache und (teilweise) Ausblenden von Anstrengungen kann Beharrlichkeit anhand interesse- und kreativitätsfördernder Maßnahmen erworben werden. Im Mathematikunterricht ist zusätzlich sicher entscheidend, welche Wertschätzung (unvollständigen) Zwischenergebnissen und individuellem Erkenntniszuwachs entgegengebracht wird. Dabei kann Material, das an entscheidenden Stellen zum Durchhalten motiviert, helfen. Nicht zu unterschätzen ist auch die Vorbildrolle des Lehrers.[328]

Wie schon in Kapitel 4.5, so klingt auch hier an, dass ein Erreichen der Persönlichkeitsideen von der Atmosphäre im Unterricht abhängt. Der Beitrag des Vernetzungspentagraphen bei der Materialanalyse liegt darin, dass der Knoten „Person“ den Blick seines Nutzers auf Aufgabenstellungen, Medien und Sozialformen lenkt, die Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und Beharrlichkeit fördern können. Diese ermöglichen dem Lehrer ein didaktisches und methodisches Handlungsspektrum, welches er zu einer atmosphärischen Lernumgebung ausarbeiten kann.

Zusammenfassend sind die einzelnen Knoten des Vernetzungspentagraphen wie folgt gefüllt.

[328] Auf diese wurde schon mehrfach im Zusammenhang mit der Vermittlung Fundamentaler Ideen hingewiesen, vgl. (Fischer 1984) und (Führer 1997).

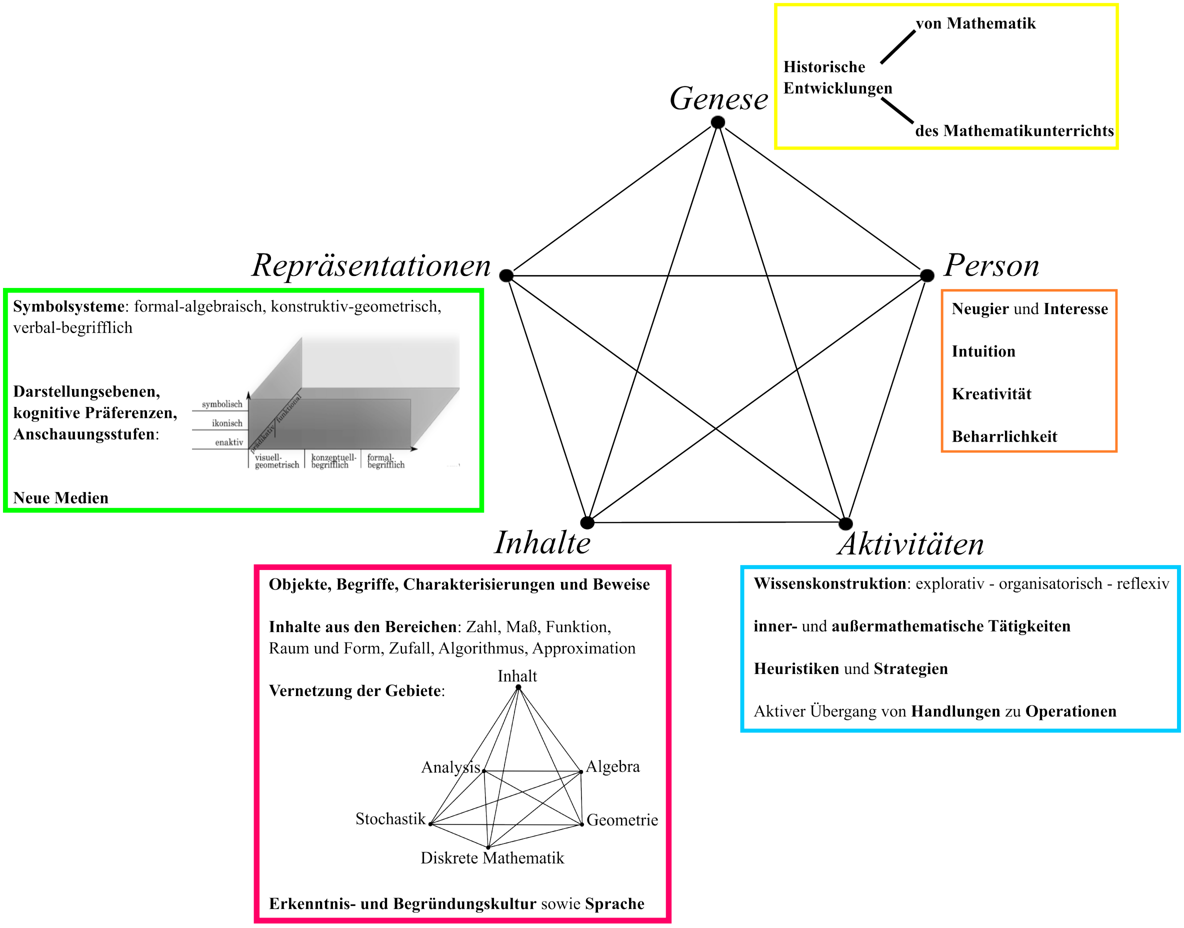


Abbildung 56 Zusammenfassende Darstellung des Vernetzungspentagraphen mit gefüllten Knoten „Inhalte“, „Repräsentationen“, „Aktivitäten“, „Genese“ und „Person“ (Poster)

5.2.2 Allgemeine Bemerkungen zur Bedeutung der Kanten

Die Kanten des Vernetzungspentagraphen visualisieren Vernetzungsmöglichkeiten zwischen den Knoten, die beispielweise durch Unterrichtsmaterial (Aufgaben, Schulbücher etc.) impliziert werden. Beim Analysieren des Materials dient der Vernetzungspentagraph als didaktische Brille des Lehrers zu deren Wahrnehmung. Damit bleibt die Subjektivität des Blicks erhalten und kann zu teilweise unterschiedlichen Ergebnissen führen.[329] Hierin liegt eine Stärke des Vernetzungspentagraphen: Zum einen ist er theoretisch fundiert durch die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Theorie Fundamentaler Ideen. Er stellt also ein am wissenschaftlichen Diskus gemessenes und dadurch in gewissem Sinne objektiviertes Modell dar. Zum anderen erhält der Vernetzungspentagraph aber die individuelle Sichtweise seines Nutzers auf Mathematik und Mathematikun-

[329] Eine größere Objektivität durch genauere Operationalisierung wäre sicher möglich, ist aber nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit. Statt einer weiteren theoretischen Ausschärfung soll die pragmatische Alltagstauglichkeit des Vernetzungspentagraphen untersucht werden. Daher ist die in Kapitel 6 folgende Analyse als (subjektiver) Diskussionsbeitrag zu verstehen, dessen Ziel die Demonstration des Anwendungspotentials des Vernetzungspentagraphen ist.

terricht, die ja gerade die Beziehung des Nutzers zur Sache Mathematik und Mathematikunterricht ausmachen. Somit unternimmt der Vernetzungspentagraph nicht den Versuch, die Rolle des Lehrers, der durch seine Vorbildfunktion mit entscheidend für den Unterricht ist, zu objektivieren, sondern kann dem Lehrer eine Basis zur begründeten Stoffauswahl bieten, auf der er für seinen Unterricht und seine Schüler individuell passende didaktische Entscheidungen trifft.

Daher sollen zur Erläuterung der Kanten hier einige allgemeine Hinweise gegeben werden, die als eine Art „Kurzanleitung" die Nutzung des Vernetzungspentagraphen in Kapitel 6 einleiten. Die Kanten werden dazu wie in Abbildung 57 benannt und erläutert.[330] Dabei ergeben sich einige Kanten schon aus der Reduktion verschiedener Aspekte derselben Ideenkategorie zu unterschiedlichen Knoten.

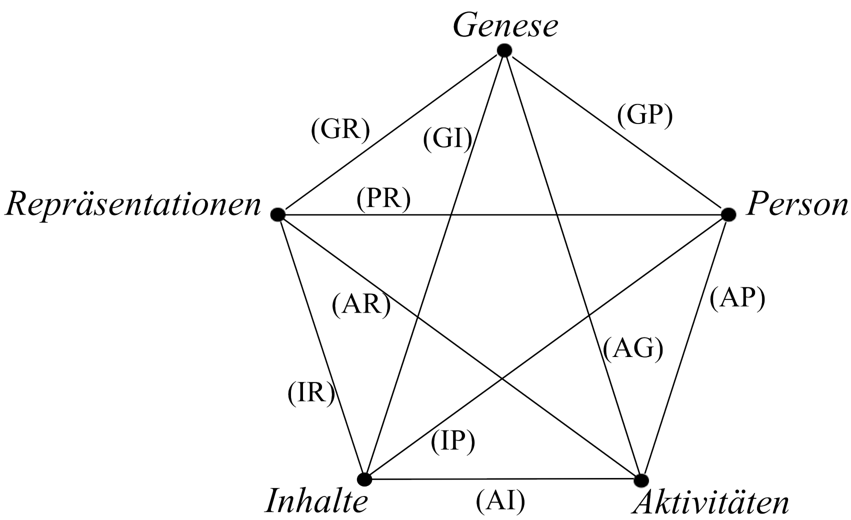


Abbildung 57 Vernetzungspentagraph mit benannten Kanten (Poster)

(IR): Inhalte werden stets in spezifischen Repräsentationsformen dargeboten. Diese Repräsentationen wirken wiederum auf die Inhalte zurück. Auch kann die bewusste Thematisierung von Repräsentationen diese selbst zu Inhalten des Mathematikunterrichts machen. Ein Beispiel hierfür ist das Aliasing bei Funktionsplottern.

Kante (IG) visualisiert Verbindungen zwischen Inhalten und deren Genese, die sich aus der Behandlung historischer Entwicklungen im Mathematikunterricht ergeben können. Ein gelungenes Beispiel solcher Vernetzung ist das Kapitel zur

[330] Die Bezeichnung einer Kante ergibt sich aus den Anfangsbuchstagen jener Knoten, die sie verbindet. Beispielsweise wird die Kante, welche die Knoten „Inhalte" und „Repräsentationen" verbindet mit „IR" bezeichnet. Prinzipiell ließe eine solche Bezeichnung auch eine Richtung der Kanten zu, wenn zwischen „IR" und „RI" unterschieden würde. In der vorliegenden Arbeit werden die Kanten allerdings alle als ungerichtet angenommen, da es nicht die hier verfolgte Intention ist, zu entscheiden, von welchem Knoten die jeweilige Vernetzung ausgeht. Die Kanten werden genutzt, um zu visualisieren, dass die jeweiligen Bereiche überhaupt in Verbindung stehen. Die Reihenfolge der Buchstaben ist daher schlicht alphabethisch gewählt.

Zahlentheorie im Schulbuch *Neue Wege 5* (Lergenmüller/Schmitt 2009). Dort wird der Schüler anhand auffordernder Aufgaben durch ausgewählte Entwicklungen der Zahlentheorie wie die „Entdeckung“ von Primzahlen, Mersenne-Zahlen und Vollkommenen Zahlen geführt.[331]

(AI) steht für die vielfältigen Aktivitäten, die anhand eines Inhalts angeregt werden können. Andersherum können durch die explizite Thematisierung von verwendeten Strategien, beispielsweise beim Problemlösen, Aktivitäten selbst zu Inhalten von Unterricht werden.

Mit Inhalten werden stets auch Aspekte von Mathematik vermittelt, die sich auf die Person des Schülers beziehen. Schulbuchstellen, die beispielsweise starken Aufforderungscharakter haben oder spannend als Rätsel formuliert sind, wollen Neugier wecken und Interesse erzeugen. Solche Angebote kennzeichnet die Kante (IP).

(AR) macht deutlich, dass verschiedene Repräsentationen unterschiedliche Aktivitäten fordern und somit diese Knoten vernetzten. Die konstruktiv-geometrische, verbal-begriffliche oder formal-algebraische Darstellung eines Algorithmus beispielsweise fordert zum Vernetzen, Ordnen, Strukturieren, Formalisieren und Exaktifizieren der Darstellung auf.[332]

Eine Vielfalt an angeregten Aktivitäten zielt im Mathematikunterricht auf Kreativität und auf Beharrlichkeit ab. Besonders beim Problemlösen spielt dies eine Rolle. Somit ergeben sich Vernetzungen zwischen Aktivitäten und Person, die mit der Kante (AP) dargestellt sind.

In (von der Bank 2016) konnte mit Hilfe des Vernetzungspentagraphen nachgewiesen werden, dass angeregte Aktivitäten sich in unterschiedlich (mathematikdidaktisch) geprägten Epochen stark unterscheiden. Anhand der Behandlung der Teilbarkeitslehre in Schulbüchern aus der Zeit der Strukturmathematik und der aktuellen „Neuen Aufgabenkultur“ konnten Tätigkeiten wie Formalisieren, Deduzieren der ersten Epoche und Tätigkeiten wie Fragen, Argumentieren, Kommunizieren, Problemlösen und Algorithmisieren der zweiten Epoche zugeordnet werden. Solche Verbindung von Aktivitäten und Genese fasst die Kante (AG).

Wie auch bestimmte Inhalte dienen Repräsentationen häufig dem Wecken von Neugier und Interesse und dem Fördern von Kreativität. Somit ergeben sich im Mathematikunterricht ebenfalls Vernetzungen zwischen diesen Repräsentationen und dem Knoten Person über Kante (PR).

---

[331] Für eine Analyse dieses Kapitels mit dem Vernetzungspentagraph vgl. (von der Bank 2016). Von besonderer Bedeutung sind dabei die reichhaltigen Vernetzungen zum Knoten „Person“ (dort noch „Nichtkognitive“ Ziele genannt).

[332] Am Beispiel der Repräsentation des Heron-Verfahrens in *Neue Wege 9* (Lergenmüller/Schmidt 2010) wird dies in (von der Bank 2016) gezeigt.

Auch der Blick auf die im Mathematikunterricht zu fördernden Aspekte, welche die Person des Schülers betreffen, unterliegen historischen Veränderungen. Gerieten diese teilweise bis ganz während der Phase der Strukturmathematik aus dem Blick, werden aktuell besonders Interesse, Neugier und Kreativität fokussiert (Kante (GP)). Entscheidend ist dabei, dass die Schüler mathematische Inhalte in ihrem historischen Entwicklungsprozess als kreative Produkte wahrnehmen, zu deren Schaffung eben auch Interesse und Neugier, Intuition und Beharrlichkeit nötig waren.

Zuletzt wurde schon bei den Begriffsideen diskutiert, dass die Art und Weise, bestimmte Inhalte zu repräsentieren, vom mathematikdidaktischen Zeitgeist abhängt.[333] Für die Unterrichtsanalyse sind diese demnach auch zu berücksichtigen. Zur Wahrnehmung solcher Angebote in Unterrichtsmaterial bietet der Vernetzungspentagraph durch Kante (GR) eine Möglichkeit.

Den Nutzen des Vernetzungspentagraphen gilt es nun, in Sinne einer prototypischen Anwendung, an konkretem Unterrichtsmaterial in Schulbüchern zu demonstrieren. Die allgemeinen Hinweise zur Bedeutung der Kanten werden dabei u.a. konkretisiert.

[333] Als Beispiel diente das „Haus der Vierecke“", welches als Pfeildiagramm, Venn-Diagramm und (informatisches) Flussdiagramm dargestellt wurde, vgl. Kapitel 4.3.2.

6 Exemplarische Anwendung des Vernetzungspentagraphen

6.1 Fundamentale Ideen als Instrumente zur Analyse von Schulbüchern

Der Vernetzungspentagraph eignet sich u.a. als Werkzeug zur Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten, die im Mathematikunterricht verwendetes Material impliziert. Gleichzeitig stellt er eine unterrichtspragmatische Reduktion der vorgestellten Theorie Fundamentaler Ideen dar. Die Nutzung Fundamentaler Ideen als fachdidaktische Analysekategorie geht auf VOHNS zurück (Vohns 2007). Er sieht Fundamentale Ideen als Bindeglied zwischen einer „didaktisch orientierten Sachanalyse" nach GRIESEL (Griesel 1972) und den qualitativen empirischen Inhaltsanalysen (s.u.). Die didaktisch orientierte Sachanalyse stellt eine Analyse des mathematischen Kerns von Unterrichtsinhalten dar und formuliert diesen in einer „Hintergrundtheorie" (Vohns 2007, S. 73). Die Analyse ist zwar didaktisch motiviert, indem eine didaktische Entscheidung sie überhaupt erst notwendig macht, liefert aber darüber hinaus keine Argumente zur Entscheidung für oder wider eine Hintergrundtheorie. Sie reduziert den Unterrichtsprozess auf die Vermittlung vermeintlich objektiver mathematischer Lehrgänge.[334] Auf der anderen Seite betonen qualitative empirische Inhaltsanalysen die Konstruktion von Wissen als individuellen und sozialen Prozess. Dabei gehen sie, die Realität beobachtend,[335] von empirisch vermitteltem Wissen aus, anhand dessen „Ausdrucksgestalten [...] auf die [...] [ihm] inneliegenden Wissenselemente und deren situative und kontextuelle Konstitution" geschlossen wird (Vohns 2007, S. 77). Bei diesem Verfahren wendet VOHNS ein,

> [d]ie mathematischen Konstruktionsleistungen der Schülerinnen und Schüler mögen als eigene, von der Fachwissenschaft Mathematik zunächst unabhängige Kultur betrachtet werden, ihre Bewertung aus didaktischer Sicht ist aber ohne einen objektivierbaren fachlichen Kern unmöglich.

(Vohns 2007, S. 78)

Hier sieht VOHNS das Potential Fundamentaler Ideen. Da Unterrichtinhalte stets auch Träger pädagogischer Zwecke sind, stellt die Analyse von Inhalten auf die ihnen zu Grunde liegenden Fundamentalen Ideen eine Möglichkeit zu deren Legitimation dar, da Fundamentale Ideen gerade den Kern von Mathematik abbilden und dessen Rekonstruktion im Mathematikunterricht ermöglichen.

---

[334] Berücksichtigt man die Entstehung dieser Art von Analyse während der Strukturmathematik, überrascht ihre Ausrichtung auf mathematische Hintergrundtheorien, die zu „Blaupausen für die Gestaltung mathematischer Lehrgänge" wurden, nicht (Vohns 2007, S. 74).

[335] VOHNS bemerkt an dieser Stelle, dass jede Beobachtung der Wirklichkeit durch bestimmte Theorien und Methoden beeinflusst ist. Eine „vorurteilsfreie" Analyse kann es daher nicht geben (Vohns 2007, S. 70). Auch der Vernetzungspentagraph ist eine didaktische Brille, die den Blick ihres Nutzers durch die hier vorgestellte Theorie Fundamentaler Ideen lenkt.

Daran knüpft auch der Vernetzungspentagraph an, dessen theoretische Grundlage die in Kapitel 4 vorgestellte Kollektion Fundamentaler Ideen ist und dessen Design durch die unterrichtspragmatische Reduktion schon auf Inhaltsanalysen ausgerichtet wurde.

Da Unterrichtsrealität (besonders im Mathematikunterricht) inhaltlich und methodisch durch Schulbücher beeinflusst ist (Rezat 2009, S. 51 ff.), wird der Vernetzungspentagraph als didaktische Brille zur Analyse von Vernetzungsmöglichkeiten, die in Schulbuchkapiteln impliziert werden, genutzt. Diese bilden im Sinne einer qualitativen Analyse die empirische Grundlage, da die Komplexität realen Mathematikunterrichts an der Validität der beobachtbaren Ergebnisse enorme Zweifel begründen würde.[336]

Die Analyse von Schulbüchern und die anschließende Formulierung didaktischer Implikationen haben zudem in der mathematikdidaktischen Forschung Tradition. Schon 1974 stellte Rudolf Sträßer in seiner Dissertation eine Analyse des Verhältnisses von fachmathematischen und allgemein didaktischen Aspekten in der Mathematikdidaktik vor. Dazu untersuchte er, ganz dem Zeitgeist der Strukturmathematik entsprechend, Verwendungssituationen mathematischer Strukturen in Schulbüchern verschiedener Schulformen (Sträßer 1974). Aktueller widmete sich Sebastian Rezat empirischen Untersuchungen der Schulbuchnutzung durch Schüler und Lehrer (Rezat 2009). Auf den Aspekt der Begriffsbildung und der dazu nötigen Entwicklung von Grundvorstellungen konzentriert, findet sich eine Analyse von Schulbuchkapiteln in (Rembowski 2016, S. 215 ff.). Dazu entwickelt Rembowski ein Analysewerkzeug, das in der vorliegenden Arbeit den Vernetzungspentagraphen im Knoten „Repräsentationen“ strukturiert.

6.2 Methodische Vorbemerkung

Der Vernetzungspentagraph analysiert Schulbücher zweifach. Zum einen „füllen“ sich seine Knoten mit den im Schulbuch vorhandenen Inhalten, Repräsentationen und deren Genese, den angeregten Aktivitäten und den angestrebten Aspekten, die sich auf die Person des Schülers beziehen. Zum anderen werden über die Kanten des Vernetzungspentagraphen vorhandene und fehlende Vernetzungen zwischen seinen Knoten sichtbar. Werden beispielsweise bei einem inhaltlichen Schwerpunkt besonders Aspekte von Begriffsbildung, verschiedene Repräsentationsmodi etc. berücksichtigt, besteht eine starke Verknüpfung von Inhalten und deren Repräsentationen. Dies wird im Vernetzungspentagraphen durch eine „fette“ Kante visualisiert.[337] Zu beachten ist dabei, dass der Vernetzungspentagraph

[336] Vgl. (Sträßer 1974) und allgemein zur Problematik qualitativer empirischer Forschung (Jahnke 2013).

[337] Die „Füllung“ der Ecken wird durch die jeweiligen inhaltlich gefüllten Kästen an den Ecken visualisiert (Abbildung 56). In Vernetzungspentagraphen, die aus Gründen der Übersichtlichkeit

auch ein individuelles Werkzeug sein kann. Als didaktische Brille kann er den Blick seines Nutzers auf zentrale Aspekte des Mathematikunterrichts und deren Vorhandensein oder Fehlen in Schulbüchern lenken. Damit bleibt die (unvermeidliche und nicht nachteilige) Subjektivität des Blickes aber erhalten und kann zu teilweise unterschiedlichen Ergebnissen führen. Ob nun eine Kante als „fett“ markiert wird, hängt neben der reichhaltigen Füllung der Knoten auch vom Vorwissen und von eigenen Sichtweisen des didaktisch gebildeten Nutzers ab. Als potentiellen Verwendern steht der Vernetzungspentagraph daher vor allem Lehrern und Lehramtsstudenten für Unterrichtsplanung zur Verfügung.

Um das Anwendungspotential des Vernetzungspentagraphen zu demonstrieren, wird auf den Ansatz „Cognitve Apprenticeship“ von COLLINS, BROWN und NEWMAN zurückgegriffen (Collins/Brown/Newman 1989). Dabei handelt es sich um eine Art der Wissensweitergabe, die Elemente einer beruflichen Ausbildung auf die kognitiven Lernprozesse des schulischen Unterrichts überträgt. Aus der beruflichen Bildung übernehmen die Autoren die Herangehensweise eines Meisters („expert“) an ein Problem, die vom Lehrling („noviz“) zunächst ganz genau, auch unter Anweisungen des Meisters, beobachtet wird. Danach leitet der Meister seinen Lehrling zunächst noch stärker, dann immer weniger beim selbstständigen Arbeiten an. Somit wird der Lehrling befähigt, sein erworbenes Wissen immer selbstständiger in realen Problemkontexten einzusetzen. Durch die Kombination von Beobachtung, Anleitung und selbstständiger Arbeit soll Lernen ganzheitlicher sowohl als instruktiver als auch als konstruktiver Prozess verstanden werden.

Zudem wollen die Autoren mit dieser Methode dem Erwerb statischen, nicht anwendbaren Faktenwissens vorbeugen.

> Too little attention is paid to the processes that experts engage in to use or acquire knowledge in carrying out complex or realistic tasks [...]
>
> As a result, conceptual and problem-solving knowledge acquired in school remains largely unintegrated or inert for many students.

(Collins/Brown/Newman 1989, S. 454-455)

Um das erworbene Wissen anwendbar zu machen, schlagen die Autoren ein Konzept mit mehreren Dimensionen vor, welches in folgender Abbildung 58 zusammengefasst ist.

---

diese Kästen nicht enthalten, werden gefüllte Knoten durch ein „fettes“ Schriftbild gekennzeichnet.

Characteristics of Ideal Learning Environments	
Contents	Domain knowledge; Heuristic strategies; Control strategies; Learning strategies
Methods	Modelling; Coaching; Scaffolding and fading; Articulation; Reflection; Exploration
Sequence	Increasing complexity; Increasing diversity; Global before local skills
Sociology	Situated learning; Culture of expert practice; Intrinsic motivation; Exploiting cooperation; Exploiting competition

Abbildung 58 Rahmenbedingungen einer Lernumgebung nach COLLINS/BROWN/NEWMAN (Collins/Brown/Newman 1989, S. 476)

Für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verfolgte Zielsetzung der Demonstration des Vernetzungspentagraphen sind besonders die Dimensionen „Methods“ mit den Unterkategorien „Modelling“ und „Scaffolding“ und in ihrem Zusammenhang „Heuristic Strategies“ und „Control Strategies“ aus dem Bereich „Contents“ von Bedeutung.[338]

Der methodische Ablauf einer Lerneinheit verläuft nach obigem Modell wie folgt. Der neue Lerninhalt[339] wird von einem Experten in der Art vorgeführt, dass dieser sich mit dem neuen Problem beschäftigt und dabei seine Gedanken verbalisiert. Somit haben die Schüler Zugang zu den wichtigen kognitiven Strategien, welche die Lösungsfindung des Experten leiten.[340]

---

[338] Die anderen Bereiche der Dimension „Contents“ beziehen sich auf Faktenwissen in einem speziellen Bereich („Domain knowledge“) und allgemeine Strategien des „Lernens zu lernen“ („Learning strategies“). Die Dimension „Sequence“ bezieht sich auf den Grad der Komplexität, in der neue Inhalte angewendet werden. Dieser Grad sollte mit zunehmender Übung steigen. Zuletzt berücksichtigt die Dimension „Sociology“ situationale, soziale und motivationale Momente der Lernumgebung. Diese können allerdings im Rahmen einer Dissertation, die naturgemäß keinen persönlichen Kontakt zwischen Autorin und Leser zulässt, kaum berücksichtigt werden.

[339] Zu beachten ist, dass die Autoren unter Lerninhalten stets komplexe kognitive Konzepte und Problemlösefähigkeiten verstehen. „Cognitve apprenticeship [...] refers to the focus of the learning-through-guided-experience on cognitive and metacognitve, rather than physical, skills and processes“ (Collins/Brown/Newman 1989, S. 457). Ohne die Wichtigkeit von Faktenwissen zu leugnen, soll solches Wissen stets im Verbund mit Problemlösefähigkeiten an realen Problemkontexten gewonnen werden. Dabei verstehen die Autoren unter realen Problemkontexten nicht nur außerschulische Kontexte, sondern Probleme, anhand derer die Herangehensweise eines Experten verdeutlicht werden kann. Exemplarisch wird für den Bereich Mathematik eine Szene angeführt, in welcher der Lehrer (als Experte) ein Problem löst und dabei seine Gedanken laut ausspricht und somit den Schülern (als Novizen) zugänglich macht, vgl. (Collins/Brown/Newman 1989, S. 471 f.). Die Autoren schlagen dazu vor, die Szene mit unterschiedlichen Stimmen für Inhalte und Meta-Ebene vorzulesen. In der vorliegenden Arbeit wird zwischen Analyse und Meta-Ebene durch ein kursives Schriftbild der letztgenannten unterschieden.

[340] Diese kognitiven Strategien entsprechen in gewissem Sinne den erzeugten Produkten in der Berufsausbildung. Um diese internalisierten Produkte dem Schüler zugänglich zu machen, müssen sie durch Sprache externalisiert werden.

Dabei werden die „Heuristic Strategies“ und „Control Strategies“ kommuniziert. Diese beziehen sich zum einen auf die verwendeten „generally effective techniques and approches for accomplishing tasks that might be regarded as ‚tricks of the trade'“ (Collins/Brown/Newman 1989, S. 478). Zum anderen fallen darunter Strategien, die überprüfen, welche Lösungsstrategien am ehesten zielführend sind und inwiefern das Ziel durch die Anwendung einer Strategie näher gerückt ist. „Control Strategies“ beinhalten also auch reflexive Momente.

Nach diesem „Modelling“ werden die Novizen immer mehr zur selbstständigen Anwendung der neuen Fähigkeiten angeleitet, bis sie dieser Anleitung nicht länger bedürfen und für neue Lerninhalte bereit sind. Dies entspricht den nächsten Unterkategorien der Dimension „Methods“ in obigem Modell.

Für die Demonstration des Vernetzungspentagraphen wird dieser in der vorliegenden Arbeit exemplarisch an einem Schulbuchkapitel zum Thema „Quadratische Gleichungen“ angewendet. Durch dieses „Modelling“ soll ein Modell für die Anwendung des Vernetzungspentagraphen zur Verfügung gestellt werden. Dabei werden alle gewonnenen Erkenntnisse kommentiert, im Sinne des Offenlegens der verwendeten Strategien und Begründungen. Dies entspricht der von COLLINS/BROWN/NEWMAN geforderten Meta-Ebene des Anwendungsprozesses. Dem Leser kommt dabei zunächst die Rolle des Novizen und damit der Beobachtung zu.[341] Im Sinne des „Scaffoldings“ (adaptives Angebot von methodischer Hilfestellung) werden die einzelnen Schritte bei der Anwendung des Vernetzungspentagraphen in Kapitel 6.4 nach dem „Modelling“ noch einmal zusammengefasst. „Articulation“ (eigenständige Formulierung der Eindrücke beim Anwenden durch den Novizen), „Reflection“ (Vergleich der eigenen Anwendung mit der anderer durch den Novizen) und „Exploration“ (Anwendung des neuen Inhalts auf weitere Problemkontexte)[342] spielen in der Lehrerausbildung eine zentrale Rolle und sind daher vielleicht auch für die Nutzung des Vernetzungspentagraphen schon ohne Hilfestellung möglich. Darüberhinaus stehe ich Ihnen, lieber Leser, bei Rückfragen gerne zur Begleitung dieser Schritte zur Verfügung.

Kapitel 6.3 ist nun so aufgebaut, dass die Analyse von den Gedanken und Überlegungen der Autorin begleitet wird. Diese Meta-Ebene der Analyse ist durch ein kursives Schriftbild gekennzeichnet.

---

[341] Für den weiteren Schritt des „Coachings“ (Angebot von inhaltlichen und methodischen Hilfen) kann jederzeit gerne Kontakt mit der Autorin aufgenommen werden.

[342] Hierfür liegen mit (von der Bank 2013) und (von der Bank 2016) bzw. (Hoffmann 2016) schon Modelle für die Anwendung des Vernetzungspentagraphen auf einzelne Aufgaben und auf historische Schülerbücher vor.

6.3 Schulbuchanalyse mit dem Vernetzungspentagraphen

Exemplarisch soll die Wirkweise des Vernetzungspentagraphen am Thema „Quadratische Gleichungen" demonstriert werden. Dieses Thema eignet sich besonders gut, da sich die Knoten des Vernetzungspentagraphen reichhaltig füllen können. Beispielsweise ermöglicht das Thema zahlreiche Vernetzungen von Gebieten der Mathematik (Algebra, Analysis, Geometrie, Diskrete Mathematik), bietet Raum für unterschiedliche Tätigkeiten (innermathematische und außermathematische), Darstellungen (Lösungen der Gleichung vs. Nullstellen der zugehörigen Funktion; Neue Medien) und weitere im Knoten Repräsentationen gefasste Aspekte von Begriffsbildung (Anschauungsstufen und kognitive Zugänge). Zudem stellen quadratische Gleichungen ein Themengebiet dar, das zwar zum festen Inhaltskanon der Schulmathematik gehört, aber dennoch unterschiedliche Unterrichtsgänge ermöglicht. Solche ergeben sich beispielsweise aus der zusammenhängenden oder isolierten Behandlung quadratischer Gleichungen und quadratischer Funktionen oder daraus, wie stark quadratische Gleichungen im Sinne eines Spiralcurriculums an lineare Gleichungen und Gleichungssysteme und an Potenzgleichungen höheren Grades angeschlossen sind. Die Thematik der quadratischen Gleichung birgt also das Potential, mit dem Vernetzungspentagraphen das Vorhandensein oder die Auslassung vielfältiger zu Grunde liegender Fundamentaler Ideen und deren reichhaltigen Vernetzungen zu sehen.

Quadratische Gleichungen bieten also ein gutes Erprobungsfeld für die hier zu demonstrierende Wirkweise des Vernetzungspentagraphen. Zur Analyse von Fundamentalen Ideen und Vernetzungsmöglichkeiten in Schulbüchern, die zum Ausgangspunkt für die Entwicklung eines Unterrichtsgangs wird, gehe ich in mehreren Schritten vor. Zunächst schaue ich mit der Brille des Vernetzungspentagraphen in den Lehrplan und die Konzeption der Schulbuchreihe und des Schulbuchs (Kapitel 6.3.1 und 6.3.2). Somit können didaktische und methodische Vorgaben erkannt werden. In den nächsten Schritten analysiere ich den Schulbuchabschnitt zum Thema „Quadratische Gleichungen" (Kapitel 6.3.3). Dabei nutze ich den Vernetzungspentagraphen erst für einen orientierenden „Grobscan" und fokussiere danach jeweils einen Knoten zur Detailanalyse. Während mir der „Grobscan" zur inhaltlichen Orientierung dient und Auffälligkeiten für die anderen Knoten sichtbar macht, lenken die Detailanalysen meinen Blick auf spezielle Aspekte, die in den einzelnen Knoten aufgehoben sind. Der Vernetzungspentagraph dient also einmal zur Gewinnung eines Überblicks und einmal als differenziertes Werkzeug zur Detailanalyse. Die Detailanalyse der jeweiligen Knoten liefert mir dann eine Basis, um die einzelnen Vernetzungsmöglichkeiten zu identifizieren und zu beurteilen. Ausgehend davon werde ich Lücken in Knoten und Kanten erkennen können und Vorschläge zu deren Schließung entwickeln (Kapitel 6.3.4).

6.3.1 Quadratische Gleichungen im Mathematikunterricht

Bevor die konkrete Unterrichtsvorbereitung mit einem Schulbuch beginnt, ist ein Blick in die zugehörigen Lehrpläne unverzichtbar. Nur so kann ein Erwartungshorizont für die zu erreichenden Unterrichtsziele formuliert werden. Mein besonderes Augenmerk liegt dabei auf den Inhalten. Die anderen Knoten des Vernetzungspentagraphen dienen mir auch hier schon als Orientierung und schärfen meinen Blick für Aspekte, die sich über inhaltliche Vorgaben hinaus auf Aktivitäten, Repräsentationen, Genese und die Person des Schülers beziehen. Hinweise zu Aktivitäten, Repräsentationen und Genese finden sich im verwendeten Lehrplan in der „rechten Spalte“. Für Aspekte, die auf die Person zielen, gilt es, die Präambel zu beachten.

Im jahrgangsübergreifenden Teil des saarländischen kompetenzorientierten Lehrplans (MBK 2014), der sich zur Zeit in der Erprobungsphase befindet, finden sich explizite Verankerungen von historischen Aspekten von Mathematik. Zusätzlich wird Mathematik als Disziplin angesehen, die hilft, Persönlichkeitsmerkmale von Schülern auszuprägen. Dort heißt es, dass Mathematik eine „Spielwiese von Kreativität und Fantasie“, ein „Entwicklungsfeld von kognitiven Strategien und Persönlichkeitsmerkmalen“ ist und in ihrer „historischen, kulturellen und philosophischen Entwicklung“ zu berücksichtigen sei (MBK 2014,S. 7).

Da der Lehrplan sowohl die Genese von Mathematik als auch die Persönlichkeit des Schülers explizit in den Blick nimmt, achte ich bei der Schulbuchanalyse darauf, ob diese Zielsetzungen auch umgesetzt werden. Das Thema „Quadratische Gleichungen“ bietet hierfür Möglichkeiten (beispielsweise die historische Entwicklung von Lösungsverfahren).

Der saarländische Lehrplan für das achtjährige Gymnasium sieht das Thema „Quadratische Gleichungen“ für die Klassenstufe 9 vor (MBKW 2005). Im Hinblick auf die Vorbereitung für die gymnasiale Oberstufe, die mit einer Einführungsphase in Klasse 10 beginnt, heißt es:

> Im Unterricht der Klassenstufe 9 wird die Behandlung der Themenbereiche ebene Geometrie, Algebra und Stochastik auf dem Niveau der Sekundarstufe I abgeschlossen. Dieser Abschluss legt hinsichtlich der Inhalte, des Begriffsverständnisses und des Abstraktionsniveaus die Maßstäbe fest, an denen beim Eintritt in die Oberstufe der Gymnasien das Wissen und Können der Schülerinnen und Schüler zu messen ist.

(MBKW 2005, S. 2)

Speziell für die Behandlung von Gleichungen werden folgende Hinweise gegeben.

> Wie bereits in Klassenstufe 8 verliert der Kalkül beim Umformen von Termen und Lösen von Gleichungen an Bedeutung. Die zu erreichenden Standards haben der Verfügbarkeit von CAS Rechnung zu tragen.

(MBKW 2005, S. 2)

Diese Hinweise machen die Zielsetzung deutlich, dass Inhalte auf einem abstrakteren Niveau behandelt werden sollen oder dies zumindest das Ziel im Laufe einer Lerneinheit sein soll. Für die Bereiche Aktivitäten und Repräsentationen erwarte ich daher eher Tätigkeiten wie Formalisieren und Deduzieren sowie formal-algebraische Darstellungen. Bei der Schulbuchanalyse möchte ich speziell nach enaktiven, konstruktiv-geometrischen und verbal-begrifflichen Zugängen und Anschauungsformenn suchen, um eine Lernumgebung zu gestalten, die vom Konkreten zum Abstrakten geht. Der geforderte Einsatz eines CAS, unter den ich auch den Einsatz eines Funktionenplotters fasse, bietet Ansatzpunkte für einen Unterricht, der visuelle Zugänge und entdeckendes Lernen berücksichtigt.

Als konkreten inhaltlichen Gang schlägt der Lehrplan eine Behandlung quadratischer Gleichungen im Anschluss an quadratische Funktionen vor (MBKW 2005, S. 6 f.). Das Zusammenspiel von Nullstellen einer quadratischen Funktion und Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung soll dabei besonders betont werden. Zusätzlich liegt der Schwerpunkt auf einer qualitativen Untersuchung verschiedener Lösungsverfahren hinsichtlich ihrer Vor- und Nachteile.

Inhaltlich gehören Lösungsverfahren (numerisches Probieren, Auswertung einer Wertetabelle und des zugehörigen Funktionsgraphens, Faktorisieren, quadratische Ergänzung) für Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$, die Klassifikation quadratischer Gleichungen nach der Anzahl ihrer Lösungen, quadratische Ungleichungen und Anwendungen zum Themenbereich. Angeknüpft werden soll an das Thema Quadratwurzeln aus Klasse 8. Vorbereitend dienen quadratische Gleichungen für die Behandlung von Gleichungen und Funktionen höheren Grades, welche im folgenden Lernbereich „Potenzen, Potenzgesetze und Potenzfunktionen“ aufgegriffen werden. Fakultativ können der Begriff „Stetigkeit“ und der Zwischenwertsatz diskutiert werden.

Der Lehrplan beantwortet direkt eine zentrale Frage. Quadratische Gleichungen sind im engen Zusammenspiel mit quadratischen Funktionen zu unterrichten. Das ermöglicht deren Lösung nicht nur durch Umformen, sondern auch durch Ablesen am Funktionsgraphen. Dieser visuelle Zugang wird durch den Einsatz eines Funktionenplotters erleichtert, da somit Funktionsgraphen und auch zugehörige Wertetabellen schnell zu erstellen sind. Mir fällt der im Lehrplan empfohlene stringente Einsatz Neuer Medien besonders auf. Numerische Lösungen sollen als Näherungen mit „Verfeinern von Wertetabellen“ und der „Zoomfunktion des Funktionenplotters“ gefunden werden. Fakultativ wird das Programmieren eines Lösungsalgorithmus vorgeschlagen. Hier sind also auch Vernetzungen zum Fach Informatik möglich. Ich werde daher darauf achten, ob das ausgewählte Schulbuch auch zum Einsatz Neuer Medien anregt und diese sinnvoll in den Lernprozess einbettet.

6.3.2 Die Schulbuchreihe „Mathematik Neue Wege“

Um erste didaktische und methodische Eindrücke zu erhalten, ist ein Blick in die Konzeption der Schulbuchreihe und des Schulbuchs angebracht. Für die Analyse habe ich die Schulbuchreihe „Mathematik Neue Wege“ ausgewählt. Meine Gründe hierfür erläutere ich an der Konzeption der Schulbuchreihe.

Die Reihe ist ein für Schulbuchverhältnisse recht junges Werk. Seit 2000 wird sie in mehreren Ausgaben auf die Lehrpläne verschiedener Bundesländer angepasst herausgegeben. Seit 2009 liegt eine Fassung vor, die auf den saarländischen Lehrplan zugeschnitten ist. Die Übereinstimmung zeigt sich auch beim Blick in den im Folgenden untersuchten Band für das 9. Schuljahr dieser Ausgabe. Darin werden die Themen des Lehrplans „Trigonometrie“ (im Schulbuch in die Kapitel „Ähnlichkeit“, „Trigonometrie“ und „Kreisberechnung“ gegliedert) „Quadratische Funktionen und Gleichungen“, „Mehrstufige Zufallsexperimente und bedingte Wahrscheinlichkeit“ und „Potenzen und Potenzfunktionen“ in der Reihenfolge des Lehrplans dargeboten (Lergenmüller/Schmidt 2011).

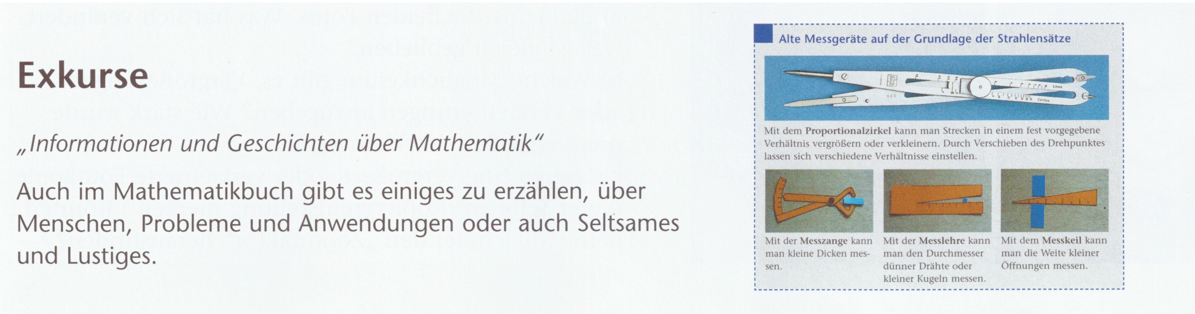
In der folgenden Analyse können daher der Lehrplanbezug und die Umsetzung der Lehrplanforderungen überprüft werden. Die Konzeption der Schulbuchreihe verspricht zudem, dass sich die Knoten des Vernetzungspentagraphen reichhaltig füllen können.

Im Sinne einer konstruktivistisch gefärbten Didaktik setzt das Schulbuch auf „Methodenvielfalt mit offenen und schüleraktivierende Lernformen“ und eine stärkere Berücksichtigung von Aufgaben für „offene und kooperative Unterrichtsformen“, mit „fächerverbindenden und übergreifenden Aspekten“, für „die Möglichkeiten und den Vergleich unterschiedlicher Lösungswege“, für „den konstruktiven Umgang mit Fehlern“ und für „das Bewusstmachen und den Erwerb von Strategien für das eigene Lernen“ (Westermann 2016).

Besonders Aspekte, die in den Knoten Inhalte, Aktivitäten und Repräsentationen enthalten sind, scheinen auf den ersten Blick bei der Konzeption Berücksichtigung gefunden zu haben. Mit kooperativen Unterrichtsformen, Förderung unterschiedlicher Lösungswege und dem konstruktiven Umgang mit Fehlern ist zumindest implizit auch an Persönlichkeitsideen gedacht. Es kommt jetzt auf die konkrete Umsetzung dieser Konzeption an.

In einem nächsten Schritt schaue ich mit dem Vernetzungspentagraph als didaktischer Brille in das Vorwort des zu untersuchenden Schulbuchs. Dabei dienen mir die Knoten wie schon bei der Lehrplananalyse als Orientierung. Im Vorwort bin ich eher auf der Suche nach Auffälligkeiten und Ankerpunkten in den Knoten Aktivitäten, Repräsentationen, Genese und Person. Eine systematische inhaltliche Analyse betreibe ich erst auf Basis der Inhalte des Abschnitts zu quadratischen Gleichungen.

Im Vorwort des untersuchten Schulbuchs „Mathematik Neue Wege Arbeitsbuch für Gymnasien 9“ (Lergenmüller/Schmidt 2011) finden sich explizite Hinweise auf Aspekte, die sich auf die Person des Schüler beziehen. Es ist von „interessanten Zusammenhängen“, die entdeckt werden können, die Rede (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 6). Zudem räumt das Schulbuch die Möglichkeit ein, Aufgaben nach Interesse auszuwählen. Auch die Idee Beharrlichkeit klingt an einigen Stellen deutlich an. Das Schulbuch will dafür sorgen, dass „Das Ziel vor Augen“ bleibt, und rät bei umfangreicheren Aufgaben zur Teamarbeit, damit deren Bewältigung leichter fällt. In Exkursen soll auch die Geschichte der Mathematik explizit thematisiert werden.


Exkurse

„Informationen und Geschichten über Mathematik“

Auch im Mathematikbuch gibt es einiges zu erzählen, über Menschen, Probleme und Anwendungen oder auch Seltsames und Lustiges.

Alte Messgeräte auf der Grundlage der Strahlensätze

Mit dem **Proportionalzirkel** kann man Strecken in einem fest vorgegebene Verhältnis vergrößern oder verkleinern. Durch Verschieben des Drehpunktes lassen sich verschiedene Verhältnisse einstellen.

Mit der **Messzange** kann man kleine Dicken messen.

Mit der **Messlehre** kann man den Durchmesser dünner Drähte oder kleiner Kugeln messen.

Mit dem **Messkeil** kann man die Weite kleiner Öffnungen messen.

Abbildung 59 Exkurse in „Mathematik Neue Wege 9“, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 7)

Mathematik hat demnach auch etwas mit Menschen sowie Lustigem und Seltsamem[343] zu tun. Offenbar möchte das Schulbuch auch eine positive Einstellung zur Mathematik transportieren.

Vielfältige Aktivitäten verspricht das Schulbuch und formuliert dazu den griffigen Satz: „Mathematik lernt man weniger durch Zuschauen als durch eigenes Tun“ (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 6).

Prinzipiell werden alle Knoten des Vernetzungspentagraphen im Vorwort angesprochen, wenn man, wie oben vorgenommen, den Knoten Inhalte hier noch ausklammert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den Aktivitäten und der Person des Schülers. Abgeschwächt werden verschiedene Repräsentationen ebenfalls angesprochen. Historisches zur Mathematik wird zwar explizit erwähnt, findet sich allerdings in abgetrennten Exkursen. Bei der Analyse achte ich daher darauf, ob historische Entwicklungen ernsthaft in den Unterrichtsgang integriert sind oder nur fakultativ zum Schluss oder als Beiwerk angeboten werden.

6.3.3 Quadratische Gleichungen im Schulbuch „Mathematik Neue Wege 9“

Bevor ich den entsprechenden Abschnitt im Detail analysiere, mache ich einen „Grobscan“ seiner unmittelbar vorausgehenden und nachstehenden Seiten. Dies

---

[343] Schon LIETZMANN machte eine ähnliche Formulierung zum Titel seines Buchs „Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen“ (Lietzmann 1922).

ist für den Abschnitt der quadratischen Gleichungen besonders wichtig, da er zusammen mit einem Abschnitt über quadratischn Funktionen und einem Abschnitt mit Anwendungsaufgaben zu quadratischen Funktionen und Gleichungen zu einer Lerneinheit zusammengefasst ist.

Bei der Analyse der einzelnen Abschnitte fokussiere ich zunächst den Knoten Inhalte, da die dargebotenen Inhalte Grundlage für weitere Aspekte sind. Bei diesem ersten inhaltlichen „Grobscan" habe ich die anderen Knoten dennoch im Hinterkopf und kann somit Auffälligkeiten in den Bereichen Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und Person ebenfalls schon wahrnehmen. Nach der detaillierten inhaltlichen Erschließung des Abschnitts über quadratische Gleichungen dienen diese Auffälligkeiten mir als Ankerpunkte für die Analyse mit den anderen Knoten, die sodann für jeden Knoten einzeln erfolgen wird. Durch dieses Vorgehen können die eigentlich simultan auftretenden Aspekte, die den jeweiligen Knoten zugeordnet sind, in eine gewisse Chronologie gebracht werden. Das ist für die sequenzielle Verschriftlichung des Analyseprozesses und dessen Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit unabdingbar - alternativ wäre auch eine analog zum Vernetzungspentagraphen vernetzte Hypertextdarstellung denkbar, die hier aber nicht weiter verfolgt wird. Zudem hält der Vernetzungspentagraph als didaktische Brille durch das geordnete Vorgehen den Blick auf den jeweiligen Fokus geschärft und schützt somit vor Detailüberflutung.

Dem Abschnitt „4.3 Quadratische Gleichungen" sind zwei Abschnitte über quadratische Funktionen vorangestellt („4.1 Einführung in quadratische Funktionen" und „4.2 Entdeckungen an Graphen quadratischer Funktionen") (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 92-111).[344] Schon auf den Einführungsseiten dieser Abschnitte fällt die Reichhaltigkeit der dargebotenen Darstellungen quadratischer Funktionen auf. Sowohl Funktionsgleichungen (S. 92, S. 1) als auch Wertetabellen (S. 92, Nr. 2), Funktionsgraphen (S. 93, S. 3) und verbal-begriffliche Darstellungen in Texten, die außermathematische Situationen schildern (S. 93, Nr. 3; 4), kommen vor. Zudem werden Übersetzungsvorgänge zwischen den Darstellungen angeregt. Besonders bei der Untersuchung von Parametereinflüssen auf die Gestalt des Funktionsgraphens (S. 102-108) geht das Buch einen methodischen Gang vom systematischen Beobachten zum Aufstellen einer Vermutung und deren anschließender Überprüfung (mit Hilfe eines GTRs). Dies wird für die verschiedenen Parameter der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ jeweils in einem „Graphenlaboratorium" angeregt (S. 104, S. 5; S. 105, Nr. 10; S. 106, Nr. 11).

[344] Im Folgenden beziehen sich alle Seiten- und Nummernangaben auf (Lergenmüller/Schmidt 2011).

Anknüpfungspunkte für quadratische Gleichungen liefert die Suche nach Nullstellen quadratischer Funktionen, welche durch Faktorisierung und Anwendung der Binomischen Formeln berechnet werden. Dabei taucht der Begriff „quadratische Gleichungen" auch ganz explizit schon auf. Um zwischen den verschiedenen Darstellungen einer quadratischen Funktionsgleichung („Scheitelpunktform", „allgemeine Form" und „faktorisierte Form") rechnerisch zu wechseln, führt das Buch an zwei Zahlenbeispielen das Verfahren der quadratischen Ergänzung ein (S. 110, S. 26; 27).

Die Anwendbarkeit und Reichweite der in Abschnitt 4.2 bereitgestellten Verfahren werden dann in Abschnitt 4.3, dem eigentlichen Abschnitt über quadratische Gleichungen, systematisch untersucht. Es ist eine Dreiteilung dieses Abschnitts nach drei Gleichungstypen zu erkennen. Zuerst werden Gleichungen der Form $x^2 - q = 0$ mithilfe der bekannten Lösungsverfahren bearbeitet (S. 112-113). In einem zweiten Schritt sind Gleichungen der Form $x^2 - rx = 0$ mittels Faktorisierung und der „Produkt = 0 - Regel"[345] zu lösen (S. 114). Im dritten Abschnitt werden Lösungsverfahren für die allgemeine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + px + q = 0$ über Näherungslösungen, die mit einem GTR gefunden werden können, motiviert und dann rechnerisch zum Verfahren der quadratischen Ergänzung formalisiert (S. 116-118). Die pq-Formel wird anschließend mittels quadratischer Ergänzung formal-algebraisch hergeleitet, wobei die einzelnen Umformungsschritte durch verbal-begriffliche Beschreibungen begleitet werden (S. 119). Konstruktiv-geometrische Beschreibungen, also die Vorstellung, welche Auswirkungen bestimmte Umformungen auf die Gestalt der zugehörigen Parabel haben, fehlen an dieser Stelle des Schulbuchs.

Nachdem sowohl quadratische Funktionen als auch quadratische Gleichungen eher innermathematisch erschlossen wurden, folgt im nächsten Abschnitt 4.4 deren Anwendung in außermathematischen Situationen (S. 123-127).[346] Durch die vorangestellte Behandlung von Funktionen und Gleichungen stehen jetzt, wie im Lehrplan gefordert, sowohl graphische als auch rechnerische Lösungsverfahren zur Verfügung. Angewendet werden diese beispielsweise bei der Modellierung von parabelförmigen Flugkurven beim Ballwurf (S. 125, Beispiel A), des freien Falls von Gegenständen (S. 126, Nr. 9; S. 127, Nr. 12) und der Produktionskosten einer Firma (S. 127, Nr. 13). Eine geometrische Optimierungsaufgabe, die als zu maximierendes Grundstück eingekleidet ist, schließt den Abschnitt ab (S. 127, Nr. 14).

[345] Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist, vgl (S. 114).

[346] Kapitel 4.4 gibt auch innermathematische Anwendungen. Beispielsweise die Bestimmung der Seitenlänge von Rechtecken (S. 125, Nr. 5), Zahlenrätsel (S. 125, Nr. 6) oder die systematische Bestimmung der Mächtigkeit der Lösungsmenge quadratischer Gleichungen (S. 126, Nr. 10).

Beim „Grobscan" sehe ich, dass die im Lehrplan geforderte Verbindung von quadratischen Funktionen und Gleichungen konsequent eingehalten wird. Selbst nach der formal-algebraischen Herleitung der pq-Formel wird diese wieder am Funktionsgraphen interpretiert (S. 121, Nr. 32).

Sofort in den Blick springen mir zwei „Exkurse", die sich mit ausgewählten historischen Lösungsverfahren beschäftigen (S. 118; S. 122). Durch deren zeitlichen Unterschied, ein Verfahren ist auf das 9., das andere auf das 16. Jahrhundert datiert, kann eine historische Entwicklung angedeutet werden. Hier schaue ich im Knoten Genese genauer hin.

Auch Anregungen zum Einsatz Neuer Medien sind zahlreich. Der GTR wird zur systematischen Beobachtung, als Rechenknecht und Problemgenerator[347] *eingesetzt. Damit werden die Knoten Inhalte, Repräsentationen und Aktivitäten angesprochen.*

Beim „Grobscan" sind mir noch keine Anknüpfungspunkte für den Knoten Person aufgefallen. Ob Aspekte wie Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und Beharrlichkeit mit dem Einsatz Neuer Medien angestrebt werden, kann ich noch nicht sagen. Dazu ist eine Detailanalyse nötig. Ebenfalls fällt mir auf, dass kaum Schnittstellenideen als Aktivitäten von den Aufgabenstellungen der Abschnitte 4.1, 4.2 und 4.3 angeregt werden. Diese sind dann in Abschnitt 4.4 konzentriert. Nach der Detailanalyse steht die Entscheidung an, ob diese Trennung für meinen geplanten Unterrichtsgang sinnvoll ist.

In den folgenden Detailanalysen der einzelnen Knoten schaffe ich visuelle Ankerpunkte für Sie, lieber Leser. Anhand farbiger Markierungen kennzeichne ich einzelne Aspekte, die ich bei der Zusammenfassung dann den im jeweiligen Knoten Inhalte, *Repräsentationen*, *Aktivitäten*, *Genese* *und* Person *aufgehobenen Fundamentalen Ideen zuordne. Das Ganze demonstriert, welch anspruchsvolle Aufgabe wissenschaftlich-didaktisch fundierter Mathematikunterricht ist.*

Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Inhalte

Zuerst werden die aus Abschnitt 4.2 bereits bekannten Verfahren zur Lösung von quadratischen Gleichungen systematisiert. Gleichungen der Form $x^2 - q = 0$ sind mittels Wurzelziehen und Gleichungen der Form $x^2 - rx = 0$ durch Faktorisierung zu lösen. Zum Faktorisieren zählen auch die „Produkt = 0 - Regel" und das Rückwärtsanwenden der Binomischen Formeln. Als dritte Möglichkeit steht dem Schüler die graphische Lösung zur Verfügung. Der enge Zusammenhang von quadratischer Gleichung und Graph der zugehörigen Funktionsgleichung wird schon auf den Einführungsseiten des Abschnitts 4.3 explizit gemacht (S.

[347] Eine von einem CAS berechnete allgemeine Lösung soll mit der bekannten pq-Formel durch Termumformung verglichen werden (S. 121, S. 31).

113, Nr. 3). Ebenfalls von Beginn an spielt die Gestalt der Lösungsmenge eine Rolle. Ausgehend von der konkreten Gleichung $x^2 + 100 = 0$ soll der Schüler zunächst begründen, dass die Gleichung keine Lösung besitzt. Daran schließen sich Überlegungen zur Lösbarkeit der allgemeinen Gleichung $x^2 - q = 0$ an (S. 114, Nr. 8). Eine genaue Analyse von Mächtigkeit und Gestalt der Lösungsmenge erfolgt allerdings erst gegen Ende des Abschnitts mithilfe der pq-Formel und der Diskriminante (S. 120, Nr. 27). Dabei wird allerdings keine konstruktiv-geometrische Begründung und auch keine Erklärung des Bezeichners „Diskriminante" gegeben. Hier wären allerdings gerade die Vorstellung von Parabel und einem Graphen einer konstanten Funktion hilfreich, um die Situationen keine Nullstelle, genau eine Nullstelle und zwei Nullstellen zu unterscheiden. Zudem verpasst das Schulbuch die Chance, konstruktiv-geometrische und formal-algebraische Beschreibung von Parabel und in einem Punkt anliegender Tangente zu entwickeln.

Gefolgt wird die Erarbeitung der genannten Lösungsverfahren von einer Übungsaufgabensequenz. Geübt werden die reflektierte Auswahl des für die Gleichung passenden Lösungsverfahren und dessen Durchführung (S. 114, Nr. 5, 6, 7; S. 115, Nr. 13, 14). Der enge Zusammenhang von Gleichung und Funktion wird anhand der Zuordnung von Gleichung und passender graphischer Darstellung erneut aufgegriffen (S. 115, Nr. 12). Lösungen von quadratischen Gleichungen, deren rechte Seiten ungleich Null sind, werden dabei als Schnitt einer Parabel mit dem Graphen einer konstanten Funktion dargestellt. Angereichert sind diese innermathematischen Aufgabenstellungen mit zwei eingekleideten Aufgaben, die zum einen die Flussgeschwindigkeit von Wasser in einem Rohr und zum anderen die Flugbahn einer Feuerwerksrakete mit einer quadratischen Funktion bzw. Gleichung beschreiben (S. 115, Nr. 11, 10).[348]

Die Überleitung zum allgemeinen quadratischen Gleichungstyp $ax^2 + bx + c = 0$ wird über die Suche nach einem Lösungsverfahren für die Gleichung $x^2 - 2x - 9 = 0$ motiviert. Zunächst sind anhand von Wertetabellen und Funktionsplotts Näherungslösungen mit Hilfe des GTRs zu bestimmen (S. 116, Nr. 15, 16). Diese werden durch Verfeinern und Zoomen zwar beliebig genau, jedoch nicht exakt. Mit diesem Vorgehen bietet das Schulbuch eine Möglichkeit, über Vorteile und Grenzen der Neuen Medien zu diskutieren. Beispiel C auf Seite 116 stellt zwei

[348] *Ich bezeichne beide Aufgaben als Einkleidungen und nicht als Anwendungen, da zu ihrer Lösung kein Modell erarbeitet werden muss. Stattdessen sollen sie außermathematische Erfahrungen mit dem mathematischen Modell „quadratische Gleichung" verbinden. Bei der Aufgabe zur Flussgeschwindigkeit von Wasser in einem Rohr ist selbst dies fraglich, da sie keine Erfahrungen des Alltags anspricht. Dies zeigt sich schon an der sprachlichen Einleitung der Aufgabe: „Physiker haben herausgefunden [...]" (S. 115, Nr. 10).*

Näherungsverfahren zur graphischen und tabellarischen Lösung quadratischer Gleichungen vor, die allerdings nicht weiter vertieft werden.[349]

Stattdessen geht es an die „Entdeckung eines allgemeinen Verfahrens zum Lösen quadratischer Gleichungen“ (S. 117, Nr. 17, 18). Dazu leiten Arbeitsaufträge die Schüler an, indem sie deren Vorwissen zur Lösung quadratischer Gleichungen mittels Umformungen zu Binomen reaktivieren. Ziel ist die quadratische Ergänzung, die sodann geometrisch (Ergänzung einer Fläche zu einem Quadrat), begrifflich (verbale Beschreibung des Verfahrens) und anhand von Zahlenbeispielen dargeboten wird. Erst nach einer Übungsaufgabensequenz, in der quadratische Gleichungen verschiedener Gestalt durch quadratische Ergänzung gelöst werden (S. 118, Nr. 19, 20, 21[350]), wird das Verfahren formalisiert.

Da das Verfahren der quadratischen Ergänzung als „nicht immer das bequemste“ beschrieben wird, gilt es, eine effektivere Formel zur Lösungsberechnung zu finden. Die pq-Formel liefert eine solche. Ist ihre Gültigkeit einmal bewiesen, müssen lediglich die Parameter der quadratischen Gleichung richtig eingesetzt werden. Die Herleitung der pq-Formel, und damit der Beweis ihrer Richtigkeit, wird dann auch formal-algebraisch vorgestellt und begleitet von verbal-begrifflichen Erklärungen (S. 119). Die sich anschließenden Aufgaben vertiefen die Kenntnisse der Schüler über die pq-Formel, indem sie die neue Formel in Beziehung zu den bereits bekannten Lösungsverfahren setzen (S. 120, Nr. 26). Die pq-Formel wird außerdem genutzt, um Aussagen über die Struktur der Lösungsmenge quadratischer Gleichungen nun auch formal-algebraisch mithilfe der Diskriminate zu treffen (S. 120, Nr. 27). Hier fehlen, wie oben schon erwähnt, konstruktiv-geometrische Beschreibungen und die Bestimmung von Tangenten an einem Punkt der Parabel. Im Zusammenhang mit der pq-Formel wird weiterhin deren Darstellung in einem CAS untersucht (S. 121, Nr. 31), und die Zusammenhänge zwischen algebraischer und graphischer Darstellung sollen an der Parabel beschrieben werden (S. 121, Nr. 32).

Den Abschluss von Abschnitt 4.3 bildet eine umfangreichere Aufgabe zum Satz von VIETA (S. 122). Diese dient der genaueren Analyse des Zusammenhangs zwischen den Parametern p und q und den Lösungen x_1 und x_2 der normierten quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Die Schüler können, angeleitet durch drei Forschungsaufträge, die Zusammenhänge $x_1 \cdot x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = -p$ entdecken (S. 122, Nr. 36). Dazu werden anhand von Zahlenbeispielen und deren Verallgemeinerung Behauptungen gewonnen, die dann mithilfe der pq-Formel bestätigt werden sollen (S. 122, Nr. 37). Nach der Zuordnung der gefundenen Zu-

[349] Auf einen Fehler in diesem Beispiel sei noch hingewiesen. Die beste in der Tabelle zu erkennende Näherungslösung für x_1 liegt bei $x_1 \approx 0{,}268$.

[350] Nummer 21 fordert die Anwendung des geometrischen Lösungsverfahrens nach AL-CHWARIZMI. Darauf wird im Knoten Genese näher eingegangen.

sammenhänge zum Satz von VIETA bietet das Buch einen historischen Exkurs zu dessen Leben und Wirken. Zuletzt wird ein Beweis für die Gültigkeit von $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ und $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ für die allgemeine quadratische Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ verlangt.

Inhaltlich beschäftigt sich Abschnitt 4.3 erwartungsgemäß mit Gleichungen und deren Lösungsverfahren. Dazu wird an das Vorwissen der Schüler aus Klassenstufe 8 und den vorangegangenen Abschnitten 4.1 und 4.2 zum Wurzelziehen und Faktorisieren durch Rückwärtsanwenden der Binomischen Formeln angeknüpft. Diese Aspekte fasse ich unter der Idee „Zahl" zusammen. Die im Lehrplan geforderte Vernetzung von Lösungen einer quadratischen Gleichung und den Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion wird konsequent eingehalten. Somit ist die Idee der Funktion ebenfalls berücksichtigt. Zusätzlich sind Lösungsverfahren auch geometrisch, mittels Flächeninhalten von Quadraten und Rechtecken, veranschaulicht (Idee „Raum und Form"). Neue Lösungsverfahren werden zunächst exploriert und dann erst exaktifiziert und abschließend formalisiert (Idee des Algorithmus). Für die Phase der Exploration wird der GTR genutzt. Mit seiner Hilfe sind Wertetabellen und Funktionsgraphen „bequem" zu erstellen. Zusätzlich führt der GTR-Einsatz auch zu neuen Problemen. Die Diskussion der von ihm gelieferten diskreten Näherungswerte (Idee der Approximation) motiviert die Suche nach einem exakten rechnerischen Verfahren. Der Einsatz Neuer Medien dient also nicht nur der Arbeitserleichterung, sondern wirft auch neue inhaltliche Fragen auf. In meinen Augen stellt dies eine ernsthafte und sinnvolle Integration Neuer Medien in den Unterrichtsgang dar.

Insgesamt sehe ich die Gebiete Algebra, Analysis (da es auch um Funktionsuntersuchungen geht), Geometrie und Diskrete Mathematik vernetzt. Lediglich stochastische Inhalte werden naheliegender Weise nicht berührt.

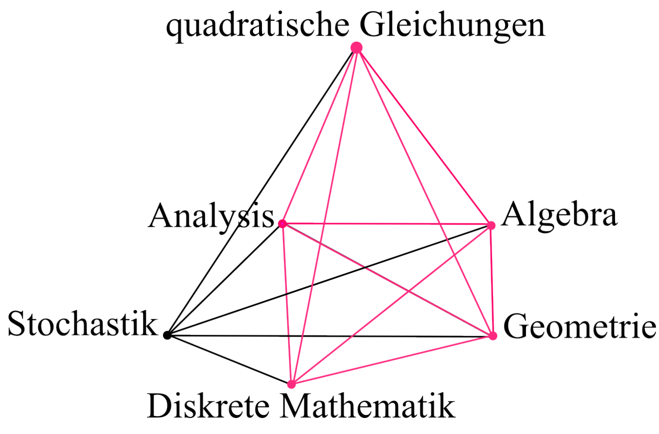


Abbildung 60 Vernetzungen zwischen den Gebieten der Schulmathematik im Abschnitt 4.3 „Quadratische Gleichungen" in (Lergenmüller/Schmidt 2011)

Die Detailanalyse hat meinen Blick auf viele Stellen gelenkt, an denen Beweise vorgeführt und angeleitet werden. Dabei sind formal-algebraische Herleitungen und Beweise stets von verbal-begrifflichen Argumenten und häufig von konstruk-

tiv-geometrischen Veranschaulichungen begleitet (z.B. S. 117). So wird der Schüler beim Vordringen auf die gewünschte formal-algebraisch symbolische Ebene begleitet.

Der letzte Teil des Abschnitts (ab S. 119) ist dann auch von Herleitungen, Begründungen und weiteren abstrakteren Überlegungen geprägt. Hier deutet sich die formal-logische Sprache der Mathematik an. Den Wechsel in der Erkenntnis- und Begründungskultur, so, wie ihn das Buch vollzieht, beurteile ich positiv. Da Klassenstufe 9 auch der Vorbereitung auf die Qualifikationsphase der gymnasiale Oberstufe dient, dürfen die Schüler Gelegenheit haben, auch diese Seite von Mathematik kennenzulernen. Dies erleichtert ihnen die Entscheidung für einen Grund- bzw. Leistungskurs.[351]

Da mir die reichhaltigen Repräsentationen bei der inhaltlichen Analyse schon aufgefallen sind, nehme ich diesen Knoten zur nächsten Detailanalyse. Grundsätzlich ist aber jede Reihenfolge der Knoten denkbar.

Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Repräsentationen

Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen werden mithilfe der drei Symbolsysteme nach LAMBERT dargeboten. Diese bleiben auch im gesamten Abschnitt nebeneinander erhalten. Formal-algebraische Rechnungen und Herleitungen werden von verbal-begrifflichen Argumentationen und teilweise auch von konstruktiv-geometrischen Veranschaulichungen begleitet.

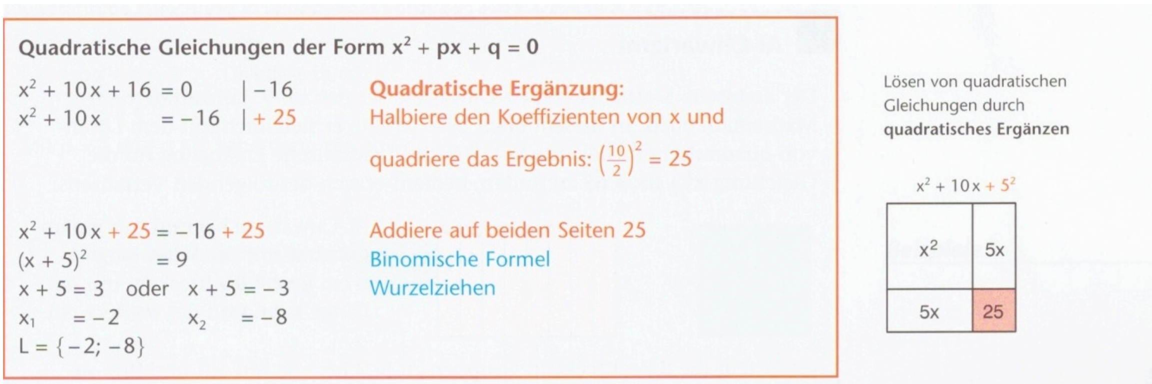


Abbildung 61 Darstellung der quadratischen Ergänzung, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 117)

Darüberhinaus dienen konstruktiv-geometrische Darstellungen nicht nur der Veranschaulichung, sondern auch dem Gewinn neuer Erkenntnisse. Das geometrische Lösungsverfahren nach AL-CHWARIZMI greift die Idee der quadratischen Ergänzung auf und liefert neben diesem im Schulbuch eher algebraisch genutzten Verfahren eine Lösungsmethode, die auf der Transformation eines Quadrats und eines Rechtecks zu einem neuen Quadrat beruht (S. 118).

[351] Im Saarland wird zwischen G- und E-Kurs gewählt.

An vielen Stellen bietet das Schulbuch dem Schüler Gelegenheit, verschiedene Darstellungen der Lösungen quadratischer Gleichungen aktiv miteinander zu verknüpfen. So sollen beispielsweise Gleichungen und Funktionsgraphen einander zugeordnet (S. 115, Nr. 12), Lösungen quadratischer Gleichungen und Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion verglichen (S. 113, Nr. 3) und der Zusammenhang von pq-Formel und Scheitelpunktform einer Normalparabel geklärt werden (S. 121, Nr. 32).

Bei der Detailanalyse fällt auf, dass bei der algebraischen Notation der quadratischen Gleichungen ebenfalls verschiedene Darstellungen Verwendung finden. Die Gleichungen sind in allgemeiner, normierter, faktorisierter und binomialer Form angegeben (S. 118, Nr. 20; S. 120; Nr. 22, 23, 24, 25, 26). Die Auswahl geeigneter Lösungsverfahren macht das Umformen der jeweiligen Gleichung und somit deren Übersetzung in andere algebraische Darstellungsformen nötig (S. 121, Nr. 34).

Wesentliche Formen der Repräsentation von Inhalten werden mit dem GTR gewonnen. Wertetabellen und Funktionsgraphen sind mit seiner Hilfe schnell erzeugt (S. 116). Abbildungen von Tabellen und Graphen sind im Schulbuch wie auch auf dem kleinen Display eines GTRs nur „verpixelt“ dargestellt. Solche Fehldarstellungen bieten Möglichkeiten, nicht nur die Vorteile eines Funktionenplotters zu sehen, sondern auch auf seine Grenzen einzugehen. Diese Grenzen verdeutlicht das Schulbuch anhand der „Ungenauigkeit“ der gefundenen graphischen und tabellarischen Näherungslösungen. Hier werden also Defizite einer Darstellungsform genutzt, um die Suche nach einem exakten Verfahren zu motivieren.

Das Finden einer Näherungslösung durch Verfeinerung der Schrittweite von Wertetabellen, bei dem sich natürlich auch Zoomen im Plot eines Funktionsgraphen anbietet, kann sowohl prädikativ (Vergleich stehender Bilder) als auch funktional (kontinuierliches Verfeinern bzw. Zoomen) angegangen werden. Zum konkreten Vorgehen im Umgang mit dem GTR macht das Schulbuch keine Angaben.

Ein vollständiges Durchlaufen der Trias enaktiv – ikonisch – symbolisch wird an keiner Stelle explizit vollzogen.[352] Bei der Erarbeitung der quadratischen Ergän-

---

[352] Ein solcher Gang wird im nachfolgenden Abschnitt 4.4 „Problemlösen mit quadratischen Funktionen und Gleichungen“ durchlaufen. Hier ist eine Kiste mit einem Volumen von $75\,cm^3$ aus einem quadratischen Stück Papier herzustellen. Dazu werden enaktives Ausprobieren und ein rechnerischer Weg angeboten. Da davon auszugehen ist, dass die Schüler nicht alle möglichen Kisten basteln, sondern nach ersten gewonnenen Erkenntnissen nur noch Skizzen ihrer Überlegungen anfertigen, ist auch die ikonische Ebene einbezogen. Zudem gelten die Rechenoperationen als ikonisch, bis die ihnen innewohnende Spielregel (Überführung auf eine quadratische Gleichung bzw. Funktionsformschrift und deren rechnerischer bzw. zeichnerischer Lösung) verstanden ist.

zung wird der Übergang von ikonischer zu symbolischer Ebene aktiv angestrebt. Der Schüler hat zunächst Gelegenheit, sich durch gezieltes Ausprobieren mit der Problematik vertraut zu machen (S. 117, Nr. 17). Die experimentell gewonnenen Verfahrensweisen werden dann in ikonische Darstellungen (Zeichnung und Rechnung) überführt (S. 117, Nr. 18). In der gegebenen Rechnung sind dabei alle Umformungsschritte schon symbolisch, ihr Zusammenwirken, welches das Verfahren der quadratischen Ergänzung ausmacht, ist allerdings noch ikonisch. Die an dieser Stelle des Schulbuchs gegebenen Hinweise enthalten schon die „Spielregel“ der quadratischen Ergänzung, welche dann zur expliziten Regelformulierung weitergetrieben wird (S. 117, roter Kasten). Bei diesem Vorgehen finden auch die verschiedenen Stufen der Anschauung Berücksichtigung. Auf der ikonischen Ebene ist die Ergänzung einer Fläche zu einem Quadrat visuell-geometrisch zugänglich gemacht. Diese Anschauungsform tritt bei den weiteren Überlegungen zugunsten zunächst konzeptuell-begrifflicher und, auf der symbolischen Ebene, zuletzt formal-begrifflicher Anschauungen zurück. Die formal-begrifflichen Argumente entsprechen, da algebraische Gleichungen behandelt werden, hier formal-algebraischen Argumenten.

Die Detailanalyse bestätigt meinen ersten Eindruck von der Reichhaltigkeit der Darstellungen. Diese finden sich nicht nur in Großformen (konstruktiv-geometrische, verbal-begriffliche, formal-algebraische Darbietung der Lösungsverfahren und Gang von konkreten Beispielen zu abstrakten Begriffen und Verfahren), sondern auch in den algebraischen Darstellungen quadratischer Gleichungen. Um zwischen diesen Darstellungen zu wechseln, müssen die Schüler Termumformungen leisten. Zudem schulen die algebraischen Darstellungen den Blick der Schüler für die Gestalt quadratischer Gleichungen.

Da das Schulbuch keine konkreten Hinweise zur Findung von Näherungslösungen gibt (prädikativ oder funktional), werde ich diese den Schülern im Unterricht geben, falls Verständnisprobleme auftauchen.

Die enaktive Ebene wird im untersuchten Abschnitt nicht angesprochen. Dem aktiv angeregten Übergang von ikonischer zu symbolischer Ebene sind experimentelle Phasen vorangestellt, die allerdings auch auf einer symbolischen Ebene stattfinden. Zunächst finde ich das der Thematik entsprechend für die 9. Klassenstufe angemessen. Vor allem, da der Übergang zwischen ikonischer und symbolischer Ebene aktiv vollzogen wird (s.o.). Sollten dennoch Verständnisprobleme auftreten, ist eine Rückkopplung auf eine enaktive Behandlung der Binomischen Formeln möglich. Da der Übergang zwischen den Repräsentationsebenen mit spezifischen Aktivitäten zusammenhängt, werde ich den Knoten „Aktivitäten“ als nächsten Fokus wählen. Je nachdem, wie reichhaltig dieser sich füllt, werde ich entscheiden, *ob ich im konkreten Unterrichtsgang noch an weiteren Stellen experimentelle Phasen einbaue.*[353]

Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Aktivitäten

Der „Grobscan" zeigte schon, dass kaum Tätigkeiten der Schnittstellenideen angeregt werden, da der Abschnitt 4.3 keine außermathematischen Problemstellungen enthält. Das Analysefeld des Knotens Aktivitäten beschränkt sich daher auf innermathematische Tätigkeiten, Strategien zum Problemlösen und dem Umgang mit zu erwerbendem und schon erworbenem Wissen.

Im Bereich der Wissenskonstruktion spricht das Schulbuch die drei Arten nach SJUTS an (Exploration - Organisation - Reflexion). Auf die zahlreichen explorativen Anregungen wurde schon in den Knoten Inhalte und Repräsentationen eingegangen. Neben diesen Großformen bei der Erarbeitung eines neuen Lösungsverfahrens (S. 117, Nr. 17, 18) bietet das Schulbuch auch Arbeitsaufträge, anhand derer kleinere Zusammenhänge entdeckt werden können. Ein Beispiel hierfür ist die Erkundung des Zusammenhangs zwischen Scheitelpunktform einer Parabel und deren Nullstellen (S. 120). Dieser explorative Prozess wird durch zahlreiche Erklärungen und Vorschläge begleitet und bietet so auch schwächeren Schülern die Möglichkeit, geführte Entdeckungen zu machen (S. 122, Nr. 36). Die Hinweise und Vorschläge vermitteln implizit Heuristiken zum Problemlösen. So wird der Allgemeinheitsgrad bei vielen Herleitungen variiert in dem Sinne, dass zwar ein allgemeiner Zusammenhang gesucht wird, dieser allerdings zunächst an Zahlenbeispielen erkundet werden soll. Dabei spielt auch die heuristische Strategie des systematischen Probierens eine Rolle (S. 117, Nr. 17).

Ganz klar auf Wissensorganisation zielt die Aufforderung zur Verschriftlichung des „Zusammenhangs der *pq*-Formel mit besonderen Punkten der Parabel" (S. 121, Nr. 32b). Aufgaben zur Wissensreflexion finden sich nach den Einführungen der verschiedenen Lösungsverfahren. Dabei soll der Schüler gezielt ein effizientes Verfahren für bestimmte quadratische Gleichungen auswählen und anwenden (S. 114, Nr. 5, 6, 7; S. 120, Nr. 26). Zudem zielt das Kommentieren zweier im Schulbuch dargestellter Lösungswege einer Aufgabe zu kubischen Gleichungen auf die Reflexion des Schülerwissens. Dort soll entschieden werden, welcher von beiden Lösungswegen der Richtige ist und wo der Fehler im anderen Lösungsweg liegt (S. 121, Nr. 35). Gerade bei diesem Aufgabentyp sind Argumentieren, Fra-

[353] *Hier schwebt mir die Untersuchung des Einflusses verschiedener Parameter auf die Gestalt der Lösungen einer quadratischen Gleichung vor. Anknüpfungspunkte liefert das Schulbuch, allerdings werden diese nur algebraisch bearbeitet (S. 120, Nr. 29). Mithilfe eines Funktionenplotters könnte der Einfluss von Parametern visualisiert werden, um dann Rückschlüsse auf die Gestalt der Lösungen der zur quadratischen Funktion gehörenden Gleichung zu ziehen. Bei diesem Vorgehen bildet das experimentelle Probieren am Schieberegler des Plotters den Ausgangspunkt für weitere rechnerische Überlegungen.*

gen und Kommunizieren verlangt. Diese Aktivitäten werden hier zur Lösung innermathematischer Probleme eingesetzt.

Als innermathematische Aktivitäten stehen vor allem das Lösen von Gleichungen durch Berechnen und Zeichnen im Vordergrund. Siebzehn der insgesamt neununddreißig Aufgaben des Abschnitts zielen auf direktes Anwenden der Lösungsverfahren. Gerade im letzten Teil des Abschnitts, in dem Inhalte abstrakter und deren Repräsentationen formaler werden, tauchen vermehrt die Operatoren „Begründen", „Beweisen", „Verallgemeinern", „Herleiten" auf (S. 119, roter Kasten; S. 121, Nr. 32a; S. 122, Nr. 36, 37, 39).[354] Gerade die letzte Aufgabe fordert von den Schülern das Deduzieren im Beweis. Der Beweis ist allerdings etwas entschärft, da die heuristische Strategie „Analogiebildung" eingesetzt werden kann. Die Schüler haben den gesuchten Zusammenhang schon für quadratische Gleichungen in normierter Form bewiesen und sollen ihn nun auch für allgemeine quadratische Gleichungen zeigen. Dieses Vorgehen (formale Herleitung für normierte quadratische Gleichungen und Übertragung des Verfahrens auf allgemeine quadratische Gleichungen) findet sich auch schon an vorherigen Stellen im Abschnitt (S. 118, Beispiel E; S. 119, roter Kasten; S. 121, Nr. 33).

Der inhaltliche Gang von konkreten Beispielen zu abstrakten Begriffen und Verfahren spiegelt sich in den Tätigkeiten durch Ordnen von Beobachtungen und deren Exaktifizieren und Formalisieren wider.

Das Schulbuch nimmt auch den Übergang von Handlungen zu Operationen explizit in den Blick. Im Sinne des operativen Übens wird eine Umkehraufgabe gestellt (S. 121, Nr. 30). Hier sollen zu gegebenen Lösungen passende quadratische Gleichungen mit Hilfe von Heuristiken gefunden werden.

Für einen konstruktiven Erwerb von Wissen halte ich die Aufgabentypen zur Exploration, Organisation und Reflexion geeignet. Der Fokus des Schulbuchs liegt auf der Exploration und Reflexion. Hierfür sind die Aufgaben wesentlich zahlreicher als zur Wissensorganisation. Ich würde einige Arbeitsaufträge zu diesem Bereich ergänzen (s.u.).

Die Dominanz der „Löse-" und „Berechneaufgaben" war mir beim „Grobscan" nicht so stark aufgefallen. Die Detailanalyse hat meinen Blick allerdings auf die vielen Päckchenaufgaben gelenkt. Hier möchte ich für den Unterrichtsgang eine sinnvolle Auswahl treffen. Die anderen Übungsaufgaben nutze ich zur gezielten Förderung einzelner Schüler. Um die Monotonie der innermathematischen Aufgabenserien zu durchbrechen, scheint mir wichtig, auch während der Erarbeitung von rechnerischen Lösungsverfahren schon außermathematische Problemstellun-

[354] Eine Aufgabe mit dem Titel „Zum Nachdenken" fordert auch schon früher zu innermathematischen Begründungen auf (S. 114, Nr. 8). Sie bereitet die Untersuchung der Lösungsmenge vor, welche später mit der Diskriminante formalisiert wird (S. 120, Nr. 27).

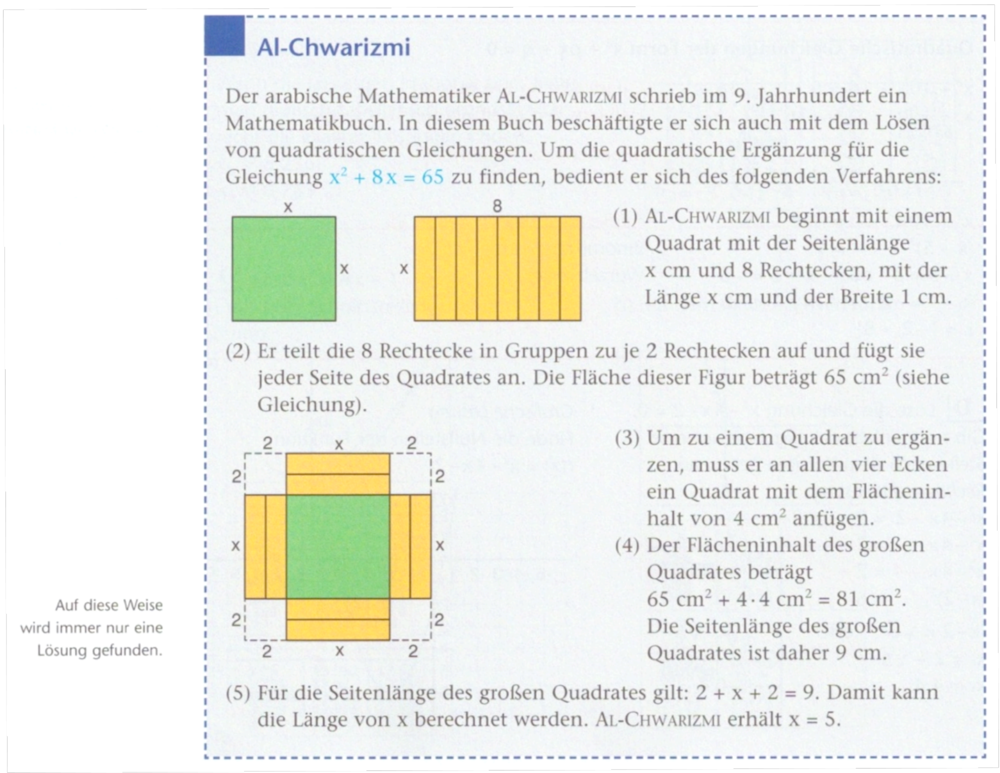
gen aus Abschnitt 4.4 einzubeziehen. Auch vor der systematischen Erschließung aller rechnerischen Lösungsverfahren haben die Schüler ausreichende Kenntnisse, um solche Problemstellungen mithilfe quadratischer Gleichungen zu lösen. Somit werden auch die Aktivitäten Fragen, Argumentieren, Kommunizieren, die in diesem Abschnitt - aus meiner Sicht - sonst zu kurz kommen, stärker angesprochen.

Die Detailanalyse hat mir die „Umkehraufgabe" ins Auge springen lassen (S. 121, Nr. 30). Sie durchbricht eine Reihe von eher abstrakteren Aufgaben (S. 120, Nr. 28 – S. 121, Nr. 33), in denen algebraische Begründungen gefordert sind, dadurch, dass zu konkreten als Zahlen angegebenen Lösungen passende Gleichungen gefunden werden sollen. Dazu können Heuristiken eingesetzt werden wie systematisches Probieren, Analogiebildung zu schon gefundenen Gleichungen, Variation des Allgemeinheitsgrads durch Variation des Gegebenen (quadratische Gleichung mit einer Lösung finden), Variation des Exaktheitsgrads (mittels zeichnerischer Lösung und ungefährer Bestimmung des Scheitelpunkts der entstehenden Parabel) und dabei auch das Übersetzen in einen geometrischen Kontext. Diese Aufgabe ermöglicht ganz unterschiedliche Herangehensweisen, die ich in meinen Unterrichtsgang integrieren möchte. Zudem macht sie deutlich, dass den Schülern ein rechnerisches Verfahren zum Finden von Gleichungen zu gegebenen Lösungen fehlt, und kann so als Motivation für die Aufgaben zum Satz von VIETA dienen.

Diesen und den vorangestellten historischen Exkurs analysiere ich daher nun mit dem Knoten Genese.

Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Genese

Das konstruktiv-geometrische Lösungsverfahren nach AL-CHWARIZMI aus dem 9. Jahrhundert schließt sich der Erarbeitung der quadratischen Ergänzung an (S. 118). Mit dieser Methode wird den Schülern eine weitere Möglichkeit, deren Historizität durch die zeitliche Entfernung zu uns sofort ersichtlich ist, zum Finden der passenden Ergänzung und zur Lösung quadratischer Gleichungen vorgestellt. Aufgabe des Schülers ist es, das Verfahren zunächst nachzuvollziehen und dann auf verschiedene quadratische Gleichungen anzuwenden (S. 118, Nr. 21).



Al-Chwarizmi

Der arabische Mathematiker AL-CHWARIZMI schrieb im 9. Jahrhundert ein Mathematikbuch. In diesem Buch beschäftigte er sich auch mit dem Lösen von quadratischen Gleichungen. Um die quadratische Ergänzung für die Gleichung $x^2 + 8x = 65$ zu finden, bedient er sich des folgenden Verfahrens:

(1) AL-CHWARIZMI beginnt mit einem Quadrat mit der Seitenlänge x cm und 8 Rechtecken, mit der Länge x cm und der Breite 1 cm.

(2) Er teilt die 8 Rechtecke in Gruppen zu je 2 Rechtecken auf und fügt sie jeder Seite des Quadrates an. Die Fläche dieser Figur beträgt 65 cm² (siehe Gleichung).

(3) Um zu einem Quadrat zu ergänzen, muss er an allen vier Ecken ein Quadrat mit dem Flächeninhalt von 4 cm² anfügen.

(4) Der Flächeninhalt des großen Quadrates beträgt $65\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 4\ \text{cm}^2 = 81\ \text{cm}^2$. Die Seitenlänge des großen Quadrates ist daher 9 cm.

(5) Für die Seitenlänge des großen Quadrates gilt: $2 + x + 2 = 9$. Damit kann die Länge von x berechnet werden. AL-CHWARIZMI erhält $x = 5$.

Auf diese Weise wird immer nur eine Lösung gefunden.

Abbildung 62 Geometrische Lösungsverfahren nach AL-CHWARIZMI, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 118)

Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass sowohl die Ergänzung als auch die Lösung unmittelbar aus der geometrischen Konstruktion entnommen werden können. Ein - nicht thematisierter - Nachteil ist, dass das lineare Glied der quadratischen Gleichung ein Vielfaches von vier sein muss, damit die Rechtecke gleichmäßig an die vier Seiten des Quadrats angelegt werden können. Erwähnt wird allerdings in der Bemerkung an der Seite, dass das Verfahren nur eine Lösung liefert. Aufgabe des Schülers kann es dann sein, darzulegen, worin dies begründet ist und wie die negative Lösung gefunden werden kann.

Den Abschluss des Abschnitts 4.3 bildet ein Forschungsauftrag, der zum Satz von VIETA und somit zur algebraischen Berechnung von Lösungen führt (S. 122). Anders als beim Verfahren nach AL-CHWARIZMI steht hier der mathematische Zusammenhang zwischen Gleichungslösung und deren Parametern zunächst ohne historischen Bezug am Anfang. Der erarbeitete Zusammenhang wird erst im Nachhinein historisch mit Informationen zum Leben und Wirken VIETAs eingebettet. Inhaltlich kann dieser Satz mit der oben schon analysierten „Umkehraufgabe" verbunden werden. Auch hier ist also der historische Exkurs im Lehrgang verankert und ermöglicht neue inhaltliche Erkenntnisse.

Die Informationen zum Leben und Wirken von FRANCOIS VIETA sind in einem - für ein Mathematikschulbuch längeren Text - zusammengefasst. Dabei werden, wie im Vorwort des Schulbuchs schon erwähnt, für unser heutiges Verständnis seltsame Begebenheiten geschildert. Offensichtlich waren Berufe im 16. Jahrhundert noch nicht so stark spezialisiert, und es war nicht unüblich, dass Intellektuelle in mehreren Bereichen herausragende Leistungen erbrachten. In der Geschichtswissenschaft gibt es für diese Personengruppe, die sich zu Beginn des 15. Jahrhunderts aus der städtischen Oberschicht herausbildet, den Fachbegriff des „uomo universale" (ital. für „Universalmensch"), des allseits gebildeten Menschen. Das Leitbild des „uomo universale" prägt die Epochen des Humanismus und der Renaissance. Über dieses Wissen verfügen die Schüler seit Klassenstufe 7 und können es nun im Mathematikunterricht wiederholen und vertiefen (MBK 2014). Auch seltsam wirkt, dass VIETA auf Grund seiner intellektuellen Leistungen beschuldigt wurde, einen Bund mit dem Teufel eingegangen zu sein. Die Verbindung von wissenschaftlichen Erkenntnissen und Hexerei stößt in heutiger Zeit meist auf Unverständnis und wirkt befremdend. Doch können solche Begebenheiten, die sich in den größeren Rahmen von Ketzerei und Hexenverfolgung einbetten lassen, das Interesse von Schüler wecken.

Der Text liefert nicht nur Informationen, sondern wirft auch Fragen auf, die zum Ausgangspunkt weiterer Forschung der Schüler werden können. Beispielsweise ist es eine überraschende Feststellung, dass erst im 16. Jahrhundert Rechensymbole eingeführt wurden. Wie wurden Terme und Gleichungen vorher notiert? Hier bietet sich ein kleiner Forschungsauftrag für einzelne Schüler und eine Präsentation der Ergebnisse als Referat an.

Für mich als Mathematik- und Geschichtslehrerin sind solche historischen Exkurse in Schülerbüchern natürlich wahre Ideenfundgruben, die fächerübergreifenden Unterricht ermöglichen. Besonders gelungen empfinde ich die Integration historischer Inhalte in den Erkenntnisprozess der Schüler. Beide Male liefern die historischen Exkurse neue Lösungsverfahren und somit weiterführende inhaltliche Kenntnisse. Beide Exkurse können also inhaltslogisch in den Unterrichtsgang eingebaut werden und stellen nicht nur Zusatzwissen in Form von historischen Fakten dar. Die inhaltlogische Einbindung birgt allerdings auch das Risiko, genetische Aspekte an dieser Stelle auszublenden und die Lösungsverfahren im Mathematikunterricht rein inhaltlich zu behandeln.

Darüber hinaus bieten sie die Möglichkeit, am Ende von Abschnitt 4.3 die Entwicklung von Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen ganz allgemein in den Blick zu nehmen. Offensichtlich vollzog sich in der Zeit vom 9. bis zum 16. Jahrhundert ein Wandel von geometrischen zu algebraischen Verfahren. Das Bewusstmachen solcher Prozesse kann dazu beitragen, Mathematik in Schüleraugen als lebendige Wissenschaft erscheinen zu lassen, deren Entwicklung grundsätzlich nicht abgeschlossen ist.

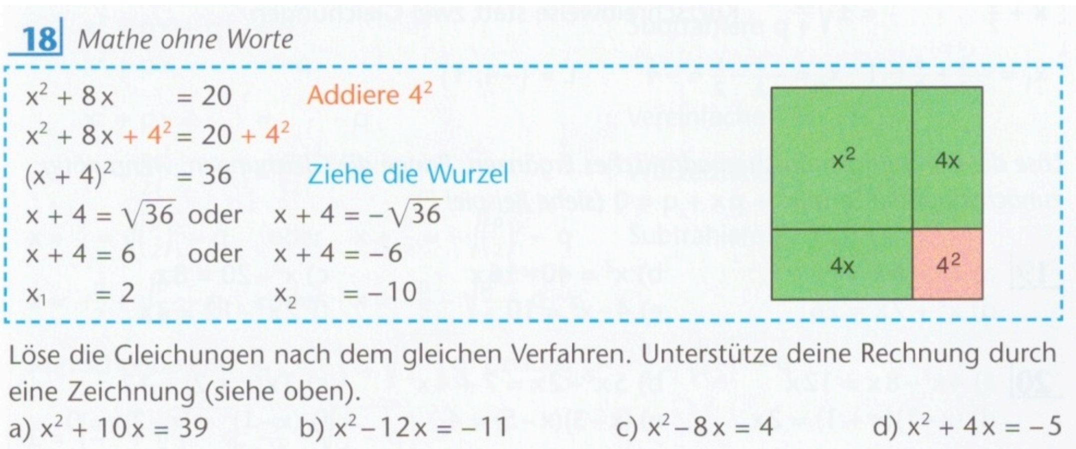
Ähnlich wie zu VIETA würde ich die Schüler auch bei AL-CHWARIZMI nach Leben und Werk forschen lassen. Hier verpasst das Schulbuch eine Chance, auf dessen „Entdeckung" der Null und die Entstehung des Wortes „Algorithmus" einzugehen.

Die Detailanalyse der Informationen zu VIETA hat mir gezeigt, dass das Schulbuch Aspekte wie Interesse anspricht. Solche Angebote gilt es nun mit einer letzten Detailanalyse zu identifizieren.

Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Person

Aspekte, die die Person des Schülers und seine Einstellung zum forschenden Entdecken betreffen, berücksichtigt das Schulbuch im untersuchten Abschnitt explizit und implizit. Explizite Stellen lassen sich beim historischen Exkurs zum Satz von VIETA nachweisen. Hier werden gezielt sprachliche Formulierungen benutzt, die Neugier und Interesse wecken können. So ist, wie oben bereits beschrieben, die Rede von den „erstaunlichen Leistungen“ von VIETA und von seiner Arbeit für den französischen König, die ihn „berühmt“ machte (S. 122). Weiter heißt es, dass seine Leistungen so außerordentlich waren, dass seine Zeitgenossen sie für Hexerei hielten. Dies wirkt aus heutiger Sicht zwar befremdend, kann aber gerade dadurch Neugier und Interesse der Schüler für die Entwicklungen der Mathematik hervorrufen.

Bei der Erarbeitung der quadratischen Ergänzung setzt das Schulbuch auf ein intuitives Vorgehen. Zunächst implizit, da die Schüler durch „geschicktes“ Addieren oder Subtrahieren Gleichungen so umformen sollen, dass diese mit den bekannten Methoden lösbar werden (S. 117, Nr. 17). Die darauf folgende Aufgabe trägt den Titel „Mathe ohne Worte“, welcher verdeutlicht, dass das vorgestellte Verfahren intuitiv erfassbar ist (S. 117, Nr. 18).


18 Mathe ohne Worte

$x^2 + 8x = 20$ Addiere 4^2

$x^2 + 8x + 4^2 = 20 + 4^2$

$(x + 4)^2 = 36$ Ziehe die Wurzel

$x + 4 = \sqrt{36}$ oder $x + 4 = -\sqrt{36}$

$x + 4 = 6$ oder $x + 4 = -6$

$x_1 = 2$ $x_2 = -10$

Löse die Gleichungen nach dem gleichen Verfahren. Unterstütze deine Rechnung durch eine Zeichnung (siehe oben).

a) $x^2 + 10x = 39$ b) $x^2 - 12x = -11$ c) $x^2 - 8x = 4$ d) $x^2 + 4x = -5$

Abbildung 63 „Mathe ohne Worte“, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 117)

Kreativität kann durch eine offene Herangehensweise an Probleme gefördert werden. Dazu bietet der untersuchte Abschnitt trotz einiger Forschungsaufträge nur bedingt Möglichkeiten. Die Forschungsaufträge sind, wahrscheinlich um den Schülern Orientierung zu bieten, von engen Anweisungen begleitet, die den Lösungsweg lenken (S. 122, Nr. 36). Die oben schon erwähnte „Umkehraufgabe“ kommt ohne eine solche Einschränkung aus und lässt den Schülern vielfältige Möglichkeiten bei der Bearbeitung (S. 121, Nr. 30). Zudem kann sie ein Ausgangspunkt zum Erschaffen eines neuen Problems werden, in dem Sinne, dass nach einer systematischen Methode zur Erzeugung einer passenden quadratischen Gleichung aus ihren gegebenen Lösungen gesucht wird. Dies entspricht dem kreativen Akt der Problemerzeugung nach WETH (vgl. Kapitel 4.5). Auch die Nummern 28 und 29 auf Seite 120 sind offen gestellt und ermöglichen daher die kreative Entwicklung einer tragenden Herangehensweise.

Bis auf den allgemeinen Hinweis im Vorwort zur Idee „Beharrlichkeit" findet sich im untersuchten Abschnitt noch eine implizite Andeutung, die in Richtung dieser Idee interpretiert werden kann. Zum Vergleich des Näherungsverfahrens (S. 116) und der quadratischen Ergänzung (S. 117) nutzt das Schulbuch nicht nur die Güte der gefundenen Lösung, sondern auch die Handhabung beider Verfahren. So wird das Näherungsverfahren durch den GTR-Einsatz zwar als „bequem", jedoch nicht als exakt beschrieben. Die quadratische Ergänzung ist dagegen ein Lösungsverfahren, „das zwar nicht immer das bequemste Verfahren ist, aber immer funktioniert" (S. 117). Diese Formulierung impliziert, dass es einen „Lohn", nämlich eine exakte Lösung, für die geleistete Anstrengungen gibt.

Wider des Eindrucks beim „Grobscan" zeigt die Detailanalyse einige Ankerpunkte des Knotens Person auf. Diese liegen meist etwas versteckt in Formulierungen und werden nicht immer explizit vom Schulbuch angesprochen. Lediglich der historische Exkurs (S. 122) und die Beschreibung der quadratischen Ergänzung (S. 117) zielen klar auf Interesse und Neugier bzw. Beharrlichkeit ab. Um ein intuitives Vorgehen weiter zu vertiefen, könnten zusätzlich zur dargestellten Visualisierung der quadratischen Ergänzung weitere Aufgaben dieses Typs gestellt werden. Eine Sammlung von Aufgaben, für die keine Worte nötig sind, findet sich in ROGER NELSONS „Proofs Without Words" (Nelson 1993 und 2001). Besonders der größere Forschungsauftrag zum Satz von VIETA scheint mir für eine kreative Herangehensweise zu eng geführt. Diesen würde ich im konkreten Unterrichtsgang offener stellen (s.u.).

Insgesamt haben sich die Knoten meines Vernetzungspentagraphen durch die Detailanalyse wie folgt (Abbildung 64) gefüllt:

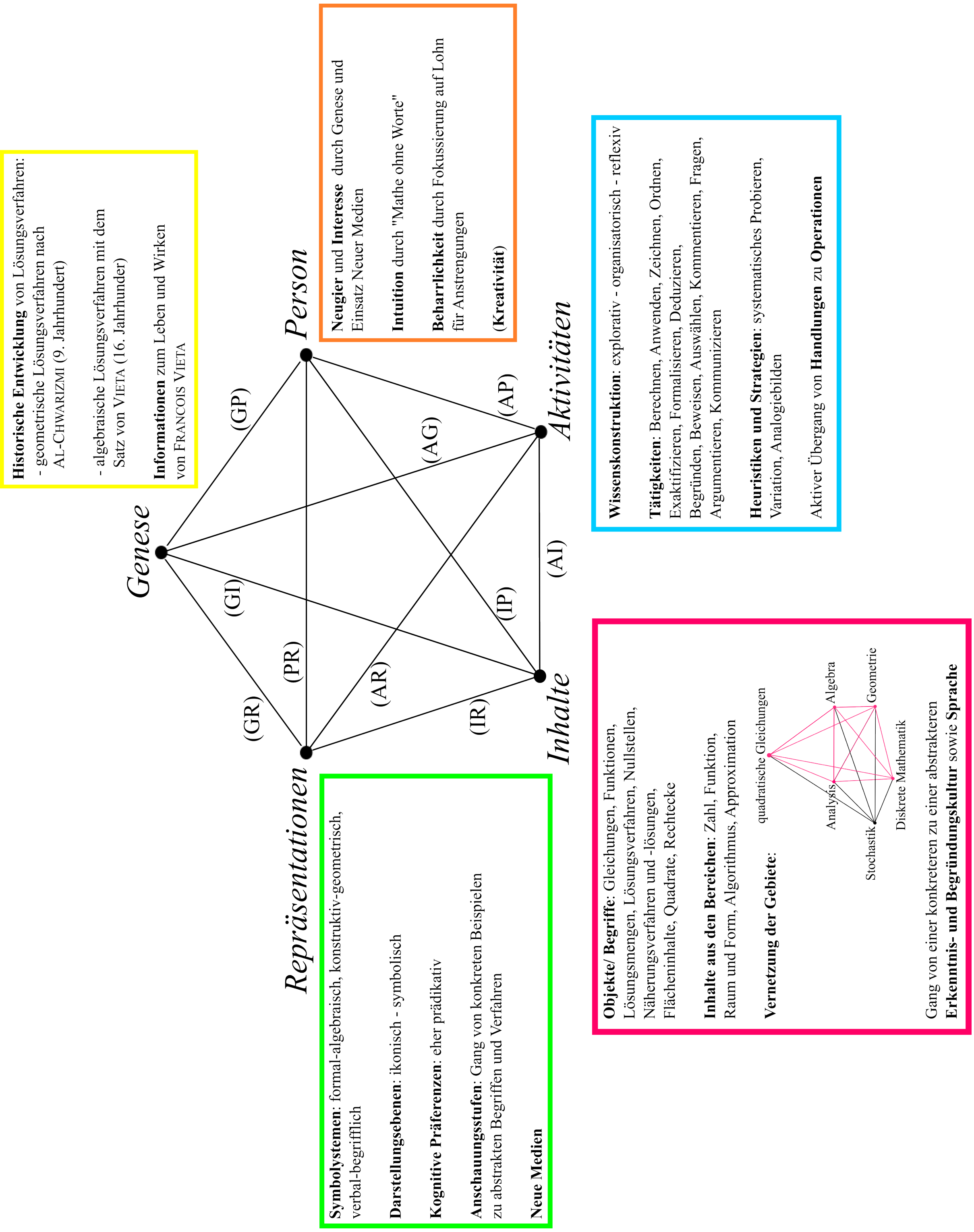


Abbildung 64 Vernetzungspentagraph nach der Detailanalyse der Knoten

Die Analyse wird nun durch die Diskussion der Kanten abgeschlossen. Hierbei gehe ich nach obiger Nummerierung der Kanten vor und begründe, warum ich die jeweiligen Vernetzungen als gegeben bzw. ausgelassen sehe.

<u>Diskussion der Kanten des Vernetzungspentagraphen</u>

Vernetzungen nehme ich vor allem zwischen den Knoten Inhalten und Repräsentationen wahr ***(IR)****. Die im Vorwort angekündigte Reichhaltigkeit der Darstellungen spiegelt sich deutlich im untersuchten Abschnitt wider. Wichtig ist mir dabei, dass konstruktiv-geometrische und verbal-begriffliche Darstellungen auch im letzten Teil des Abschnitts, in dem eigentlich eine formal-algebraische Sprache vorherrscht, erhalten bleiben. Repräsentationen werden gezielt genutzt, um abstrakte Inhalte herunterzubrechen und somit Ankerpunkte für Schüler zu schaffen. Andersherum werden bestimmte Inhalte genutzt, um spezielle Darstellungsformen einzuüben. Anhand der pq-Formel wird deren Darstellung in einem CAS explizit ihrer Darstellung im Schulbuch, die rechnerisch per Hand mittels quadratischer Ergänzung hergeleitet wurde, gegenübergestellt (S. 121, Nr. 31).*

Ebenfalls sofort ins Auge gesprungen sind mir die beiden historischen Exkurse. Diese werden im Lehrgang mit den jeweiligen Lösungsverfahren eng vernetzt angeboten und tragen zum inhaltlichen Erkenntnisgewinn bei ***(GI)****.*

Zusammen mit dem inhaltlichen Gang von konkreten Beispielen zu abstrakten Begriffen werden auch stets spezifische Aktivitäten von den Schülern gefordert. Inhalte werden zunächst exploriert, dann organisiert und anschließend reflektierend in das bereits vorhandene Wissen der Schüler eingeordnet. Da sich dieses Vorgehen für alle Gleichungstypen nachweisen lässt, konstatiere ich Vernetzungspotential zwischen den Knoten Inhalte und Aktivitäten ***(AI)****.*

Nach dem ersten „Grobscan" fehlten mir Aspekte, welche die Person des Schülers betreffen. Die Detailanalyse legte offen, dass an unterschiedlichen Inhalten (quadratische Ergänzung, „Umkehraufgabe" und historischen Exkursen) exemplarisch Intuition, Beharrlichkeit und Kreativität angesprochen wurden. Dies impliziert Vernetzungen zwischen den Knoten Inhalte und Person, welche allerdings gerade mit Blick auf die explorative Herangehensweise des Buchs stärker ausgeprägt sein könnten ***(IP)****.*

Im untersuchten Abschnitt werden ganz bestimmte Repräsentationen genutzt, um unterschiedliche Tätigkeiten anzuregen. Die Darstellungen mittels GTR dienen beispielweise der Exploration (S. 116) und dem Begründen von Zusammenhängen (S. 121, Nr. 31). Vor allem geometrische Darstellungen dienen ebenfalls dem Begründen von algebraischen Zusammenhängen (S. 117, Nr. 18; S. 121, Nr. 32). Weitere Anregungen von speziellen Aktivitäten durch Repräsentationen hat meine Detailanalyse nicht offengelegt. Daher sehe ich zwar durchaus Vernetzungen zwischen den Knoten Repräsentationen und Aktivitäten ***(AR)****, stufe diese aber als nicht so reichhaltig ein, wie die bisher genannten Kanten.*

Vernetzungen zwischen Aktivitäten und Person ***(AP)*** *und Aktivitäten und Genese* ***(AG)*** *werden mir im untersuchten Abschnitt nicht deutlich. Zwar lassen einige Arbeitsaufträge Raum zum Erforschen, sie sind aber gleichzeitig so eng gestellt, dass kaum von kreativem Arbeiten gesprochen werden kann (s.o.). Die fehlende Vernetzung der Knoten Aktivitäten und Person ist wohl auch auf die Ausklammerung von Schnittstellenideen zurückzuführen, da gerade Modellieren auch auf Kreativität abzielt. In den beiden historischen Exkursen werden zudem keine Aktivitäten angeregt, die sich nicht auch an anderen Stellen im Abschnitt finden. Es werden also keine speziellen Aktivitäten für die Bearbeitung genetischer Inhalte angeregt.*

Vernetzungen zwischen den Knoten Repräsentationen und Person ***(PR)*** *können durch den Einsatz des GTRs erzielt werden. BIKNER-AHSBAHS sieht im Einsatz Neuer Medien eine Chance, Interesse an Mathematik im Unterricht zu fördern. Wichtig dabei ist allerdings, dass der Computer hilft, Routineverfahren zu durchbrechen (Bikner-Ahsbahs 2001). Der saarländische Lehrplan für das achtjährige Gymnasium im Fach Mathematik fordert allerdings einen über die Jahrgangsstufen kontinuierlichen Einsatz Neuer Medien. Dieser Forderung entspricht die Schulbuchreihe Neue Wege auch, indem in den einzelnen Bänden sowohl Tabellenkalkulationen, Funktionenplotter und Computeralgebrasysteme eingesetzt werden. Es ist also davon auszugehen, dass bei ernsthafter Orientierung des Mathematikunterrichts am Lehrplan und an den Hinweisen in der Schulbuchreihe der GTR-Einsatz in der 9. Klasse zu den Routineverfahren gehört.*

Schon bei der Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Person wurde auf die Anregung von Interesse im historischen Exkurs zum Leben und Werk von VIETA eingegangen. Neben den auffälligen Formulierungen wirft der dortige Text auch einige Fragen auf, die ebenfalls Neugier und Interesse bei Schüler wecken können. Meiner Meinung nach stellen die angebotenen genetischen Bezüge einen expliziten Versuch dar, Aspekte anzusprechen, die die Person des Schülers betreffen ***(GP)****.*

Weiterhin erkenne ich Bestrebungen zu Vernetzungen zwischen Repräsentationen und Genese in untersuchten Abschnitt ***(GR)****. Dadurch, dass der erste historische Exkurs ein geometrisches Verfahren aus dem 9. Jahrhundert und der zweite Exkurs ein algebraisches Verfahren aus dem 16. Jahrhundert vorstellt, kann eine historische Entwicklung von mathematischen Darstellungen deutlich werden.*

Zusammenfassend sehe ich die Kanten des Vernetzungspentagraphen folgendermaßen angesprochen, wobei eine „fette“ Kante eine wahrgenommene Vernetzung anzeigt und eine „dünne“ Kante eine mögliche, im untersuchten Abschnitt allerdings nicht explizit verfolgte Vernetzung visualisiert:

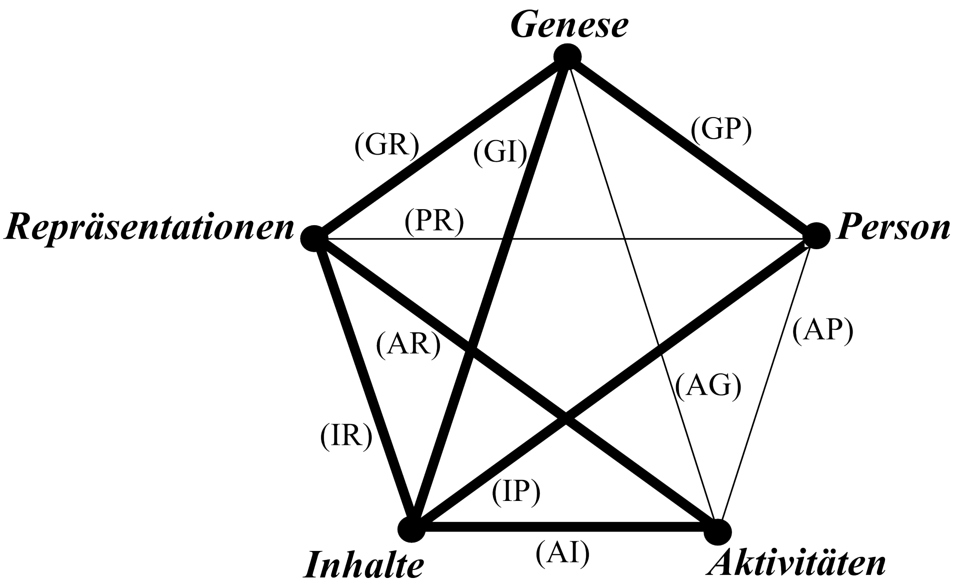


Abbildung 65 Vernetzungspentagraph, dessen Kanten wahrgenommene Vernetzungen visualisieren[355]

6.3.4 Einige Vorschläge zur reichhaltigeren Füllung der Knoten und Kanten

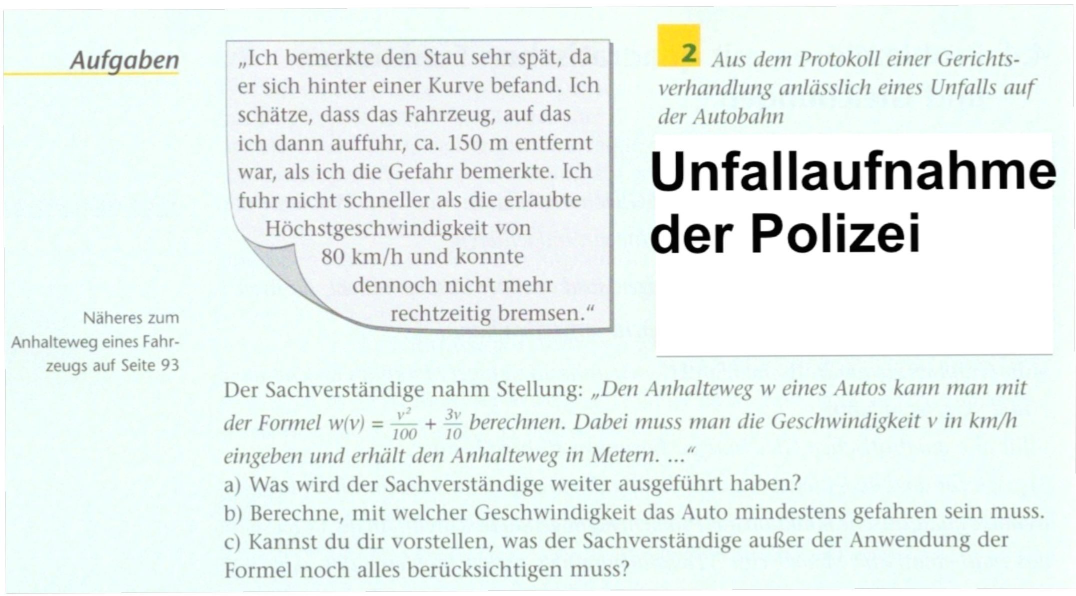
Zunächst fehlten mir bei den Inhalten und Aktivitäten außermathematische Bezüge. Um die außermathematische Bedeutung quadratischer Gleichungen zu verdeutlichen und auch Schnittstellenideen im Unterrichtsgang zu integrieren, würde ich daher exemplarisch eine Aufgabe aus Abschnitt 4.4 vorziehen und nach der Erarbeitung der quadratischen Ergänzung behandeln.[356]

Anbieten würde sich eine Aufgabe zum Bremsweg, da für viele Schüler der 9. Klasse die Entscheidung für einen Mofa- oder Mopedführerschein ansteht.[357] Fragestellungen dieser Art können also durchaus auf Schülerinteresse stoßen und zur Verankerung von Mathematik in der Lebenswelt der Schüler beitragen. Das Schulbuch bietet in Abschnitt 4.4 auch eine Aufgabe zum Thema Bremsweg, die in eine Beschreibung eines Autounfalls eingekleidet ist (Abbildung 66).

[355] *In diesem Vernetzungspentagraphen sind alle Knoten mehr oder weniger reichhaltig gefüllt und viele Kanten angesprochen. Dies ist bei dem Vernetzungspentagraphen natürlich nicht immer der Fall. In einer früheren Arbeit habe ich mit dem Vernetzungspentagraphen Schulbücher aus der Phase der Strukturmathematik analysiert, bei denen der Vernetzungspentagraph wesentlich leerer blieb (von der Bank 2016).*

[356] *Den Schülern stehen auch schon vorher einige Lösungsverfahren zur Verfügung. Da aber vor der Erarbeitung der quadratischen Ergänzung noch eingekleidete Aufgaben vorkommen und danach nicht mehr, verorte ich eine Anwendungsaufgabe im letztgenannten Bereich.*

[357] *Physikalische Größen wie Weg, Zeit, Geschwindigkeit sind im Lehrplan für Physik in der Klassenstufe 7 verankert (MBK 2013).*



Aufgaben

„Ich bemerkte den Stau sehr spät, da er sich hinter einer Kurve befand. Ich schätze, dass das Fahrzeug, auf das ich dann auffuhr, ca. 150 m entfernt war, als ich die Gefahr bemerkte. Ich fuhr nicht schneller als die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h und konnte dennoch nicht mehr rechtzeitig bremsen."

2 *Aus dem Protokoll einer Gerichtsverhandlung anlässlich eines Unfalls auf der Autobahn*

Unfallaufnahme der Polizei

Näheres zum Anhalteweg eines Fahrzeugs auf Seite 93

Der Sachverständige nahm Stellung: *„Den Anhalteweg w eines Autos kann man mit der Formel* $w(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}$ *berechnen. Dabei muss man die Geschwindigkeit v in km/h eingeben und erhält den Anhalteweg in Metern. ..."*

a) Was wird der Sachverständige weiter ausgeführt haben?

b) Berechne, mit welcher Geschwindigkeit das Auto mindestens gefahren sein muss.

c) Kannst du dir vorstellen, was der Sachverständige außer der Anwendung der Formel noch alles berücksichtigen muss?

Abbildung 66 Aufgabe zur Berechnung des Bremswegs eines Fahrzeugs, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 124)[358]

Damit die Wahl des Modells nicht zu eindeutig ist, würde ich die Stellungnahme des Sachverständigen und die weiteren Aufgabenteile zunächst wegschneiden. Es müssten also erst sinnvolle Fragestellungen erarbeitet und Informationen gesammelt werden. Ist die Faustformel für den Anhalteweg gefunden,[359] *kann berechnet werden, dass der Anhalteweg des Fahrzeugs eigentlich nur 88 Meter beträgt. Um zu klären, warum es dennoch zum Unfall kam, sind nun weitere „Ermittlungen" in Form von Modellkritik nötig. Die Faustformel als Modell für den Anhalteweg berücksichtigt beispielsweise nicht die Straßenbedingungen und die Profiltiefe der Reifen. Beides sind einflussreiche Faktoren für den Anhalteweg und damit für die gerichtliche Beweisführung unabdingbar. Bei diesem Schritt handelt es sich, in der Formulierung des Modellbildungskreislaufs nach* Schupp *(Schupp 1988), um die Validierung des Modells. Dabei sind die Schüler zum Fragen, Argumentieren und Kommunizieren angehalten. Somit werden die sonst vorherrschenden innermathematischen Tätigkeiten um Schnittstellenideen ergänzt. Da reichhaltige Aktivitäten der Schüler eine gute Basis zum Wecken von Interesse an Mathematik im Mathematikunterricht sind, stellt diese Aufgabe eine Möglichkeit dar, die Knoten Aktivitäten und Person zu vernetzen.*

Neben den außermathematischen Bezügen hatten mir im Knoten Aktivitäten weitere Aufgaben zur Wissensorganisation gefehlt. Um diese Form der Wissenskon-

[358] *Ich weise daraufhin, dass einige Fotografien auf den abgedruckten Schulbuchseiten entfernt wurden, da mauritius-images (www.mauritiusimages.com) keine Abdruckgenehmigung erteilte. An den entsprechenden Stellen sind die betroffenen Fotografien unkenntlich gemacht und durch Beschreibungen ersetzt.*

[359] *Entweder durch Recherche der Schüler oder Reaktivierung von Vorwissen, da Bremswege schon bei der Einführung quadratischer Funktionen behandelt wurden (S. 93, Nr. 3).*

struktion stärker zu berücksichtigen, könnte bei den vielen Päckchenaufgaben zusätzlich gefragt werden, warum sich der Schüler für ein bestimmtes Lösungsverfahren entschieden hat. Auch bei anderen Aufgaben können kleine Zusatzaufträge zur Strukturierung von Wissen beitragen. Dazu eignen sich Arbeitsaufträge wie „Beschreibe, wie du vorgegangen bist". Diese sind unproblematisch in die im Buch gestellten Aufgabenformate zu integrieren. Exemplarisch bieten sich dazu S. 120, Nr. 29 und S. 121, Nr. 30 an, da sie zur Exploration eines bisher unbekannten Zusammenhangs anregen und die Schüler daher heuristische Strategien entwickeln und einsetzen müssen. Indem die Schüler ihr Vorgehen beschreiben, machen sie sich diese Heuristiken bewusst und können sie bei neuen Problemstellungen gezielter einsetzen.

Um sowohl den funktionalen Denkstil als auch den explorativen Zugang zu neuen Inhalten stärker zu berücksichtigen, würde ich die Untersuchung des Einflusses eines Parameters auf die Gestalt der Lösungen einer quadratischen Gleichung ausbauen (S. 120, Nr. 29). Mit einer geeigneten Software lässt sich die Situation schnell simulieren. Diese Repräsentation kann bei entsprechenden Vorkenntnissen von den Schülern selbst implementiert werden.[360]

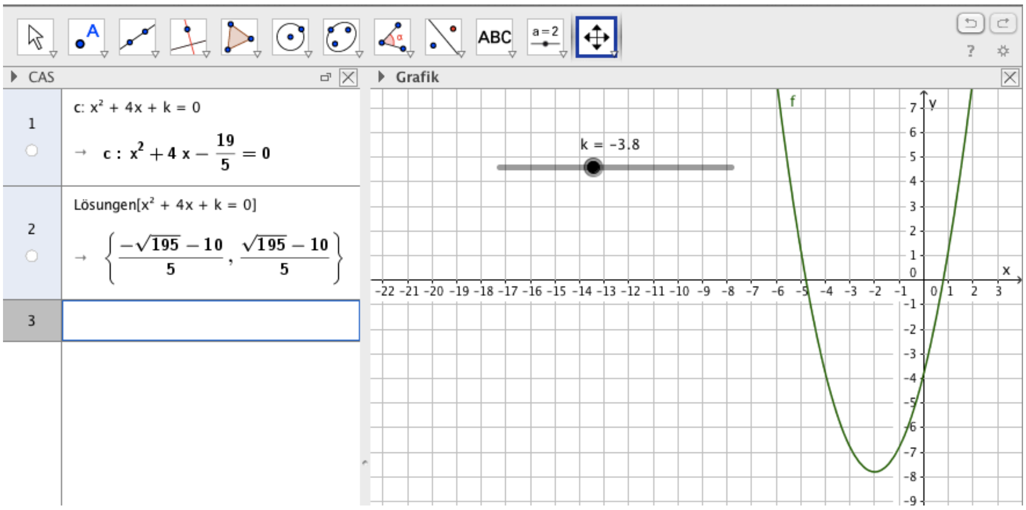


Abbildung 67 *Implementierung des Einflusses eines Parameters auf die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung*

Bei dieser Gelegenheit könnten interessierte Schüler auch zu der im Lehrplan fakultativ vorgeschlagenen, im Schulbuch allerdings nicht angesprochenen Programmierung eines Lösungsalgorithmus ermutigt werden. Zudem kann sich eine explorative Behandlung von quadratischen Ungleichungen, die ja ebenfalls im Lehrplan gefordert wird und im Schulbuch fehlt, anschließen.

Um den Knoten Genese reichhaltiger zu gestalten, würde ich zunächst in Form eines Referats Informationen zum Leben und Wirken des Mathematikers AL-

[360] Damit die Schüler die Lösungen im CAS-Fenster einordnen können, müsste die Diskussion der Darstellung CAS vorgezogen werden (S. 121, Nr. 31).

CHWARZIMI recherchieren lassen. Diese Informationen können im Unterricht genutzt werden, um das vorgestellte geometrische Verfahren historisch einzuordnen und eine große mathematische Persönlichkeit kennenzulernen. Zudem erweitern sie den Blick der Schüler auf den kulturellen Reichtum des persischen Reiches. Somit wird das historische Wissen der Schüler, welches sich häufig bedingt durch den unterrichtlichen Gang im Fach Geschichte auf europäische Entwicklungen fokussiert, um eine fremdländische Komponente erweitert. Zudem werden den Schülern anhand der historischen Inhalte spezielle Aktivitäten wie beispielsweise Recherchieren, Zusammenfassen, Argumentieren, Kommunizieren etc. und eine spezifische Repräsentationsform der Inhalte als Referat abverlangt. Somit können Vernetzungen zwischen den Knoten Genese und Repräsentationen intensiviert und zwischen den Knoten Genese und Aktivitäten angestrebt werden.

Weiterhin stellt die Einbeziehung historischer Schulbücher eine Möglichkeit dar, genetische Aspekte von Mathematik im Unterricht zu verankern. Die Thematik der quadratischen Gleichung ist zum Aufzeigen von Entwicklungen anhand von Schulbüchern geeignet, da gerade Gleichungen - beispielsweise während der Strukturmathematik, die die Großeltern- bzw. Elterngeneration meist noch als eigene Schulzeit erlebt hat - anders vermittelt wurden als heute. Damals galten Gleichungen als Aussageformen, deren Wahrheitsgehalt anhand ihrer Lösungen zu überprüfen war. Da diese Form der Gleichungslehre sehr abstrakt und für Schüler (damals wie heute) schwer zu verstehen ist, müssten Auszüge solcher Schulbücher im Unterricht geeignet angeleitet auf ihre Andersartigkeit untersucht werden. Wie ein möglicher Unterrichtsgang hierzu aussehen sollte, kann nur mit Blick auf Interessen, Neigungen und Leistungsfähigkeit der jeweiligen Lerngruppe entschieden werden.

Bei der Detailanalyse mit Fokus auf dem Knoten Person fehlten mir vor allem echte Gelegenheiten, kreativ zu arbeiten. Zusätzlich zur schon diskutierten „Umkehraufgabe" und der von mir oben vorgeschlagenen Behandlung der Modellierungsaufgabe zum Bremsweg sehe ich dazu Potential in den gestellten Forschungsaufträgen (S. 122, Nr. 36). Diese müssten allerdings offener formuliert werden. Dazu könnte beispielsweise die allgemeine Forschungsfrage aus den konkreten Beispielen der „Umkehraufgabe" hergeleitet werden. Die begleitenden Arbeitsaufträge aus Nummer 36 sind dann auf Hilfekärtchen für die Schüler bereitzustellten. Diese methodische Umstrukturierung ermöglicht den Schülern, einen individuellen Lösungsweg zu finden. Gleichzeitig können die Schüler selbst entscheiden, wann sie Hilfe in Anspruch nehmen. Sie gestalten damit ihren Lernprozess aktiver mit, was sich wiederum positiv auf ihr Verhältnis zum Mathematikunterricht und damit zur Mathematik auswirken kann.

6.4 Scaffolding als Zwischenfazit

Nachdem der Vernetzungspentagraph exemplarisch angewendet und dabei auf einer Meta-Ebene meine leitenden Gedanken und gezogenen Schlussfolgerungen dargestellt wurden, möchte ich Ihnen, lieber Leser, im Sinne des „Cognitive Apprenticeship“ von COLLINS/BROWN/NEWMAN ein Gerüst zur Gedankenstütze für einen Selbstversuch mit dem Vernetzungspentagraphen geben. Dazu habe ich mein Vorgehen zu einer methodischen Anleitung zusammengefasst.

1. Schritt	**Lehrplananalyse** Ziele: Feststellung inhaltlicher, didaktischer und methodischer Vorgaben
	Knoten des Vernetzungspentagraphen dienen als Orientierung: Inhalte stehen im Vordergrund; Für Repräsentationen und Aktivitäten „rechte Spalte“ beachten; Für Genese und Person Präambel beachten
2. Schritt	**Analyse der Konzeption von Schulbuchreihe und -buch** Ziel: Spezifische Fokussierungen erkennen
	Knoten des Vernetzungspentagraphen dienen als Orientierung; keine systematische Erschließung der Inhalte; Fokus liegt auf erstem Eindruck von Aktivitäten, Repräsentationen, Genese und Person
3. Schritt	**„Grobscan“ des Abschnitts und seiner unmittelbaren Umgebung** Ziel: Erfassung des inhaltlichen Aufbaus und von Ankerpunkten in anderen Knoten
	Der Knoten Inhalte steht im Fokus; andere Knoten dienen der Orientierung und erfassen Auffälligkeiten
4. bis 8. Schritt	**Detailanalyse mit Fokus auf den einzelnen Knoten Inhalte (4.), Repräsentationen (5.), Aktivitäten (6.), Genese (7.) und Person (8.)** Ziel: Erfassung der behandelten Inhalte, Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und Aspekte, die sich auf die Person des Schülers beziehen; Offenlegung der angesprochenen Fundamentalen Ideen; Erkennung von Auslassungen und Lücken
	Fokussierung jeweils eines Knotens; andere Knoten dienen der Orientierung und Erfassung von Vernetzungsmöglichkeiten zum jeweils untersuchten Knoten
9. Schritt	**Diskussion der Kanten** Ziel: Bewertung des Vernetzungspotentials zwischen den Knoten
	Kanten visualisieren wahrgenommene Vernetzungen zwischen den Knoten
10. Schritt	**Konstruktive Nutzung** Ziel: Ergänzung von wahrgenommenen Auslassungen in den Knoten und Kanten
	Allgemeine Überlegungen zum Inhalt der einzelnen Knoten und der Bedeutung der Kanten (vgl. Kapitel 5.2) geben Anregungen zur reichhaltigeren Füllung von Knoten und Kanten

Abbildung 68 Gerüst zur Anwendung des Vernetzungspentagraphen

Ich möchte Sie, lieber Leser, ermutigen den Vernetzungspentagraphen eigenständig anzuwenden. Einige - natürlich nicht repräsentative - Selbstversuche von

Lehrpersonen legen nahe, dass ein Einsatz des Vernetzungspentagraphen mit der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten prototypischen Anwendung durchaus möglich ist.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei den Lehrpersonen bedanken, die durch ihre (intuitive) Nutzung des Vernetzungspentagraphen dazu beigetragen haben, die Darstellung meiner Nutzung des Vernetzungspentagraphen für den Leser zugänglicher zu machen und somit, im Sinne der angestrebten Prototypischen Anwendung, die Wirkweise des Vernetzungspentagraphen deutlicher herauszustellen.

7 Schlussbetrachtungen

7.1 Zusammenfassung und Fazit

In Kapitel 1 wurden zwei wesentliche Fragen aufgeworfen, mit der sich die mathematikdidaktische Forschung zur Theoriebildung Fundamentaler Ideen seit über einem halben Jahrhundert beschäftigt:

a) Was sind die Fundamentalen Ideen der Mathematik?
b) Wie können Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht nutzbar gemacht werden?

Die vorliegende Arbeit hat zur Zielsetzung, auf beide Fragen zu antworten und somit sowohl ein theoretisches als auch ein unterrichtspragmatisches Modell Fundamentaler Ideen in den mathematikdidaktischen Diskurs einzubringen.

Den Anstoß für die im Rahmen dieser Arbeiten vorgenommene Aufarbeitung vorliegender Theorien Fundamentaler Ideen und deren Weiterentwicklung zu einer Gesamtperspektive lieferten die aktuellen Leitideen und Kompetenzen aus den deutschen Bildungsstandards. Die Untersuchung der Leitideen und Kompetenzen in Kapitel 2 zeigte, dass diese zwar im Bereich der Inhalts- und Schnittstellenideen Bedeutung haben, allerdings zentrale Bereiche von Mathematik ausblenden. Durch eine Orientierung an der US-amerikanisch ausgerichteten Definition der „mathematical literacy“ bleiben beispielsweise Kompetenzen, die sich auf Begriffe beziehen, wie sie sich in den österreichischen Bildungsstandards finden, unberücksichtigt.

Doch auch in Deutschland wurde der Diskurs über Fundamentale Ideen schon wesentlich reichhaltiger geführt. Die verschiedenen Theoriebildungen Fundamentaler Ideen wurden in Kapitel 3 nachgezeichnet. Dabei diente BRUNERs Arbeit „The Process of Education“ von 1960 als Ausgangspunkt für die Analyse und Synthese, da BRUNER im Zuge einer weitreichenden Reform des Mathematikunterrichts die Konzeption Fundamentaler Ideen in den wissenschaftlichen Diskurs einbrachte. In einer ersten Reformphase wurden damals Fundamentalen Ideen der Mathematik mit den modernen mathematischen Strukturbegriffen gleichgesetzt und somit besonders Theorie- und Begriffsideen, allerdings ohne ihren genetischen Hintergrund, betont; u.a. diese zunächst mathematisch und kognitionspsychologisch motivierten Reformbewegungen führten zur Einführung der Strukturmathematik in den Schulen, mit den bekannten negativen Konsequenzen.

Die genuin mathematikdidaktische Diskussion - die zeitlich einher ging mit der institutionellen Emanzipation der Mathematikdidaktik in Deutschland - Fundamentaler Ideen kann als Gegenbewegung zu diesen Entwicklungen verstanden werden. Während frühere mathematikdidaktische Arbeiten den Begriff der Fundamentalen Ideen eher vage ließen und deren Bedeutung zur Sinnkonstruktion im Mathematikunterricht hervorhoben, erfolgten Ende der 1970er bis Mitte der 1980er Jahre mit den Arbeiten von BENDER/SCHREIBER und SCHWEIGER zwei bis heute wegweisende systematische Erschließungen des Begriffs. Beide Arbeiten liefern dabei einerseits Beiträge zur logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen durch einen Kriterienkatalog und andererseits zur prototypischen Begriffsbildung durch Auflistung geeigneter Ideenkandidaten. Kaum eine später entstandene Arbeit nutzt nicht eine oder gar beide dieser beiden Urtheorien als Grundlage.

Symptomatisch für den Diskurs um Fundamentale Ideen ist bis heute, dass zwar weitgehend Einigkeit über die Kriterienkataloge herrscht, die von den einzelnen Autoren genannten Beispiele Fundamentaler Idee allerdings stark differieren. Trotz gemeinsamer Theoriebasis vieler Konzepte Fundamentaler Ideen konnte daher noch keine Einigkeit über einen Ideenkatalog Fundamentaler Ideen erzielt werden. Die Erarbeitung eines konsensfähigen theoriegestützten Ideenkatalogs stand also noch aus. Der in Kapitel 4 vorgestellte erweiterte Ideenkatalog versteht sich als Diskursbeitrag in diese Richtung, indem er bereits bestehende Theorien Fundamentaler Ideen diskursiv integriert und dort vorhandene Lücken schließt. Durch seine Gliederung in verschiedene Ideenkategorien (Theorie-, Begriffs-, Inhalts-, Prozess-, Schnittstellen-, Tätigkeits- und Persönlichkeitsideen) deckt er das um den Menschen erweitere Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik breiter als bisherige Theorien ab. Dabei sind Begriffs- und Inhaltsideen auf der Seite der Mathematik verortet, da sie den Produktcharakter von Mathematik beschreiben. Die Theorieideen, ebenfalls auf Seite der Mathematik eingeordnet, liegen auf einer Meta-Ebene, die sowohl Begriffs- als auch Inhaltsideen beeinflusst. Das Zusammenspiel der beiden Seiten des erweiterten Spannungsverhältnisses, in dem der Prozesscharakter von Mathematik zum Vorschein kommt, wird durch Prozess-, Schnittstellen- und Tätigkeitsideen beschrieben. Die abstrakteren Prozessideen liefern dabei einen Rahmen für die konkreteren Schnittstellen- und Tätigkeitsideen, welche den direkten Umgang des Menschen mit Mathematik beschreiben. Die Schnittstellenideen gehen eher von der Mathematik aus, in dem Sinne, dass der Mensch ein konkretes mathematisches Problem löst und dazu modelliert, kommuniziert, fragt etc. Tätigkeitsideen sind (eher) umgekehrt gerichtet. Hier wirkt der Mensch auf Mathematik, indem er Operationen mit und auf mathematischen Inhalten (z.B. das Optimieren einer Zielfunktion) oder mit und auf Mathematik selbst (z.B. beim Formalisieren seines Sachverhaltes) ausführt. Tätigkeitsideen habe also auch eine metamathematische Komponente.

Bei der Beschreibung der Seite Mathematik und des Zusammenspiels beider Seiten liegt der Gewinn des in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ideenkatalogs einerseits in einer stärkeren Strukturierung bereits bestehender Theorien Fundamentaler Ideen durch Schnittstellen-, Tätigkeits- und Inhaltsideen. Andererseits liefert er mit den Prozess-, Theorie- und Begriffsideen eine Beschreibung von Aspekten, die bislang bei Theorien Fundamentaler Ideen häufig nur implizit mitgedacht wurden.

Mit der Kategorie der Persönlichkeitsideen enthält der Katalog Fundamentale Ideen, die der Diskussion um Fundamentale Ideen neu sind. Zwar konnte in der vorgenommenen Analyse der Forschungstradition nachgewiesen werden, dass BRUNER solche Ideen von Anfang an in seiner Konzeption mitgedacht hatte und sie auch von einigen wenigen Autoren berücksichtigt wurden, allerdings fanden Persönlichkeitsideen bis jetzt noch keinen Einzug in eine systematische Erschließung Fundamentaler Ideen. In der vorliegenden Arbeit wurden Persönlichkeitsideen aus der pragmatischen Definition des englischen Begriffs „idea“ nach DEWEY hergeleitet. Im Sinne der logischen Begriffsbildung Fundamentaler Ideen beschreiben Persönlichkeitsideen Aspekte, die sich auf die Person des Forschenden resp. des Schülers beziehen. Damit können unter Fundamentalen Ideen nicht nur Inhalte und Tätigkeiten verstanden werden, sondern auch Einstellungen zum Forschen, die für die Beschäftigung mit Mathematik ganz wesentlich sind. Als Prototypen wurden in der Kategorie der Persönlichkeitsideen jene Persönlichkeitsmerkmale zusammengefasst, die von großen Mathematikern herausgestellt wurden wie Interesse und Neugier, Intuition, Kreativität und Beharrlichkeit. Diese Kategorie komplettiert den vorgestellten Ideenkatalog und ermöglicht eine umfassendere Beschreibung der Seite Welt/Mensch. Persönlichkeitsideen beziehen sich in diesem Rahmen auf gewisse Dispositionen einer Person, wie individuelle Erkenntnisarten und Einstellungen, die bei der Beschäftigung mit Mathematik angeregt und entwickelt werden können.

Zusätzlich zu diesem Beitrag mathematikdidaktischer Grundlagenforschung war es weiteres Ziel der vorliegenden Arbeit, einen Antwortvorschlag auf die Frage nach Möglichkeiten, wie Fundamentale Ideen im Mathematikunterricht wirksam werden können, zu liefern.

Das im Rahmen der vorliegenden Arbeit vorgestellte Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen liefert eine theoretische Basis für deren unterrichtliche Nutzung, wozu die Komplexität der vorgestellten Theorie reduziert werden musste. In der bisher nur unzureichend angegangenen Reduktion theoretischer Zugänge zu Fundamentalen Ideen wurde eine Ursache für deren fehlende Verankerung im Mathematikunterricht gesehen.

Zur hier vorgestellten Reduktion wurde genutzt, dass Fundamentale Ideen in der Forschungstradition stets der Vernetzung zentraler Bereiche des Mathematikunterrichts dienen. Als Beitrag zur Weiterentwicklung des Forschungsstands wurde in Kapitel 5 eine Reduktion der Ideenkategorien auf einen unterrichtspragmatischen Kern vorgeschlagen, der in der vorliegenden Arbeit die Bereiche Inhalte, Repräsentationen, Aktivitäten, Genese und Person umfasst. Nach dieser Reduktion sind die Ideenkategorien als Knoten des Vernetzungspentagraphen zusammengefasst.

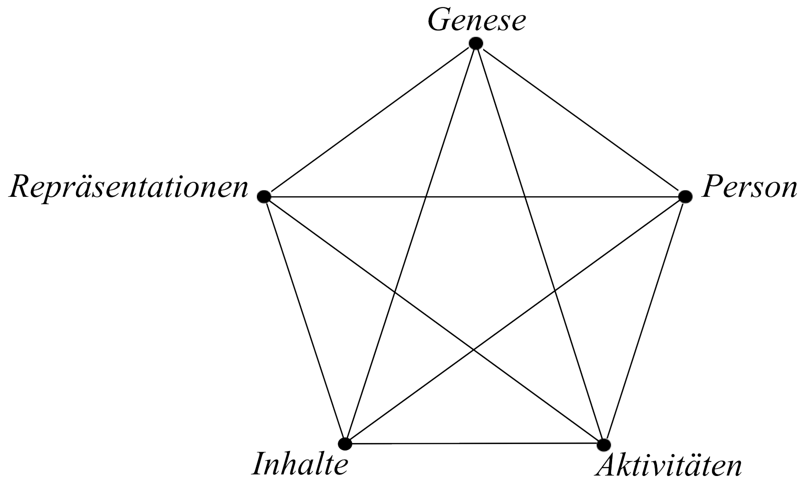


Abbildung 69 Der Vernetzungspentagraph

Der Vernetzungspentagraph stellt sodann als didaktische Brille des Lehrers ein Werkzeug u.a. zur unterrichtsvorbereitenden Analyse und Synthese von Unterrichtsmaterial dar. Durch seine Knoten und Kanten analysiert er dabei zweifach. Zum einen „füllen" sich die Knoten mit den im Schulbuch vorhandenen Inhalten, Repräsentationen und deren Genese, den angeregten Aktivitäten und den angestrebten Zielen, welche die Person des Schülers betreffen. Zum anderen werden über die Kanten des Vernetzungspentagraphen vorhandene und fehlende Vernetzungen zwischen seinen Knoten sichtbar. Das Anwendungspotential des Vernetzungspentagraphen konnte in der vorliegenden Arbeit exemplarisch anhand einer Schulbuchanalyse eines Abschnitts zum Thema „Quadratische Gleichungen" demonstriert werden (Kapitel 6).

Dabei zeigte sich, dass sich die Knoten und Kanten auf Basis des Schulbuchs reichhaltig füllen, obwohl auch Lücken erkannt werden konnten. Es gibt wohl doch gewisse Entsprechungen zwischen dem, was im mathematikdidaktischen Diskurs Fundamentaler Ideen beschrieben wird, und dem, was sich in der praktischen Ausgestaltung von Schulbüchern wiederfindet. Somit kann SCHREIBERs zu Beginn der vorliegenden Arbeit zitierte Bemerkung, dass Fundamentalen Ideen „wenn überhaupt, [...] nur bescheidene Auswirkungen auf den tatsächlichen Mathematik-Unterricht" haben, relativiert werden. Schließt man sich der plausiblen Annahme an, dass Mathematikunterricht in nicht unerheblichen Maße durch Schulbücher beeinflusst wird, so liegt nahe, dass Fundamentale Ideen, wenn auch nur implizit, Einzug in den Mathematikunterricht gefunden haben.

Bei der konkreten Nutzung des Vernetzungspentagraphen galt es dann zwei Dinge zu beachten. Zum einen lenkt er als didaktische Brille den individuellen Blick seines Nutzers. Jede Analyse und Synthese mit Hilfe des Vernetzungspentagraphen stellt demnach eine eigene Auseinandersetzung mit Unterrichtsinhalten dar und kann daher von Nutzer zu Nutzer unterschiedlich ausfallen. Hier liegt eine Stärke des Vernetzungspentagraphen, da er, ohne den Reichtum individuell geplanten Unterrichts einzuschränken, den Blick seines Nutzers auf theoretisch fundierte zentrale Aspekte von Mathematik lenkt.

Zur Demonstration des Vernetzungspentagraphen wurde daher auf die Methode „Cognitive Apprenticeship" zurückgegriffen, was bedeutet, dass der Vernetzungspentagraph nicht nur angewendet, sondern auch alle von *mir - als exemplarischer Nutzerin -* getroffenen Entscheidungen kommentiert und somit einem wissenschaftlichen und an der Unterrichtspraxis orientierten Diskurs zugänglich gemacht wurden.

Zum anderen kann der Vernetzungspentagraph, obwohl er zunächst als deskriptives Werkzeug fungiert, ein Maßstab für die qualitative Aufbereitung der untersuchten Inhalte sein. Ein Aufzeigen von vorhandenen oder ausgelassenen Fundamentalen Ideen im untersuchten Material macht didaktische Entscheidungen des Lehrers notwendig. Gerade die erkannten Lücken sollten mit Blick auf den konkreten Unterrichtsgang und die Lerngruppe geschlossen werden.

Zusammenfassend stellt also der Vernetzungspentagraph das Ergebnis einer wissenschaftlich fundierten Weiterentwicklung einer Theorie Fundamentaler Ideen zu deren unterrichtspraktischer Nutzung dar. Er schlägt somit als praxistaugliches Modell eine Brücke zwischen einer wissenschaftlichen Theorie Fundamentaler Ideen und ihrer Nutzung im Mathematikunterricht.

7.2 Einige Möglichkeiten für zukünftige Forschung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Theoriebildung Fundamentaler Ideen und deren Nutzung im Mathematikunterricht. Fundamentale Ideen wurden als Konzeption herausgestellt, die in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik auf eine lange Tradition zurückblickt. Neben der deutschsprachigen Forschung wäre es sicherlich interessant, auch auf internationale Ansätze zur Theoriebildung Fundamentaler Ideen in der Folge BRUNERs zurückzugreifen und solche mit deutschsprachigen Konzeptionen in Beziehung zu setzen. Die vorliegende Arbeit liefert dabei eine Basis für den deutschsprachigen Bereich. Gerade in jüngster Zeit wurden Fundamentale Ideen national und international zur Lehrerfortbildung genutzt. Auf das europäisches Forschungsprojekt „Awareness of Big ideas in mathematics Classrooms" („ABCmaths"), welches auf deutscher Seite von KUNTZE begleitet wurde, ist schon in Kapitel 2.1.3 hingewiesen worden. Auch in den USA sind Bestrebungen zur Nutzung Fundamentaler Ideen in der Lehrerfortbildung sichtbar, z.B. (Burrill 2008). Dass eine Ausrichtung des Mathematikunterrichts an Fundamentalen Ideen nicht nur in der westlichen Welt gefordert wird, zeigt die Arbeit von KYEONG-HYE HAN aus Korea (Kyeong-hye 2004). Darin werden Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip für Inhalte des Mathematikunterrichts diskutiert, wobei besonders historische Aspekte von Mathematik Berücksichtigung finden. Eine Untersuchung Fundamentaler Ideen im internationalen Diskurs bietet also ein weites Feld für zukünftige Forschungen.

Ein weiteres Forschungsanliegen, dessen Umfang allerdings den Rahmen der vorliegenden Arbeit gesprengt hätte, ist der Nachweis Fundamentaler Ideen oder begrifflicher Vorläufer in der (deutschsprachigen) Mathematikdidaktik vor der Formulierung dieses Konzepts durch BRUNER 1960. Hier besteht ganz offensichtlich eine Lücke im bisherigen Forschungsstand, da auch VOHNS in seiner 2016 erschienen Zusammenfassung, die einer internationalen Leserschaft einen Eindruck vom Forschungsstand Fundamentaler Ideen im deutschsprachigen Raum liefern soll, diesen Zeitraum auslässt (Vohns 2016). Zu untersuchen wäre dabei speziell, ob Mathematikunterricht an zentralen Aspekten von Mathematik ausgerichtet wurde und inwiefern innerhalb der mathematikdidaktischen Forschung eine Diskussion solcher zentraler Aspekte implizit oder explizit stattfand. Exemplarisch konnte die vorliegende Arbeit eine solche Diskussion zu Beginn des 20. Jahrhunderts in England und Deutschland andeuten. Der Brite WHITEHEAD forderte schon 1913 eine Ausrichtung des Mathematikunterrichts an „einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung“ (Whitehead 1962, S. 260). GUTZMER betonte im Zuge der Meraner Reformen, dass bei einer Neuorientierung von Lehrplänen das funktionale Denken sowie die räumliche Anschauung, zwei „Sonderaufgaben“ von Mathematik, besonders berücksichtigt werden sollen (Gutzmer 1905, S. 80). Der Preußische Lehrplan von 1925 benennt weitgehend die gleichen "Leitideen" wie die aktuellen Bildungsstandards der KMK. Eine systematische Untersuchung des Zeitraums vor 1960 würde eine sehr spannende Lücke im Forschungsstand schließen und gleichzeitig neue Erkenntnisse zur wissenschaftshistorischen Einordnung von BRUNERs Konzeption Fundamentaler Ideen liefern.

Auch in der Zeit nach 1960 gibt es noch Ansatzpunkte für weitere Forschung in Bezug auf Fundamentale Ideen. Beispielsweise könnte der Einfluss von Theoriebildungen Fundamentaler Ideen als Gegenbewegung zur universitären Mathematik im Mathematikunterricht als Beitrag zur Emanzipation der Mathematikdidaktik als eigenständige Wissenschaft untersucht werden. Diese Forschungsrichtung im Umfeld Fundamentaler Ideen ist von bisherigen Arbeiten noch nicht berücksichtigt worden.

In Bezug auf den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Vernetzungspentagraphen wäre dessen Anwendungspotential weiter zu untersuchen. Dies könnte in zwei Richtungen erfolgen. Zum einen wären weitere Themengebiete der Schulmathematik repräsentiert in verschiedenen Schulbüchern zu analysieren, um dort vorhandene oder ausgelassene Fundamentale Ideen zu erkennen. Mit (Hoffmann 2016) bzw. (von der Bank 2016) liegen dazu schon Analysen aktueller sowie historischer Schulbuchkapitel zu den Themen „Lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme“ bzw. „EUKLIDischer Algorithmus“ und „HERON-Verfahren“ vor. Der Vernetzungspentagraph kann dabei zur eigenen Unterrichtsvorbereitung, aber auch zur Weiterentwicklung von Schulbüchern in die Richtung einer von Fundamentalen Ideen gestützten Lernumgebung genutzt werden. Solche Überlegungen beschränken sich nicht auf die Konzeption von Schulbüchern, sondern können auch zur Lehrplankonstruktion angewendet werden.

Geht man davon aus, dass Schulbücher im Mathematikunterricht das zentrale Medium zur Unterrichtsvorbereitung für Lehrer sind, stellen sich generell die Forschungsfragen, ob, wie und welche didaktischen Brillen Lehrer nutzen, um aus Schulbüchern Lernumgebungen für den Unterricht zu gestalten. Diese Fragen beziehen sich ganz allgemein auf die Bereitschaft von Lehrer, überhaupt Inhalte in Schulbücher weiter auszugestalten, liegt ja eigentlich mit dem Schulbuch ein fertiges von Experten aufbereitetes Material vor. Ein Teil der Frage bezieht sich auf die Kenntnis von und Bereitschaft zum Einsatz didaktischer Brillen. Dies sind Fragen, zu denen die mathematikdidaktische Forschung zur Schulbuchnutzung sowie zu Lehrerfortbildungen in Bezug auf den Vernetzungspentagraphen angeregt wird.

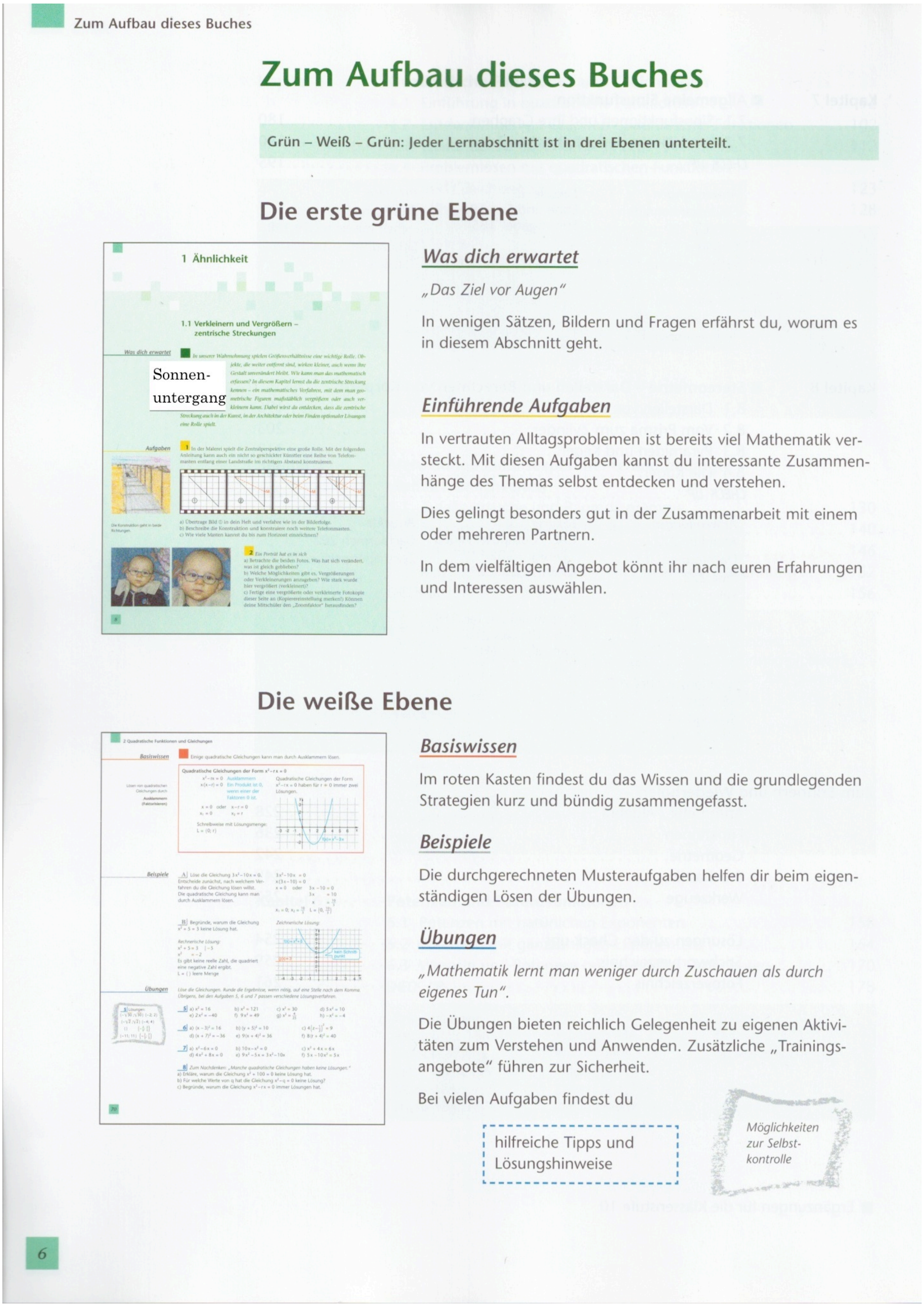
Konkret für die Anwendbarkeit des Vernetzungspentagraphen als Analysewerkzeug sind in solchem Rahmen empirische Untersuchungen möglich. Dazu wäre eine Studie denkbar, in der der Vernetzungspentagraph von praktizierenden Lehrern eingesetzt wird, um, in Anknüpfung an die Nutzung Fundamentaler Ideen zur Lehrerfortbildung, zu untersuchen, wie und inwieweit der Vernetzungspentagraph die jeweiligen Lehrer bei der Gestaltung reichhaltiger Lernumgebungen unterstützt. Das methodische Vorgehen einer solchen Studie könnte sich am „Cognitve Apprenticeship“ ausrichten. Damit kann sichergestellt werden, dass Lehrer mit den benötigten Strategien und Begründungen in der Anwendung vertraut gemacht werden und somit Entscheidungen zur Gestaltung von Lernumgebungen kommunizierbar werden und bleiben.

Die Methode „Cognitive Apprenticeship“ ist natürlich nicht auf die Anwendung des Vernetzungspentagraphen beschränkt. Sie stellt eine hervorragende Möglichkeit dar, mathematikdidaktische Theorien durch Offenlegung leitender Gedanken und verwendeter Strategien kommunizierbarer zu machen. Somit können auch weitere Theorien einem praxisorientierten Diskurs zugänglich gemacht werden. Eine Möglichkeit weiterer Forschung und Entwicklung wäre daher, diese Methode auch auf andere mathematikdidaktische Theorien anzuwenden. Einen Ansatzpunkt hierfür kann in der Suche nach Fundamentalen Ideen der Mathematikdidaktik durch die Arbeit von REZAT (u.a.) gesehen werden (Rezat 2014). Die Methode „Cognitve Apprenticeship“ kann eine Sprache für die dort herausgestellte Idee der Transformation liefern.

Die Ergebnisse weiterer theoretischer und empirischer Untersuchungen des Anwendungspotentials des Vernetzungspentagraphen sollten natürlich auch wieder auf dessen Gestaltung und die in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene Theoriebildung Fundamentaler Ideen zurückwirken. Im gegenseitig befruchtenden Wechselspiel zwischen Theoriebildungen einerseits und deren praktischen Anwendungen anderseits, für die „Cognitive Apprenticeship“ eine Modellsprache liefert, bilden das vorgeschlagene Begriffsverständnis Fundamentaler Ideen und der Vernetzungspentagraph eine Basis, die es im Sinne des „Progressive Inquiry“ DEWEYs stets kritisch zu hinterfragen und weiterzuentwickeln gilt.

8 Anhang

8.1 Vorwort



Zum Aufbau dieses Buches

Zum Aufbau dieses Buches

Grün – Weiß – Grün: Jeder Lernabschnitt ist in drei Ebenen unterteilt.

Die erste grüne Ebene

Was dich erwartet

„Das Ziel vor Augen"

In wenigen Sätzen, Bildern und Fragen erfährst du, worum es in diesem Abschnitt geht.

Einführende Aufgaben

In vertrauten Alltagsproblemen ist bereits viel Mathematik versteckt. Mit diesen Aufgaben kannst du interessante Zusammenhänge des Themas selbst entdecken und verstehen.

Dies gelingt besonders gut in der Zusammenarbeit mit einem oder mehreren Partnern.

In dem vielfältigen Angebot könnt ihr nach euren Erfahrungen und Interessen auswählen.

Die weiße Ebene

Basiswissen

Im roten Kasten findest du das Wissen und die grundlegenden Strategien kurz und bündig zusammengefasst.

Beispiele

Die durchgerechneten Musteraufgaben helfen dir beim eigenständigen Lösen der Übungen.

Übungen

„Mathematik lernt man weniger durch Zuschauen als durch eigenes Tun".

Die Übungen bieten reichlich Gelegenheit zu eigenen Aktivitäten zum Verstehen und Anwenden. Zusätzliche „Trainingsangebote" führen zur Sicherheit.

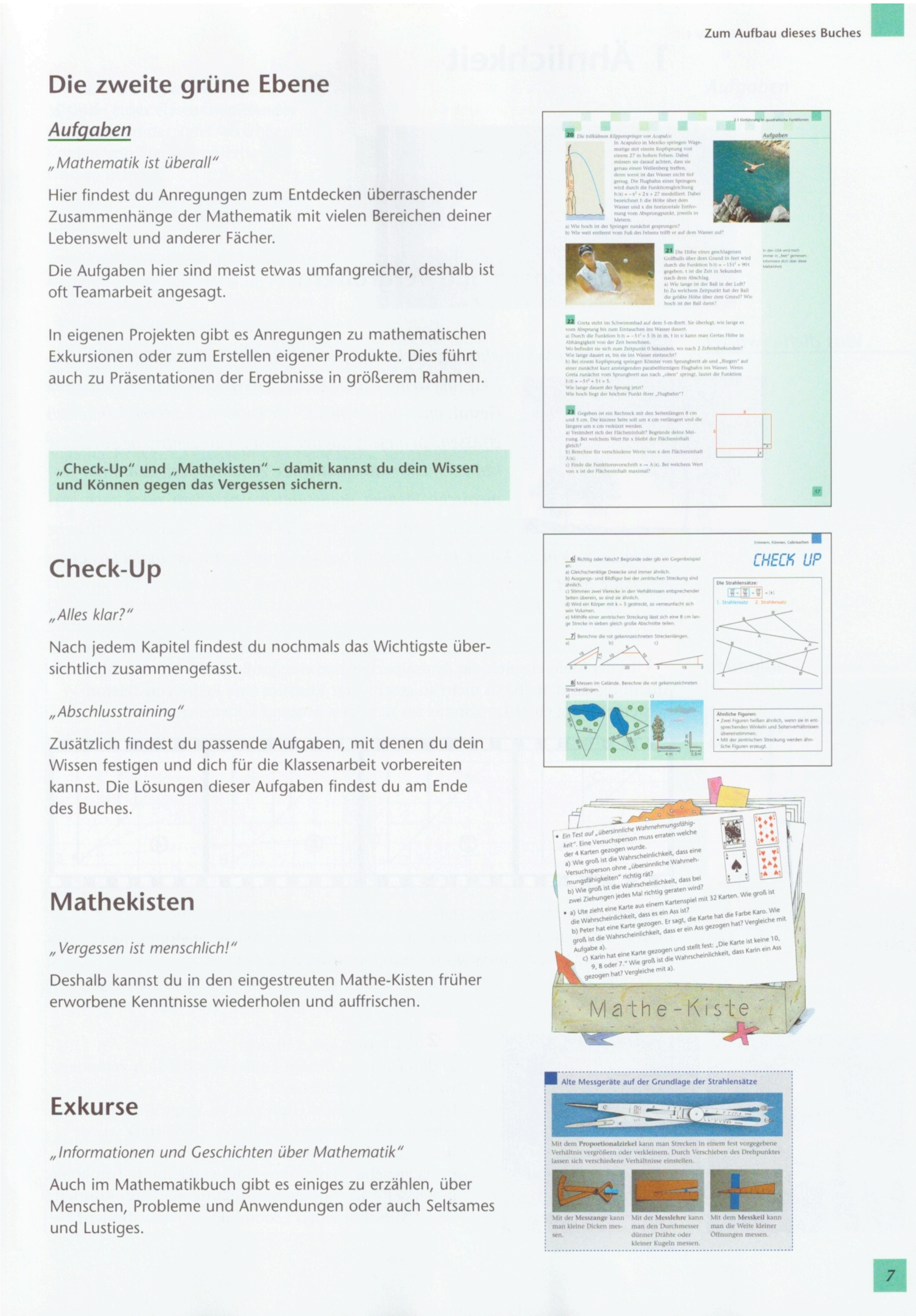
Bei vielen Aufgaben findest du

hilfreiche Tipps und Lösungshinweise

Möglichkeiten zur Selbstkontrolle

6

Abbildung 70 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 6



Die zweite grüne Ebene

Aufgaben

„Mathematik ist überall"

Hier findest du Anregungen zum Entdecken überraschender Zusammenhänge der Mathematik mit vielen Bereichen deiner Lebenswelt und anderer Fächer.

Die Aufgaben hier sind meist etwas umfangreicher, deshalb ist oft Teamarbeit angesagt.

In eigenen Projekten gibt es Anregungen zu mathematischen Exkursionen oder zum Erstellen eigener Produkte. Dies führt auch zu Präsentationen der Ergebnisse in größerem Rahmen.

„Check-Up" und „Mathekisten" – damit kannst du dein Wissen und Können gegen das Vergessen sichern.

Check-Up

„Alles klar?"

Nach jedem Kapitel findest du nochmals das Wichtigste übersichtlich zusammengefasst.

„Abschlusstraining"

Zusätzlich findest du passende Aufgaben, mit denen du dein Wissen festigen und dich für die Klassenarbeit vorbereiten kannst. Die Lösungen dieser Aufgaben findest du am Ende des Buches.

Mathekisten

„Vergessen ist menschlich!"

Deshalb kannst du in den eingestreuten Mathe-Kisten früher erworbene Kenntnisse wiederholen und auffrischen.

Exkurse

„Informationen und Geschichten über Mathematik"

Auch im Mathematikbuch gibt es einiges zu erzählen, über Menschen, Probleme und Anwendungen oder auch Seltsames und Lustiges.

Abbildung 71 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 7

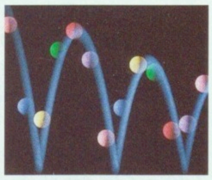
8.2 Abschnitt 4.1

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

2.1 Einführung in quadratische Funktionen

Was dich erwartet

In vielen Situationen werden „quadratische“ Funktionen benutzt, um Probleme in der Mathematik, den Naturwissenschaften und vielen anderen Gebieten zu modellieren. Wie die linearen Funktionen kommen die quadratischen Funktionen sehr häufig vor.



**Hochgeschwin-
digkeitsfahrzeug**

Hochgeschwindigkeitsfahrzeug mit Bremsfallschirm

Quadratische Funktionen kann man benutzen, um z. B. die Länge des Bremsweges, den Flug eines Balles oder den Wertverlust eines Autos zu modellieren.
Eines wirst du sicher bereits jetzt vermuten: Im Funktionsterm von quadratischen Funktionen kommt der Term x^2 vor. In diesem und den nächsten Lernabschnitten wirst du erleben, welche besonderen Eigenschaften diese Funktionen darüber hinaus haben.

Aufgaben

1 *Was macht den Unterschied?*
a) Zeichne die Graphen der Funktionen $y = 2x$ und $y = x^2$. Erstelle zunächst eine Wertetabelle mit $-3 \le x \le 3$, Schrittweite 0,5 und zeichne dann.
b) Vergleiche die beiden Graphen und Tabellen. Beschreibe den Graphen von $y = x^2$ möglichst genau.

2 *Erkennst du ein Muster?*
a) Übertrage die Wertepaare der Tabellen jeweils in ein Koordinatensystem. Vergleiche.
b) Finde zu jeder Tabelle eine Funktionsgleichung y = ■ und überprüfe deine Vermutung.

(1)

x	y
−2	−2
−1	−1
0	0
1	1
2	2
3	3

(2)

x	y
−2	−4
−1	−2
0	0
1	2
2	4
3	6

(3)

x	y
−2	1
−1	2
0	3
1	4
2	5
3	6

(4)

x	y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

(5)

x	y
−2	1
−1	0
0	1
1	4
2	9
3	16

(6)

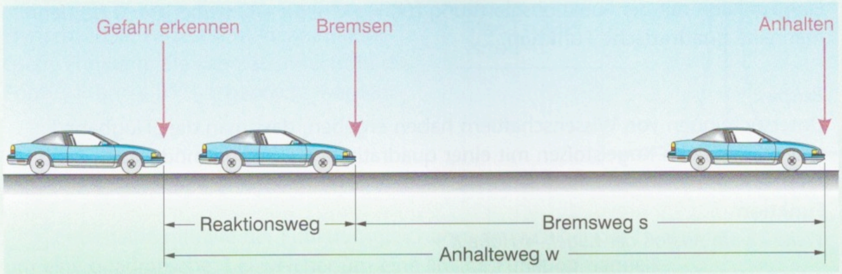
x	y
−2	8
−1	2
0	0
1	2
2	8
3	18

92

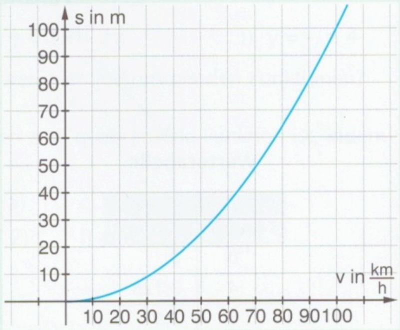
Abbildung 72 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 92

Aufgaben

3 Die Länge des Bremsweges eines Autos ist von der Geschwindigkeit abhängig. Der Zusammenhang zwischen dem Bremsweg s in Metern und der Geschwindigkeit v in km/h kann bei trockener Straße mit der Funktion $s(v) = \frac{v^2}{100}$ modelliert werden.



a) Wie lang ist der Bremsweg s bei einer Geschwindigkeit von 30 km/h, wie lang bei der doppelten (dreifachen) Geschwindigkeit?
b) Ein Auto wird mit einer Vollbremsung zum Stand gebracht. Aus der Länge der Bremsspur von 32 m kann man die Geschwindigkeit des Autos abschätzen.
c) Der Anhalteweg eines Autos ist die zurückgelegte Strecke von dem Moment, an dem der Fahrer eine Gefahr bemerkt, bis zu dem Zeitpunkt, an dem das Auto steht.



Bremsweg

Du kannst die Fragen grafisch oder rechnerisch beantworten.

Der Anhalteweg w kann mit der Funktion $w(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}$ berechnet werden. Übertrage und ergänze die Tabelle, zeichne den Graphen der Funktion. Wie lang ist der Anhalteweg w bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h?

Anhalteweg

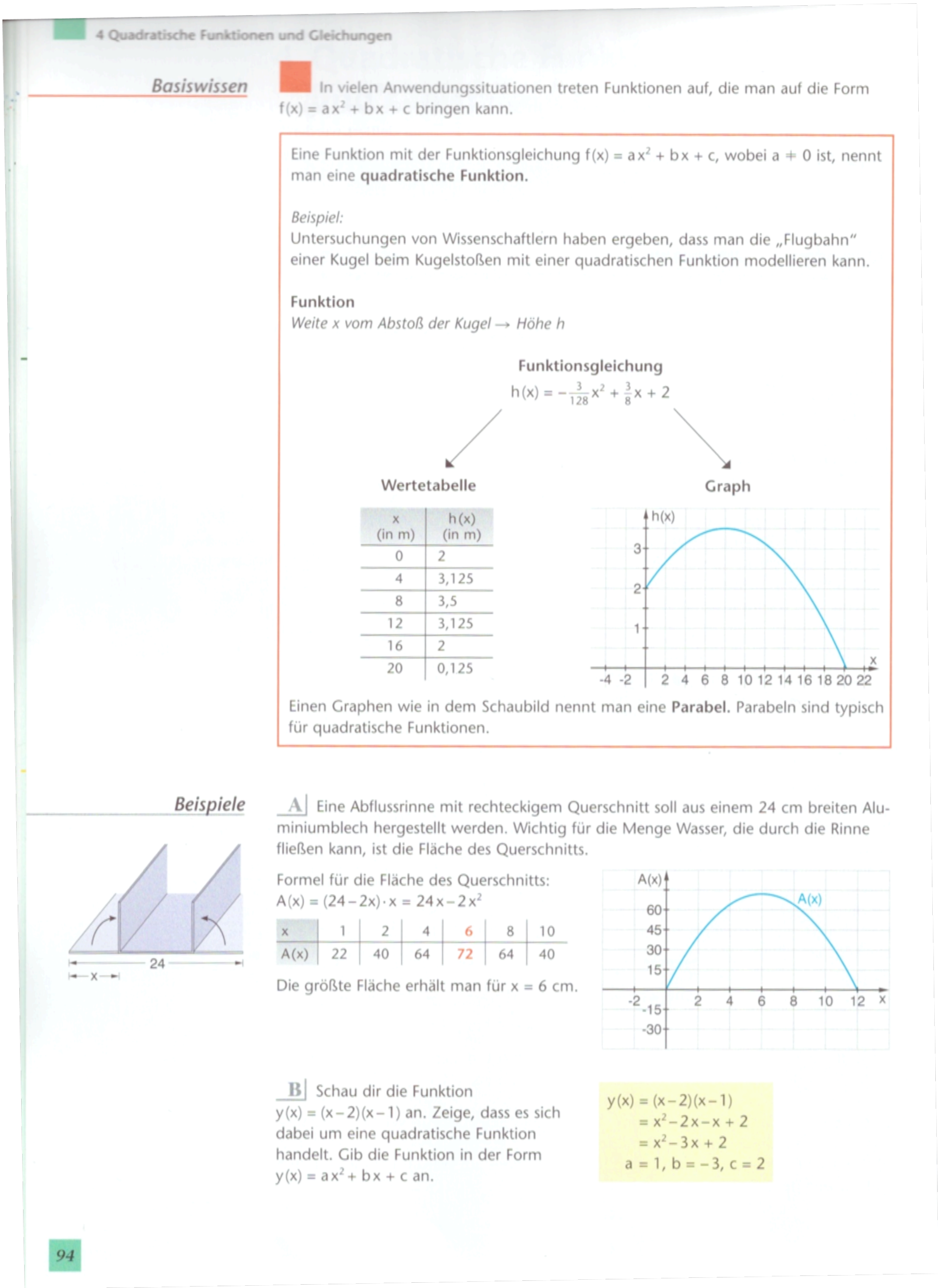
v (km/h)	w (m)
0	0
50	40
■	54
80	■
100	130
■	270
200	■

4 *Der Preis beeinflusst die Nachfrage – Wie macht man den größten Gewinn?*
Im vergangenen Jahr kosteten die Eintrittskarten für die Theateraufführung des Sebastian-Münster-Gymnasiums 5 €. Es kamen 300 Besucher.
In diesem Jahr möchte das Gymnasium einen größeren Gewinn erzielen und beabsichtigt die Eintrittspreise zu verändern. Man vermutet, dass bei einer Erhöhung des Preises um je 1 € ungefähr 30 Besucher weniger kommen, bei einer Preissenkung um je 1 € ungefähr 30 Besucher mehr.
a) Ergänze die Tabelle in deinem Heft.

Preis-änderung	Eintritts-preis	Besucher-zahl	Einnahmen E(x)
−2	■	■	■
−1	■	■	■
0	5	300	1500
1	6	270	1620
2	7	240	■
3	8	■	■
4	■	■	■
x	5 + x	300 − 30x	■

b) In der letzten Zeile der Tabelle stehen die Terme, mit denen man zu jeder Preisänderung x den Eintrittspreis und die Besucherzahl berechnen kann. Es fehlt noch der Term zur Berechnung der Einnahmen.
c) Zeichne den Graphen der Funktion: $x \rightarrow$ Einnahmen E(x). Für welche Preisänderung x erhält man die größten Einnahmen?
d) Die Nachfrage nach Eintrittskarten hängt vom Preis ab. Warum gilt dies für eine Aufführung des Schultheaters nur bedingt?

Abbildung 73 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 93



4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Basiswissen

In vielen Anwendungssituationen treten Funktionen auf, die man auf die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ bringen kann.

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$, wobei $a \neq 0$ ist, nennt man eine **quadratische Funktion.**

Beispiel:
Untersuchungen von Wissenschaftlern haben ergeben, dass man die „Flugbahn" einer Kugel beim Kugelstoßen mit einer quadratischen Funktion modellieren kann.

Funktion
Weite x vom Abstoß der Kugel → Höhe h

Funktionsgleichung
$h(x) = -\frac{3}{128}x^2 + \frac{3}{8}x + 2$

Wertetabelle

x (in m)	h(x) (in m)
0	2
4	3,125
8	3,5
12	3,125
16	2
20	0,125

Graph

Einen Graphen wie in dem Schaubild nennt man eine **Parabel.** Parabeln sind typisch für quadratische Funktionen.

Beispiele

A Eine Abflussrinne mit rechteckigem Querschnitt soll aus einem 24 cm breiten Aluminiumblech hergestellt werden. Wichtig für die Menge Wasser, die durch die Rinne fließen kann, ist die Fläche des Querschnitts.

Formel für die Fläche des Querschnitts:
$A(x) = (24 - 2x) \cdot x = 24x - 2x^2$

x	1	2	4	6	8	10
A(x)	22	40	64	72	64	40

Die größte Fläche erhält man für x = 6 cm.

B Schau dir die Funktion $y(x) = (x-2)(x-1)$ an. Zeige, dass es sich dabei um eine quadratische Funktion handelt. Gib die Funktion in der Form $y(x) = ax^2 + bx + c$ an.

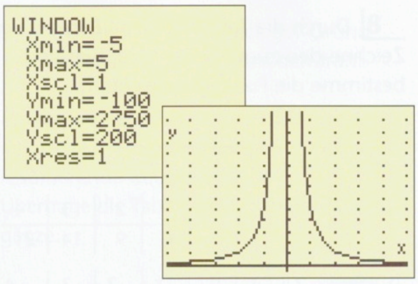
$y(x) = (x-2)(x-1)$
$= x^2 - 2x - x + 2$
$= x^2 - 3x + 2$
$a = 1,\ b = -3,\ c = 2$

94

Abbildung 74 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 94

C Entscheide, ob die Funktion mit $y(x) = \frac{1000}{x^2}$ eine quadratische Funktion ist.

Lösung:
Der Graph ist keine Parabel, sondern eine Hyperbel. Die Funktion ist keine quadratische Funktion. Sie kann auch nicht in die Form $y = ax^2 + bx + c$ gebracht werden.



5 Entscheide mithilfe der Funktionsgleichung, bei welcher der Funktionen es sich um eine quadratische, bei welcher um eine lineare Funktion handelt.

a) $y = 2x^2 - 3x + 5$ b) $y = 2x - 4$ c) $y = x$ d) $y = x^2$ e) $y = \frac{1}{x}$

f) $y = \frac{2}{3}x^2$ g) $y = -x + \frac{1}{4}$ h) $y = 3x^2 - 2x$ i) $y = \frac{1}{x^2} + 4$

Kennst du auch eine Bezeichnung für die anderen hier vorkommenden Funktionen?

Übungen

5 Vier quadratische Funktionen sind dabei.

6 Zeige, dass jede der folgenden Funktionen eine quadratische Funktion ist, indem du sie in die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ bringst.

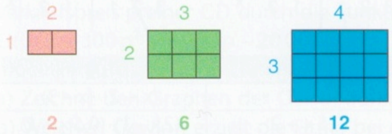
a) $f(x) = (x-3)(x+8)$ b) $f(x) = \left(x + \frac{3}{4}\right)(x-5)$ c) $f(x) = 2x(x-1{,}6)$

d) $f(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$ e) $f(x) = (x+2)(x+2)$ f) $f(x) = x\left(2x + \frac{5}{2}\right)$

Hilfe findest du bei Beispiel B.

7 *Rechteckszahlen*

Die ersten drei Zahlen in der Folge der „Rechteckszahlen" sind dargestellt.

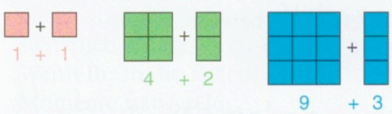


a) „Zeichne" die nächsten zwei Rechteckszahlen.

b) Erkennst du das Muster in den Zahlen? Schreibe die ersten zehn Rechteckszahlen auf.

c) Mit der Abbildung oben kannst du eine quadratische Funktion zur Berechnung der Rechteckszahlen finden.

d) Man kann die Rechteckszahlen auch anders aufzeichnen:



Verwende dieses Muster, um eine quadratische Funktion aufzustellen, mit der man ebenfalls die Rechteckszahlen berechnen kann. Durch Termumformung kannst du nachweisen, dass die beiden Funktionen identisch sind.

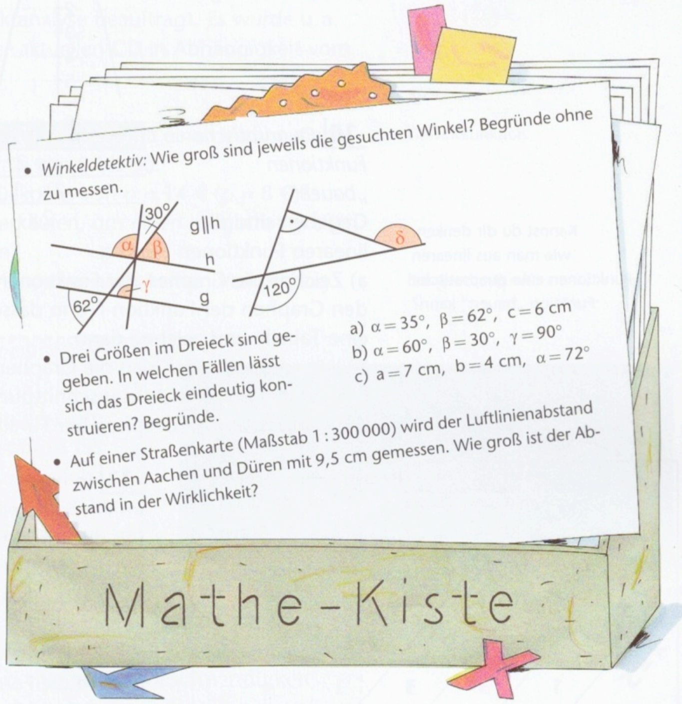


Abbildung 75 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 95

Übungen

8 Durch die Tabelle ist eine Funktion gegeben. Zeichne den zugehörigen Graphen und bestimme die Funktionsgleichung.

a)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	2	0	2	8	18	32

b)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	9	6	5	6	9	14	21

c)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−4	−1	0	−1	−4	−9	−16

d)

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

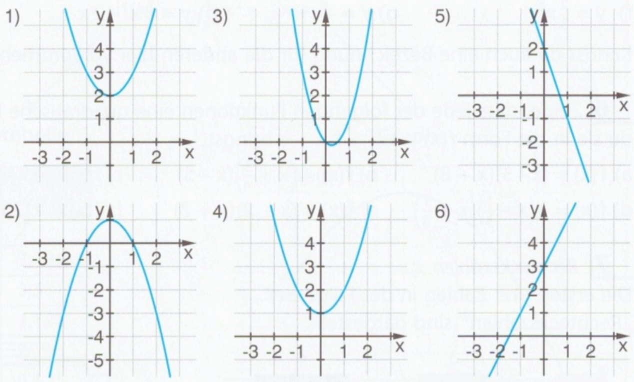
x	$y = x^2$
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Diese Tabelle kann dir helfen.

Der GTR kann bei der Erfolgskontrolle helfen.

9 Welcher Graph gehört zu welcher Gleichung?

a) $f(x) = -3x + 2$
b) $f(x) = x^2 + 1$
c) $f(x) = x^2 + 2$
d) $f(x) = -x^2 + 1$
e) $f(x) = 2x + 3$
f) $f(x) = 2x^2 - x$



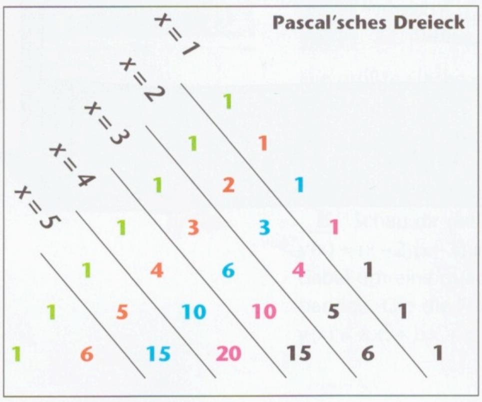
10 *Quadratische Funktionen „bauen"*

Kannst du dir denken, wie man aus linearen Funktionen eine quadratische Funktion „bauen" kann?

Gegeben sind die linearen Funktionen f und g.

f	g	f·g
$x + 2$	$x - 3$	$(x + 2)\cdot(x - 3)$
$2x - 1$	$0{,}5x + 2$	$(2x - 1)\cdot(0{,}5x + 2)$
$2x$	$x + 2$	$2x\cdot(x + 2)$

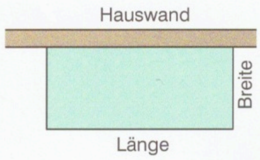
a) Zeichne die Graphen der Funktionen f und g in ein Koordinatensystem. Zeichne dann den Graphen der Funktion f·g in dasselbe Koordinatensystem. Erstelle dazu zunächst eine Tabelle und zeichne dann.
b) Wie unterscheiden sich die Graphen von f und g von dem Graphen von f·g?
c) Wie hängen die x-Achsenschnittpunkte der Graphen von f und g mit den x-Achsenschnittpunkten des Graphen der Funktion f·g zusammen?



11 In einem Mathematiklexikon steht, dass man die Zahlen im Pascal'schen Dreieck mit Formeln berechnen kann.
Für die „grüne" Kolonne: $y = 1$,
für die „rote" Kolonne: $y = x$,
für die „blaue" Kolonne: $y = \frac{1}{2}x(x + 1)$,
für die „pinkfarbene" Kolonne: $y = \frac{1}{6}x(x + 1)(x + 2)$.
a) Sind die Formeln korrekt? Erstelle für jede der Funktionen eine Tabelle für $1 \le x \le 7$. Vergleiche mit den Zahlen im Pascal'schen Dreieck.
b) Welche der Funktionen ist eine quadratische Funktion?
c) Wie könnte eine Formel zur Berechnung der Zahlen in der nächsten Kolonne des Pascal'schen Dreiecks lauten? Überprüfe selbst.

Abbildung 76 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 96

Übungen



12 Tom möchte für sein Kaninchen im Garten ein Gehege mit rechteckiger Grundfläche an eine Hauswand bauen. Im Keller hat er eine Rolle mit 20 m Maschendraht gefunden.

Breite (m)	Länge (m)	Fläche (m^2)	Draht (m)
1	18	18	20
2	16	32	■
3	14	■	■
4	■	■	■
…	…	…	…
x	■	■	■

a) Die Tabelle enthält verschiedene mögliche Breiten und Längen und daraus resultierende Rechteckflächen. Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze.

b) Finde einen Funktionsterm $l(x)$, der den Zusammenhang zwischen Länge l und Breite x beschreibt. Welche Werte kann man für x sinnvollerweise einsetzen?
c) Den Flächeninhalt $A(x)$ des Kaninchenstalls kann man aus der Breite x und der Länge $l(x)$ berechnen. Bestimme die entsprechende Funktionsgleichung.
d) Für welche Breite und Länge erhält man den größten Flächeninhalt?

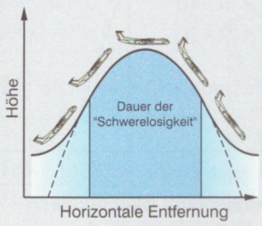
13 Die Firma *Sound GmbH* stellt CDs her. Sie möchte ihren Gewinn vergrößern. Daher wurde eine Unternehmensberatung mit einer Marktanalyse beauftragt. Es wurde u. a. festgestellt, dass sich der monatliche Gewinn G der aktuellen CD in Abhängigkeit vom Verkaufspreis p einer CD durch die Funktion
$G(p) = -300p^2 + 6000p - 20000$
modellieren lässt. Wenn G negativ ist, bedeutet das, dass die Firma einen Verlust macht.
a) Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion G für p von 0 bis 30.
b) Welchen Gewinn erzielt die Firma bei einem Stückpreis von p = 14 € (p = 8 €)?
c) Zu welchem Preis sollte die Firma das Produkt verkaufen, um einen möglichst großen Gewinn zu erzielen? Wie groß ist der Gewinn dann?
d) Bei welchem Preis macht die Firma keinen Gewinn, aber auch keinen Verlust (sog. Break-even-Punkt)?

Gewinnfunktion

Break-even-Punkt

Schwerelosigkeit und Parabeln

Ihr habt bestimmt schon einmal im Fernsehen gesehen, wie Astronauten schwerelos in der Weltraumstation ISS (International Space Station) schweben. Wie man sich dabei wohl fühlt? Ein bisschen Schwerelosigkeit habt ihr sicherlich schon bei einer Fahrt mit der Achterbahn erlebt. Wenn ihr in die Tiefe stürzt, dann seid ihr für einige Momente schwerelos.



Astronauten können in einem Flugzeug die Schwerelosigkeit trainieren. Das Flugzeug mit den Astronauten fliegt mit großer Geschwindigkeit, zieht steil nach oben und fliegt dann im Sturzflug nach unten. Dabei folgt es einer parabelförmigen Bahn. Bei einem solchen Flug kann man eine Dauer der Schwerelosigkeit von 15 bis 20 Sekunden erreichen.

Abbildung 77 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 97

Basiswissen

Typische Fragen beim Bearbeiten von Problemen mit quadratischen Funktionen sind unter anderem diese:

(1) Wo schneidet der Graph die x-Achse?
(2) Wo schneidet der Graph die y-Achse?
(3) Wo ist der höchste (niedrigste) Punkt des Graphen?
(4) Welchen y-Wert erhält man für einen bestimmten x-Wert?
(5) Für welchen x-Wert erhält man einen bestimmten y-Wert?

Nach dem Abschuss einer Rakete kann man jedem Zeitpunkt t die aktuelle Höhe h(t) der Rakete zuordnen. Man kann diese Zuordnung bei allen Raketen gut mit einer quadratischen Funktion modellieren.

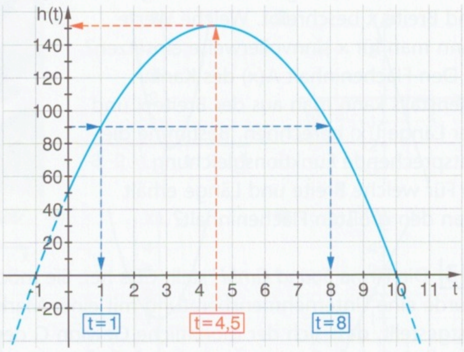
Funktion: $t \to h(t)$
Funktionsgleichung: $h(t) = -5t^2 + 45t + 50$

Tabelle

t (in s)	h(t) (in m)
0	50
1	90
2	120
3	140
4	150
5	150
6	140
7	120
8	90
9	50
10	0

Parabeln sind symmetrisch.

Graph



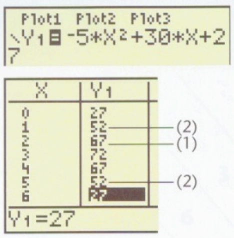
Welche größte Höhe erreicht die Rakete nach welcher Flugzeit? (siehe Frage (3) oben) — ca. 151 m nach 4,5 Sekunden

Wann trifft die Rakete auf dem Boden auf? (siehe Frage (1)) — nach 10 Sekunden

In welcher Höhe startet die Rakete? (siehe Frage (2)) — in 50 m Höhe

Nach welcher Zeit hat die Rakete eine Höhe von 90 m? (siehe Frage (5)) — nach 1 Sekunde und nach 8 Sekunden

Beispiele



D *y-Wert gesucht*

Die Höhe einer Rakete in Abhängigkeit von der Zeit wird durch die Funktion $h(t) = -5t^2 + 30t + 27$ modelliert (h in m und t in s).

(1) Welche Höhe hat die Rakete nach 2 Sekunden erreicht?

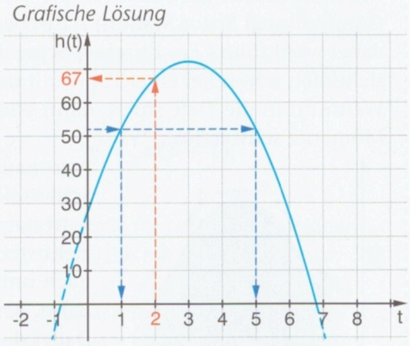
(2) Zu welchem Zeitpunkt hat die Rakete eine Höhe von 52 m erreicht?

(1) *Berechnen durch Einsetzen.*

$h(2) = -5 \cdot 2^2 + 30 \cdot 2 + 27$
$= 67$

Nach 2 Sekunden hat die Rakete eine Höhe von 67 m erreicht.

Grafische Lösung



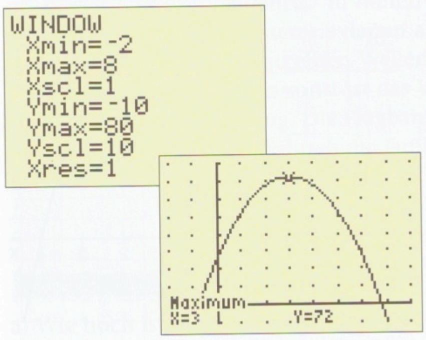
(2) Im Schaubild kann man ablesen:
$h(1) = h(5) = 52$ m.

Abbildung 78 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 98

Beispiele

E Die größte Höhe, die die Rakete aus Beispiel D erreicht, kann man ablesen.

Grafische Lösung



Rechnerische Lösung

Schaut man sich die Tabelle oder den Graphen der quadratischen Funktion an, so erkennt man, dass er symmetrisch zu t = 3 ist. Der höchste Punkt wird daher zum Zeitpunkt t = 3 s erreicht.

$h(3) = -5 \cdot 3^2 + 30 \cdot 3 + 27 = 72$

Die maximale Höhe beträgt 72 m.

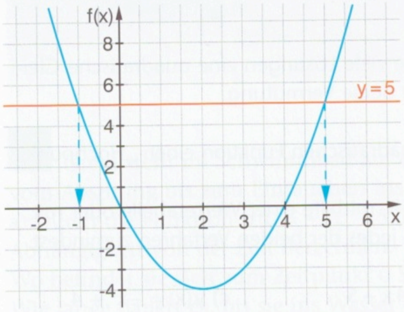
F *x-Wert gesucht*

GTR

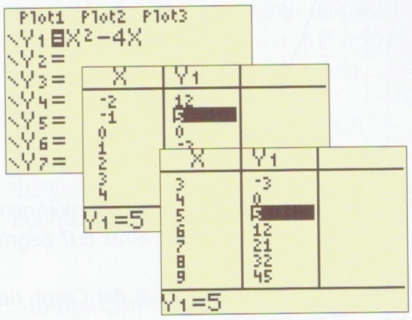
Es ist $f(x) = x^2 - 4x$. Für welchen x-Wert hat der Term $x^2 - 4x$ den Wert 5?

Grafische Lösung

Man zeichnet den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x$ und eine Waagerechte bei y = 5. Die x-Koordinaten der Schnittpunkte der Parabel und der Waagerechten liefern die Lösung.



Lösung mit Tabelle



$x_1 = -1$ oder $x_2 = 5$

G Sucht man die x-Werte, für die eine quadratische Funktion einen bestimmten y-Wert annimmt, so führt dies auf eine quadratische Gleichung. Einfache quadratische Gleichungen können wir bereits rechnerisch lösen:

$f(x) = 3x^2 - 15$

Gesucht ist der x-Wert, für den f(x) = 0 ist.

quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichung

$3x^2 - 15 = 0$

Rechnerische Lösung

$3x^2 - 15 = 0 \quad | + 15$

$3x^2 = 15 \quad | : 3$

$x^2 = 5$

$x_1 = \sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$

Es gibt **zwei** Lösungen.

Übungen

14 Bestimme die Lösungen der Gleichung durch Rechnung.

a) $x^2 - 9 = 0$ b) $-x^2 + 5 = 0$ c) $3x^2 - 6 = 0$ d) $x^2 + 1 = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $3x^2 + 2 = 0$ g) $x^2 - 8 = 0$ h) $6x^2 - 27 = 0$

14 Lösungen:
{} {−3; 3}
$\{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$ {}
$\{-\sqrt{8}; \sqrt{8}\}$ $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$
$\{-\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}\}$ $\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\}$

15 Stelle eine Gleichung auf, die die angegebenen Lösungen hat.

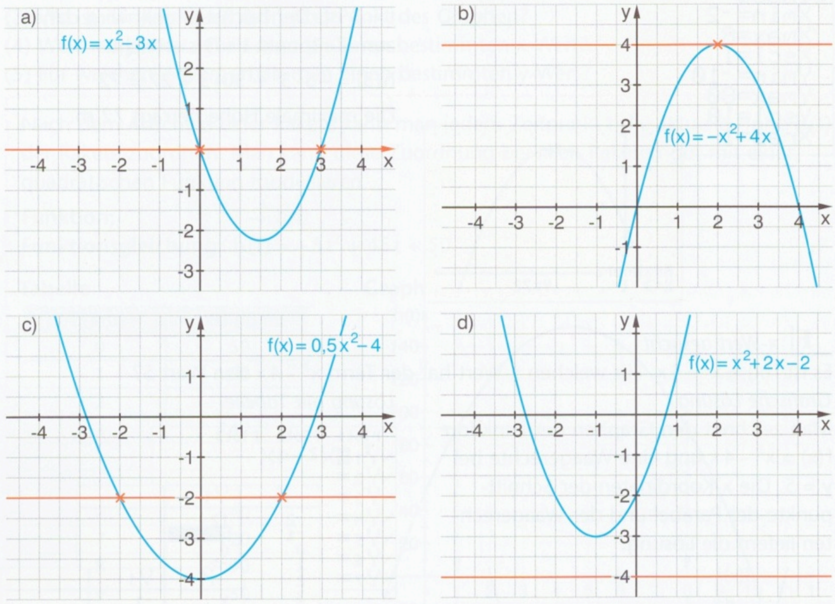
a) $x_1 = 2$; $x_2 = -2$ b) $x_1 = \sqrt{7}$; $x_2 = -\sqrt{7}$ c) $x_1 = 6$; $x_2 = -6$

16 Wasserfontänen lassen sich näherungsweise mit Parabeln beschreiben. Aus einer Wasserkanone soll Wasser 400 m weit und 40 m hoch spritzen. Überprüfe, ob diese Fontäne mit der Funktionsgleichung $h(x) = -0{,}001\,x^2 + 0{,}4x$ modelliert werden kann.

Abbildung 79 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 99

Übungen

17 *Grafische Lösungen von quadratischen Gleichungen*
Welche Gleichungen werden hier grafisch gelöst? Lies die Lösungen ab. Mache die Probe, indem du die Lösungen in die von dir aufgeschriebene Gleichung einsetzt.

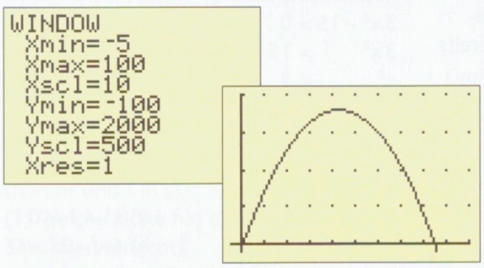


Man kann an den vier Aufgaben erkennen, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung haben kann. Was meinst du? Begründe deine Vermutung.

GTR

18 An welcher Stelle x hat der Graph der quadratischen Funktion einen „Hochpunkt" bzw. „Tiefpunkt"?
Es gibt verschiedene Lösungsmöglichkeiten, z. B. mithilfe einer Wertetabelle oder mit dem Graphen der jeweiligen Funktion. Wende jedes der beiden Verfahren zumindest einmal an.
a) $y(x) = x^2 - 4x$ b) $y(x) = x^2 - 4x - 5$ c) $y(x) = -x^2 + 4$

19 Nimm an, durch die Funktion $f(x) = -x^2 + 85x - 17$ wird der Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Verkaufspreis des Produktes dargestellt.

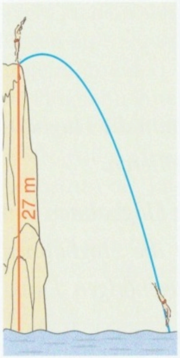


a) Formuliere Fragen, die sich mit dem Graphen der Funktion beantworten lassen.
b) Stell dir vor, du sollst die Geschäftsleitung beraten. Bereite einen entsprechenden Vortrag vor, den du mit der Grafik unterstützen möchtest. Denke dabei auch daran, dass du etwas zu dem „Grafikfenster" und zu den Variablen sagen musst, damit „Nichtmathematiker" verstehen, was dargestellt ist. Du kannst auch eigene Grafiken erstellen, in denen du die wichtigen Informationen besonders hervorhebst.

Abbildung 80 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 100

Aufgaben

20 *Die tollkühnen Klippenspringer von Acapulco*



In Acapulco in Mexiko springen Wagemutige mit einem Kopfsprung von einem 27 m hohen Felsen. Dabei müssen sie darauf achten, dass sie genau einen Wellenberg treffen, denn sonst ist das Wasser nicht tief genug. Die Flugbahn eines Springers wird durch die Funktionsgleichung $h(x) = -x^2 + 2x + 27$ modelliert. Dabei bezeichnet h die Höhe über dem Wasser und x die horizontale Entfernung vom Absprungpunkt, jeweils in Metern.

a) Wie hoch ist der Springer zunächst gesprungen?
b) Wie weit entfernt vom Fuß des Felsens trifft er auf dem Wasser auf?

Klippenspringer

21 Die Höhe eines geschlagenen Golfballs über dem Grund in feet wird durch die Funktion $h(t) = -15t^2 + 90t$ gegeben. t ist die Zeit in Sekunden nach dem Abschlag.
a) Wie lange ist der Ball in der Luft?
b) Zu welchem Zeitpunkt hat der Ball die größte Höhe über dem Grund? Wie hoch ist der Ball dann?

In den USA wird noch immer in „feet" gemessen. Informiere dich über diese Maßeinheit.

22 Greta steht im Schwimmbad auf dem 5-m-Brett. Sie überlegt, wie lange es vom Absprung bis zum Eintauchen ins Wasser dauert.
a) Durch die Funktion $h(t) = -5t^2 + 5$ (h in m, t in s) kann man Gretas Höhe in Abhängigkeit von der Zeit berechnen.
Wo befindet sie sich zum Zeitpunkt 0 Sekunden, wo nach 2 Zehntelsekunden?
Wie lange dauert es, bis sie ins Wasser eintaucht?
b) Bei einem Kopfsprung springen Könner vom Sprungbrett ab und „fliegen" auf einer zunächst kurz ansteigenden parabelförmigen Flugbahn ins Wasser. Wenn Greta zunächst vom Sprungbrett aus nach „oben" springt, lautet die Funktion $h(t) = -5t^2 + 5t + 5$.
Wie lange dauert der Sprung jetzt?
Wie hoch liegt der höchste Punkt ihrer „Flugbahn"?

23 Gegeben ist ein Rechteck mit den Seitenlängen 8 cm und 5 cm. Die kürzere Seite soll um x cm verlängert und die längere um x cm verkürzt werden.
a) Verändert sich der Flächeninhalt? Begründe deine Meinung. Bei welchem Wert für x bleibt der Flächeninhalt gleich?
b) Berechne für verschiedene Werte von x den Flächeninhalt A(x).
c) Finde die Funktionsvorschrift $x \rightarrow A(x)$. Bei welchem Wert von x ist der Flächeninhalt maximal?

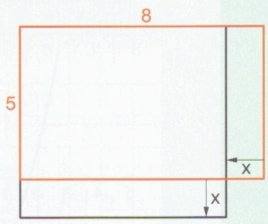


Abbildung 81 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 101

8.3 Abschnitt 4.2

4.2 Entdeckungen an Graphen quadratischer Funktionen

Was dich erwartet

Feuerwerk

Mit quadratischen Funktionen kann man die Flugbahnen von Feuerwerksraketen recht gut modellieren.

Das Foto zeigt verschiedene parabelförmige Flugbahnen von Feuerwerksraketen. So unterschiedlich wie die Flugbahnen sind, so unterschiedlich sind auch die zugehörigen Funktionsgleichungen.

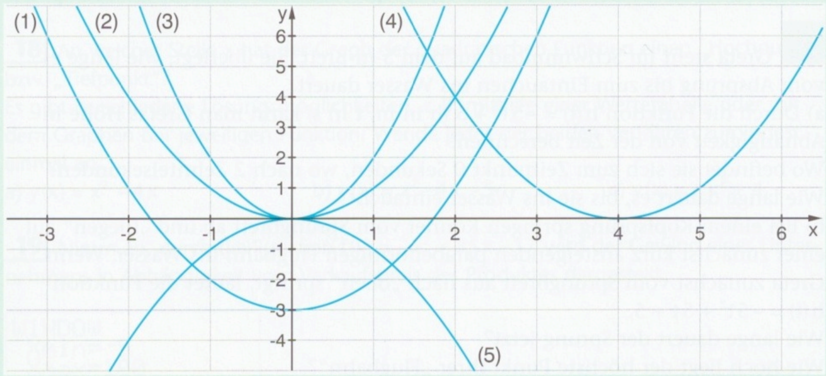
Worin unterscheiden sich die Funktionsgleichungen und die zugehörigen Graphen? Die Flugkurven und damit auch die Funktionsvorschriften haben aber auch einiges gemeinsam. Was sind diese Gemeinsamkeiten?

Aufgaben

Parabeln

Funktionsgleichungen:
$f(x) = x^2$
$g(x) = 2x^2$
$h(x) = -x^2$
$k(x) = (x-4)^2$
$l(x) = x^2-3$

1 Alle Graphen gehören zu quadratischen Funktionen. Es sind Parabeln.
a) Was haben die Parabeln in dem Schaubild gemeinsam, worin unterscheiden sie sich?
b) Ordne die Funktionsgleichungen richtig zu.

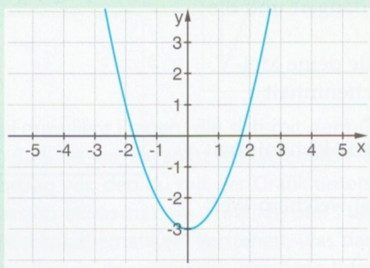


Vergleiche mit $f(x) = x^2$.

x	x^2
−4	16
−3	9
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

2 Erstelle zu den Graphen eine Tabelle. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

a)



b)

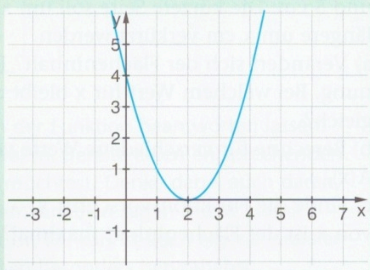
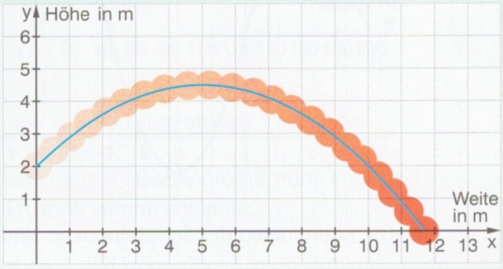


Abbildung 82 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 102

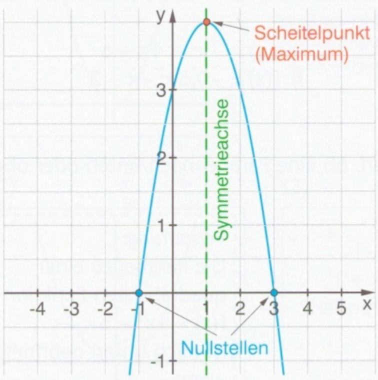
3 Wenn man ganz genau hinschaut, kann man beim Basketball- oder Fußballspiel Parabeln sehen. Bälle, die man wirft, schießt oder wie beim Golf abschlägt, fliegen eine parabelförmige Flugbahn.
Angenommen, die Gleichung $y(x) = -0{,}1x^2 + x + 2$ (x und y in Meter) modelliert die Flugbahn eines Fußballs, den ein Spieler einwirft.
a) Beschreibe die Flugbahn des Balles möglichst genau. Gib dabei die maximale Höhe des Balles an und ermittle, wie weit er geflogen ist, wenn er den Boden berührt.
b) Ergänze die Tabelle. Was fällt dir auf? Kannst du mit der Tabelle exakt angeben, bei welcher Weite sich der höchste Punkt der Flugbahn des Balles befindet?

Weite x	0	1	2	4	6	8	10	11
Höhe y	■	■	■	■	■	■	■	■



Basiswissen

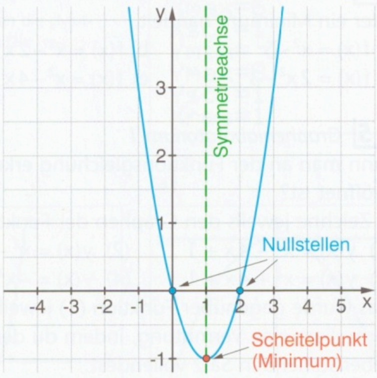
Den Graphen einer quadratischen Funktion nennt man Parabel.
- Es gibt nach **unten geöffnete** und nach **oben geöffnete** Parabeln.
- Parabeln besitzen eine **Symmetrieachse**.
- Der **Scheitelpunkt** einer Parabel ist entweder der höchste Punkt **(Maximum)** oder der tiefste Punkt **(Minimum)** des Graphen.
- Parabeln können Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen. Deren x-Koordinaten nennt man **Nullstellen**.



$f(x) = -x^2 + 2x + 3$

x	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−5	0	3	4	3	0	−5

Maximum



$g(x) = -x^2 - 2x$

x	−2	−1	0	1	2	3	4
g(x)	8	3	0	−1	0	3	8

Minimum

Die Symmetrieachse geht durch den Scheitelpunkt der Parabel.

Beispiele

A *Mathematik mit Tabelle*
Wo hat die Funktion mit $f(x) = x^2 + 5$ ihren Scheitelpunkt?
Der Scheitelpunkt bei (0|5) ist ein Minimum.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$x^2 + 5$	14	9	6	5	6	9	14

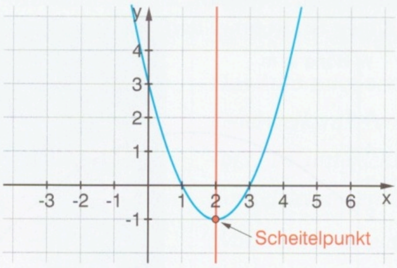
Abbildung 83 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 103

Beispiele

B Finde heraus, ob die quadratische Funktion mit $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ein Maximum oder ein Minimum hat. Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt?

Lösungsverfahren 1

Am Graphen kann man ablesen, dass die Funktion ein Minimum hat.



Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind $(2|-1)$.

Lösungsverfahren 2

An der Tabelle kann man ablesen, dass die Funktion ein Minimum hat.

x	f(x)
0	3
1	0
2	−1
3	0
4	3

Scheitelpunkt

Die Symmetrieachse liegt bei $x = 2$. Die Symmetrieachse geht durch den Scheitelpunkt. Also liegt der Scheitel bei $x = 2$.
$y = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

C *„Kopfmathematik"*

Von einer quadratischen Funktion f ist bekannt, dass $f(2) = f(6)$ ist. Welche x-Koordinate hat der Scheitelpunkt der zugehörigen Parabel?

$x = 2$ und $x = 6$ wird derselbe y-Wert zugeordnet. Daher verläuft die Symmetrieachse genau in der Mitte zwischen $x = 2$ und $x = 6$, d.h. durch $x = 4$.
Der Scheitelpunkt hat also die x-Koordinate 4.

Übungen

4 Lösungen:
$(2|10)$
$(0|-3)$ $(0|-5)$
$(2|-4)$ $(1|-4)$
$(-1|2{,}5)$

4 Finde den Scheitelpunkt der Parabel und entscheide, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

a) $f(x) = x^2 - 5$
b) $f(x) = x^2 - 2x - 3$
c) $f(x) = -x^2 + 4x + 6$
d) $f(x) = 2x^2 - 3$
e) $f(x) = x^2 - 4x$
f) $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 2$

5 *Graphenlaboratorium 1*

Kann man an der Funktionsgleichung erkennen, ob eine Parabel nach unten oder oben geöffnet ist?

a) Zeichne jeweils den Graphen der Funktion.
(1) $y(x) = x^2 - 4x + 1$ (2) $y(x) = x^2 - 4x - 1$
(3) $y(x) = x^2 + 4x + 1$ (4) $y(x) = -x^2 - 4x + 1$
Was wurde gegenüber Funktion (1) jeweils verändert? Formuliere eine Vermutung, indem du den nebenstehenden Satz vollendest.
b) Überprüfe deine Vermutung an verschiedenen Beispielen mit einem GTR oder einem Funktionenplotter.

Vermutung:
Die Parabel zu einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ ist nach unten geöffnet, wenn ...

Es geht auch mit einer Tabelle.

6 *„Kopfmathematik"*

a) Begründe: Besitzt eine Parabel zwei Nullstellen, dann liegt der Scheitelpunkt der Parabel genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.
b) Bestimme die x-Koordinate des Scheitelpunktes einer Parabel mit den Nullstellen $x_1 = 2$; $x_2 = 4$ ($x_1 = -5$; $x_2 = 7$).

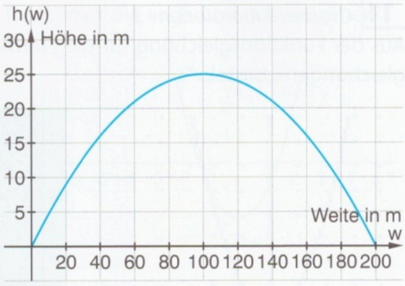
7 Ein Fußball fliegt bei einem Freistoß 60 m weit. Der höchste Punkt seiner parabelförmigen Flugbahn ist 6 m hoch.
a) Skizziere den Flug des Balles in einem Koordinatensystem und beschrifte die Skizze.
b) Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt der Flugbahn?

104

Abbildung 84 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 104

8 *Modellieren*

Ein guter Golfspieler kann einen Golfball 200 m weit schlagen. Mit einer Videoaufzeichnung kann man nachweisen, dass die Flugbahn parabelförmig ist. Ein Physiker behauptet, dass man die Flugbahn mit der Funktion $h(w) = -0{,}0025\,w(w-200)$ beschreiben kann. Du kannst herausfinden, ob dies stimmen kann, indem du die folgenden Fragen beantwortest.



a) Handelt es sich um eine quadratische Funktion?

b) Welche Höhe $h(w)$ wird den Werten $w = 0$ und $w = 200$ zugeordnet? Welche Bedeutung haben die zugehörigen Punkte für die Flugbahn?

c) An welcher Stelle hat die Funktion ihren Scheitelpunkt? Welche größte Höhe erreicht der Golfball? Frage einen Golfspieler, ob dein Ergebnis stimmen könnte.

Übungen

9 Verwende die Funktionen mit $f(x) = x^2 - 4x + 5$ und $g(x) = 2x - 1$ zur Beantwortung der folgenden Frage.

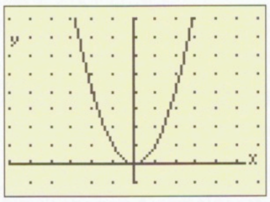
Wie unterscheiden sich die Graphen (Funktionsgleichungen, Tabellen) einer linearen Funktion und einer quadratischen Funktion?

10 *Graphenlaboratorium 2*

Einfache Gleichungen für Parabeln haben die Form $f(x) = ax^2$. Welche Bedeutung hat der Parameter a?

a heißt Vorfaktor oder Parameter.

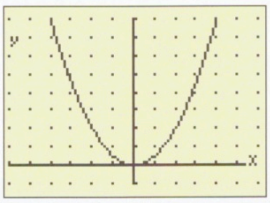
(1)



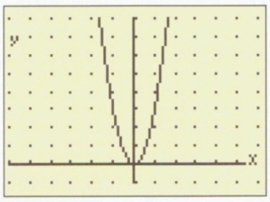
Für a = 1 erhält man die „Mutter" aller Parabeln: Die Normalparabel $f(x) = x^2$.

```
WINDOW
 Xmin=-6
 Xmax=6
 Xscl=1
 Ymin=-1
 Ymax=8
 Yscl=1
 Xres=1
```

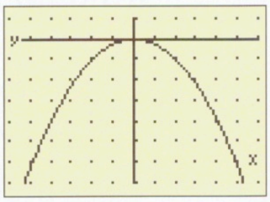
(2)



(3)



(4)




```
WINDOW
 Xmin=-6
 Xmax=6
 Xscl=1
 Ymin=-7
 Ymax=1
 Yscl=1
 Xres=1
```

a) Finde mithilfe einer Wertetabelle zu jeder Parabel den Parameter a in der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2$.

b) Wie verändert sich das Aussehen der Parabel, wenn man a variiert? Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze sie.

$f(x) = ax^2$	Aussehen der Parabel
$a > 1$	nach oben geöffnet und „schmaler"
$a = 1$	Normalparabel
$0 < a < 1$	■
$1 < a < 0$	■
$a < -1$	■

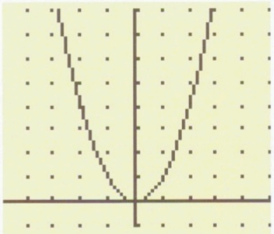
Abbildung 85 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 105

Übungen

Den Graphen kannst du auch mit einem Funktionenplotter zeichnen, z. B. im Programm „Graphix" auf der CD-ROM zu Band 7: Menü *Funktionenplotter* oder Menü *Parabeln*

11 *Graphenlaboratorium 3*

Aus der Funktionsgleichung für die Normalparabel $f(x) = x^2$ kann man neue Funktionsgleichungen „basteln".

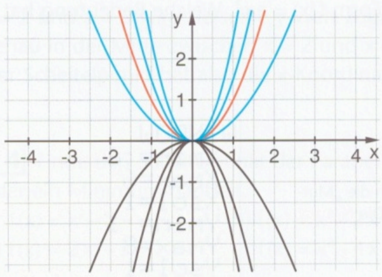


$f(x) = x^2 + e$	$g(x) = (x - d)^2$
$f_1(x) = x^2$	$g_1(x) = x^2$
$f_2(x) = x^2 + 2$	$g_2(x) = (x + 2)^2$
$f_3(x) = x^2 - 1$	$g_3(x) = (x - 1)^2$
$f_4(x) = x^2 + 4$	$g_4(x) = (x + 4)^2$
$f_5(x) = x^2 - 2$	$g_5(x) = (x - 2)^2$

a) Du kannst auf verschiedene Arten herausfinden, wie der Parameter e die Normalparabel verändert: durch Überlegen, mit Graphen oder mit Wertetabellen.
b) Welche Wirkung hat der Parameter d auf den Graphen?

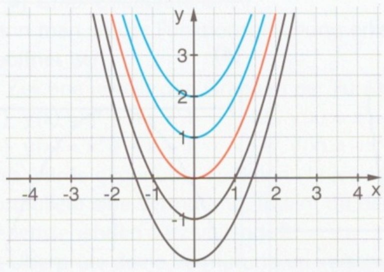
Basiswissen

Auch bei quadratischen Funktionen kann man wie bei den linearen Funktionen bereits aus der Funktionsgleichung viele Informationen über die Lage und Form des zugehörigen Graphen erhalten.

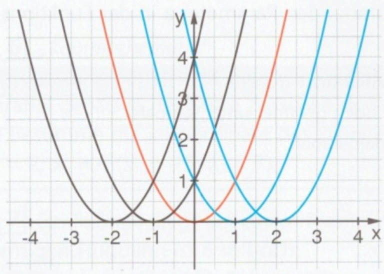


$f(x) = ax^2$
$a > 0$: Graph nach oben geöffnet,
$a < 0$: Graph nach unten geöffnet.

Durch den Parameter a wird die Normalparabel
„aufgebogen", wenn $0 < |a| < 1$,
„zusammengebogen", wenn $|a| > 1$.
a nennt man auch Streckfaktor.



$f(x) = x^2 + e$
Der Graph wird um $|e|$ verschoben, und zwar
nach oben für $e > 0$,
nach unten für $e < 0$.

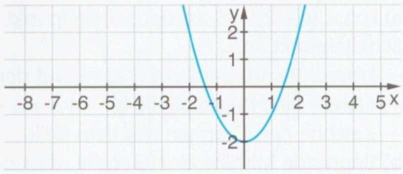
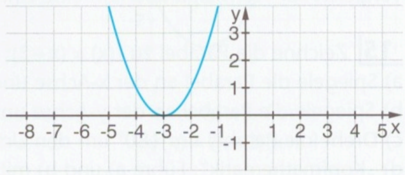
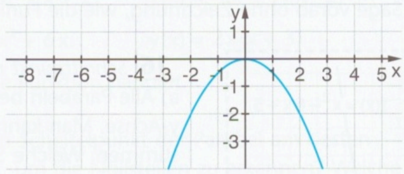


$f(x) = (x-d)^2$
Der Graph wird um $|d|$ verschoben, und zwar
nach rechts für $d > 0$,
nach links für $d < 0$.

Achtung: $g(x) = (x + 2)^2 = (x-(-2))^2$
Normalparabel, die um 2 Einheiten nach links verschoben ist.

Abbildung 86 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 106

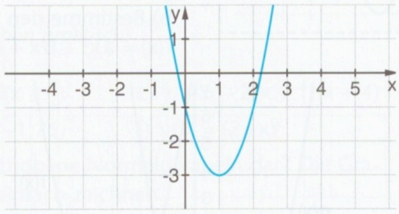
D Aus den folgenden Funktionsgleichungen kann man die Lage und das Aussehen der zugehörigen Parabeln ablesen.

$f(x) = x^2 - 2$	Um 2 Einheiten nach unten verschobene Normalparabel, der Scheitelpunkt liegt bei $(0\|-2)$.	
$g(x) = (x+3)^2$ $= (x-(-3))^2$	Um 3 Einheiten nach links verschobene Normalparabel, der Scheitelpunkt liegt bei $(-3\|0)$.	
$h(x) = -0{,}5\,x^2$	„Gestauchte", nach unten geöffnete Parabel, der Scheitelpunkt liegt bei $(0\|0)$.	

Beispiele

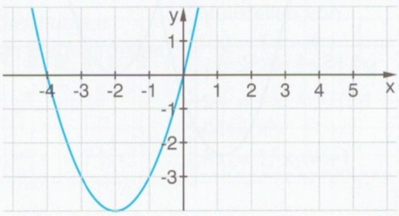
So sprechen die Mathematiker: Statt „aufgebogen" sagt man auch „gestaucht", statt „zusammengebogen" auch „gestreckt".

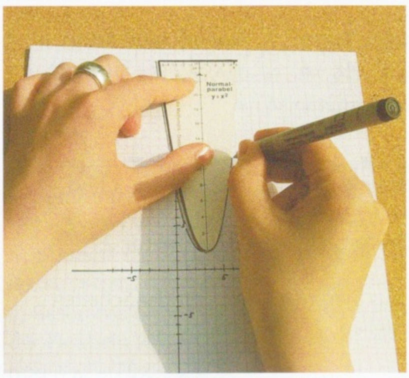
E Lies aus der Funktionsgleichung so viele Informationen wie möglich ab:
$f(x) = 2(x-1)^2 - 3$
Der Scheitelpunkt der Parabel liegt bei $(1|-3)$; sie ist nach oben geöffnet und mit dem Faktor 2 gestreckt.



Die **Scheitelpunktform** $f(x) = a(x-d)^2 + e$ ist eine besonders praktische Darstellung einer quadratischen Funktion. Scheitelpunkt: $S(d|e)$

F Gib die Funktionsgleichung einer verschobenen Normalparabel an, deren Scheitelpunkt $S(-2|-4)$ ist.
$f(x) = a(x-d)^2 + e$
$a = 1$ (Normalparabel)
$d = -2$, $e = -4$
$f(x) = (x-(-2))^2 - 4 = (x+2)^2 - 4$





Übungen

12 Zeichne die Parabeln zu den Funktionsgleichungen.
a) $f_1(x) = -(x-2)^2 + 1$
b) $f_2(x) = (x-2)^2 + 1$
c) $f_3(x) = -(x+4)^2 + 1$
d) $f_4(x) = (x+4)^2 - 3$

13 Zeichne verschobene Normalparabeln, die ihren Scheitelpunkt bei S haben. Gib jeweils auch die zugehörige Funktionsgleichung an.
a) $S(2|4)$ b) $S(-2|1)$
c) $S(3|-1)$ d) $S(-1|-4)$

Mit einer **Schablone** kannst du die Aufgaben leicht ausführen.

Abbildung 87 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 107

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Übungen

Fehler erkennen – Fehler vermeiden

14 *Beliebte Fehler*

Häufig wird aus der Scheitelpunktform der Scheitel falsch abgelesen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten zu überprüfen, ob der Scheitelpunkt richtig bestimmt wurde oder nicht.

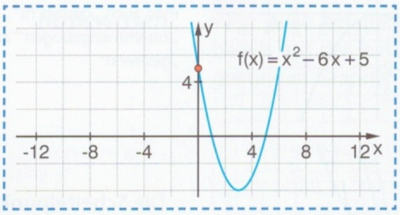
a) $f(x) = (x+2)^2 - 6$. Ist der Scheitelpunkt $S(2|-6)$? Gib gegebenenfalls den richtigen Scheitelpunkt an.

- Überprüfe, ob der Punkt $(2|-6)$ auf dem Graphen liegt.
- Erstelle eine Wertetabelle für $-4 \le x \le 4$, Schrittweite 1.
- Zeichne den Graphen mit dem GTR.

b) Begründe mithilfe einer Tabelle, dass der Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = (x+1)^2$ im Vergleich zur Normalparabel um eine Einheit nach links verschoben ist.

15 Zeichne die Parabel zu $f(x) = (x-3)^2 + 1$.

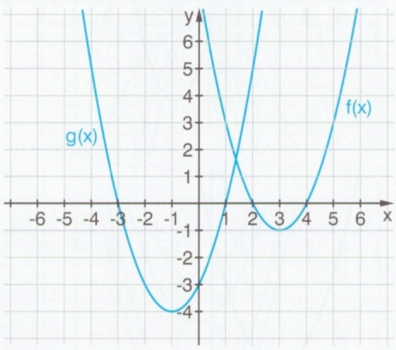
a) Spiegele die Parabel an der x-Achse und gib die Funktionsgleichung an.
b) Spiegele die Parabel an der y-Achse und gib die Funktionsgleichung an.
c) Drehe die Parabel um 180° um den Ursprung.
d) „Kopfmathematik": Führe a) und b) mit allen Parabeln aus Aufgabe 12 und 13 durch. Sage vorab ohne Zeichnung, wie die Funktionsgleichungen jeweils lauten.



16 *Schnittpunkt mit der y-Achse*

a) Alle Parabeln besitzen einen Schnittpunkt $(0|y)$ mit der y-Achse. Man kann ihn mit der Funktionsgleichung leicht bestimmen. Welche Schnittpunkte mit der y-Achse haben die Graphen der Funktionen mit $f(x) = x^2 - 5x + 2$ und mit $g(x) = x^2 + 6x - 1$?

b) Bestimme den Schnittpunkt des Graphen der Funktion mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit der y-Achse.

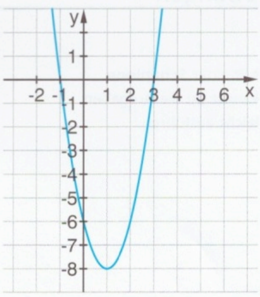


17 *Verschobene Normalparabeln*

a) Gib zu den zwei Parabeln jeweils die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform (Beispiel E, Seite 107) an.

b) Lars behauptet, dass man die Funktionsgleichungen auch wie folgt aufschreiben kann:
$f(x) = (x-4)(x-2)$ und
$g(x) = (x-1)(x+3)$.
Hat er Recht? Wie kann Lars ausgehend von den Graphen auf die Gleichungen gekommen sein?

Basiswissen



Eine Parabel – drei Darstellungen: Jede Darstellung hat ihre Vorteile.

	Scheitelpunktform	allgemeine Form	faktorisierte Form
Funktionsgleichung	$y(x) = 2(x-1)^2 - 8$	$y(x) = 2x^2 - 4x - 6$	$y(x) = 2(x-3)(x+1)$
direkt abzulesen	**Scheitelpunkt** $(1|-8)$, **Streckfaktor** 2.	**Schnittpunkt mit y-Achse** $(0|-6)$, **Streckfaktor** 2.	**Nullstellen:** 3 und −1, **Streckfaktor** 2.

Hat eine Parabel zwei Nullstellen, dann liegt aus Symmetriegründen der Scheitelpunkt in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

108

Abbildung 88 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 108

G Bestimme die Nullstellen und den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion mit $f(x) = 0{,}5\,(x-6)(x+2)$ und zeichne den Graphen.

Nullstellen: $f(x) = 0$

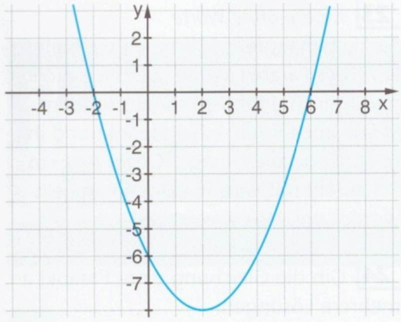
$0{,}5\,(x-6)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 6$

Scheitelpunkt: $x_S = 2$ (Mitte von 6 und −2),

$y_S = f(2) = 0{,}5\,(2-6)(2+2) = -8$

$S(2\,|\,-8)$



Beispiele

Denke daran: Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

Übungen

18 *Eine Parabel – drei Darstellungen*

Scheitelpunktform	allgemeine Form	faktorisierte Form
(1) $y(x) = (x-0{,}5)^2 - 2{,}25$	$y(x) = x^2 - x - 2$	$y(x) = (x-2)(x+1)$
(2) $y(x) = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 2{,}25$	$y(x) = -x^2 + x + 2$	$y(x) = -(x+1)(x-2)$
(3) $y(x) = 2\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$	$y(x) = 2x^2 + 6x$	$y(x) = 2x(x+3)$

a) Weise nach, dass es sich jeweils um dieselbe Funktion handelt.

b) Zeichne die Parabeln möglichst geschickt.

c) An welcher Darstellungsform kann man den Scheitelpunkt der Parabel am besten ablesen? Welche Form ist besonders praktisch, um die Nullstellen zu erkennen? Welche Information über die Parabel erhält man leicht mit der allgemeinen Form?

19 *Faktorisierte Form und Symmetrie: ganz schön praktisch!*

Bestimme jeweils Nullstellen und Scheitelpunkt.

a) $y(x) = x\left(x-\frac{3}{4}\right)$ b) $y(x) = \left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{2}{5}\right)$ c) $y(x) = -2(x+1)(x+4)$

d) $y(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2$ e) $y(x) = -2(x-1{,}75)^2$ f) $y(x) = (2-x)^2$

g) Welche der Funktionen a) bis f) stellen verschobene Normalparabeln dar? Die Graphen dieser Funktionen kann man besonders einfach zeichnen.

Du kannst deine Ergebnisse überprüfen, indem du die Graphen mit dem GTR zeichnest.

20 *Nullstellenbestimmung und quadratische Gleichungen*

Für einfache quadratische Funktionen kann man die Nullstellen rechnerisch bestimmen.

a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = 3x^2 - 6$

c) $f(x) = 2x^2$ d) $f(x) = x^2 + 4$

e) $f(x) = -3x^2 + 6$ f) $f(x) = 5x^2 + 12$

Nullstellen von
$f(x) = 4x^2 - 4$
$0 = 4x^2 - 4 \quad |+4$
$4 = 4x^2 \quad |:4$
$1 = x^2$
$x_1 = 1;\ x_2 = -1$

x nennt man Nullstelle einer Funktion, wenn $f(x) = 0$ ist.

Nullstellen von
$f(x) = x^2 - 3x$
$x^2 - 3x = 0$
Faktorisieren
$x(x-3) = 0$
$x_1 = 0;\ x_2 = 3$

21 *Nullstellenberechnung durch Faktorzerlegung*

Wo liegen die Nullstellen der Parabel mit der Gleichung

a) $y(x) = x^2 + 2x$ b) $y(x) = -3x^2 + 6x$

c) $y(x) = 2x^2 - 8$ d) $y(x) = -x^2 - 10$

Berechne jeweils auch den Scheitelpunkt. Handelt es sich um ein Minimum oder ein Maximum?

Manchmal hilft eine binomische Formel.

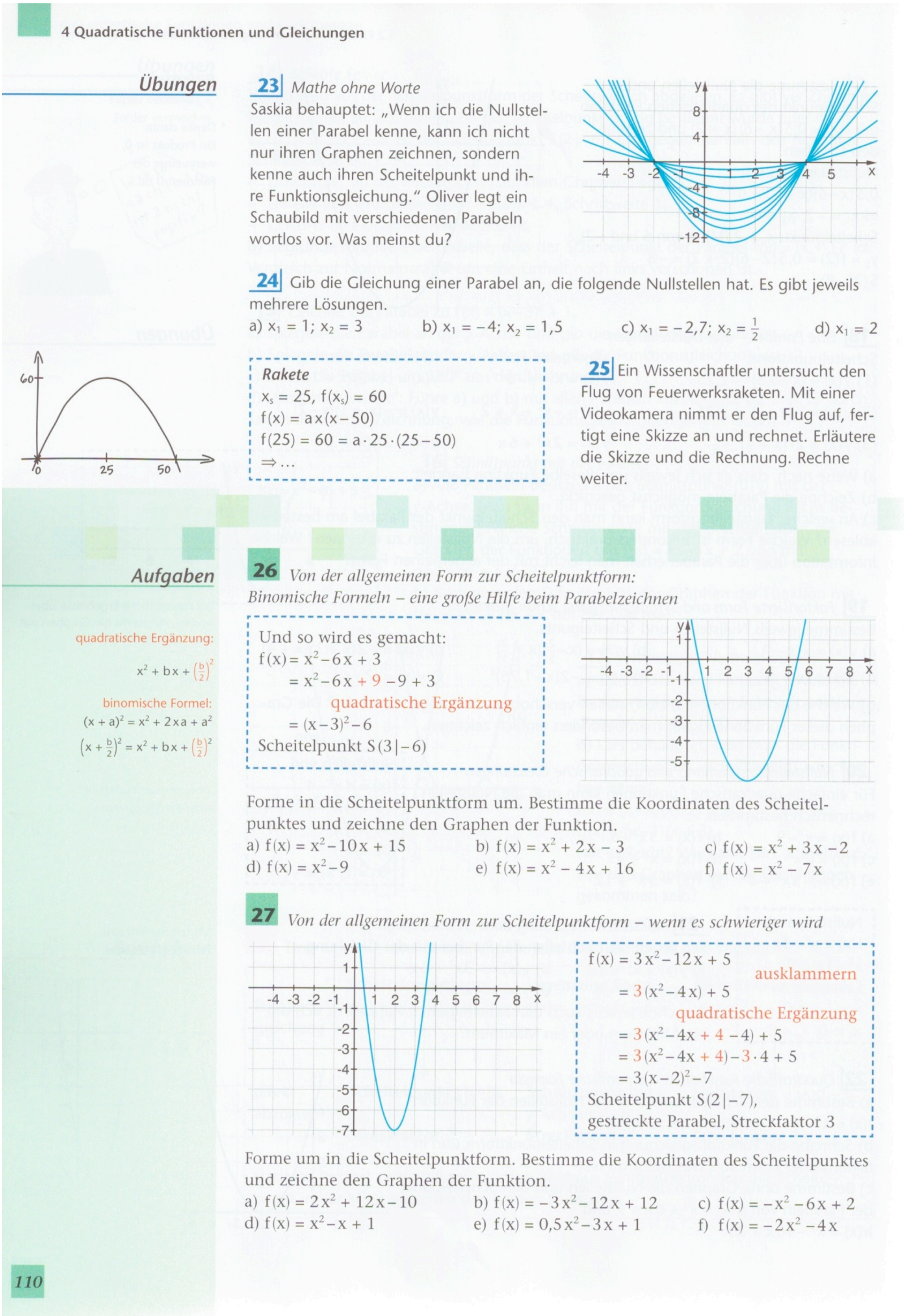
22 *Quadratische Funktionen – Binomische Formeln*

a) Bestimme den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Funktion $f(x) = x^2 - 4x + 4$ mithilfe des Graphen.

b) Schreibe die Funktionsgleichung in Scheitelpunktform und in faktorisierter Form auf. Was stellst du fest?

c) Bestimme ohne Graphen die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Parabeln von $g(x) = x^2 + 6x + 9$ und $h(x) = x^2 - 10x + 25$.

Abbildung 89 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 109



4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Übungen

23 *Mathe ohne Worte*
Saskia behauptet: „Wenn ich die Nullstellen einer Parabel kenne, kann ich nicht nur ihren Graphen zeichnen, sondern kenne auch ihren Scheitelpunkt und ihre Funktionsgleichung." Oliver legt ein Schaubild mit verschiedenen Parabeln wortlos vor. Was meinst du?

24 Gib die Gleichung einer Parabel an, die folgende Nullstellen hat. Es gibt jeweils mehrere Lösungen.
a) $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ b) $x_1 = -4$; $x_2 = 1{,}5$ c) $x_1 = -2{,}7$; $x_2 = \frac{1}{2}$ d) $x_1 = 2$

Rakete
$x_s = 25$, $f(x_s) = 60$
$f(x) = a\,x(x-50)$
$f(25) = 60 = a \cdot 25 \cdot (25-50)$
$\Rightarrow \dots$

25 Ein Wissenschaftler untersucht den Flug von Feuerwerksraketen. Mit einer Videokamera nimmt er den Flug auf, fertigt eine Skizze an und rechnet. Erläutere die Skizze und die Rechnung. Rechne weiter.

Aufgaben

quadratische Ergänzung:
$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

binomische Formel:
$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

26 *Von der allgemeinen Form zur Scheitelpunktform: Binomische Formeln – eine große Hilfe beim Parabelzeichnen*

Und so wird es gemacht:
$f(x) = x^2 - 6x + 3$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 + 3$
quadratische Ergänzung
$= (x-3)^2 - 6$
Scheitelpunkt $S(3\,|\,-6)$

Forme in die Scheitelpunktform um. Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes und zeichne den Graphen der Funktion.
a) $f(x) = x^2 - 10x + 15$ b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ c) $f(x) = x^2 + 3x - 2$
d) $f(x) = x^2 - 9$ e) $f(x) = x^2 - 4x + 16$ f) $f(x) = x^2 - 7x$

27 *Von der allgemeinen Form zur Scheitelpunktform – wenn es schwieriger wird*

$f(x) = 3x^2 - 12x + 5$
ausklammern
$= 3(x^2 - 4x) + 5$
quadratische Ergänzung
$= 3(x^2 - 4x + 4 - 4) + 5$
$= 3(x^2 - 4x + 4) - 3 \cdot 4 + 5$
$= 3(x-2)^2 - 7$
Scheitelpunkt $S(2\,|\,-7)$,
gestreckte Parabel, Streckfaktor 3

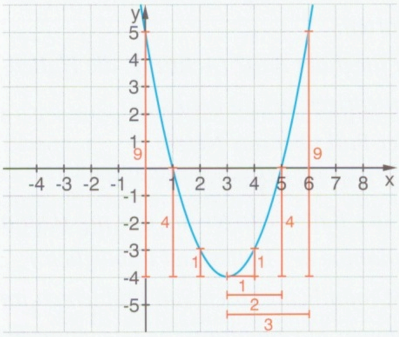
Forme um in die Scheitelpunktform. Bestimme die Koordinaten des Scheitelpunktes und zeichne den Graphen der Funktion.
a) $f(x) = 2x^2 + 12x - 10$ b) $f(x) = -3x^2 - 12x + 12$ c) $f(x) = -x^2 - 6x + 2$
d) $f(x) = x^2 - x + 1$ e) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 1$ f) $f(x) = -2x^2 - 4x$

110

Abbildung 90 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 110

Aufgaben

28 Ingenieure planen eine Hängebrücke, die an dicken Drahtseilen aufgehängt ist. Den Brückenbogen kann man näherungsweise mit einer quadratischen Funktion modellieren.
Angenommen:
$f(x) = \frac{1}{450}x^2 - \frac{2}{3}x + 60.$
Bestimme den Scheitel der Parabel.
Wie hoch liegt er über der Fahrbahn?



29 *Zeichnen einer Parabel mithilfe der Quadratzahlen*
Schau das Bild genau an. Du kannst erkennen, wie die Parabel mithilfe von Quadratzahlen gezeichnet wurde.
Zeichne genauso den Graphen von
a) $f(x) = (x-2)^2 + 1$
b) $g(x) = -(x+2)^2 + 3$
c) $h(x) = 0{,}5\,(x+4)^2$
d) $i(x) = -2\,(x-1)^2 + 1$

30 *Wanted – Teil 1:* Von einer Parabel sind bekannt:

1) Der Scheitelpunkt $(1|3)$ und eine Nullstelle bei 4. Wo ist die zweite Nullstelle?

2) Der Scheitelpunkt $(-2|4)$ und der Punkt $(1|1)$. Bestimme einen weiteren Punkt der Parabel.

3) Der Scheitelpunkt $(-3|-2)$ und der Faktor vor dem quadratischen Term $a = -0{,}5$. Was weiß man?

4) Die Nullstellen 4 und 8. Wo ist der Scheitel?

Stelle zu jeder Parabel eine zugehörige Gleichung auf. Mache dann die „Probe" mit dem GTR.

31 *Wanted – Teil 2*
Gesucht ist die Gleichung einer Parabel
a) mit dem Scheitelpunkt $(4|-2)$ und dem Streckfaktor $a = -1$,
b) mit dem Scheitelpunkt $(-1|1)$ und einer Nullstelle bei $x = 0$,
c) mit dem Scheitelpunkt $(2|-1)$ und dem y-Achsenabschnitt 3,
d) mit den Nullstellen $x_1 = 1$; $x_2 = -5$ und dem Streckfaktor 1.

Teste deine Gleichung, indem du die zugehörige Parabel zeichnest. Das geht flott, wenn du einen GTR benutzt.

32 *Zum Nachdenken*
a) Von einer Parabel ist bekannt, dass sie nur eine Nullstelle besitzt. Was kann man dann über den Scheitel, die Scheitelpunktform und die faktorisierte Form der zugehörigen Funktionsgleichung sagen?
b) Wie viele Schnittpunkte können zwei Parabeln besitzen? Fertige für jeden der Fälle eine Skizze an.
c) Martina stellt fest: „An dieser Tabelle kann ich sofort ablesen, wie die zugehörige Funktionsgleichung lautet."

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y(x)	4	1	0	1	4	9	16	25	36

111

Abbildung 91 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 111

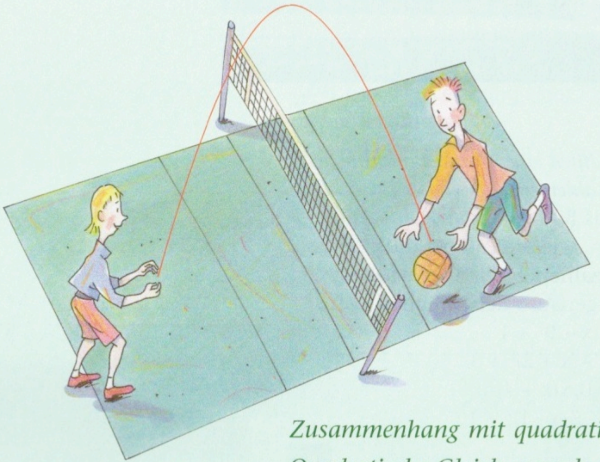
8.4 Abschnitt 4.3

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

4.3 Quadratische Gleichungen

Was dich erwartet

In vielen Anwendungssituationen werden quadratische Funktionen verwendet. Wenn Lisa beim Volleyball einen Aufschlag macht, dann kann man den Flug des Volleyballs mit einer quadratischen Funktion modellieren.



Man kann mit der Funktion viele interessante Fragen beantworten:

- *Wie hoch fliegt der Ball? (Achtung, die Hallendecke ist niedriger, als du denkst.)*
- *Kommt der Ball über das Netz?*
- *Landet der Ball im gegnerischen Feld?*
- *Wo fliegt der Ball niedriger als 0,5 m? (Dann ist die Annahme des Balles fast unmöglich.)*

Häufig stößt man beim Lösen von Problemen im Zusammenhang mit quadratischen Funktionen auf quadratische Gleichungen. Quadratische Gleichungen kann man zeichnerisch mithilfe eines Graphen lösen. Einfache quadratische Gleichungen kannst du bereits rechnerisch lösen. Für schwierigere gibt es verschiedene Lösungsstrategien, u. a. auch Lösungsformeln.

Aufgaben

Hub-
schrauber

1 Ein Rettungshubschrauber schwebt 25 m über einem gekenterten Boot und wirft ein Rettungsfloß ab. Die Höhe h(t) (in m) des Floßes über dem Wasser kann modelliert werden mit $h(t) = 25 - 5t^2$ (t: Zeit in s).
Nach wie vielen Sekunden trifft das Floß auf der Wasseroberfläche auf? Beantworte die Frage zeichnerisch mithilfe des Graphen. Überprüfe das Ergebnis rechnerisch.

2 In den Lernabschnitten 4.1 und 4.2 hast du gelernt, wie man einfache quadratische Gleichungen rechnerisch löst. Löse die folgenden Gleichungen mit den dort vorgestellten Verfahren.

a) Löse durch Wurzelziehen.
(1) $x^2 = 49$
(2) $2x^2 = 8$
(3) $x^2 = 30$
(4) $4x^2 + 25 = 205$
(5) $100 - 5x^2 = 0$
(6) $x^2 = -16$
(7) $3x^2 + 2x - 4 = 2x$

b) Löse durch Faktorisieren.
(1) $x^2 - 2x = 0$
(2) $2x^2 - 10x = 0$
(3) $4x - 3x^2 = 0$

c) Verwende binomische Formeln.
(1) $x^2 - 2x + 1 = 0$
(2) $x^2 + 6x + 9 = 0$

112

Abbildung 92 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 112

Aufgaben

GTR

3 Für die folgende Aufgabe benötigst du Papier zum Zeichnen oder einen grafischen Taschenrechner (GTR).

a) Übertrage die Tabelle in dein Heft und ergänze die 2. und 3. Spalte.

Gleichung	Lösungen	Anzahl der Lösungen	Zugehörige Funktion	Anzahl der Nullstellen
$x^2-5=0$	$x_1=\sqrt{5}$ $x_2=-\sqrt{5}$	2	$f(x)=x^2-5$	2
$x^2-16=0$	■	■	■	■
$x^2=0$	■	■	■	■
$-x^2+16=0$	■	■	■	■
$x^2+5=0$	■	■	■	■
$-x^2=0$	■	■	■	■

b) Zeichne jeweils die zugehörige quadratische Funktion und vervollständige die Tabelle.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung und der Anzahl der Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion?

4 Rechts siehst du eine quadratische Gleichung, die durch Wurzelziehen gelöst wurde.
Löse folgenden Gleichungen mit dem dargestellten Verfahren.

a) $(x-5)^2=9$

b) $(x+3)^2=10$

c) $4(x-1)^2=64$

$2(x-3)^2=10$ durch 2 dividieren
$(x-3)^2=5$ Wurzelziehen
$x-3=\sqrt{5}$ oder $x-3=-\sqrt{5}$
Lösungen:
$x_1=3+\sqrt{5}$; $x_2=3-\sqrt{5}$
Schreibweise mit Lösungsmenge
$L=\{3+\sqrt{5};\ 3-\sqrt{5}\}$

Basiswissen

Zum Lösen von quadratischen Gleichungen gibt es verschiedene Verfahren.

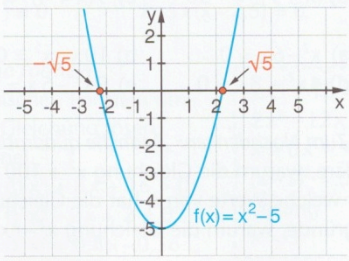
Lösen von quadratischen Gleichungen durch **Wurzelziehen**

Quadratische Gleichungen der Form $x^2-q=0$

$x^2-q=0$
$x^2=q$ Wurzelziehen
$x=\sqrt{q}$ oder $x=-\sqrt{q}$
$x_1=\sqrt{q}$ $x_2=-\sqrt{q}$

$L=\{\sqrt{q};\ -\sqrt{q}\}$

Quadratische Gleichungen der Form $x^2-q=0$ haben für $q>0$ die Lösungen:
$x_1=\sqrt{q}$; $x_2=-\sqrt{q}$



$(x-d)^2-e=0$
$(x-d)^2=e$ Wurzelziehen
$x-d=\sqrt{e}$ oder $x-d=-\sqrt{e}$
$x_1=d+\sqrt{e}$ $x_2=d-\sqrt{e}$

$L=\{d+\sqrt{e};\ d-\sqrt{e}\}$

Abbildung 93 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 113

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Basiswissen

Einige quadratische Gleichungen kann man durch Ausklammern lösen.

Lösen von quadratischen Gleichungen durch **Ausklammern (Faktorisieren)**

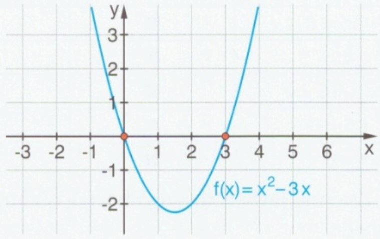
Quadratische Gleichungen der Form $x^2 - rx = 0$

$x^2 - rx = 0$ Ausklammern
$x(x-r) = 0$ Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

$x = 0$ oder $x - r = 0$
$x_1 = 0$ $x_2 = r$

Schreibweise mit Lösungsmenge:
$L = \{0; r\}$

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 - rx = 0$ haben für $r \neq 0$ immer zwei Lösungen.



Beispiele

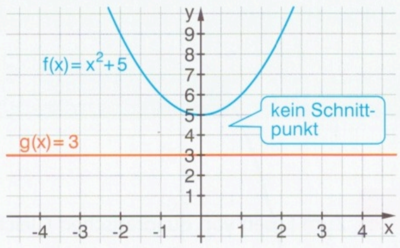
A Löse die Gleichung $3x^2 - 10x = 0$.
Entscheide zunächst, nach welchem Verfahren du die Gleichung lösen willst.
Die quadratische Gleichung kann man durch Ausklammern lösen.

$3x^2 - 10x = 0$
$x(3x - 10) = 0$
$x = 0$ oder $3x - 10 = 0$
$3x = 10$
$x = \frac{10}{3}$
$x_1 = 0;\ x_2 = \frac{10}{3}$ $L = \{0, \frac{10}{3}\}$

B Begründe, warum die Gleichung $x^2 + 5 = 3$ keine Lösung hat.

Rechnerische Lösung:
$x^2 + 5 = 3 \quad | -5$
$x^2 = -2$
Es gibt keine reelle Zahl, die quadriert eine negative Zahl ergibt.
$L = \{\}$ leere Menge

Zeichnerische Lösung:



Übungen

Löse die Gleichungen. Runde die Ergebnisse, wenn nötig, auf eine Stelle nach dem Komma. Übrigens, bei den Aufgaben 5, 6 und 7 passen verschiedene Lösungsverfahren.

5 Lösungen: $\{-\sqrt{30}; \sqrt{30}\}$ $\{-2; 2\}$ $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ $\{-4; 4\}$ $\{\}$ $\{-\frac{2}{5}; \frac{2}{5}\}$ $\{-11; 11\}$ $\{-\frac{7}{3}; \frac{7}{3}\}$

5 a) $x^2 = 16$ b) $x^2 = 121$ c) $x^2 = 30$ d) $5x^2 = 10$
e) $2x^2 = -40$ f) $9x^2 = 49$ g) $x^2 = \frac{4}{25}$ h) $-x^2 = -4$

6 a) $(x-3)^2 = 16$ b) $(y+5)^2 = 10$ c) $4\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = 9$
d) $(x+7)^2 = -36$ e) $9(x+4)^2 = 36$ f) $8(r+4)^2 = 40$

7 a) $x^2 - 6x = 0$ b) $10x - x^2 = 0$ c) $x^2 + 4x = 6x$
d) $4x^2 + 8x = 0$ e) $9x^2 - 5x = 3x^2 - 10x$ f) $5x - 10x^2 = 5x$

8 *Zum Nachdenken: „Manche quadratische Gleichungen haben keine Lösungen."*
a) Erkläre, warum die Gleichung $x^2 + 100 = 0$ keine Lösung hat.
b) Für welche Werte von q hat die Gleichung $x^2 - q = 0$ keine Lösung?
c) Begründe, warum die Gleichung $x^2 - rx = 0$ immer Lösungen hat.

114

Abbildung 94 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 114

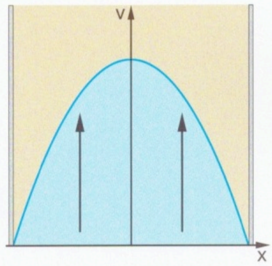
Übungen

9 Berechne die Nullstellen der Funktion.

a) $f(x) = x^2 - 10$ b) $f(x) = 2x^2 - 8$ c) $f(x) = x^2 - 3x$
d) $f(x) = 2x^2 - 11x$ e) $f(x) = -x^2 + 2$ f) $f(x) = (x-1)(x+3)$

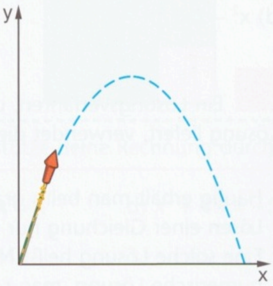
10 *Strömende Flüssigkeiten*

Physiker haben herausgefunden, dass Flüssigkeiten, die durch ein Rohr strömen, in der Mitte des Rohres schneller fließen als am Rand. D. h. die Strömungsgeschwindigkeit v hängt auch von der Entfernung x von der Mitte des Rohres ab.
Angenommen, die Geschwindigkeit v in m/s kann man aus x in cm nach der Formel $v(x) = 16 - x^2$ berechnen.
a) Ermittle die größte und die kleinste Strömungsgeschwindigkeit.
b) An welcher Stelle des Rohres beträgt die Geschwindigkeit 7 m/s?



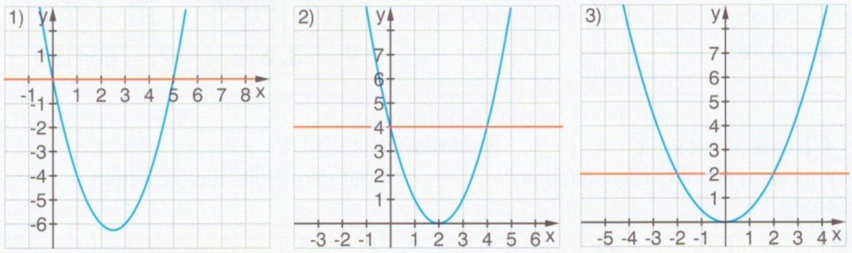
11 *Flug einer Feuerwerksrakete*

Den Flug einer Feuerwerksrakete kann man mit einer quadratischen Funktion mit $h(x) = 15x - 0{,}5x^2$ modellieren. Dabei ist x die Entfernung vom Abschussort in Meter und h(x) die Höhe der Rakete in Meter.
a) Berechne, in welcher Entfernung von der Abschussstelle die Rakete landet.
b) Berechne mit dem Ergebnis aus Aufgabe a) den höchsten Punkt der Flugbahn.
c) Skizziere die Flugbahn der Rakete in einem Schaubild.



12 *Grafische Lösung von quadratischen Gleichungen*

Die folgenden drei Schaubilder stellen die Lösung von verschiedenen Typen quadratischer Gleichungen dar. Dargestellt sind die Gleichungen
a) $(x-2)^2 = 4$ b) $0{,}5x^2 = 2$ c) $x^2 - 5x = 0$
Ordne die Schaubilder richtig zu und begründe deine Entscheidung.



„Produkt = 0"-Regel
Wenn $a \cdot b = 0$,
dann $a = 0$ oder $b = 0$.

13 *Lösen einer quadratischen Gleichung mit der „Produkt = 0"-Regel*

Berechne die Lösungen der Gleichungen.

a) $(x-2)(x+3) = 0$ b) $(2x+4)(5x+20) = 0$ c) $x(x-2) = 0$
d) $(x+4)(x-9) = 0$ e) $2(x+1)(x+1) = 0$ f) $5x(x-2{,}5) = 0$

Handelt es sich wirklich um quadratische Gleichungen? Begründe.

14 *Quadratische Gleichungen und binomische Formeln*

Manche Terme kann man mithilfe der binomischen Formeln umformen und damit schnell eine quadratische Gleichung lösen. Aber nicht immer passt eine binomische Formel.

a) $x^2 + 4x + 4 = 1$ b) $x^2 - 6x + 9 = 4$ c) $x^2 + 8x + 16 = 0$
d) $x^2 + 5x + 6{,}25 = 9$ e) $3x^2 + 30x - 75 = 0$ f) $x^2 - 2x + 2 = 0$
g) $x^2 - 121 = 0$ h) $x^2 - 14x - 49 = 0$ i) $x^2 = 0{,}8x - 0{,}16$

$2x^2 + 18 = 12x \quad |-12x$
$2x^2 - 12x + 18 = 0 \quad |:2$
$x^2 - 6x + 9 = 0$
$(x-3)^2 = 0$
Lösung
$x = 3 \qquad L = \{3\}$

115

Abbildung 95 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 115

Übungen

15 Sven will die Gleichung $x^2 - 2x - 9 = 0$ grafisch-tabellarisch lösen, weil er für diese Gleichung kein rechnerisches Verfahren kennt. Nach mehrmaligem Verkleinern der Schrittweite erhält er die rechts stehende Tabelle.
a) Was weiß Sven jetzt über die Lösung? Erzeuge eine Tabelle und suche weiter. Formuliere eine Lösung.
b) Begründe, dass es eine zweite Lösung gibt, und suche sie.

X	Y1
4.16	-.0144
4.161	-.0081
4.162	-.0018
4.163	.00457
4.164	.0109
4.165	.01723
4.166	.02356

X=4.16

16 Löse die Gleichungen. Untersuche grafisch, wie viele Lösungen es gibt. Gib mindestens drei Nachkommastellen an. Manchmal erkennt man die exakte Lösung. Überprüfe sie dann. Warum kann der GTR bei quadratischen Gleichungen häufig nicht die exakte Lösung finden?

a) $x^2 - 4x + 2 = 0$ b) $x^2 + 2x = 6$ c) $2x^2 - \frac{1}{2}x - 7 = 0$
d) $x^2 - 7 = \frac{2}{3}x$ e) $x^2 = 3x + 40$ f) $2x^2 + 12x = -14$

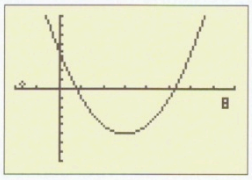
Basiswissen

Ein Lösungsverfahren, das fast immer bequem ist, aber nicht immer die exakte Lösung liefert, verwendet die Graphen und die Tabellen.

Hier mit Nullstellenverfahren

Häufig erhält man beim grafisch-tabellarischen Lösen einer Gleichung nur eine ungefähre Lösung. Eine solche Lösung heißt **Näherungslösung** oder numerische Lösung, man schreibt dann $x \approx 5{,}236$ oder $x = 5{,}236\ldots$
Eine exakte Probe ist hier dann nicht möglich.

$x^2 - 6x + 4 = 0$



Näherungslösung
numerische Lösung

Wenn die Lösungen irrational sind, kann man grafisch-tabellarisch grundsätzlich nicht die exakten Lösungen finden.
$x_1 \approx 5{,}236$
$x_2 \approx 0{,}763$

X	Y2
5.2356	-.0021
5.2357	-.0016
5.2358	-.0012
5.2359	-8E-4
5.236	-3E-4
5.2361	1.4E-4
5.2362	5.9E-4

Y2=-3.04E-4

X	Y2
.76	.0176
.761	.01312
.762	.00864
.763	.00417
.764	-3E-4
.765	-.0048
.766	-.0092

Y2=.004169

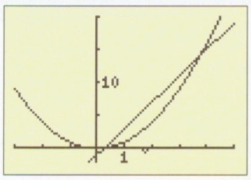
−3,04E−4 bedeutet, dass du das Komma um 4 Stellen nach links verschieben musst, also: −3,04E−4 = −0,000304

Beispiele

C Löse $x^2 = 4x - 1$
a) mit dem Schnittstellenverfahren b) mit dem Nullstellenverfahren.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X²
\Y2=4X-1
\Y3=Y1-Y2
\Y4=
\Y5=
```

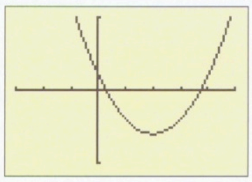
Lösung:
a)



X	Y1	Y2
.265	.07023	.06
.266	.07076	.064
.267	.07129	.068
.268	.07182	.072
.269	.07236	.076
.27	.0729	.08

3.73	13.913	13.92
3.731	13.92	13.924
3.732	13.928	13.928
3.733	13.935	13.932
3.734	13.943	13.936

b)



X	Y3
.266	.00676
.267	.00329
.268	-2E-4
.269	-.0036

X	Y3
3.731	-.0036
3.732	-2E-4
3.733	.00329
3.734	.00676
3.735	.01023

$x_1 \approx 0{,}267 \quad x_2 \approx 3{,}732$

Abbildung 96 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 116

17 *Entdeckung eines allgemeinen Verfahrens zum Lösen von quadratischen Gleichungen*
Die folgenden Aufgaben sind in Paaren aufgebaut. Eine der Aufgaben kannst du jeweils mithilfe der binomischen Formeln sofort lösen, die andere nicht. Durch geschicktes Addieren oder Subtrahieren kannst du jedoch die Gleichung so ergänzen, dass du sie lösen kannst.

a) $x^2 + 6x + 9 = 3$
b) $x^2 + 6x + 8 = 15$

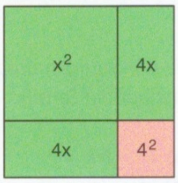
c) $x^2 - 4x + 4 = 6$
d) $x^2 - 4x + 10 = 22$

e) $x^2 + 10x + 25 = 0$
f) $x^2 + 10x + 20 = 0$

Übungen

18 *Mathe ohne Worte*

$x^2 + 8x = 20$ Addiere 4^2
$x^2 + 8x + 4^2 = 20 + 4^2$
$(x + 4)^2 = 36$ Ziehe die Wurzel
$x + 4 = \sqrt{36}$ oder $x + 4 = -\sqrt{36}$
$x + 4 = 6$ oder $x + 4 = -6$
$x_1 = 2$ $x_2 = -10$



Löse die Gleichungen nach dem gleichen Verfahren. Unterstütze deine Rechnung durch eine Zeichnung (siehe oben).
a) $x^2 + 10x = 39$ b) $x^2 - 12x = -11$ c) $x^2 - 8x = 4$ d) $x^2 + 4x = -5$

Basiswissen

Das Lösungsverfahren, das zwar nicht immer das bequemste Verfahren ist, aber immer funktioniert, verwendet die „quadratische Ergänzung“.

Quadratische Gleichungen der Form $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + 10x + 16 = 0$ $\mid -16$ **Quadratische Ergänzung:**
$x^2 + 10x = -16$ $\mid +25$ Halbiere den Koeffizienten von x und quadriere das Ergebnis: $\left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$

$x^2 + 10x + 25 = -16 + 25$ Addiere auf beiden Seiten 25
$(x + 5)^2 = 9$ Binomische Formel
$x + 5 = 3$ oder $x + 5 = -3$ Wurzelziehen
$x_1 = -2$ $x_2 = -8$
$L = \{-2; -8\}$

Lösen von quadratischen Gleichungen durch **quadratisches Ergänzen**

$x^2 + 10x + 5^2$

Beispiele

D Löse die Gleichung $x^2 - 4x - 2 = 0$.
Gib nötigenfalls das Ergebnis auf eine Stelle nach dem Komma genau an.

Rechnerische Lösung
$x^2 - 4x - 2 = 0$ $\mid + 2$
$x^2 - 4x = 2$ $\mid + 2^2$ quadratische Ergänzung
$x^2 - 4x + 4 = 2 + 4$
$(x - 2)^2 = 6$
$x - 2 = \sqrt{6}$ oder $x - 2 = -\sqrt{6}$
$x_1 = 2 + \sqrt{6}$ $x_2 = 2 - \sqrt{6}$
$x_1 \approx 4{,}4$ $x_2 \approx -0{,}4$

Grafische Lösung
Finde die Nullstellen der Funktion:
$f(x) = x^2 - 4x - 2$

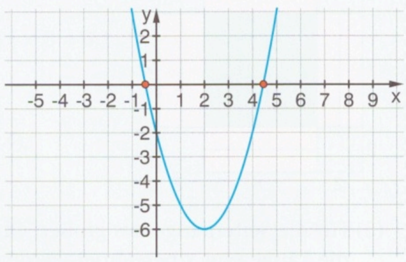


Abbildung 97 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 117

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Beispiele

E Löse die Gleichung $2x^2 + 6x - 8 = 0$.

$2x^2 + 6x - 8 = 0$ Dividiere durch 2

$x^2 + 3x - 4 = 0$ Die Gleichung ist auf „Standardform" $x^2 + px + q = 0$

$x^2 + 3x = 4$ Addiere auf beiden Seiten $\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4}$

$x + \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{25}{4}}$ Kurzschreibweise statt zwei Gleichungen

$x_1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$ $x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -4$ $L = \{-4;\ 1\}$

Übungen

Löse die Gleichungen durch quadratisches Ergänzen. Bringe die Gleichungen, wenn nötig, zunächst auf die Form $x^2 + px + q = 0$ (siehe Beispiel E).

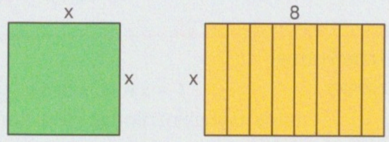
19 a) $x^2 - 6x = 9$ b) $x^2 = 40 - 16x$ c) $x^2 - 20 = 8x$
d) $x^2 + 7x = 26$ e) $4 - x^2 = 10$ f) $2x^2 - 12 = 3x$

20 a) $4x^2 - 8x = 12x$ b) $5x^2 - 2x = 7 + 4x$ c) $3x(x + 2) = 12$
d) $(x-1)(x+1) = 2x$ e) $(x-3)(x-5) = 4$ f) $(x-1)^2 + (x-2)^2 = 0$

21 Löse mit dem Verfahren aus dem Buch von Al-Chwarizmi.
a) $x^2 + 8x = 9$ b) $x^2 + 20x = 125$ c) $x^2 + 28x = 60$ d) $x^2 + 4x = 0$

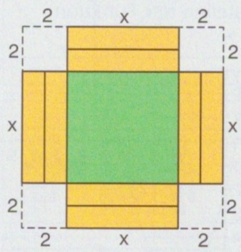
Al-Chwarizmi

Der arabische Mathematiker AL-CHWARIZMI schrieb im 9. Jahrhundert ein Mathematikbuch. In diesem Buch beschäftigte er sich auch mit dem Lösen von quadratischen Gleichungen. Um die quadratische Ergänzung für die Gleichung $x^2 + 8x = 65$ zu finden, bedient er sich des folgenden Verfahrens:



(1) AL-CHWARIZMI beginnt mit einem Quadrat mit der Seitenlänge x cm und 8 Rechtecken, mit der Länge x cm und der Breite 1 cm.

(2) Er teilt die 8 Rechtecke in Gruppen zu je 2 Rechtecken auf und fügt sie jeder Seite des Quadrates an. Die Fläche dieser Figur beträgt 65 cm² (siehe Gleichung).



(3) Um zu einem Quadrat zu ergänzen, muss er an allen vier Ecken ein Quadrat mit dem Flächeninhalt von 4 cm² anfügen.

(4) Der Flächeninhalt des großen Quadrates beträgt $65\ \text{cm}^2 + 4 \cdot 4\ \text{cm}^2 = 81\ \text{cm}^2$. Die Seitenlänge des großen Quadrates ist daher 9 cm.

(5) Für die Seitenlänge des großen Quadrates gilt: $2 + x + 2 = 9$. Damit kann die Länge von x berechnet werden. AL-CHWARIZMI erhält $x = 5$.

Auf diese Weise wird immer nur eine Lösung gefunden.

118

Abbildung 98 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 118

Basiswissen

Mithilfe der quadratischen Ergänzung kann man eine Formel entwickeln, mit der man jede quadratische Gleichung in „Normalform" lösen kann.
Quadratische Gleichung in der **Normalform: $x^2 + px + q = 0$**

Entwickeln der **pq-Formel** durch quadratische Ergänzung.

pq-Formel
Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat die Lösungen
$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Herleitung

$x^2 + px + q = 0$ — Subtrahiere q
$x^2 + px = -q$ — Quadratische Ergänzung
$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ — Vereinfache
$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ — Wurzelziehen
$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ oder $x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ — Subtrahiere $\frac{p}{2}$
$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ oder $x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Kurzschreibweise: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ bzw. $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$L = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\}$

Mit einer Umformung kann man dann auch alle quadratischen Gleichungen in allgemeiner Form lösen.
Quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$; $a \neq 0$:

$ax^2 + bx + c = 0$ — Dividiere durch a.
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
Mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ kann dann die pq-Formal angewendet werden.

Beispiele

F Löse die quadratische Gleichung $x^2 - 8x = -7$

$x^2 - 8x = -7$ — Addiere 7
$x^2 - 8x + 7 = 0$ — $p = -8$; $q = 7$
$x_1 = -\frac{-8}{2} + \sqrt{\frac{(-8)^2}{4} - 7}$; $x_2 = -\frac{-8}{2} - \sqrt{\frac{(-8)^2}{4} - 7}$
$x_1 = \frac{8}{2} + \sqrt{\frac{64}{4} - 7}$; $x_2 = \frac{8}{2} - \sqrt{\frac{64}{4} - 7}$
$x_1 = 4 + \sqrt{16 - 7}$; $x_2 = 4 - \sqrt{16 - 7}$
$x_1 = 7$; $x_2 = 1$ $L = \{1; 7\}$

G Löse die quadratische Gleichung $2x^2 - 4x - 8 = 0$.

$2x^2 - 4x - 8 = 0$ — Dividiere durch 2.
$x^2 - 2x - 4 = 0$ — $p = -2$; $q = -4$
$x_1 = -\frac{-2}{2} + \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - (-4)}$; $x_2 = -\frac{-2}{2} - \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - (-4)}$
$x_1 = 1 + \sqrt{1 + 4}$; $x_2 = 1 - \sqrt{1 + 4}$
$x_1 = 1 + \sqrt{5}$; $x_2 = 1 - \sqrt{5}$ $L = \{1 + \sqrt{5}; 1 - \sqrt{5}\}$

Abbildung 99 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 119

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Übungen

22 und **23** Lösungen:
$\{-2;\ 4\}$ $\{-8;\ 1\}$
$\{-2;\ -0{,}5\}$ $\{-4;\ 3\}$
$\{2-\sqrt{11};\ 2+\sqrt{11}\}$ $\{-5;\ 2\}$

22 Löse mit der pq-Formel.
a) $x^2 + 3x - 10 = 0$ b) $x^2 + 7x - 8 = 0$ c) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

23 Vereinfache zunächst durch Ausmultiplizieren oder Zusammenfassen.
a) $(x+1)(x-3) = 5$ b) $(x-4)(x+5) = -8$ c) $3(x+1)(x-5) = 6$

24 a) $4x^2 = -8x - 3$ b) $-6x^2 + 3x + 19 = 0$ c) $6x^2 - 3x - 3 = x^2 - x$

25 *Mit der „Produkt = 0"-Regel schnell zur Lösung.*
a) $(x-4)(x+5) = 0$ b) $(2x+6)(7-x) = 0$ c) $(10x-15)x = 0$
d) $(x^2-9)(x-3) = 0$ e) $(x^2-4x)(2x+2) = 0$ f) $(x-8)(x^2-4x-5) = 0$

26 *Welches Verfahren ist das günstigste?*
In der Tabelle sind verschiedene Verfahren zum Lösen einer quadratischen Gleichung zusammengefasst.

Wurzelziehen	$4x^2 = 20$
Wurzelziehen	$(x+4)^2 = 15$
Ausklammern (Faktorisieren)	$3x^2 - 15x = 0$ „Produkt = 0"-Regel
Quadratisches Ergänzen	$x^2 - 12x + 10 = 0$
pq-Formel	$3x^2 - 8x - 15 = 0$

a) Löse die Gleichungen in der Tabelle nach dem jeweiligen Verfahren.
b) Die pq-Formel kann man immer anwenden. Löse die Gleichung in der ersten Zeile der Tabelle mit der pq-Formel. Was geht schneller, das Lösen durch Wurzelziehen oder mit der pq-Formel?
c) Löse die quadratischen Gleichungen. Entscheide zunächst, nach welchem Verfahren du rechnen willst.
(1) $3x^2 - 4x - 4 = 0$ (2) $(x+7)^2 = 5$ (3) $15x^2 = 5x$ (4) $8x^2 - 16 = 0$
(5) $x^2 + 14x + 49 = 0$ (6) $x^2 + 20x = 0$ (7) $(x+3)^2 = 36$ (8) $(x+6)(x-4) = 0$

Diskriminante
Für die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ ist die Diskriminante der Term $\frac{p^2}{4} - q$.

27 a) Mithilfe der pq-Formel kannst du begründen: Eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ hat
– zwei reelle Lösungen, wenn der Wert der Diskriminante positiv,
– genau eine reelle Lösung, wenn der Wert der Diskriminante 0,
– keine reelle Lösung, wenn der Wert der Diskriminante negativ ist.
b) Warum hat die quadratische Gleichung in allgemeiner Form $ax^2 + bx + c = 0$ dieselbe Anzahl an Lösungen wie die zugehörige Normalform $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$?
c) Finde die Anzahl der Lösungen der quadratischen Gleichungen mithilfe der Diskriminante.
(1) $2x^2 - 12x + 18 = 0$ (2) $4x^2 - 5x + 2 = 0$ (3) $x^2 + 4x - 8 = 0$

28 Florian behauptet: „Ich kann die Anzahl der Nullstellen an der Scheitelpunktform $f(x) = a(x-d)^2 + e$ einer Parabel erkennen."
Lena: „Und was hat das mit den Lösungen einer quadratischen Gleichung zu tun?"
a) Wie macht Florian das?
b) Beantworte die Frage von Lena.

29 *Anzahl der Lösungen finden – eine Fallunterscheidung wird benötigt.*
Wie muss man k wählen, damit die Gleichung eine, zwei oder keine Lösung hat?
a) $x^2 + 4x + k = 0$ b) $x^2 + k \cdot x + 9 = 0$

120

Abbildung 100 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 120

Übungen

$(x-5)\cdot(x-2)=0$
ist eine Lösung zu a),
$x^2+x-7=x+6$
ist eine Lösung zu d).

30 Stelle jeweils zwei möglichst verschiedene quadratische Gleichungen mit den angegebenen Lösungen auf. Es dürfen auch komplizierte sein. Überprüfe dann, ob deine Gleichungen auch die angegebenen Lösungen haben.

a) $x_1 = 2;\ x_2 = 5$ b) $x_1 = 7$ c) $x_1 = -5;\ x_2 = 0$
d) $x_1 = \sqrt{13};\ x_2 = -\sqrt{13}$ e) $x_1 = -3;\ x_2 = 6$

31 Ein GTR mit CAS (Computer-Algebra-System) kann auch algebraische Umformungen durchführen. Lisa löst zunächst die Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$ und lässt das CAS dann die pq-Formel bestimmen.

F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 PrgmIO F6 Clean Up

■ solve$(x^2-3\cdot x+1=0,x)$
$x=\frac{-(\sqrt{5}-3)}{2}$ or $x=\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

■ solve$(x^2+p\cdot x+q=0,x)$
$x=\frac{\sqrt{p^2-4\cdot q}-p}{2}$ or $x=\frac{-(\sqrt{p^2-4\cdot q}+p)}{2}$

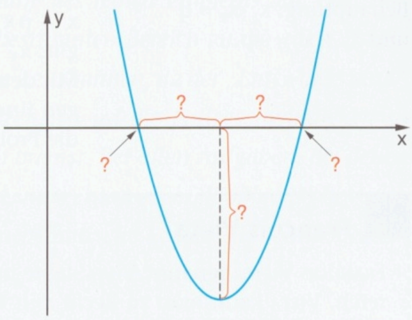
L2007 DEG AUTO FUNC 2/30

a) Löse die Gleichung ohne GTR und zeige, dass deine Lösung mit der Lösung des CAS übereinstimmt.
b) Zeige die Gleichwertigkeit (Äquivalenz) der pq-Formel des CAS mit der aus dem Basiswissen.

Schau dir die pq-Formel an.

CAS

32 Zu der quadratischen Gleichung in Normalform gehört die Normalparabel in der Form $y = x^2 + p\cdot x + q$.
a) Begründe, dass die x-Koordinate des Scheitelpunktes dieser Normalparabel $x = -\frac{p}{2}$ ist. Zeige dann, dass $SP\left(-\frac{p}{2}\middle|-\frac{p^2}{4}+q\right)$ der Scheitelpunkt ist.
b) Übertrage die Grafik in dein Heft und beschrifte sie. Beantworte alle in der Skizze angedeuteten Fragen. Schreibe einen Bericht über den Zusammenhang der pq-Formel mit besonderen Punkten der Parabel.



33 Die allgemeine Form $ax^2 + bx + c = 0$ kann zu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ umgeformt werden. Führe eine quadratische Ergänzung mit dieser Form durch und ermittle eine abc-Formel zum Lösen quadratischer Gleichungen in allgemeiner Form.

34 Vereinfache die Gleichungen zunächst durch Ausmultiplizieren oder Zusammenfassen und löse sie anschließend.

a) $2(x+1)(2x+3) = 8x^2 - 44$ b) $(x-2)^2 = 2(x+3)^2$ c) $5x(2-x) = -3(x-1)$
d) $2(x+2) - 3(x+1)(x-5) = 0$ e) $(x-9)(x+9) = 19$ f) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = x^2$

35 Lehrer Lampe denkt sich eine besonders schwierige Hausaufgabe aus. Es soll die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$ algebraisch gelöst werden. Dabei wurde im Unterricht nur das Lösen von quadratischen Gleichungen behandelt. Am nächsten Tag präsentieren Anna und Katrin ihre Lösungen, eine davon ist richtig:

Anna:
$x^3 - 6x^2 + 5x = 0 \quad |:x$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5}$
$x_1 = 5;\quad x_2 = 1$

Katrin:
$x^3 - 6x^2 + 5x = 0$
$x\cdot(x^2 - 6x + 5) = 0$
$x = 0$ oder $x^2 - 6x + 5 = 0$
$x = 0$ oder $x = 5$ oder $x = 1$

Entscheide mit Begründung, welche Lösung richtig ist, und finde den Fehler in der anderen Lösung.

Abbildung 101 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 121

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Aufgaben

36 *Forschungsaufträge*

Was haben die Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit den Koeffizienten p und q zu tun?

Auftrag 1: Löse die Gleichungen und vergleiche die Lösungen x_1 und x_2 mit den Koeffizienten p und q in der Gleichung $x^2 + px + q = 0$. Was stellst du fest?

a) $x^2 - 8x + 15 = 0$ b) $x^2 + 9x + 14 = 0$ c) $x^2 - 5x - 14 = 0$

Auftrag 2: Die Gleichung $(x-3)(x-5) = 0$ hat die Lösungen 3 und 5. Durch Ausmultiplizieren kann man die Gleichung auf die Form $x^2 + px + q = 0$ bringen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Lösungen 3 und 5 und den Koeffizienten p und q?

Auftrag 3: Die Erkenntnisse aus Auftrag 2 lassen sich verallgemeinern. Bestimme die Lösungen der Gleichung $(x-x_1)(x-x_2) = 0$. Bringe die Gleichung durch Ausmultiplizieren in die Form $x^2 + px + q = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen p und q und den Lösungen x_1 und x_2?

37 Bestätige mithilfe der pq-Formel die Behauptung: $x_1 \cdot x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = -p$.

Satz von Vieta
Wenn eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2 hat, dann gilt: $x_1 \cdot x_2 = q$ und $x_1 + x_2 = -p$
Mit dem Satz von Vieta kann man schnell Lösungen finden, wenn diese ganzzahlig sind. Auch die Probe lässt sich damit schnell durchführen.

Francois Vieta

Francois Vieta
1540–1603

Francois Viete, genannt Vieta, lebte und arbeitete im 16. Jahrhundert in Frankreich. Vieta kann man zu Recht den Wegbereiter der Algebra nennen, denn er führte das Rechnen mit Platzhaltern ein. Auch die Benutzung der uns heute vertrauten Rechenzeichen „+“ und „–“ anstelle der bis dahin gebräuchlichen Wörter geht auf Vieta zurück.
Vietas Leistungen als Mathematiker sind umso erstaunlicher, als er von Hause aus Jurist war und u.a. für die französischen Könige Heinrich III. und Heinrich IV. arbeitete. Er betrieb Mathematik als Hobby in seiner Freizeit. Berühmt wurde er vor allem dadurch, dass er verschlüsselte Nachrichten der Spanier für den französischen König entschlüsselte. Seine Fähigkeiten auf diesem Gebiet waren so außerordentlich, dass die Spanier ihn beim Papst beschuldigten, er sei mit dem Teufel im Bunde.
Neben vielen Entdeckungen in der Mathematik (siehe Satz von Vieta) erregte er besonderes Aufsehen dadurch, dass er die Gleichung $45x - 3795x^3 - 94734x^5 \ldots + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = 0$ löste.

$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_1 \cdot x_2 = 3$ Satz von Vieta
$x_1 + x_2 = -(-4) = 4$
Probiere einfache Lösungen aus.
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$ passt.

38 Löse die quadratischen Gleichungen mit dem Satz von Vieta.

a) $x^2 + 7x + 12 = 0$ b) $x^2 + 9x + 18 = 0$
c) $x^2 - 4x + 4 = 0$ d) $x^2 - 6x + 8 = 0$
e) $x^2 - 13x + 30 = 0$ f) $x^2 + 2x - 80 = 0$

39 *Verallgemeinerung des Satzes von Vieta*

Beweise: Für die Lösungen x_1 und x_2 der allgemeinen quadratischen Gleichung gilt: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ und $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

122

Abbildung 102 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 122

8.5 Abschnitt 4.4

4.4 Problemlösen mit quadratischen Funktionen und Gleichungen

Was dich erwartet

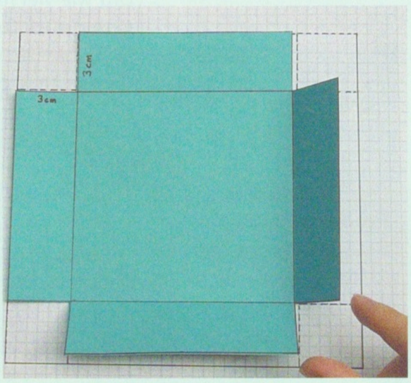
Mit quadratischen Funktionen und Gleichungen kann man viele Probleme des Alltags und innermathematische Probleme gut modellieren.

Quadratische Funktionen und Gleichungen sind darüber hinaus beliebt, da man
- *quadratische Funktionsgleichungen leicht aufstellen kann,*
- *die Graphen zu quadratischen Funktionen anhand weniger Merkmale beschreiben und skizzieren kann,*
- *für alle quadratischen Gleichungen Lösungsverfahren kennt.*

Typisch für das Modellieren ist, dass häufig die in einem Sachzusammenhang verwendete quadratische Funktion das Problem nicht genau beschreibt. In der Regel stellt das mathematische Modell eine Vereinfachung des realen Problems dar, oder das mathematische Modell trifft nur für einen bestimmten Bereich zu. So gilt z.B. das Fallgesetz $s(t) = 5t^2$ angenähert nur für kleine Zeitspannen, da der „Luftwiderstand" nicht berücksichtigt wird. Für längere Fallzeiten wird die Fallgeschwindigkeit so groß, dass die Luftreibung den Fall merklich bremst. Bei allen Aufgaben, bei denen man ein mathematisches Modell verwendet, muss man eine „Problemprobe" machen, d.h. man muss überprüfen, ob die mathematische Lösung ein sinnvolles Ergebnis für das Problem darstellt.

Aufgaben

1 *Finde das richtige Maß*



Du benötigst: Papier, Lineal, Schere.
Eine Kiste mit quadratischer Grundfläche ohne Deckel soll aus einem quadratischen Stück Papier hergestellt werden, indem man an jeder Ecke ein Quadrat der Kantenlänge 3 cm abschneidet und die Ränder des verbleibenden Papierstücks hochfaltet. Das Volumen der Kiste soll 75 cm^3 betragen. Wie groß muss das ursprüngliche quadratische Stück Papier sein?

a) *Lösung durch Ausprobieren:*
(1) Beginne mit einem quadratischen Stück Papier der Kantenlänge 15 cm. Schneide an jeder Ecke ein Quadrat der Kantenlänge 3 cm ab.
(2) Falte das Papier zu einer offenen Kiste. Miss Länge, Breite und Höhe und berechne das Volumen. Ist das Volumen größer oder kleiner als 75 cm^3?
(3) Finde die Lösung, indem du systematisch ausprobierst.

b) *Lösung durch Rechnen:*
(1) x sei die gesuchte Länge des quadratischen Stück Papiers. Erkläre, warum $x - 6$ die Breite und Länge der Kiste und 3 die Höhe ist.
(2) Schreibe einen Term für das Volumen V(x) der Kiste auf.
(3) Berechne mithilfe einer Gleichung die gesuchte Länge x des Papiers. Du erhältst zwei Ergebnisse. Welches Ergebnis ist die Lösung des Problems?

Abbildung 103 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 123

4 Quadratische Funktionen und Gleichungen

Aufgaben

„Ich bemerkte den Stau sehr spät, da er sich hinter einer Kurve befand. Ich schätze, dass das Fahrzeug, auf das ich dann auffuhr, ca. 150 m entfernt war, als ich die Gefahr bemerkte. Ich fuhr nicht schneller als die erlaubte Höchstgeschwindigkeit von 80 km/h und konnte dennoch nicht mehr rechtzeitig bremsen.“

2 *Aus dem Protokoll einer Gerichtsverhandlung anlässlich eines Unfalls auf der Autobahn*

Unfallaufnahme der Polizei

Näheres zum Anhalteweg eines Fahrzeugs auf Seite 93

Der Sachverständige nahm Stellung: *„Den Anhalteweg w eines Autos kann man mit der Formel* $w(v) = \frac{v^2}{100} + \frac{3v}{10}$ *berechnen. Dabei muss man die Geschwindigkeit v in km/h eingeben und erhält den Anhalteweg in Metern. ...“*

a) Was wird der Sachverständige weiter ausgeführt haben?

b) Berechne, mit welcher Geschwindigkeit das Auto mindestens gefahren sein muss.

c) Kannst du dir vorstellen, was der Sachverständige außer der Anwendung der Formel noch alles berücksichtigen muss?

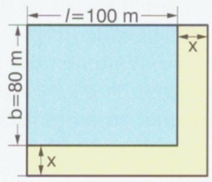
Basiswissen

Will man ein Problem mithilfe der Mathematik lösen, dann muss man herausfinden, welcher Zusammenhang zwischen den Variablen besteht.

Aufgabe:
Ein rechteckiger Acker ist 100 m lang und 80 m breit.
Bei einer Flurbereinigung wird er in Länge und Breite um die gleiche Strecke größer. Die Fläche vergrößert sich dabei um 4000 m².
Um wie viel Meter wird das Grundstück breiter und länger?

Problem
Was willst du herausfinden?
Um wie viel m wird das Grundstück länger und breiter?

Daten und Variable



Zusammenhänge
Fläche des „blauen“ Rechtecks in m²: $80 \cdot 100 = 8000$
Fläche des großen Rechtecks in m²:
einerseits: $8000 + 4000$
andererseits: $(100 + x)(80 + x)$
Also:
$(100 + x)(80 + x) = 8000 + 4000$

Rechnerische Lösung

$(100 + x)(80 + x) = 12000$

$x^2 + 180x + 8000 = 12000 \quad | -12000$

$x^2 + 180x - 4000 = 0$

$x_1 = \frac{-180 + \sqrt{180^2 + 16000}}{2} = \frac{-180 + 220}{2} = 20$

$x_2 = \frac{-180 - \sqrt{180^2 + 16000}}{2} = \frac{-180 - 220}{2} = -200$

Problemprobe
Berechnung der „gelben“ Fläche
$20\text{ m} \cdot 120\text{ m} + 20\text{ m} \cdot 80\text{ m} =$
$2400\text{ m}^2 + 1600\text{ m}^2 =$
4000 m^2 ✓
($x_2 = -200$ ergibt im Bezug auf das Problem keinen Sinn.)

Ergebnis: Der Acker wird um 20 m breiter und länger.

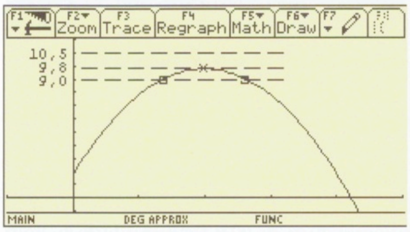
124

Abbildung 104 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 124

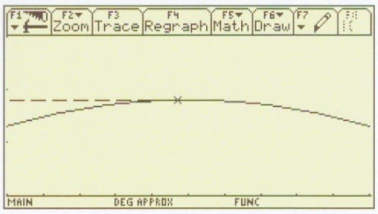
Beispiele

A Der Flug eines Balles kann mit der Funktionsgleichung $h(x) = -0{,}02x^2 + 0{,}8x + 1{,}8$ beschrieben werden. Dabei ist x die Entfernung von der Abwurfstelle in Metern und h die zugehörige Höhe in Metern. Erreicht der Ball die Höhe von 9,0 m (9,8 m; 10,5 m)?

Grafische Lösung
Fenster $0 \le x \le 50$
$0 \le y \le 12$



Ausschnittsvergrößerung
Fenster $15 \le x \le 25$
$8 \le y \le 11$



GTR, Funktionenplotter

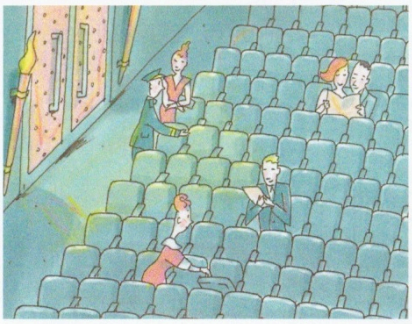
Rechnerische Lösung

Höhe	Gleichung	Diskriminante b^2-4ac	Anzahl der Lösungen	Lösung
10,5	$-0{,}02x^2 + 0{,}8x + 1{,}8 = 10{,}5$ $-0{,}02x^2 + 0{,}8x - 8{,}7 = 0$	negativ	keine	
9,8	$-0{,}02x^2 + 0{,}8x + 1{,}8 = 9{,}8$ $-0{,}02x^2 + 0{,}8x - 8{,}0 = 0$	null	eine	$x = ■$
9,0	$-0{,}02x^2 + 0{,}8x + 1{,}8 = 9{,}0$ $-0{,}02x^2 + 0{,}8x - 7{,}2 = 0$	positiv	zwei	$x_1 = ■$ $x_2 = ■$

Die Höhe von 10,5 m wird nicht erreicht, 9,8 m ist die maximale Höhe und die Höhe von 9,0 m wird zweimal erreicht.

Übungen

3 Berechne zu Beispiel A: Wie weit entfernt von der Abwurfstelle wird die Höhe 9,8 m (9,0 m) erreicht?



4 Die Sitze in einem Theater sind in einem Rechteck angeordnet. Die Anzahl der Sitze in einer Reihe ist um 12 kleiner als die Anzahl der Reihen. Wie viele Sitze in jeder Reihe und wie viele Reihen gibt es in dem Theater, wenn die Gesamtzahl der Sitze 1260 beträgt?

5 *Rechteck gesucht*
a) Die Länge eines Rechtecks ist um 4 cm größer als die Breite. Wie lang und wie breit ist das Rechteck, wenn es eine Fläche von 117 cm² hat? Skizziere zunächst ein Rechteck in deinem Heft und beschrifte es. Stelle dann eine Gleichung auf.
b) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 40 m, die Fläche 36 m². Berechne Länge und Breite des Rechtecks.

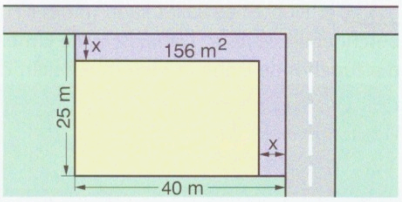
6 Schreibe die Zahl 123 als Summe von zwei positiven Zahlen. Das kann auf sehr viele Arten geschehen. Berechne jeweils das Produkt der beiden Summanden. Finde die Zerlegung, bei der das Produkt den größten möglichen Wert annimmt.

125

Abbildung 105 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 125

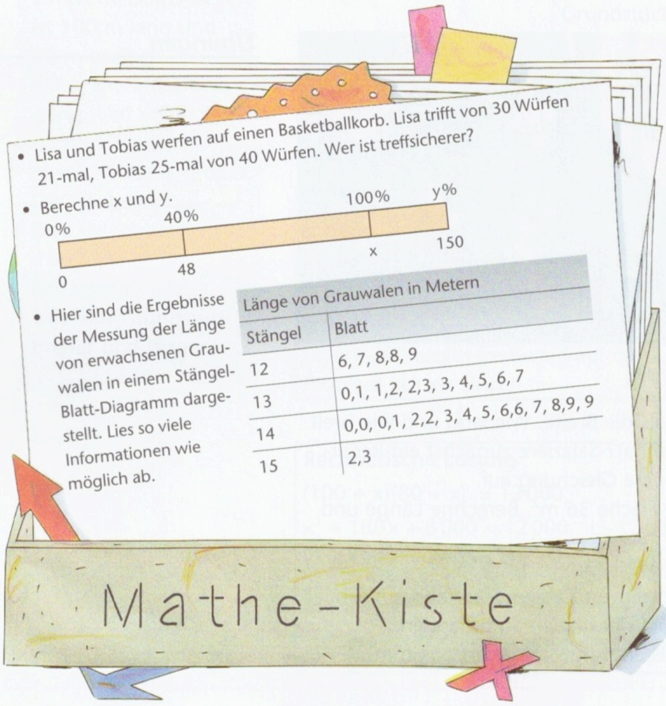
Übungen

7 Ein rechteckiges Grundstück stößt mit zwei Seiten an eine Straße. Zur Verbreiterung der Straßen wird jeweils ein gleich breiter Streifen des Grundstückes abgegeben. Wie breit sind die Streifen, wenn insgesamt 156 m² abgegeben werden?



8 Ein Swimmingpool der Länge 30 m und der Breite 20 m soll von einem Weg der Breite x m umgeben werden.
a) Fertige eine beschriftete Skizze an und stelle einen Term auf, mit dem man die Fläche des Weges berechnen kann.
b) Wie breit ist der Weg, wenn dessen Fläche 360 m² beträgt?

9 Ein Stein wird von einem Turm mit der Geschwindigkeit von 10 m/s senkrecht nach unten geworfen. Mit der Funktionsgleichung $h(t) = \underset{(1)}{40} - \underset{(2)}{10t} - \underset{(3)}{5t^2}$ kann man berechnen, in welcher Höhe sich der Stein nach t Sekunden befindet.
a) Die markierten Terme passen zu: freier Fall, Wurf nach unten, Höhe des Turmes. Ordne richtig zu.
b) Wie lange dauert es, bis der Stein auf dem Boden auftrifft?
c) Wie müsstest du die Funktionsgleichung abändern, wenn der Stein senkrecht nach oben geworfen würde? Berechne, wie lange es jetzt dauert, bis er den Boden erreicht.



10 *Innermathematische Anwendungen*
a) Wie viele Lösungen hat die quadratische Gleichung $5x^2 + 5x + 5 = 0$?
b) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $nx^2 + nx + n = 0$, $n \neq 0$? Du kannst die Frage ohne Rechnung begründet beantworten.
c) Wie viele Lösungen hat die Gleichung $nx^2 + 2nx + 3n = 0$, $n \neq 0$?
d) Erfinde eine ähnliche Aufgabe und lasse sie durch deinen Partner lösen.

11 Ein Versicherungsmathematiker modelliert den Zusammenhang zwischen dem Alter des Fahrers und dem Unfallrisiko mit der quadratischen Funktion mit $y(x) = 0{,}4x^2 - 36x + 1000$, wobei x das Alter in Jahren bezeichnet und y die Unfälle pro 50 Mio. Fahrkilometer.
a) Passen die Daten aus der Tabelle zu dem Modell?

x	y
20	440
40	200
60	280

b) In welchem Alter werden nach dem Modell die wenigsten Unfälle verursacht?

Abbildung 106 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 126

Aufgaben

12 Im Jahre 2002 trugen nach Schätzungen nur $\frac{1}{3}$ der Erwachsenen und $\frac{2}{3}$ der Kinder beim Radfahren einen Sturzhelm. Es soll untersucht werden, was geschieht, wenn man ohne Helm stürzt.

a) Der Kopf eines Radfahrers befindet sich beim Fahren ungefähr 1,80 m über dem Boden. Angenommen, das Fahrrad bewegt sich nicht und der Fahrer stürzt zu Boden. Mit der Funktionsvorschrift für den freien Fall $s(t) = 5t^2$ kann man aus der Fallzeit t in Sekunden die Fallstrecke $s(t)$ in Metern abschätzen. Wie lange dauert es etwa, bis der Kopf des Radfahrers auf dem Boden aufschlägt?

b) Mit der Funktionsvorschrift $v(t) = 10t$ kann man aus der Fallzeit t in Sekunden die Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s berechnen, die ein Körper nach t Sekunden erreicht hat. Mit welcher Geschwindigkeit schlägt der Kopf des Radfahrers auf den Boden?

c) Mediziner sagen, dass man sich schwere Hirnschäden zuzieht, wenn der Kopf ohne Helm mit einer Geschwindigkeit von mehr als 5,5 m/s aufprallt. Welcher Fallhöhe entspricht das?

Übrigens:
$1\,\frac{m}{s} = 3{,}6\,\frac{km}{h}$

13 Eine Firma, die Ski herstellt, hat untersucht, wie die Herstellungskosten K und die Einnahmen E von der produzierten und verkauften Stückzahl x abhängen.

Modell: Die Firma nimmt der Einfachheit halber an, dass alle produzierten Ski verkauft werden.
Die **Kosten K** kann man errechnen mit der Funktionsgleichung $K(x) = 80x + 60\,000$
und die **Einnahmen E** durch $E(x) = 0{,}1x(4000 - x)$.
Der **Gewinn G** wird beschrieben durch $G(x) = E(x) - K(x)$.

a) Erstelle eine Grafik, die den Verlauf der Kosten- und Einnahmefunktion in einem sinnvollen Bereich zeigt. Benutze die Graphen zur Beantwortung der Fragen.

b) Um Gewinn zu machen, müssen die Einnahmen E größer als die Kosten K sein. Wie viele Ski müssen mindestens und wie viele dürfen höchstens verkauft werden, damit die Firma „in der Gewinnzone“ bleibt?

c) Für welche Anzahl verkaufter Ski sind die Einnahmen maximal?

d) Zeichne den Graphen der Gewinnfunktion in dein Heft. Für welche Anzahl verkaufter Ski ist der Gewinn maximal?

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=80*X+60000
\Y2=0.1*X*(4000-
```

```
\Y3=Y2-Y1
```

14 Ein Unternehmen hat ein dreieckiges Grundstück in der Innenstadt erworben und möchte es bebauen. Den Zuschlag erhielt ein Bauentwurf, der für das neue Gebäude einen rechteckigen Grundriss vorsieht. Welche Grundfläche kann das Gebäude maximal haben?

Einige Tipps zur Lösung:
- Übertrage die Zeichnung in dein Heft und zeichne ein geeignetes Koordinatensystem ein. Beschreibe die Grundstücksgrenzen durch eine Gleichung.
- Wie groß ist die Fläche, wenn das Gebäude 9 m (15 m, 20 m) lang ist?
- Stelle einen Term A(x) auf, mit dem man zu jeder Länge x die Größe der Grundrissfläche berechnen kann.

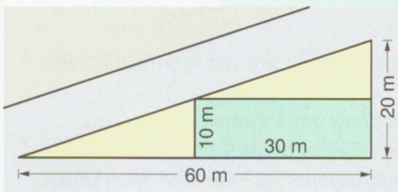


Abbildung 107 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 127

8.6 *Check-Up*

Erinnern, Können, Gebrauchen

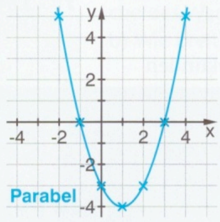
CHECK UP

Quadratische Funktionen und Gleichungen

Quadratische Funktionen
allgemeine Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

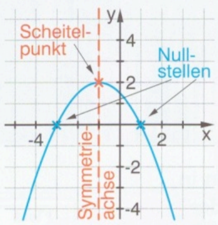
Beispiel: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

x	f(x)
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5



„Kennzeichen" einer Parabel
$f(x) = -0{,}5x^2 - x + 1{,}5$

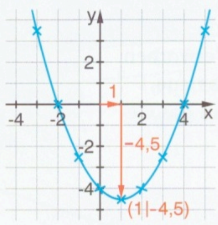
x	f(x)
−4	−2,5
−3	0
−2	1,5
−1	2
0	1,5
1	0
2	−2,5



Scheitelpunktform: $f(x) = a(x-d)^2 + e$
Scheitelpunkt (d | e)

Beispiel: $f(x) = 0{,}5(x-1)^2 - 4{,}5$

$a = 0{,}5$
$d = 1$
$e = -4{,}5$



Die Parabel entsteht aus der Normalparabel durch:
- Verschiebung um 1 Einheit nach rechts,
- Stauchen (Faktor a = 0,5),
- Verschiebung um 4,5 Einheiten nach unten.

1 Jede Wertetabelle beschreibt eine Funktion.
a) Zeichne die zugehörigen Graphen.
b) Welche Funktion ist eine quadratische, lineare oder antiproportionale Funktion?
c) Bestimme jeweils die Funktionsgleichung.

x	y
−3	7
−2	2
−1	−1
0	−2
1	−1
2	2
3	7

x	y
−3	7
−2	4
−1	1
0	−2
1	−5
2	−8
3	−11

x	y
−3	16
−2	9
−1	4
0	1
1	0
2	1
3	4

x	y
−3	−4
−2	−6
−1	−12
0	–
1	12
2	6
3	4

2 Lineare Funktionen und quadratische Funktionen unterscheiden sich in vielen Punkten.
a) Beschreibe die Unterschiede zwischen den Graphen einer linearen und einer quadratischen Funktion.
b) Erläutere den Unterschied zwischen den Funktionsgleichungen.
c) Erstelle für die Funktionen mit $f(x) = 2x - 1$ und $g(x) = (x-2)^2 - 4$ eine Wertetabelle im Bereich $-4 < x < 4$, Schrittweite 1. Wie ändert sich der Funktionswert in beiden Funktionen, wenn du x um 1 erhöhst?

3 *Parabeln auf einen Blick*
Lies aus den Funktionsgleichungen so viele Informationen wie möglich ab (Scheitelpunkt, Nullstellen, nach oben/unten geöffnet, gestreckt/gestaucht, Schnittpunkt mit der y-Achse).
a) $f(x) = (x-2)(x+3)$ b) $f(x) = (x+2)^2 - 4$ c) $f(x) = x^2 + 3$
d) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ e) $f(x) = 3x(x-1)$ f) $f(x) = -0{,}5x^2$

4 Ermittle den Scheitelpunkt der Parabel. Handelt es sich um ein Maximum oder ein Minimum?
a) $f(x) = -x^2 + 5$ b) $f(x) = 2(x-7)^2$ c) $f(x) = (x+2)^2 - 5$

5 Bestimme die Funktionsgleichung einer Parabel mit dem Scheitelpunkt S, die weder gestaucht noch gestreckt ist.
a) S(4 | 0) nach unten geöffnet b) S(−5 | −2) nach oben geöffnet c) S(0 | 2) nach unten geöffnet

6 Das Kabel einer Hängebrücke kann mithilfe einer quadratischen Funktion modelliert werden. Bestimme die Funktionsgleichung mit den Daten aus der Zeichnung.

128

Abbildung 108 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 128

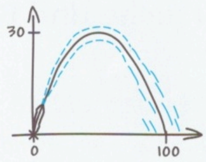
Erinnern, Können, Gebrauchen

CHECK UP

7 Beschreibe – ohne zu zeichnen – die folgenden Parabeln im Vergleich zur Normalparabel.
a) $f(x) = 4x^2$ b) $f(x) = 0{,}2x^2$ c) $f(x) = -2x^2$
d) $f(x) = x^2 - 3$ e) $f(x) = -3x^2 + 1$ f) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

8 Wie findest du den Scheitelpunkt der Parabel? Rechne.
a) $f(x) = x^2 + 4x - 2$ b) $f(x) = x^2 - 4$ c) $f(x) = x^2 - 5x - 6$
d) $f(x) = (x+2)(x-6)$ e) $f(x) = -0{,}2x(x-10)$ f) $f(x) = x^2$

9 Ein Wasserstrahl aus einer Wasserkanone spritzt 100 m weit und erreicht eine Höhe von 30 m. Mit welcher quadratischen Funktion kann man den Wasserstrahl modellieren?



10 a) Berechne den Scheitelpunkt der Parabel $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ (faktorisierte Form).
Du erhältst eine „allgemeine Formel“ für den Scheitelpunkt.
b) Warum kann man nicht jede quadratische Funktion in faktorisierter Form darstellen, aber jede in Scheitelpunktform?

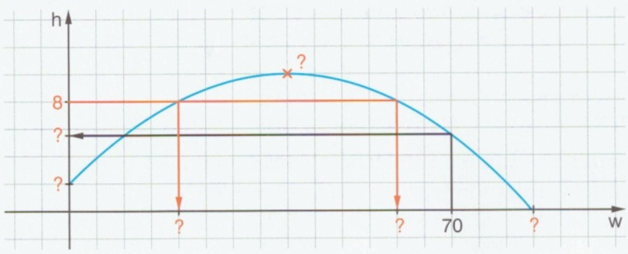
11 Löse die quadratische Gleichung rechnerisch und mache die Probe zeichnerisch.
a) $0{,}5x^2 + 2x - 6 = 0$ b) $-(x-3)^2 = -4$ c) $x^2 - 4x + 4 = -9$

12 Löse die quadratische Gleichung. Entscheide zunächst, welches Lösungsverfahren du anwenden willst.
a) $x^2 + 2x - 8 = 0$ b) $4x^2 - 8 = 20$ c) $3x^2 = x$
d) $5x^2 - 5x = 0$ e) $9x^2 + 16x = -12$ f) $3x^2 = 2x^2 - 1$

13 Zeichne je zwei passende Parabeln, die sich
a) in zwei Punkten schneiden. b) in einem Punkt schneiden. c) nicht schneiden.

14 Ermittle die Schnittpunkte der Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = 40x - 2x^2$ und $g(x) = x^2 - 5x + 150$.

15 Der Flug eines Speeres beim Speerwurf wird durch die folgende quadratische Funktion modelliert:
$h(w) = -\frac{1}{200}(w - 40)^2 + 10$
Dabei ist h die Flughöhe und w die Weite vom Abwurfpunkt in Metern. Formuliere alle in der Skizze angedeuteten Fragen und beantworte sie.



Scheitelpunkt berechnen

$f(x) = x^2 - 8x + 10$

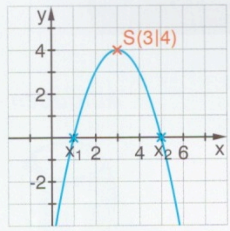
quadratische Ergänzung

$= x^2 - 8x + 16 - 16 + 10$
$= (x-4)^2 - 6$

Scheitelpunkt $S(4|-6)$

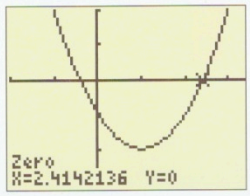
Faktorisierte Form: $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Nullstellen (Schnittstellen des Graphen mit der x-Achse) sind x_1 und x_2
Beispiel: $f(x) = -(x-1)(x-5)$

$a = -1$
Nullstellen:
$x_1 = 1$
$x_2 = 5$
Scheitelpunkt:
$x_S = 3$
$f(x_S) = 4$



Quadratische Gleichungen lösen

- **numerisch**
  $x^2 - 2x - 1 = 0$
  Die Lösungen entsprechen den Nullstellen der zugehörigen quadratischen Funktion.
  Man erhält nur Näherungslösungen.



- **Wurzel ziehen**
  $5x^2 = 40 \quad |:5$
  $x^2 = 8$ $L = \{-\sqrt{8};\ \sqrt{8}\}$
- **Ausklammern**
  $6x - 4x^2 = 0$ Ausklammern
  $x(6 - 4x) = 0$ „Produkt = 0“-Gesetz
  $x = 0$ oder $6 - 4x = 0$
  $x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{3}{2}$ $L = \left\{0;\ \frac{3}{2}\right\}$
- **pq-Formel** ($x^2 + px + q = 0$)
  $L = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right\}$
- $ax^2 + bx + c = 0$: Dividiere durch a und wende dann die pq-Formel an.

129

Abbildung 109 Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 129

Literatur

Affolter, W. u.a. (Hg.) (2011). Das Mathematikbuch 9. Ausgabe N. Stuttgart.

Aigner, M., Ziegler, G. M. (2015). Das BUCH der Beweise. Berlin.

Alten, H.-w., Djafari Naini, A. (u. a.) (Hg.) (2000). 4000 Jahre Algebra. Berlin.

Amalric, M., Dehaene, S. (2016). Origins of the brain networks for advanced mathematics in expert mathematicians. In: Verma, I. M. (Hg). Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America, 18(113), S. 4909-4917.

Andelfinger, B. (1979). Zur Lage, Schulmathematik. Standort und Perspektiven. Freiburg.

Atiyah, M. F. (1976). Trends in Pure Mathematics. In: Proceedings of the third International Congress of Mathematical Education. 16. bis 21. August in Karlsruhe, S. 61-74.

Baireuther, P. (1989). Zentrale Ideen für den Mathematikunterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 74-77.

Baumann, R. (1996). Didaktik der Informatik. Stuttgart.

Baumert, J., Klieme, E. (u.a) (2001). Internationales und nationales Rahmenkonzept für die Erfassung von naturwissenschaftlicher Grundbildung in PISA. https://www.mpib-berlin.mpg.de/Pisa/KurzFrameworkScience.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Bender, P. (1983). Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 8-17.

Bender, P. (1991). Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Blum, W., Kirch, A. (u.a.) (Hg.). Mathematik lehren und lernen. Festschrift für Heinz Griesel. Hannover, S. 48-60.

Bender, P. (1994). Wo im Fächer-Kanon der allgemeinbildenden Schule soll die Informatik angesiedelt werde?. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Fundamentale Ideen. Zur Zielsetzung eines künftigen Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" von 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel. Hildesheim. S. 8-17.

Bender, P. (1997). Grundvorstellungen und Grundverständnisse für den Stochastikunterricht. In: Stochastik in der Schule, 17(1), S. 8-33.

Bender, P. (2004). Die etwas andere Sicht auf den mathematischen Teil der internationalen Vergleichsuntersuchung PISA sowie TIMSS und IGLU. In: DMV-Mitteilungen 12-2/2004, S. 60-67.

Bender, P. (2005). PISA, Kompetenzstufen und Mathematik-Didaktik. https://lama.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/MathematikDidaktik/Personen/Bender/Veroeffentlichungen/2005PISAKompStMDid.pdf Abruf 02.06.2016.

Bender, P., Schreiber, A. (1985). Operative Genese der Geometrie. Wien.

Bender, P. Schwill, A. (1996). Stiften Computeralgebrasysteme Sinn? - Zusammenfassung und Einschätzung der Podiums- und Plenumsdiskussion. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Rechenfertigkeit und Begriffsbildung – zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Bericht über die 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" von 22. bis 25. September 1995 in Wolfenbüttel. Hildesheim. S. 50-55.

Berromeo Ferri, R. (2014). Präferenz oder Fähigkeit? Mathematische Denkstile im Spannungsfeld Persönlichkeit, Kultur und schulischer Sozialisation. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 13-20.

Bikner-Ahsbahs, A. (2001). Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Theorie interessensdichter Situationen - Bausteine für eine mathematikdidaktische Interessenstheorie. Hildesheim.

Bishop, A. J. (1991). Mathematical Enculturation. A cultural Perspective on Mathematics Education. Dordrecht.

Borovcnik, M. (1992). Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik. Mannheim.

Borovcnik, M. (1997). Fundamentale Ideen als Organisationsprinzip in der Mathematik-Didaktik. http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/1997%20Band%2027/Borovcnik1997.pdf Abruf 02.06.2016.

Bourbaki, N. (1974). Die Architektur der Mathematik. In: Otte, M. (Hg.). Mathematiker über die Mathematik. Berlin, S. 140-160.

Brainerd, C. J. (1978). Entwicklungsstufen, Struktur und Entwicklungstheorie. In: Steiner, G. (Hg.): Die Psychologie des 20. Jahrhundert. Bd. 7. Piaget und die Folgen, S. 207-218.

Brinkmann, A. (2002). Über Vernetzungen im Mathematikunterricht - eine Untersuchung zu Linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I. http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-5386/brinkmanndiss.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Bruner, J. (1960). The Process of Education. Cambridge Massachusetts.

Bruner, J. (1962). The conditions of creativity. In: Gruber, H., Terrell, G., Wertheimer, M. (Hg.). Contemporary approaches to creative thinking, New York, S. 1-30.

Bruner, J. (1965). Toward a Theory of Instruction. Cambridge Massachusetts.

Bruner, J. (1969). On knowing. Essays for the left hand. New York.

Bruner, J. (1970). Der Prozeß der Erziehung. Berlin.

Bruner, J. (1974). Entwurf einer Unterrichtstheorie. Berlin.

Bundesinstitut Bildungsforschung, Innovation & Entwicklung des österreichischen Schulwesens. BIFIE (2012). Kompetenzen und Modelle. https://www.bifie.at/node/49 Abruf vom 07.01.13.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. BMUKK (Hg.) (2004). Lehrplan Mathematik für die AHS Oberstufe. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/11859/lp_neu_ahs_07.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur. BMUKK (Hg.) (2011). Die kompetenzorientierte Reifeprüfung im Fach Mathematik an AHS. http://www.bmukk.gv.at/medienpool/22076/reifepruefung_ahs_lfmath.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Burrill , G. (2008). Fundamental ideas in teaching statistics and how they affect the training of teachers. In: Proceedings of the ICMI Study 8 and IASE Round Table Conference. Montery, Mexico. http://iase-web.org/documents/papers/rt2008/Panel1_Burrill.pdf Abruf 02.06.2016.

Burton, L. (2004). Mathematicians as Enquirers. Learning about Learning Mathematics. Boston.

Changeux, J.-P., Connes, A. (1992). Gedanken-Materie. Berlin.

Clay Mathematics Institute, Cambridge, Massachusetts (Hg.) (2006). The Millennium Prize Problems. http://www.claymath.org/library/monographs/MPPc.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Collins, A., Brown, J. S., Newman, S. E. (1989). Cognitive Apprenticeship: Teaching the Crafts of Reading, Writing, and Mathematics. In: Resnick, L. B. (Hg). Knowing, Learning, and Instruction. Essays in Honor of Robert Glaser. Hillsdale, New Jersey, S. 453-494.

Courant, R. (1954). Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Bd.1 Funktionen einer Veränderlichen. Berlin.

Courant, R., Robbins, H. (2010). Was ist Mathematik? Berlin.

Cropley, A. J., Reuter, M. (2010). Kreativität und Kreativitätsförderung. In: Rost, D. H. (Hg.). Handbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim, S. 402-413.

Damerow, P. (1977). Die Reform des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe I. Bd. 1: Reformziele, Reform der Lehrpläne. Stuttgart.

Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. In: Didaktik der Mathematik 2(16), S. 149-160.

Danckwerts, R. (1989). Linearität als curriculare Leitideen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 124-126.

Davis, P. J., Hersh, R. (1985). Erfahrung Mathematik. Basel.

Dewey, J. (EE) (1974). Psychologische Grundfragen der Erziehung. München.

Dewey, J. (1975). Pragmatismus und Pädagogik. In: Martens, E. (Hg.). Texte der Philosophie des Pragmatismus. Stuttgart, S. 205-246.

Dewey, J. (MW) (1983). Zitiert nach: Boydston, J. A. (Hg) (1969-1990). The Middle Works 1921-1922. Volume 13. Illinois.

Dewey, J. (LW) (1986). Zitiert nach: Boydston, J. A. (Hg) (1969-1990). The Later Works 1925-1953. Volume 12, 1938. Illinois.

Dewey, J. (DE) (1993). Demokratie und Erziehung: eine Einleitung in die philosophische Pädagogik. Braunschweig.

Dewey, J. (ÖP). (1996). Die Öffentlichkeit und ihre Probleme. Darmstadt.

Dieudonné, J. A. (1974). Sollen wir „Moderne Mathematik" lehren? In: Otte, M. (Hg.). Mathematiker über die Mathematik. Berlin, S. 403-424.

Dörfler, W. (1984). Fundamentale Ideen der Informatik und Mathematikunterricht. In: Österreichische Mathematische Gesellschaft (Hg.). Symposion über Schulmathematik. Didaktik Reihe Nr. 10. Salzburg, S. 19-40.

Dorner, C. (2016). Finanzmathematik im Unterricht – Was soll unterrichtet werden? – ein Zugang über zentrale Ideen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, im Erscheinen.

Dorsch, F. (Hg.) (2014). Dorsch - Lexikon der Psychologie (17. Auflage). Bern.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. An educational approach. Dordrecht.

Fischer, R. (1976). Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 8, S. 185-192.

Fischer, R. (1984). Unterricht als Prozess der Befreiung vom Gegenstand - Visionen eines neuen Mathematikunterrichts. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 1, S. 51-85.

Fischer, R., Malle, G. (2004). Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln. Mannheim.

Freie und Hansestadt Hamburg, Behörde für Bildung und Sport. BBS (Hg.) (2007). Rahmenplan Mathematik. Bildungsplan achtstufiges Gymnasium Sekundarstufe I. http://www.hamburg.de/contentblob/2536224/data/mathematik-gy8-sek-i.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Freudenthal, H. (1963). Was ist Axiomatik, und welchen Bildungswert kann sie haben? In: Der Mathematikunterricht, 4(9), S. 5-29.

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1. Stuttgart.

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenemenology of Mathematical Struktures. Dordrecht.

Fritzlar, T. (2013). Mathematische Begabung im jungen Schulalter. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 45-42.

Führer, L. (1997). Pädagogik des Mathematikunterrichts. Göttingen.

Führer, L. (2005). Kleine Revue sozialer Aspekte der Schulgeometrie. In: Der Mathematikunterricht, 2/3, S. 70-85.

Führer, L. (2009). Was könnte zeitgemäßer Mathematikunterricht zur naturwissenschaftlichen Allgemeinbildung beitragen? In: Ludwig, M., Oldenburg, R., Roth, J. (Hg.). Argumentieren, Beweisen und Standards im Geometrieunterricht. Hildesheim, S. 11-52.

Gaab, K. (2015). Begriffe im Geometrieunterricht der Hauptschule. In: Ludwig, M., Filler, A., Lambert, A. (Hg.). Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Wiesbaden, S. 107-128.

Gächter, A. A. (2003). Fundamentale Ideen. http://didamath.com/docs/mefi.pdf Abruf 02.06.2016.

Gesellschaft für Informatik. GI (2008). Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule. Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe I. http://www.sn.schule.de/~istandard/docs/bildungsstandards_2008.pdf Abruf am 02.06.2016.

Griesel, H. (1972). Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 72-81.

Grondin, J. (2007). Immanuel Kant zur Einführung. Hamburg.

Guljamow, M., Vollstedt, M. (2015). Zur Untersuchung der Rolle affektiver Merkmale hinsichtlich mathemt. Kompetenzen in der beruflichen Erstausbildung. In: Beträge zum Mathematikunterricht, S. 328-331.

Gutzmer, A. (1950). Bericht betreffend den Unterricht der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. In: Der Mathematikunterricht, 6(1980), S. 53-62.

Hadamard, J. (1996). The Mathematician's Mind. The Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princton.

Halmos, P. R. (1968). Mathematics as a creative art. In: American scientist: the magazine of Sigma IX, the Scientific Research 56, S. 375-389.

Halmos, P. R. (1981). Does Mathematics have Elements? In: The Mathematical Intellegencer, S. 147-153.

Hardy, G. H. (2005). A Mathematician's Apology. First electronic Edition. https://www.math.ualberta.ca/mss/misc/A%20Mathematician's%20Apology.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Hasse, H. (1930). Die moderne algebraische Methode. In: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bericht über die Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Prag im September 1929, S. 22-33.

Hauser, T. (1991). Intuition und Innovationen: Bedeutung für das Innovationsmanagement. Wiesbaden.

Herget, W. (1994). Ziele und Inhalte des Informatikunterrichts - zum Vergleich. In: Hischer, H. (Hg.). Mathematikunterricht und Computer: neue Ziele oder Wege zu alten Zielen? Bericht über die 11. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 8. bis 10. Oktober 1993 in Wolfenbüttel. Hildesheim, S. 28-40.

Heymann, H.-W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim.

Heyner, W., Hoffmann, K.-W., Gouasé, W., Niedderer, H. (1975). Leitideen in Elektronik für den Physikunterricht (S I). In: Vorträge auf der Tagung für Didaktik der Physik, Chemie in Berlin 1974, S. 621-629.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. In: Educational Studies in Mathematics, 6, S. 187-205.

Heitele, D. (1976). Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grundschule und Förderstufe. Dortmund.

Hering, H. (1985). Spuren der Differentiation in der Sekundarstufe I - Genetische Aspekte einer fundamentalen Idee. In: Der Mathematikunterricht, 4(31), S. 72-86.

Hilbert, D. (1922). Die logischen Grundlagen der Mathematik. In: Mathematische Annalen, 88(1-2), S. 151-165.

Hilbert, D. (1962). Die Grundlagen der Geometrie. Stuttgart.

Hilbert, D. (1970). Gesammelte Abhandlungen. Bd. 3, Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes. Berlin.

Hischer, H. (Hg.) (1994). Mathematikunterricht und Computer: neue Ziele oder Wege zu alten Zielen? Bericht über die 11. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. vom 8. bis 10. Oktober 1993 in Wolfenbüttel. Hildesheim.

Hischer, H. (1995). Neue Ziele und Inhalte eines künftigen Mathematikunterrichts. In: Hischer, H., Weiß, M. (Hg.). Fundamentale Ideen – Erörterung zur Zielorientierung eines künftigen Mathematikunterrichts unter besonderer Berücksichtigung der Informatik. Bericht über die 12. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik" vom 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel. Hildesheim, S. 92-97.

Hischer, H. (1998). Fundamentale Ideen und Historische Verankerung dargestellt am Beispiel der Mittelwertbildung. In: mathematica didactica, 21, S. 3-21.

Hischer, H. (2002). Mathematikunterricht und Neue Medien. Hintergründe und Begründungen in fachdidaktischer und fachübergreifender Sicht. Hildesheim.

Hischer, H. (2010). Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? Vernetzung als Medium zur Weltanschauung. Hildesheim.

Hischer, H. (2012). Grundbegriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung. Struktur - Funktion - Zahl. Wiesbaden.

Hischer, H. (2015). Variation – eine fundamentale Idee. In: Der Mathematikunterricht, (61)3, S. 5-14.

Hischer, H., Scheid, H. (1995). Grundbegriffe der Analysis. Genese und Beispiele aus didaktischer Sicht. Heidelberg.

Holland, G. (1988). Geometrie in der Sekundarstufe. Mannheim.

Humenberger, J., Reichel, H.-C. (1995). Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Mannheim.

Inhetveen, H. (1976). Die Reform des gymnasialen Mathematikunterrichts zwischen 1890-1914. Regensburg.

Jahnke, T. (2007). Zur Ideologie von PISA. In: Jahnke, T., Meyerhöfer, W. (Hg.) (2007). PISA & Co - Kritik eines Programms. Hildesheim, S. 1-24.

Jahnke, T. (2013). Zur Epistemologie der quantitativen „empirischen Bildungsforschung“. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 500-503.

Jonischkat, T., Müller-Clostermann, B. (2006). Zufallszahlen – Wie kommt der Zufall in den Rechner. http://www-i1.informatik.rwth-aachen.de/%7Ealgorithmus/algo38.php Abruf 02.06.2016.

Jung, W. (1962). A. N. Whitehead über den Sinn der Erziehung. In: Neue Sammlung, 2, S. 247-257.

Jung, W. (1978). Zum Begriff einer mathematischen Bildung. Rückblick auf 15 Jahre Mathematikdidaktik. In: mathematica didactica, 1, S. 161-176.

Kant, E. (AA) (1968). Kritik der reinen Vernunft. In: Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften (Hg.). Kant’s gesammelte Schriften. Bd. 3: Abt. 1, Werke. Unveränderter photomechanischer Nachdruck der 2. Auflage von 1787.

Käpnick, F. (2012). Intuitive Theoriekonstrukte mathematisch begabter Vor- und Grundschulkinder. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 517-520.

Klieme, E. u.a. (Hg.) (2007). Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. http://www.bmbf.de/pub/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Klika, M. (1981). Fundamentale Ideen im Analysisunterricht. In: mathematica didactica Sonderheft, S. 1-31.

Knöß, P. (1989). Fundamentale Ideen der Informatik im Mathematikunterricht. Wiesbaden.

Kohler, R. (2009). Piaget und die Pädagogik. Eine historiographische Analyse. Bad Heilbrunn.

Kortenkamp U. (2015). C-Books: Creative Mathematical Thinking und Social Creativy. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 484-487.

Krapp, A. (2010). Interesse. In: Rost, D. H. (Hg.). Handbuch Pädagogische Psychologie. Weinheim, S. 311-323.

Krüger, K. (2000). Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsbildung eines didaktischen Prinzips. Berlin.

Kultusministerkonferenz. KMK (1968). Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen vom 3.10.1968.

Kultusministerkonferenz. KMK (2003). Beschluss über die Bildungsstandards für den Mittleren Bildungsabschluss vom 4.12.2003. (http://www.KMK.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf) Abruf vom 02.06.2016.

Kulturministerkonferenz. KMK (2004a). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss vom 15.10.2004. http://www.KMK.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Haupt.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Kulturministerkonferenz. KMK (2004b). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich vom 15.10.2004. http://www.KMK.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Kultusministerkonferenz. KMK (2004c). Bildungsstandards der Kultusministerkonferenz. Erläuterungen zur Konzeption und Entwicklung. http://www.KMK.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_12_16-Bildungsstandards-Konzeption-Entwicklung.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Kulturministerkonferenz. KMK (2012). Beschluss über die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife vom 18.10.2012. http://www.KMK.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Kuntze, S., Kurz-Milcke, E. (2011a). Professionelles Wissen von Lehrkräften zu mathematikbezogenen „großen Ideen“. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 507- 510.

Kuntze, S., Dreher, A. (Hg.) (2011b). Big Ideas im Zentrum des Mathematikunterrichts – Fachdidaktischer Hintergrund, Anregungen für die Unterrichtspraxis und Materialien für schüler(innen)zentrierte Lernumgebungen. Ludwigsburg.

Kütting, H. (1985). Stochastisches Denken in der Schule – Grundlegende Ideen und Methoden. In Der Mathematikunterricht, 4, S. 87-106.

Lambacher Schweizer (2004): Klasse 5. Stuttgart.

Lambert, A. (2003). Begriffsbildung im Mathematikunterricht. In: BENDER, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Lehr- und Lernprogramme für den Mathematikunterricht. Bericht über die 20. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ vom 27. bis 29. September in Soest. Hildesheim, S. 91-104.

Lambert, A. (2004). Bildung und Standards im Mathematikunterricht – oder: Was schon beim alten Lietzmann steht. In: BENDER, P., Herget, W., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Neue Medien und Bildungsstandards. Bericht über die 22. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ vom 17. bis 19. September in Soest. Hildesheim, S. 70-80.

Lambert, A. (2012a). Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-) Unterricht. Eingangsstatements zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes. http://www.uni-saarand.de/fileadmin/user_upload/Einrichtungen/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_f%C3%BCr_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf Abruf vom 02.06.21016.

Lambert, A. (2012b). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. Aneignungsformen beim Geometrielernen. In: Filler, A., Ludwig, M. (Hg.). Vernetzung und Anwendungen im Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Bericht über die 28. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie“ vom 9.-11. September in Marktbreit. Hildesheim, S. 5-32.

Lambert, A. (2013). Zeitgemäße Stoffdidaktik am Beispiel „Füllgraph“. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 596-599.

Lambert, A., Selzer, P. (2005). Schillernde Diskretisierung - eine Schnittstelle von Mathematik und Informatik. In: Kortenkamp, U., Weigand, H.-G., Weth, T. (Hg.). Informatische Ideen und Mathematikunterricht. Bericht über die 23. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ vom 23. bis 25. September 2005 in Dillingen an der Donau. Hildesheim, S. 87-100.

Lehmann, E. (2005). Das Crap-Spiel. Lineare Algebra – Stochastik – Analysis. Kurzvortrag auf dem Bundeskongress MNU in Kiel. http://home.snafu.de/mirza/MNU-Kiel-2005-Vortrag-kurz.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hg.) (2009). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Saarland 5. Schuljahr. Braunschweig.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hg.) (2010). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Saarland 8. Schuljahr. Braunschweig.

Lergenmüller, A., Schmidt, G. (Hg.) (2011). Mathematik Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Saarland 9. Schuljahr. Braunschweig.

Lexikon der Mathematik (2001). Lexikon der Mathematik, Bd. 2. Heidelberg.

Lietzmann, W. (1916). Methodik des Mathematikunterrichts, 2. Teil: Didaktik der einzelnen Unterrichtsgebiete. Leipzig.

Lietzmann, W. (1922). Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. Breslau.

Lietzmann, W. (1925). Die neuen mathematischen Lehrpläne für die höheren Knabenschulen in Preußen. In: Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 56, S. 193-207.

Lietzmann, W. (1960). Aus meinen Lebenserinnerungen. Herausgegeben von Fladt, K. Göttingen.

Lützen, J. (1999). Grundlagen der Analysis im 19. Jahrhundert. In: Jahnke, H. N. (Hg.). Geschichte der Analysis. Heidelberg, S. 191-244.

Lutz-Westphal, B. (2005). Wie komme ich optimal zum Ziel? Kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen. In: mathematik lehren, 129, S. 56-61.

Lutz-Westphal, B. (2006). Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Dissertation. http://page.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_final_online.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Lyotard, J.-F. (2009) Das postmoderne Wissen. Ein Bericht. Wien.

Mac Lane, S. (1981). Mathematical models: A sketch for the philosphy of mathematics. In: The American Mathematical Monthly, 88(7), S. 462-472.

Martens, E. (1975). Einleitung. In: Texte der Philosophie des Pragmatismus. Stuttgart, S. 3-60.

Mérö, L. (2002). Die Grenzen der Vernunft. Kognition, Intuition und komplexes Denken. Reinbeck bei Hamburg.

Meschkowski, H (1967). Probleme des Unendlichen. Werk und Leben Gregor Cantors. Braunschweig.

Metzler (2008). Metzler Lexikon Philosophie. 3., erweiterte und aktualisierte Auflage. Stuttgart.

Meyerbröker, H. (1973). Leitideen und empirische Methoden bei der Zielfindung für naturwissenschaftlich-technischen Unterricht. In: Zur Didaktik der Physik und Chemie. Vorträge auf der Tagung für Didaktik der Physik und Chemie 1972, S. 202-209.

Ministerium für Bildung und Kultur. MBK (2012). Lehrplan Mathematik. Gymnasium Klassenstufe 5. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/LP_Ma_Gym_5_Juni_2012.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Ministerium für Bildung und Kultur. MBK (2014). Lehrplan Physik. Gymnasium Klassenstufe 7 und 8. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/LP_Ph_Gym_7_und_8_Mai_2013.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Ministerium für Bildung und Kultur. MBK (2014). Lehrplan Geschichte. Gymnasium Klassenstufe 7. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/LP_Ge_Gym_7_2014.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Ministerium für Kultur, Bildung und Wissenschaft Saarland. MKBW (Hg.) (2003). Achtjähriges Gymnasium. Lehrplan Mathematik für die Klassenstufe 5. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/MA_5_2011.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Ministerium für Kultur, Bildung und Wissenschaft Saarland. MKBW (Hg.) (2005). Achtjähriges Gymnasium. Lehrplan Mathematik für die Klassenstufe 9. http://www.saarland.de/dokumente/thema_bildung/MA_9_2011.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Modrow, E. (2002). Pragmatischer Konstruktivismus und fundamentale Ideen als Leitlinien der Curriculumentwicklung am Beispiel der theoretischen und technischen Informatik. http://ddi.cs.uni-potsdam.de/Examensarbeiten/Modrow2003.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Müller, M. W. (1980). Fundamentale Ideen der Numerischen Mathematik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Bad Salzdetfurth, S. 238-245.

Nagl, L. (1998). Pragmatismus. Frankfurt am Main.

Neimark, E. D. (1978). Die Entwicklung des Denkens beim Heranwachsenden. In: Steiner, G. (Hg.). Die Psychologie des 20. Jahrhundert. Bd. 7. Piaget und die Folgen, S. 159-171.

Nelson, R. B. (1993). Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking. Washington.

Nelson, R. B. (2001). Proofs Without Words II. More Exercises in Visual Thinking. Washington.

Neubrand, M. (1981). The homorphism theorem within a spiral curriculum. In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technolgoy, 12, S. 69-74.

Neubrand, M. (1985). Didaktik - Zahl - Algebra. Mathematik-didaktische Überlegungen am Fundamentalsatz der Algebra. Bad Salzetfurth.

Neunzert, H. (1997). Oh Gott, Mathematik!? Stuttgart.

Oehler, K. (1968). Die Grundlegung des Pragmatismus durch Peirce. In: Peirce, C. S. Über die Klarheit unserer Gedanken. How to make our ideas clear. Frankfurt am Main, S. 11-35.

Oelkers, J. (1993). Dewey in Deutschland – ein Mißverständnis. Nachwort zur Neuausgabe. In: Dewey, J. Demokratie und Erziehung. Übers. Erich Hylla. Weinheim, S. 497-517.

Oelkers, J. (2009). John Dewey und die Pädagogik. Weinheim.

Peirce, C. S. (1968). Über die Klarheit unserer Gedanken. How to make our ideas clear. Frankfurt am Main

Peirce, C. S. (1975). Die Festlegung einer Überzeugung. In Martens, E. (Hg.). Texte der Philosophie des Pragmatismus. Stuttgart.

Peschek, W. (2005). Reflexion und Reflexionswissen in R. Fischers Konzept der höheren Allgemeinbildung. In: Lengnink, K (u.a.) (Hg.). Mathematik präsentieren, reflektieren, beurteilen. Darmstadt.

Piaget, J. (1972). Theorien und Methoden der modernen Erziehung. Wien.

Piaget, J. (1973a). Einführung in die genetische Erkenntnistheorie. Frankfurt am Main.

Piaget, J. (1973b). Erkenntnistheorie der Wissenschaften vom Mensch. Berlin.

Piaget, J., Inhelder, B. (1977). Von der Logik des Kindes zur Logik des Heranwachsenden. Übers. Luc Bernard. Olten.

Picker, B. (Hg.) (1985a). Die Vermittlung grundlegender Ideen im Mathematikunterricht. Themenheft Der Mathematikunterricht, 4(31).

Picker, B. (1985b). Intuitives Erfassen und Gebrauchen von grundlegenden Ideen der Analysis im Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht, 4(31), S. 46-71.

Pinkernell, G. (2013). Mathematisches Grundwissen und digitale Werkzeuge. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 748-752.

Pinkernell, G. (2015). Wo Mathe draufsteht, ist auch Mathe drin. Die Fachausbildung im Lehramt als Rekonstruktion des Faches aus der Schulmathematik. In: mathematica didadactica 38, S. 256-273.

PISA-Konsortium Deutschland. PISA (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen.

Poincaré, H. (1973). Wissenschaft und Methode. Darmstadt.

Pólya, G. (1976). How to solve it. Princeton.

Pólya, G. (1980). Schule des Denkens. Bern.

Prediger, S. (2015). Theorien und Theoriebildung in didaktischer Forschung und Entwicklung. In: Bruder, R., Hefendehl-Hebker, L., Schmidt-Thieme, B., Weigand, H.-G. (Hg.). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, S. 643-662.

Pundsack, F. (2011). Zum Einfluss von persönlichkeitspsychologischen Merkmalen und metakognitivem Monitoring auf Kontrollaktivitäten von Schülern beim Umformen von Termen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 643-646.

Reichel, H.-C. (1994). Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik. In: Pickert, G. (Hg.). Mathematik erfahren und lehren. Festschrift für Hans-Joachim Vollrath. Stuttgart, S. 168-178.

Rembowski, V. (2015). Begriffsbilder und –konventionen in Begriffsfeldern: Was ist ein Würfel? In: Ludwig, M., Filler, A., LAMBERT, A. (Hg). Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen. Jubiläumsband des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Wiesbaden.

Rembowski, V. (2016). Eine semiotische und philosophisch-psychologische Perspektive auf Begriffsbildung im Geometrieunterricht. Begriffsfeld, Begriffsbild und Begriffskonvention und ihre Implikationen auf Grundvorstellungen. Dissertation. Saarbrücken.

Rezat, S. (2009). Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Wiesbaden.

Rezat, S., Hattermann, M., Peter-Kopp, A. (Hg.) (2014). Transformation - A Fundamental Idea of Mathematical Education. New York.

Rosebrock, S. (2011). Begabungs- und Kreativitätsförderung aus Sicht der Mathematik und der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 699-702.

Sauer, M. (2013). Geschichte unterrichten. Eine Einführung in die Didaktik und Methodik. Seelze.

Scharlau, I. (1996). Jean Piaget zur Einführung. Hamburg.

Scharlau, W. (2016). Wer war Alexander Grothendieck? http://www.scharlau-online.de/DOKS/Wer%20ist%20AG.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Schmidt, S. (1976). Lernziele des affektiven Bereichs im Mathematikunterricht. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 11, S. 548-568.

Schoene, H. (1962). Zeitgemäßer Physikunterricht, neuzeitliche Methoden des Physikunterrichts. In: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 10(15), S. 468-470.

Schreiber, A. (1979). Universelle Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica, 2(3), 165-171.

Schreiber, A. (1983). Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: mathematica didactica, 6, S. 65-76.

Schreiber, A. (2008): Heuristik – Kunst des Problemlösens. Kapitel 5 der Vorlesung „Grundzüge der Mathematikdidaktik“ aus dem WS 2001/2002. www.gefilde.de/ashome/vorlesungen/gzmadi/heuristik_problemloesen/heuristik_problemloesen.html Angerufen am 02.06.2016.

Schreiber, A. (2011). Begriffsbestimmung. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung. Berlin.

Schuberth, E. (1971). Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts. Stuttgart.

Schubert, S., Schwill, A. (2004). Didaktik der Informatik. München.

Schupp, H. u.a. (Hg.) (1977). Plus 8. Mathematisches Unterrichtswerk. Paderborn.

Schupp, H. u.a. (Hg.) (1985). Plus 5. Mathematisches Unterrichtswerk. Paderborn.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zwischen Tradition und neuen Impulsen. In: Der Mathematikunterricht, 6(34), S. 5-16.

Schupp, H. (1992). Optimieren. Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. Mannheim.

Schupp, H. (Hg.) (1997). Optimieren ist fundamental. In: mathematik lehren, 81, S. 4-10.

Schupp, H. (2003). Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Hildesheim.

Schupps, H. (2004). Allgemeinbildender Stochastikunterricht. In: Stochastik in der Schule, 24(3), S. 4-13.

Schwank, I. (1998). Kognitive Mathematik. http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/kognitive-mathematik.htm Abruf vom 02.06.2016.

Schweiger, F. (1982). Fundamentale Ideen der Analysis und handlungsorientierter Unterricht. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 103-111.

Schweiger, F. (1988). Mathematik als Wissenschaft „interessanter Objekte“. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, S. 295-298.

Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geisteswissenschaftliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 13(2/3), S. 199-214.

Schweiger, F. (2006). Fundamental Ideas. A bridge between mathematics and mathematical education. In: Maasz, J., Schoeglmann, W. (Hg.). New Mathematical Research and Practice, S. 63-73.

Schweiger, F. (2010). Fundamentale Ideen. Aachen.

Schweiger, F. (2011). Fundamentale Ideen, Kreativität und Stabilität mathematischen Handelns. In: Fritzlar, T., Haapasalo, L., Heinrich, F., Rehlich, H. (Hg.). Konstruktionsprozesse und Mathematikunterricht. Festschrift für Prof. Dr. Bernd Zimmermann. Hildesheim, S. 295-303.

Schweizer, W. (Hg.) (1970). Lambacher-Schweizer. Geometrie 1. Stuttgart.

Schweizer, W. (Hg.) (1983). Lambacher Schweizer Mathematik. Geometrie 1. Stuttgart.

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. http://www.wipsce.org/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin. SBJS (Hg.) (2006). Rahmenlehrpläne für die Sekundarstufe I. Mathematik. http://www.berlin.de/imperia/md/content/senbidung/schulorganisation/lehrplaene/sek1_mathematik.pdf?start&ts=1150101857&file=sek1_mathematik.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Sill, H.-D. (2007). PISA und die Bildungsstandards. In: Jahnke, T., Meyerhöfer, W. (Hg.). PISA & Co - Kritik eines Programms. Hildesheim, S. 391-431.

Sjuts, J. (2001). Aufgabenstellung zum Umgang mit Wissen(srepräsentation). In: Der Mathematikunterricht, 47(1), S. 47-60.

Speicher, R. (2016). Mathematiker mit Pioniergeist. . Stiftung Jugend forscht e. V. http://www.jugend-forscht.de/stiftung-jugend-forscht/historie/erfolgreiche-ehemalige/mathematiker-mit-pioniergeist.html Abruf vom 02.06.2016.

Spies, S. (2013). Ästhetische Erfahrung Mathematik. Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler. Siegen.

Spreckelsen, K. (1970). Strukturelemente der Physik als Grundlage ihrer Didaktik. In: Naturwissenschaften im Unterricht: Physik, Chemie, Biologie, 18, S. 418-424.

Steen, L. A. (1990). Pattern. In: Steen, L. A. (Hg.). On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy, S. 1-10.

Steiner, H. G. (1964/64). Menge und Struktur als Leitlinien für den mathematischen Unterricht. In: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 17, S. 199-205 und S. 259-266.

Steiner, G. (1973). Mathematik als Denkerziehung. Stuttgart.

Sträßer, R. (1974). Mathematik und ihre Verwendung – eine Analyse von Schulbüchern. Münster.

Titze, U.-P. (1979). Fundamentale Ideen der linearen Algebra und analytischen Geometrie – Aspekte der Curriculumsentwicklung im Mathematikunterricht der SII. In: mathematica didactica, 2, S. 137-164.

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H.-H. (2000). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Bd. 1, Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. Braunschweig.

van der Waerden, B. L. (1953). Einfall und Überlegung in der Mathematik. In: Elemente der Mathematik, Band VIII Nr. 6, S. 121-129.

Vohns, A. (2000). Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Schriftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt für die Sekundarstufe I, vorgelegt dem Staatlichen Prüfungsamt Dortmund. Siegen http://wwwu.aau.at/avohns/pdf/messen.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Vohns, A. (2007). Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Norderstedt.

Vohns, A. (2010a). Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 31, S. 227-255.

Vohns, A. (2010b). Fünf Thesen zur Bedeutung von Kohärenz- und Differenzerfahrungen im Umfeld einer Orientierung an mathematischen Ideen. Manuskriptfassung. http://wwwu.aau.at/avohns/pdf/JMD_Vohns_2010_Manuskriptfassung.pdf Abruf vom 20.07.2016

Vohns, A. (2016). Fundamental Ideas as a Guiding Category in Mathematics Education - Early Understandings, Developments in German-Speaking Countries and Relations to Subject Matter Didactics. In: Journal für Mathematik-Didaktik, 37, S. 193-223.

Völkel, B. (2012) Handlungsorientierung im Geschichtsunterricht. Schwalbach.

Volkert, K. (1999). Das Haus der Vierecke – aber welches? In: Der Mathematikunterricht, 45(5), S. 17-37.

Vollrath, H. J. (1978). Rettet die Ideen! In: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht 31, S. 449-455.

Vollrath, H. J. (1994a). Algebra in der Sekundarstufe. Mannheim.

Vollrath, H. J. (1994b). Strukturelles Denken im Algebraunterricht. In: Der Mathematikunterricht, 40(5), S. 5- 25.

Vollrath, H. J. (2001). Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe. Heidelberg.

vom Hofe, R. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. In: mathematik lehren, 118, S. 4-8.

von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In: Filler, A., Ludwig, M. (Hg.). Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Bericht über die 29. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Geometrie“ vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken. Hildesheim. S. 83-124.

von der Bank, M.-C. (2014). Fundamentale Ideen – (Weiter-)Entwicklung einer Theorie zu deren unterrichtspraktischer Nutzung. In Beiträge zum Mathematikunterricht. Münster, S. 1271-1274.

von der Bank, M.-C. (2016). Vernetzung mit Diskreter Mathematik. Erscheint in U. Kortenkamp et al. (Hrsg.), Diskrete Mathematik. Bericht über die 31. Arbeitskreistagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik“ vom 27. bis 29. September 2013 in Saarbrücken. Hildesheim. Im Erscheinen.

von Hentig, H. (1980). Die Krise des Abiturs und eine Alternative. Stuttgart.

von Sallwück, E. (1899). Adolf Diesterweg. Darstellung seines Lebens und seiner Lehre und Auswahl aus seinen Schriften. 1. Bd. Langensalza.

Weigand, G. (2004). Schule der Person. Zur anthropologischen Grundlegung einer Theorie der Schule. Würzburg.

Westermann Verlagsgruppe (2016). Konzept der Reihe Mathematik Neue Wege. https://verlage.westermanngruppe.de/schroedel/reihe/MNWSI/Mathematik-Neue-Wege-Sekundarstufe-I Abruf vom 02.06.2016.

Weth, T. (1999). Kreativität im Mathematikunterricht. Begriffsbildung als kreatives Tun. Hildesheim.

Whitehead, A. N. (1949). The Aims Of Education And Other Essays. New York.

Whitehead, A. N. (1962). Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts. Deutsche Übersetzung des 1913 gehaltenen Vortrages von Alexander Wittenberg. In: Neue Sammlung, 2 S. 257-266.

Wiernicki-Krips, T. (2014). Invertieren als fundamentale Ideen der Mathematik?. In: Roth, J, Ames, J. (Hg.). Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, S. 1311-1314.

Winter, H. (1971). Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Der Mathematikunterricht, 17(5), S. 40-66.

Winter, H. (1996). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der DMV, Band 4 Heft 2, S. 35-46.

Winter, H. (2001). Fundamentale Idee in der Grundschule. http://grundschule.bildung-rp.de/fileadmin/user_upload/grundschule.bildung-rlp.de/Downloads/Mathemathik/Winter_Inhalte_math_Lernens.pdf Abruf vom 02.06.2016.

Winter, H. (2016). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Wiesbaden.

Wittenberg, A. I. (1962). Über den mathematischen Unterricht der höheren Schule. Übersetzung des auf englisch verfassten Memorandums „On the Mathematics Curriculum oft he High School“. In: Der mathematisch naturwissenschaftliche Unterricht, 15(5), S. 224-227.

Wittenberg, A. I. (1963). Bildung und Mathematik. Stuttgart.

Wittmann, E. (1974). „Mutter“-Strategien der Heuristik. In: Die Schulwarte, 26(8), S. 53-65.

Wittmann, E. (1978). Piagets Begriff der Gruppierung. In: Steiner, G. (Hg.): Die Psychologie des 20. Jahrhundert. Bd. 7. Piaget und die Folgen, S. 219-235.

Wittmann, E. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts. 6., neu bearb. Auflage. Braunschweig.

Wittmann, E. (2014). Von allen guten Geistern verlassen. Fehlentwicklungen des Bildungssystems am Beispiel Mathematik. In: Profil. Das Magazin für Gymnasium und Gesellschaft, 6, S. 20-30.

Wittmann, E., Müller, G. (2016). Mathe 2000+. Intelligente Lösungen für die Praxis. http://www.mathe2000.de Abruf 02.06.2016.

Wolff, G. (Hg.) (1960). Die Elemente der Mathematik. Bd. 3 Arithmetik, Algebra und Analysis. Paderborn.

Wolny, D. (2008). Glück oder Strategie? Die Entwicklung von Vorstellungen über Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Spiels „Der schnellste Weg ist nicht immer der kürzeste!“. In: mathematik lehren, 43, S. 44-46.

Wörle, K., Kratz, J., Keil, K.-A. (Hg.) (1970). Infinitesimalrechnung. München.

Zimmermann, P. (2008). Lambacher Schweizer. Mathematik für Gymnasien 8. Stuttgart.

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1 *Vergleich der Universellen Ideen aus (Bender/Schreiber 1985) mit den Fundamentalen Ideen aus (Schweiger 1982): Prototypenkataloge mit und ohne Kategorisierung* *5*
Abbildung 2 *Der Vernetzungspentagraph* *9*
Abbildung 3 *Vorgehen der vorliegenden Arbeit* *11*
Abbildung 4 *Inhaltliche Chronologie der Arbeit* *12*
Abbildung 5 *Übersicht über die allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts nach (Winter 1975, S. 116)* *18*
Abbildung 6 6×5×3 – *Kompetenzmatrix (KMK 2003, S. 13)* *28*
Abbildung 7 *Beziehungen zwischen den allgemeinen Kompetenzen der KMK Bildungsstandards und den Kompetenzen in Österreich, die sich auf Fertigkeiten und Fähigkeiten beziehen* *32*
Abbildung 8 *Kompetenzdimensionen in den österreichischen Bildungsstandards* *33*
Abbildung 9 *Beziehungen zwischen den allgemeinen Kompetenzen der KMK Bildungsstandards und den allgemeinen Grundsätzen der Preußischen Richtlinien von 1925. Entnommen aus (Lambert 2004, S. 74).* *34*
Abbildung 10 *Balkenwaage (links: im Gleichgewicht; rechts: Gleichgewicht wird durch schwereres Gewicht in größerem Abstand gestört)* *54*
Abbildung 11 *Zusammenfassung der möglichen Transformationen beim Experiment an der Balkenwaage* *55*
Abbildung 12 *Themenkreise aus den „Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts" der KMK von 1968, entnommen aus (Führer 1997, S. 75)* *59*
Abbildung 13 *Synonyme (?) für den Begriff „Fundamentale Idee" in der deutschsprachigen Literatur* *73*
Abbildung 14 *Chronologische Ordnung ausgewählter Publikationen zum Thema Fundamentale Ideen* *74*
Abbildung 15 *„Wer zitiert wen?"-Graph* *76*
Abbildung 16 *Beziehungen zwischen den Ideen von* BOROVCNIK *und* HEITELE *117*
Abbildung 17 *Kataloge Fundamentaler Ideen der Informatik. Zusammengestellt aus (Dörfler 1984), (Knöß 1989), (Baumann 1996) und (Schwill 1993).* *119*
Abbildung 18 *Reduzierte Übersicht über einige ausgewählte und teilweise unvollständige Ideenkataloge* *133*
Abbildung 19 *Abstrakte(re) Ideen (Poster)* *152*
Abbildung 20 *Konkrete(re) Ideen (Poster)* *152*
Abbildung 21 *Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien (Poster)* *153*
Abbildung 22 *Visualisierung der von* HEYMANN *beschriebenen Einordnung seines Ideenkatalogs in das Spannungsverhältnis Welt←→Mathematik* *154*
Abbildung 23 *Erweitertes Spannungsverhältnis* *155*
Abbildung 24 *Spannungsverhältnis mit den Komponenten Mensch - Welt - Mathematik* *155*

Abbildung 25 *Drei Fälle, in denen jeweils eine Komponente des erweiterten Spannungsverhältnisses als Vermittler zwischen den anderen beiden auftritt 155*
Abbildung 26 *Die Ideenkategorien eingeordnet in das Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik (Poster)... 157*
Abbildung 27 *Abstraktere Theorie- und Begriffsideen sowie konkretere Inhaltsideen 161*
Abbildung 28 *Anschauliche „Definition“ des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Wolff 1960, S. 142), eigener Satz 171*
Abbildung 29 *Formale Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Wolff 1960, S. 143), eigener Satz 171*
Abbildung 30 *„Umgebungsdefinition“ und „ε-Definition“ des Grenzwertes aus (Wolff 1960, S. 144), eigener Satz 171*
Abbildung 31 *Anschauliche „Definition“ des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Courant 1954, S. 26), eigener Satz 172*
Abbildung 32 *Definition des Grenzwerts einer Teilsummenfolge in (Wörle 1970, S. 43).. .... 174*
Abbildung 33 *Formalistische Definition des Grenzwertes einer Zahlenfolge aus (Wörle 1970, S. 54), eigener Satz 174*
Abbildung 34 *Gegenüberstellung der Algebralehrwerke von WEBER und VAN DER WAERDEN. Entnommen aus (Vollrath 1994b, S. 10-11) 178*
Abbildung 35 *Ordnung der Vierecke nach der Anzahl der bestimmenden Stücke, wie sie sich in (Schweizer 1970) findet.. 183*
Abbildung 36 *Menge aller Vierecke in (Schweizer 1983, S. 116) 184*
Abbildung 37 *Ordnung der Vierecke nach dem übergeordneten Aspekt der Symmetrie in (Schupp 1977, S. 187) 185*
Abbildung 38 *Flussdiagramm zur Ordnung von Vierecken zur Analyse von Vierecken in (Schupp 1977, S. 189) 186*
Abbildung 39 *Abstraktere Prozessideen und konkretere Schnittstellen- und Tätigkeitsideen 191*
Abbildung 40 *Modellbildungskreislauf nach (Schupp 1988)...................................... 196*
Abbildung 41 *Nennung der Tätigkeitsideen in der mathematikdidaktischen Literatur 198*
Abbildung 42 *Ordnung der Tätigkeitsideen von mathematisch nach meta-mathematisch (Poster)... 199*
Abbildung 43 *Persönlichkeitsideen im Zusammenspiel mit den anderen Ideenkategorien 201*
Abbildung 44 *Palintropische Beziehung zwischen Mensch und Welt nach (Schupp 2004) 202*
Abbildung 45 *Wechselwirkung zwischen Persönlichkeitsmerkmalen und Mathematik 204*
Abbildung 46 *Der Interessenwürfel, wie er sich in (Bikner-Ahsbahs 2001, S. 15) findet 207*
Abbildung 47 *Spanungsverhältnis zwischen Subjekt und Theorie, veranlasst durch die Realität (R), wie es sich in (Borovcnik 1992, S. 8) findet.................................. 213*
Abbildung 48 *Vernetzungspentagraph 227*
Abbildung 49 *Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien........... 227*
Abbildung 50 *Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen (Poster).. 229*

Abbildung 51 *Heurismen nach (Schreiber 2008)* 230
Abbildung 52 *Möglichkeiten zur Vernetzung von Gebieten der Mathematik durch Inhalte im Mathematikunterricht* 231
Abbildung 53 *Unterscheidung zwischen Vorstellung und Darstellung in (Lambert 2012b, S. 8)* 233
Abbildung 54 *Offene Matrix als Werkzeug zur Gestaltung eines auf Grundvorstellungen zielenden Unterrichts (Rembowski 2016, S. 194)* 235
Abbildung 55 *Epistemologische Unterscheidung eines Zeichens/Symbols nach (Lambert 2013)* 236
Abbildung 56 *Zusammenfassende Darstellung des Vernetzungspentagraphen mit gefüllten Knoten „Inhalte", „Repräsentationen", „Aktivitäten", „Genese" und „Person" (Poster)* 242
Abbildung 57 *Vernetzungspentagraph mit benannten Kanten (Poster)* 243
Abbildung 58 *Rahmenbedingungen einer Lernumgebung nach COLLINS/BROWN/NEWMAN (Collins/Brown/Newman 1989, S. 476)* 250
Abbildung 59 *Exkurse in „Mathematik Neue Wege 9", entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 7)* 256
Abbildung 60 *Vernetzungen zwischen den Gebieten der Schulmathematik im Abschnitt 4.3 „Quadratische Gleichungen" in (Lergenmüller/Schmidt 2011)* 262
Abbildung 61 *Darstellung der quadratischen Ergänzung, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 117)* 263
Abbildung 62 *Geometrische Lösungsverfahren nach AL-CHWARIZMI, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 118)* 269
Abbildung 63 *„Mathe ohne Worte", entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 117)* 271
Abbildung 64 *Vernetzungspentagraph nach der Detailanalyse der Knoten* 273
Abbildung 65 *Vernetzungspentagraph, dessen Kanten wahrgenommene Vernetzungen visualisieren* 276
Abbildung 66 *Aufgabe zur Berechnung des Bremswegs eines Fahrzeugs, entnommen aus (Lergenmüller/Schmidt 2011, S. 124)* 277
Abbildung 67 *Implementierung des Einflusses eines Parameters auf die Lösungsmenge einer quadratischen Gleichung* 278
Abbildung 68 *Gerüst zur Anwendung des Vernetzungspentagraphen* 280
Abbildung 69 *Der Vernetzungspentagraph* 286
Abbildung 70 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 6* 291
Abbildung 71 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 7* 292
Abbildung 72 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 92* 293
Abbildung 73 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 93* 294
Abbildung 74 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 94* 295
Abbildung 75 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 95* 296
Abbildung 76 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 96* 297
Abbildung 77 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 97* 298
Abbildung 78 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 98* 299
Abbildung 79 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 99* 300
Abbildung 80 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 100* 301

Abbildung 81 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 101 .... 302*
Abbildung 82 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 102 .... 303*
Abbildung 83 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 103 .... 304*
Abbildung 84 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 104 .... 305*
Abbildung 85 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 105 .... 306*
Abbildung 86 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 106 .... 307*
Abbildung 87 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 107 .... 308*
Abbildung 88 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 108 .... 309*
Abbildung 89 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 109 .... 310*
Abbildung 90 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 110 .... 311*
Abbildung 91 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 111 .... 312*
Abbildung 92 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 112 .... 313*
Abbildung 93 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 113 .... 314*
Abbildung 94 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 114 .... 315*
Abbildung 95 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 115 .... 316*
Abbildung 96 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 116 .... 317*
Abbildung 97 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 117 .... 318*
Abbildung 98 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 118 .... 319*
Abbildung 99 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 119 .... 320*
Abbildung 100 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 120 .... 321*
Abbildung 101 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 121 .... 322*
Abbildung 102 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 122 .... 323*
Abbildung 103 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 123 .... 324*
Abbildung 104 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 124 .... 325*
Abbildung 105 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 125 .... 326*
Abbildung 106 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 126 .... 327*
Abbildung 107 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 127 .... 328*
Abbildung 108 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 128 .... 329*
Abbildung 109 *Mathematik Neue Wege 9, Saarland, S. 129 .... 330*

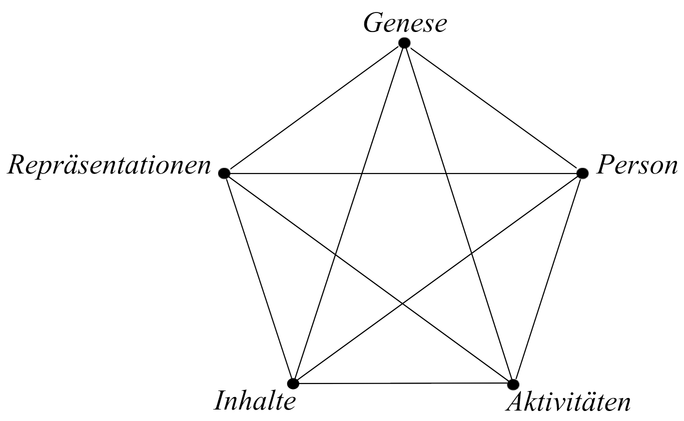


Abbildung 2 Der Vernetzungspentagraph

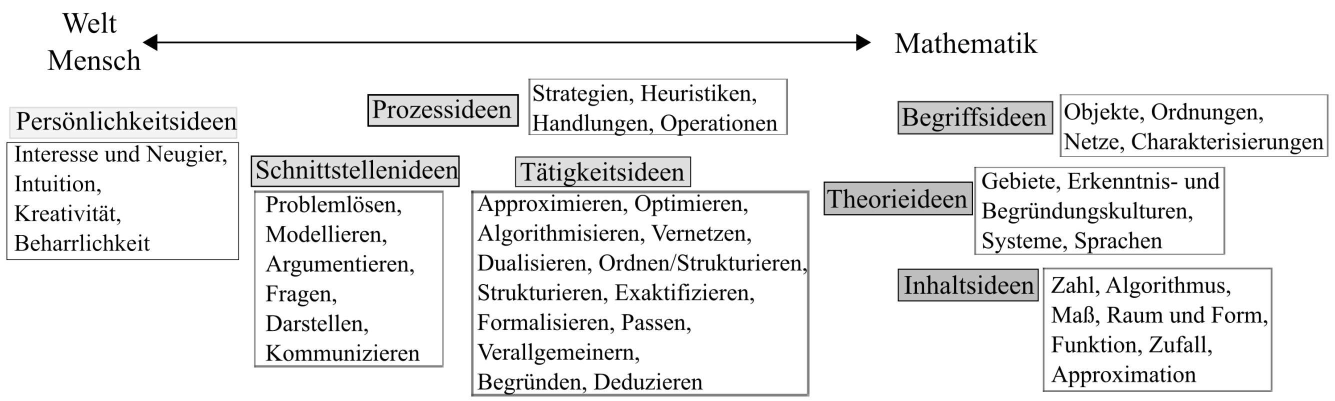


Abbildung 26 Die Ideenkategorien eingeordnet in das Spannungsverhältnis Welt/Mensch ←→ Mathematik

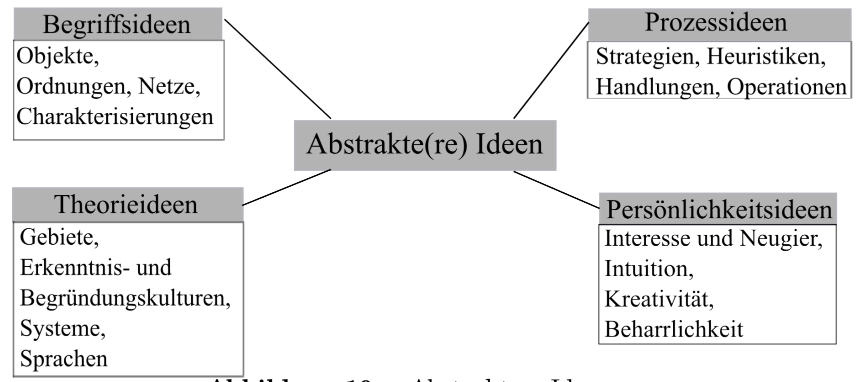


Abbildung 19 Abstraktere Ideen

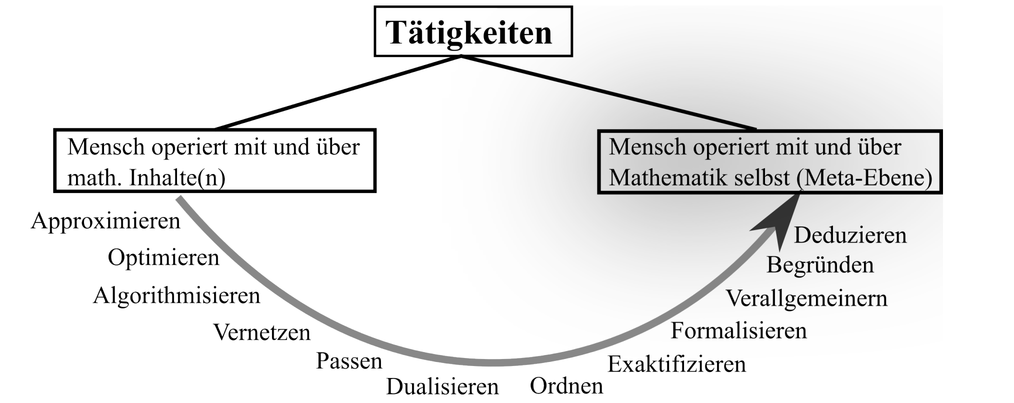


Abbildung 42 Ordnung der Tätigkeitsideen von mathematisch nach meta-mathematisch

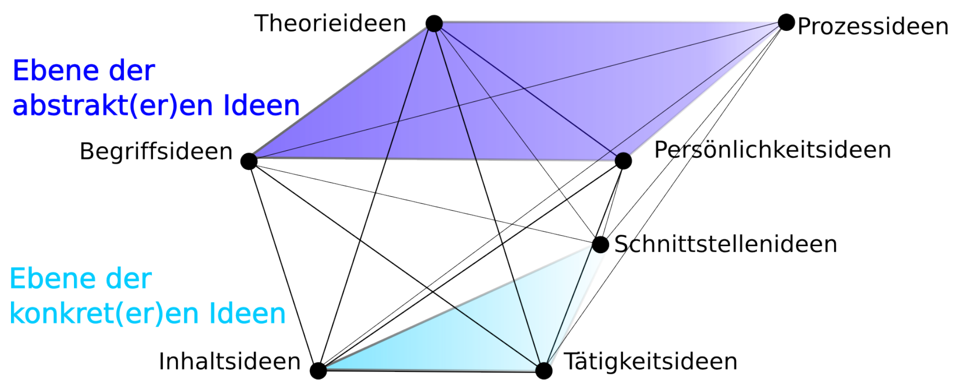


Abbildung 21 Ideenebenen und Vernetzungen zwischen den Ideenkategorien

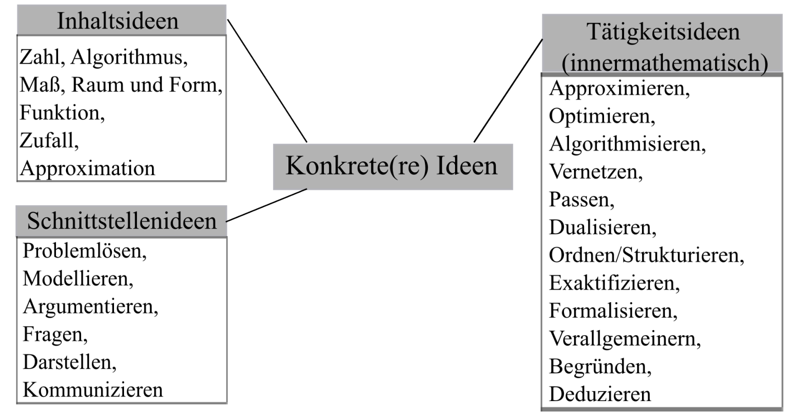


Abbildung 20 Konkretere Ideen

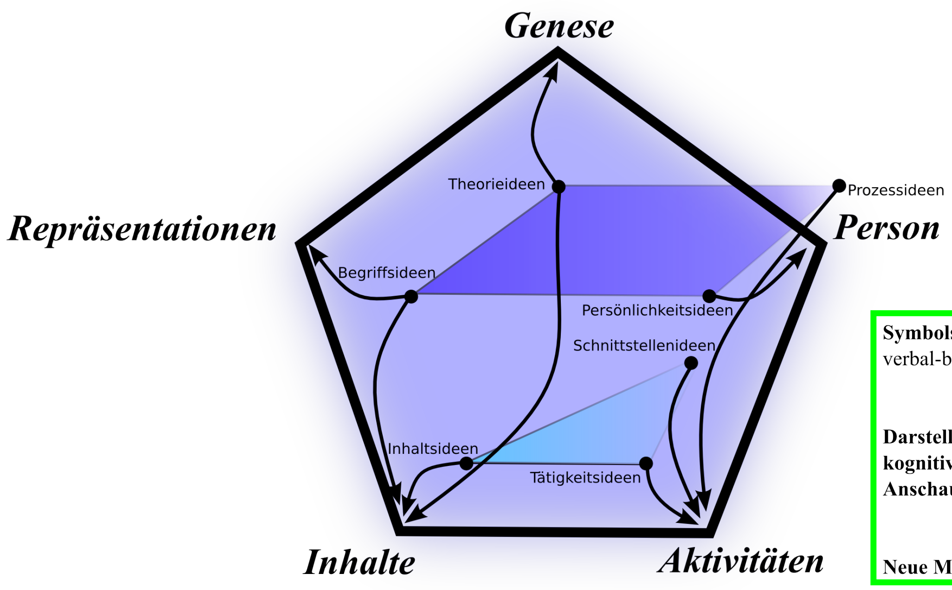


Abbildung 50 Für den Unterricht relevante Aspekte Fundamentaler Ideen

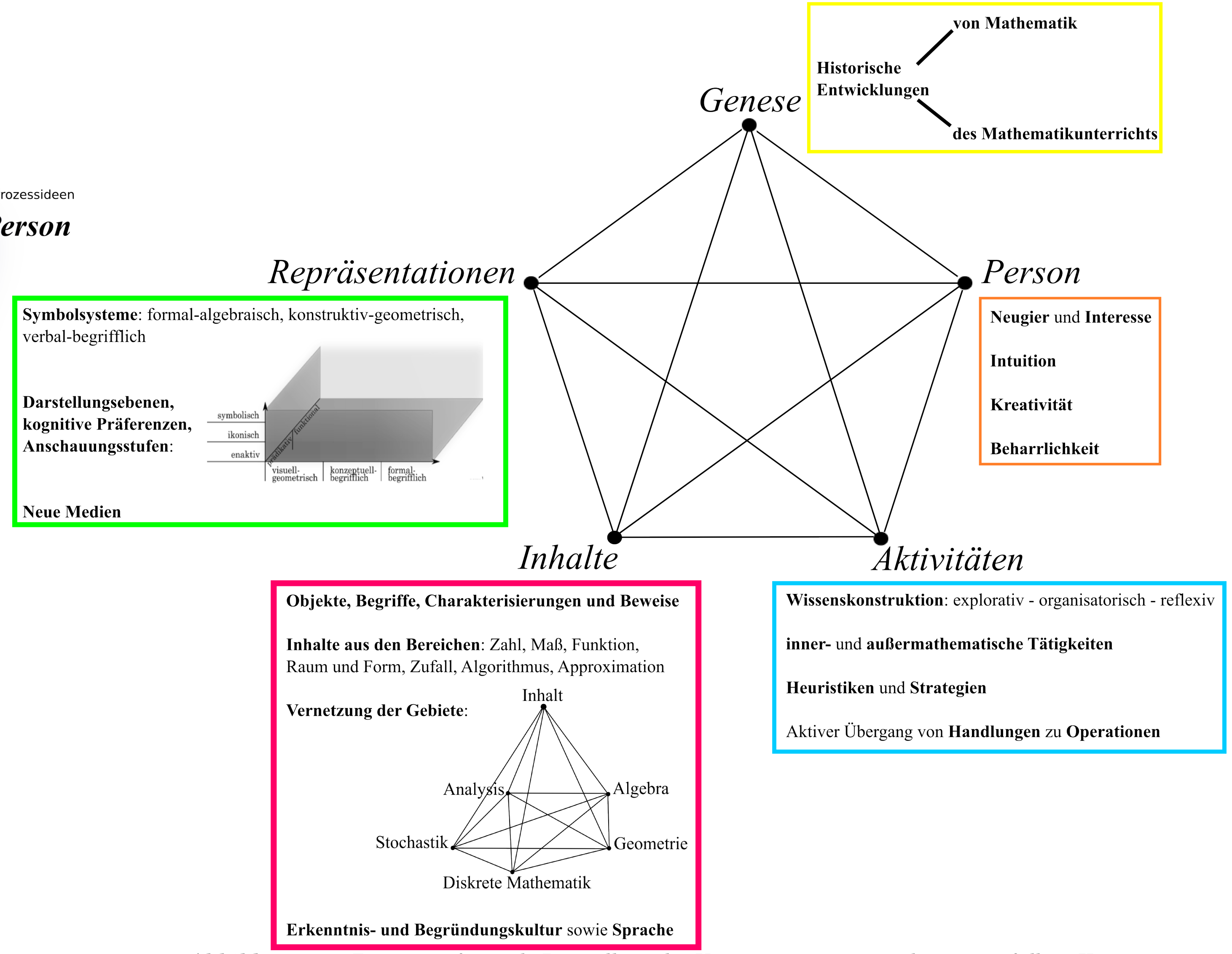


Abbildung 56 Zusammenfassende Darstellung des Vernetzungspentagraphen mit gefüllten Knoten „Inhalte“, „Repräsentationen“, „Aktivitäten“, „Genese“ und „Person“

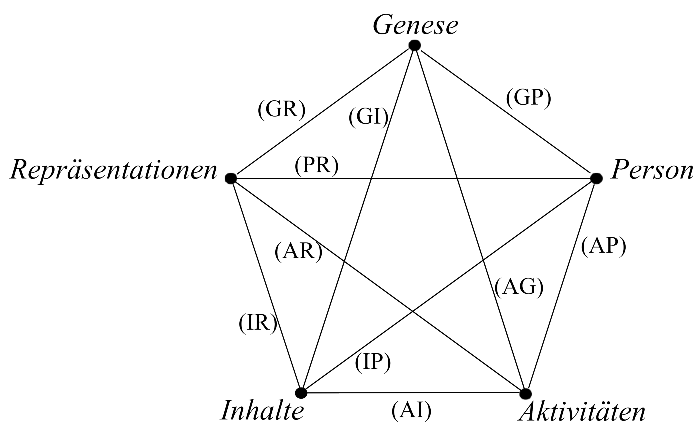


Abbildung 57 Vernetzungspentagraph mit benannten Kanten