

# Aufbau, Beschreibung und Experimente mit einer neuartigen Maschine zur Untersuchung eindimensionaler linearer und nichtlinearer Wellenphänomene

H.-J. Patt, Fachrichtung 7.2: Experimentalphysik und Didaktik der Physik,  
Universität des Saarlandes, Geb. E2-6, 66041 Saarbrücken, 2007, [hj.patt@mx.uni-saarland.de](mailto:hj.patt@mx.uni-saarland.de),  
<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>

## Gliederung

<b>1. <u>Einführung in solitäre Wellenphänomene</u></b>	<b>S. 1</b>
<b>2. <u>Die Schraubenfeder–Schwerependel-Kette</u></b>	<b>S. 5</b>
2.1. <u>Modelle und beschreibende Gleichungen</u>	S. 5
2.2. <u>Aufbau, Parameter und Optimierung der Wellenmaschine</u>	S. 7
<b>3. <u>Erzeugung verschiedener Wellenformen und ihre charakteristischen Eigenschaften</u></b>	<b>S. 10</b>
3.1. <u>Schwerelose Wellen – Beschreibung durch die klassische Wellengleichung</u>	S. 11
3.2. <u>Wellen mit kleinen Amplituden – Beschreibung durch die Klein–Gordon Gleichung</u>	S. 14
3.3. <u>Kink- und Anti-Kink-Solitonen – Beschreibung durch die Sinus-Gordon Gleichung</u>	S. 16
<b>4. <u>Demonstrationen und Experimente mit der nichtlinearen Wellenmaschine</u></b>	<b>S. 21</b>
4.1. <u>Quasi schwerefreie klassische Wellen</u>	S. 21
4.2. <u>Klein-Gordon-Wellen und -Schwingungen</u>	S. 23
4.3. <u>Manuelle Erzeugung, Form und Bewegung von Kink-Solitonen</u>	S. 25
4.4. <u>Kink- und Anti-Kink-Solitonen als Teilchen-Antiteilchen Modell</u>	S. 28
4.5. <u>Kink-Solitonen in verschiedenen Medien und an Mediengrenzen</u>	S. 30
4.6. <u>Kink-Solitonen in Medien mit Störstellen</u>	S. 32
4.6.1. <u>Medien mit repulsiven Störstellen</u>	S. 32
4.6.2. <u>Medien mit attraktiven Störstellen</u>	S. 34
<b>5. <u>Zusammenfassung der Schwerpunkte und Zielsetzungen</u></b>	<b>S. 34</b>
<b>6. <u>Medien und Verweise auf die Anlagen zu dieser Arbeit</u></b>	<b>S. 38</b>
6.1. <u>Literatur und Computerprogramme</u>	S. 38
6.2. <u>Anlage „Cosimex–Parameter- und -Bilddateien zur nichtlinearen Wellenmaschine“</u>	S. 39
6.3. <u>Anlage „Videoclips zur nichtlinearen Wellenmaschine“</u>	S. 40

# Aufbau, Beschreibung und Experimente mit einer neuartigen Maschine zur Untersuchung eindimensionaler linearer und nichtlinearer Wellenphänomene

H.-J. Patt, Fachrichtung 7.2: Experimentalphysik und Didaktik der Physik,  
Universität des Saarlandes, Geb. E2-6, 66041 Saarbrücken, 2007, [hj.patt@mx.uni-saarland.de](mailto:hj.patt@mx.uni-saarland.de),  
<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>

## 1. Einführung in solitäre Wellenphänomene

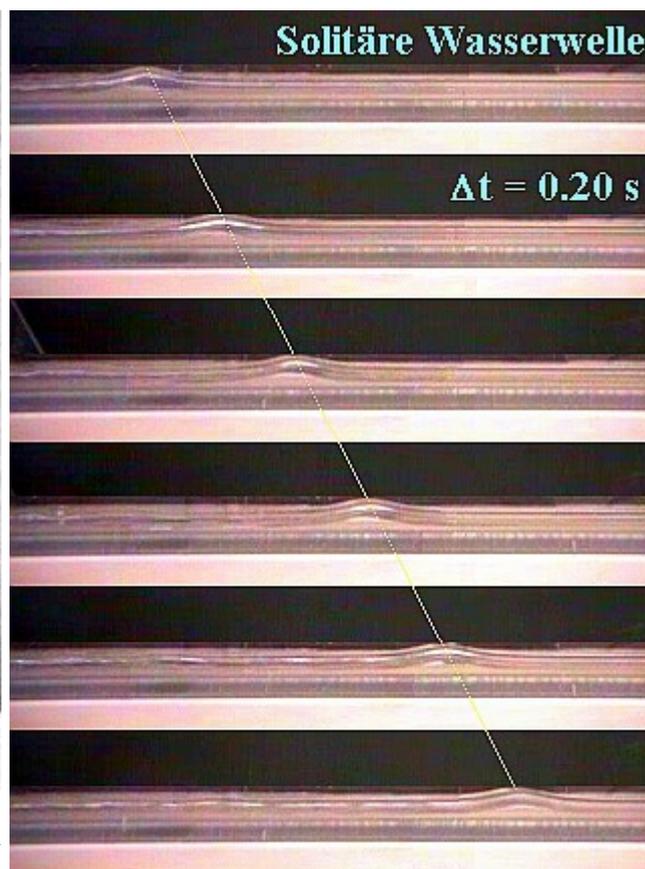
Am 26.12.2004 um 01:58 Uhr MEZ (07:58 Uhr Ortszeit, 00:58 UTC) verschob sich der Meeresboden auf einer Linie, etwa 200 km von der indonesischen Küste entfernt, in einer Tiefe von etwa 2300 m auf einer Länge von insgesamt rund 1000 km innerhalb weniger Minuten um insgesamt etwa 13 m in horizontaler Richtung nach Westen und 2 bis 3 m in vertikaler Richtung (Subduktion: lat. darunter gleiten) [<sup>1</sup>, <sup>2</sup>]. Wie spätere Messungen zeigten, wurde dieser Vorgang dadurch vorbereitet, dass die indische Kontinentalplatte, die sich normalerweise auf Grund der Kontinentaldrift (A. Wegener, 1880-1930, deutscher Geophysiker) mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 7 cm pro Jahr unter die eurasische Platte (Sumatraplatte) schiebt, sich mit dieser verhakt und dadurch eine wachsende Spannung aufgebaut hatte. Diese entlud sich spontan zum genannten Zeitpunkt und erzeugte dadurch nicht nur ein sehr großes Seebeben der Stärke 9,3 auf der Richterskala (C. F. Richter, 1900-1985, amerikanischer Seismologe), sondern bewirkte zusätzlich durch die plötzliche vertikale Beschleunigung der über dem Meeresboden liegenden Wassermassen auch eine besondere Form von Wasserwellen. Die dabei auftretenden charakteristischen Wellenphänomene werden als Tsunami bezeichnet (jap.: Hafenwelle, weil sie besonders in Häfen oder an Küsten riesige Verwüstungen verursachen kann und weitaus weniger auf dem offenen Meer bemerkt wird, z. B. stellten im Meer gerade unter Wasser schwimmende Taucher auf ihrem Tiefenmesser nur eine plötzliche Erhöhung der Anzeige um 5 m fest). Sie breiten sich im offenen Meer, abhängig von der Meerestiefe, mit recht großer Geschwindigkeit (bis zu 1000 km/h), aber relativ geringer Maximalauslenkung aus, wobei diese mit zunehmender Entfernung vom Epizentrum kleiner wird. In Ufernähe büßen sie stark an Geschwindigkeit ein (bis auf 30 km/h), wobei ihre Auslenkung, abhängig von der Wassertiefe und der Küstenform, in der Regel zunimmt und in ihrem Vorlauf sogar negative Werte erreicht (plötzliches Trockenfallen des Strandes vor der eigentlichen Welle). Im konkreten Falle wurden in Indonesien, Thailand, Malaysia, Sri Lanka, Indien und den Malediven sowie selbst noch in Ostafrika durch den genannten Tsunami etwa 230.000 Menschen getötet, 3 Millionen Menschen obdachlos und materielle Schäden in zigfacher Milliardenhöhe verursacht. Generell [2] können solche Wellen nicht nur durch Seebeben, sondern auch durch küstennahe, starke Erdbeben (z. B. Alaskabeben, 28.03.1964, maximale Wasserauslenkung: 70 m), von Vulkanausbrüchen (z. B. Krakatau, 1883, maximale Wasserauslenkung: 35 m), Hangrutschungen an Berghängen und Einschläge größerer kosmischer Projektile (z. B. Meteorit, Golf von Mexiko, vor 65 Millionen Jahren) hervorgerufen werden. Dabei ist zu beachten, dass so genannte Monster- oder Freak-Wellen mit ebenfalls gewaltigen Wasserhöhen in Form von steilen Wasserwänden (Höhen bis 40 m) [<sup>3</sup>] keine Tsunamis darstellen, sondern eine andere neuartige Gruppe von Wasserwellen bilden.

- 
- 1 Giese, W. u. D. Heimann: Tsunami – Eine Welle erschüttert die Welt. Hörbuch, ZDF, Mainz, (<http://www.zdf.de/ZDFportal/inhalt/31/0.6751.5238975.00.html>), April 2005.
  - 2 Bormann, P.: Infoblatt Tsunami 5/2005. Geo-Forschungszentrum Potsdam, in der Helmholtzgesellschaft, ([http://www.gfz-potsdam.de/bib/pub/m/infoblatt\\_tsunami.pdf](http://www.gfz-potsdam.de/bib/pub/m/infoblatt_tsunami.pdf)), Dezember 2006.
  - 3 Freja, M.: Schiffe in Seenot. ZDF, Mainz, (<http://www.zdf.de/ZDFde/inhalt/15/0.1872.2123855.00.html>), Mai, 2004.

Da eine Untersuchung der erläuterten Wellenphänomene wegen der großen Zahl der möglichen Parameter und Erscheinungsformen zu komplex ist, sollte aus fachdidaktischen Gründen für eine erste Erklärung dieser Erscheinungen eine solche Teilmenge der Phänomene betrachtet werden, deren Parameteranzahl durch Wahl einfacher geometrischer Verhältnisse und entsprechender Rand- und Anfangsbedingungen möglichst stark reduziert und vereinfacht werden kann, natürlich ohne dabei grundlegende Eigenschaften der Phänomengruppe zu eliminieren. Dies gelang durch Zufall, aber sehr genauer Beobachtung zum ersten Mal im August 1834 [4,5] dem schottischen Schiffsbauingenieur John Scott Russell (1808-1882, s. Abb.1). Er unternahm auf dem „Union Canal“ zwischen Glasgow und Edinburgh zur Bestimmung der erforderlichen Kräfte für die Bewegung und das Abbremsen von eisernen Kanalschiffen mit geplantem Dampfmaschinenantrieb Versuche mit Pferdegespannen auf den Treidelpfaden, um die Vorgänge zu simulieren und die gesuchten Größen abzuschätzen.



**Abb. 1** : Der schottische Schiffsbauingenieur John Scott Russell (1808-1882) entdeckte 1834 auf dem „Union Canal“ zwischen Glasgow und Edinburgh in Schottland bei Versuchen zur Optimierung der Form und des Antriebs von stählernen Schiffen für den Kohletransport das Phänomen der solitären Wasserwellen [4, 5], die er als „Translationswellen“ bezeichnete (s. auch Abb. 2).



**Abb. 2:** Seitliche Ansicht der Ausbreitung einer solitären Wasserwelle in einem quaderförmigen, oben offenen Tank aus Plexiglas (Höhe 30 cm, Breite 25 cm, Länge = 200 cm) Die Einzelbilder stammen aus einem Videoclip und besitzen jeweils den gleichen zeitlichen Abstand von 0,2 s [13].

Beim plötzlichen Abbremsen konnte er dabei beobachten, dass die Bugwelle des Schiffes sich vom Schiffskörper löste und als einzelner Wellenberg („solitary elevation“, engl: solitary: einzeln, allein, einsam) mit einer Höhe von etwa 1,25 ft (1 ft = 1 Fuß = 0,3048 m) und einer Län-

4 Russel, J. S.: Report on Waves. Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844, London 1845, pp 311-390, Plates XLVII-LVII.  
 5 Eilbeck, Ch.: John Scott Russell and the solitary wave. Dep. of Mathem., Heriot Watt Univ., Edinburgh, Jan. 2004, [http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott\\_russell.html](http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html).

ge von über 30 ft sich in dem Kanal mit konstantem Querschnitt ohne Änderung seiner Form ausbreitete. Da er gerade auf einem Pferd saß, verfolgte er die Welle über eine Strecke von 1 bis 2 Meilen (1 engl. Landmeile = 1,61 km), wobei er ihre konstante Geschwindigkeit mit einem Wert von 8 bis 9 Meilen/h abschätzte und keine Änderung der Wellenform feststellbar war. An späteren Abzweigungen des Kanals spaltete sich die Welle in Teilwellen auf, deren Geschwindigkeit und Form unterschiedliches Verhalten aufwies. Wegen der bei der Ausbreitung unveränderten Form bezeichnete er diese Wellenform als „Translationswelle“. Später wurden solche Wellen als solitäre Wellen oder Solitonen (engl. solitary: einsam, allein, einzeln) bezeichnet. In der Folgezeit erforschte er systematisch die entdeckte Wellenform, wozu er am Anfang einen zu diesem Zweck in seinem Garten angelegten 30 ft langen Kanal verwendete. Dabei gelang es ihm aber nicht, trotz verschiedener grundlegender Erkenntnisse das Problem grundsätzlich zu lösen. Eine theoretische Klärung gelang erst sehr viel später, nach Vorarbeiten des französischen Physikers und Mathematikers V. J. Boussinesq (1842-1929), den Holländern H. J. Korteweg (1848-1941 und H. De Vries (1866-1934) [6] durch Aufstellung einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung für nichtlineare dispersive Oberflächenwellen (KDV – Gleichung: Korteweg-De-Vries-Gleichung). Erst sehr viel später wurde der generelle Charakter von solitären Wellenphänomenen in verschiedensten Bereichen der Physik und anderer Wissenschaften erkannt und interessante Anwendungen entwickelt [7, 8, 9, 10, 11, 12]. Dabei ist bis heute die Erforschung noch lange nicht abgeschlossen.

Wie in Abb. 2 zu sehen ist, kann heute zur Demonstration einer solitären Wasserwelle oder generell für Experimente mit Solitonen auf Wasseroberflächen am einfachsten ein stabiler, quaderförmiger, oben offener Wassertank aus Plexiglas [13] mit einer Wandstärke von 0,8 cm und einer Querstrebe in der Kanalmitte am oberen Rand verwendet werden, wie er im Prinzip bereits von Russell benutzt wurde. Dabei wird die Welle dadurch erzeugt, dass an einer Seite des Tanks am Anfang eine höhere Wassersäule als im Tank selbst durch eine dicht sitzende vertikale Zwischenwand abgetrennt und diese plötzlich durch Hochziehen frei gegeben wird. In der Abbildung wurde jeweils das dritte Bild aus einer Videoaufzeichnung (15 Bilder/s) untereinander kopiert, so dass die Bilder jeweils 0,2 s auseinander liegen. Deutlich ist die bereits von Russell beobachtete solitäre Wellenformation zu erkennen (ungestörte Wasserhöhe 5 cm, Solitonenhöhe 2,5 cm), die sich in dem gewählten Parameterbereich ohne Änderung ihrer Grundform mit einer konstanten Geschwindigkeit von etwa 0,5 m/s entlang des Kanals ausbreitet (s. gelbe Gerade). Natürlich wird das Soliton an der rechten Wand reflektiert und läuft dann mehrfach im Kanal hin und her. Auf Grund der Reibung an den Wänden wird jedoch die Welle zunehmend verformt und verhält sich schließlich wie die klassischen Wasserwellen. Da jedoch eine theoretische Beschreibung der Versuchsanordnung die Voraussetzungen eines Schülers oder eines Studenten in den Anfangssemestern übersteigt, wird für eine ausführlichere Analyse eine noch weiter vereinfachte Anordnung gewählt, die im nächsten Kapitel als nichtlineare Wellenmaschine im einzelnen beschrieben wird.

6 Korteweg, D. J. a. H. De Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.* 39, 422-443, 1895.

7 Fermi, E., J. R. Pasta a. S. M. Ilam: Studies of nonlinear problems. Los Alamos Sci. Lab. Rep., LA-1940, 1955.

8 Zabusky, N. a. M. Kruskal: Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.* 15, 240-243, 1965.

9 Scott, A. C.: A nonlinear Klein-Gordon equation. *Am. J. Phys.* 37, 52-61, 1969.

10 Remoissenet, M.: *Waves called solitons*. Springer Verl., Berlin, 1993, 3<sup>rd</sup> edition, 1999.

11 Srimshaw, R. H. J. (Ed.): *Solitary Waves in Fluids*. WITpress, 208 p., 2007.

12 Scott, A. (Ed.): *Encyclopedia of Nonlinear Science*. Taylor & Francis, Milton Park, 2004.

13 Dietrich, M.: Beschreibung und grundlegende Eigenschaften von Solitonen und ihre Demonstration und Messung mit Hilfe einfacher mechanischer Experimente. Staatsexamensarbeit, 109 S., Univ- d. Saarl., Fachb. Physik, Ref.: Prof. Dr. H.-J. Patt, Saarbrücken, 2000.

## 2. Die Schraubenfeder – Schwerependel - Kette

Die im folgenden beschriebene neuartige Wellenmaschine [13, 14] besteht, wie in Abb.3 zu sehen ist, aus einer größeren, endlichen Anzahl von Schwerependel, die alle um eine gemeinsame horizontale Achse möglichst reibungsfrei schwingen können und zwischen denen jeweils ein konstanter Abstand besteht. Die benachbarten Pendel sind alle über eine gleichartige Schraubenfeder miteinander verbunden. Im Ruhezustand ist die Feder entspannt und alle Pendel hängen vertikal nach unten. Die zwei Haltevorrichtungen am Ende der Kette werden über je eine Stativstange mit Tischklemme an einem Experimentiertisch befestigt. Die Federenden können wahlweise frei schwingen oder mit einem drehbaren Handrad verbunden werden.

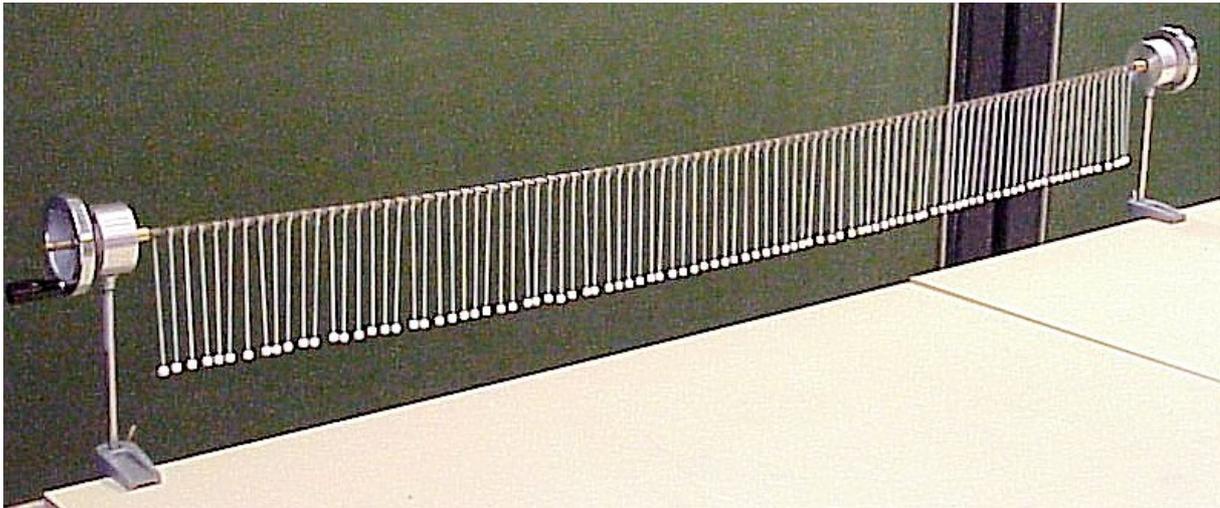


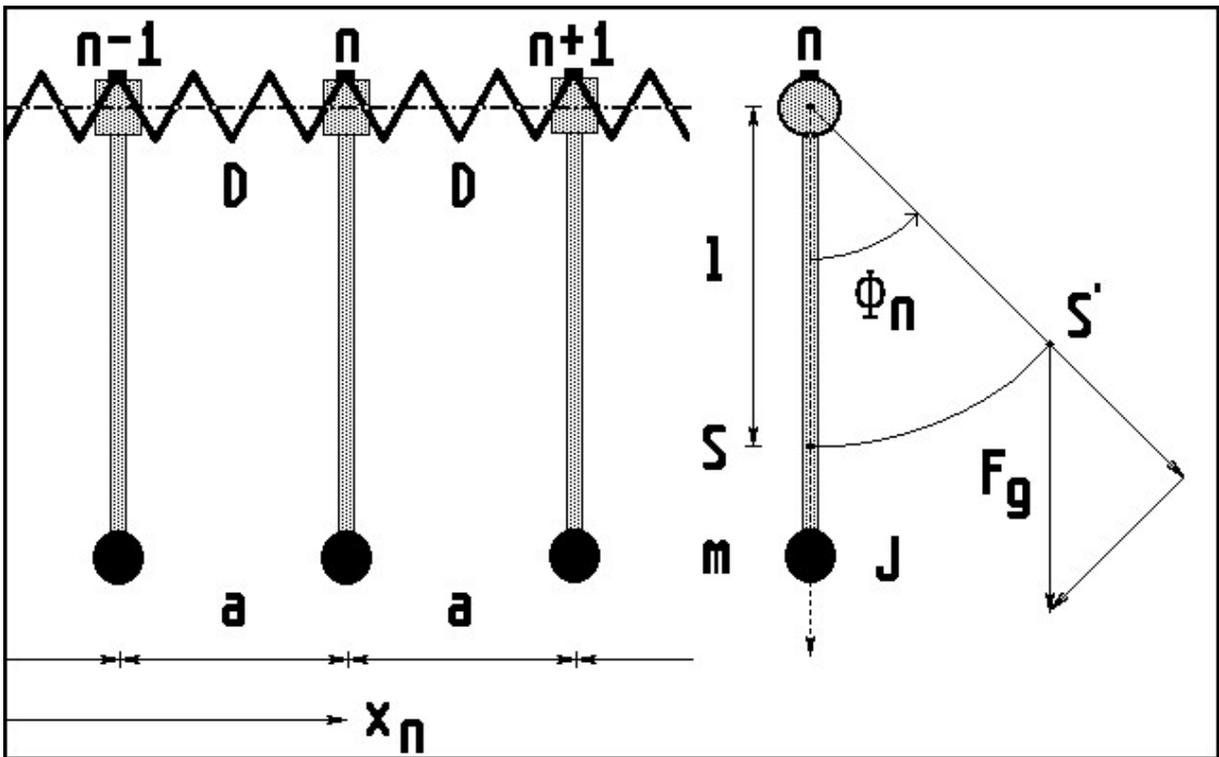
Abb. 3: Seitliche Ansicht der entwickelten Schraubenfeder – Schwerependel - Wellenmaschine in Ruhestellung mit ihren Halterungen und den Befestigungen an einem Experimentiertisch [13, 14].

### 2.1. Modelle und beschreibende Gleichungen

Zur theoretischen Beschreibung [9] der Wellenmaschine werden die Festlegungen und Bezeichnungen aus Abb. 4 verwendet. Die Bewegungsgleichung für das  $n$ . Pendel muss dabei zum einen die Schwerkraft  $F_g = -m \cdot g$  berücksichtigen, die in seinem momentanen Schwerpunkt  $S'$  vertikal nach unten wirkt und ein winkelabhängiges Drehmoment  $M_g$  um die Pendelachse verursacht, und zum anderen die beiden Drehmomente  $M_{n+1, n}$  und  $M_{n, n-1}$  in Betracht ziehen, die aus der Verdrillung der Schraubenfedern gegenüber den Nachbarpendel resultieren [10]. Zur Vereinfachung der Beschreibung soll die Verdrillung nur im elastischen Bereich der Federn erfolgen, wo das Drehmoment proportional zum Verdrillungswinkel anwächst.

<p>Bewegungsgleichung für das <math>n</math>. Pendel der Wellenmaschine ohne Dissipationsterm (s. Abb. 4):  mit <math>M_g = -F_g \cdot l \cdot \sin(\Phi_n)</math>, <math>M_{n+1, n} = D \cdot (\Phi_{n+1} - \Phi_n)</math>, <math>M_{n, n-1} = -D \cdot (\Phi_n - \Phi_{n-1}) \Rightarrow</math> 2.1.1  <math>J \cdot d^2 \Phi_n / dt^2 = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin(\Phi_n) + D \cdot (\Phi_{n+1} - \Phi_n) - D \cdot (\Phi_n - \Phi_{n-1})</math>, <math>n = 1, 2, \dots, N</math>, oder  <math>d^2 \Phi_n / dt^2 + \omega_0^2 \cdot \sin(\Phi_n) = c_0^2 / a^2 \cdot (\Phi_{n+1} + \Phi_{n-1} - 2 \cdot \Phi_n)</math> mit <math>\omega_0^2 = m \cdot g \cdot l / J</math> und <math>c_0^2 = D \cdot a^2 / J</math>.  Mit Anfangsbedingungen für <math>\Phi_n(0)</math> und <math>d\Phi_n / dt(0)</math> und Randbedingungen für <math>\Phi_0(t)</math> und <math>\Phi_{N+1}(t)</math>.</p>
--

14 Dietrich, M. u. H.-J. Patt: Wellenmaschine zur Demonstration und Messung harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen). Electr. - Media - CD 2001: Beitr. z. Frühjahrst. d. Fachverb. Didaktik der Physik in der DPG, Bremen, 2001 (Red.: V. Nordmeier, Münster), 11 S., ISBN 3-931253-87-2, 2001 (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).



**Abb. 4:** Schematische Darstellung von Pendel der Schraubenfeder-Schwerependel-Kette in Seiten- und Vorderansicht mit der Bezeichnung der verwendeten Variablen und Parameter [13] ( $n = 1, 2, \dots, N =$  laufende Pendelnummer,  $N+2 =$  Gesamtzahl der Pendel,  $D =$  Winkelrichtgröße der Schraubenfedern zwischen zwei benachbarten Pendel,  $S, S' =$  Pendelschwerpunkt,  $F_g =$  Gewichtskraft,  $g =$  Erdbeschleunigung,  $a =$  Abstand benachbarter Pendel,  $m =$  Gesamtmasse eines Pendels,  $l =$  Abstand des Schwerpunktes von der Drehachse,  $J =$  Trägheitsmoment um die Drehachse,  $x_n =$  Ortskoordinate des  $n$ . Pendels,  $\Phi_n(t) =$  Winkelauslenkung des  $n$ . Pendels zum Zeitpunkt  $t$ ). Jedes Pendel ist an der geschwärzten Stelle mit der durchgehenden Spiralfeder verbunden. Die Reibung zwischen den einzelnen Pendelaufhängungen (Messingzylinder mit Loch) und der allen Pendel gemeinsamen Achse (Stahldraht) und die Luftreibung sollen vernachlässigbar klein sein (keine Dissipation, lat.: Übergang).

Wie 2.1.1 zeigt, wird im elastischen Bereich bei Vernachlässigung dissipativer Terme die Bewegung der Schraubenfeder-Schwerependel-Kette durch ein System von  $N$  nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben, wobei jede Pendelschwingung durch die Bewegung der beiden benachbarten Pendel beeinflusst wird. Der nichtlineare Charakter des Differentialgleichungssystems wird allein durch das Drehmoment der Schwerkraft bestimmt, die auf den Schwerpunkt des Pendels einwirkt. Natürlich sind bei einer Lösung der Bewegungsgleichungen die beiden Anfangsbedingungen für jedes Pendel und zusätzlich die festzulegenden Randbedingungen für die beiden Endpendel zu berücksichtigen. Damit wird eine generelle Lösung des Problems sicher nicht einfach und ist in analytischer Form nicht mehr darstellbar. Wie in Kap. 3. noch gezeigt wird, kann dies sich jedoch wesentlich verändern, wenn angenommen wird, dass die Winkeldifferenz zwischen allen benachbarten Pendel jeweils klein ist:  $|\Phi_n - \Phi_{n-1}| \ll 1$  für  $n = 1, 2, \dots, N+1$ . Dabei ist diese Annahme bereits dann vorauszusetzen, wenn die Feder nur im elastischen Bereich verformt werden soll und nur wenige Federwindungen zwischen benachbarten Pendel vorhanden sind. In diesem Falle kann nämlich der Abstand  $a$  als kleine Größe angesehen werden und daher näherungsweise folgende Taylor-Entwicklungen für die verschiedenen Winkel  $\Phi_n$  durchgeführt werden (Übergang von der diskreten zur kontinuierlichen Approximation). Wie in 2.1.2 abgeleitet wird, ergibt sich damit statt eines Systems von  $N$  nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung, die wegen ihrer beson-

deren Bedeutung den Namen Sinus-Gordon Gleichung [15] erhielt (kontinuierliche SG- im Vergleich zur diskreten SG-Gleichung in 2.1.1, W. Gordon, 1893-1939, deutscher Physiker). Diese bildet die nichtlineare Erweiterung der Klein-Gordon Gleichung, die 1926, unabhängig von einander, durch W. Gordon und O. B. Klein (1894-1977, schwedischer Physiker) als relativistische Wellengleichung für Kräfte freie Teilchen ohne Spin (Mesonen) für  $|\Phi| \ll 1$  aufgestellt worden war. In der Sinus-Gordon Gleichung tritt stattdessen die nichtlineare Sinus-Funktion auf, wobei sich in dem englischen Namen ein Wortspiel ergibt, weil sich dort „sine-Gordon equation“ auch als Gordon Gleichung „ohne Klein“ interpretieren lässt.

$$\begin{aligned}
 & \text{Taylorentwicklung für } a \rightarrow 0 \text{ und } |\Phi_n - \Phi_{n-1}| \ll 1 \text{ mit } n = 1, 2, \dots, N+1: \Rightarrow \quad 2.1.2 \\
 & \Phi_n(x_n, t) \rightarrow \Phi(x, t), \quad d^2 \Phi_n(x_n, t) / dt^2 \rightarrow \delta^2 \Phi(x, t) / \delta t^2, \\
 & \Phi_{n+1}(x_{n+1}, t) \rightarrow \Phi(x, t) + \delta \Phi(x, t) / \delta x \cdot a + \delta^2 \Phi(x, t) / \delta x^2 \cdot a^2 / 2 + \dots + \dots, \\
 & \Phi_{n-1}(x_{n-1}, t) \rightarrow \Phi(x, t) - \delta \Phi(x, t) / \delta x \cdot a + \delta^2 \Phi(x, t) / \delta x^2 \cdot a^2 / 2 - \dots + \dots, \Rightarrow \\
 & \delta^2 \Phi(x, t) / \delta t^2 + \omega_0^2 \cdot \sin(\Phi(x, t)) = c_0^2 \cdot \delta^2 \Phi(x, t) / \delta x^2 \text{ mit } \omega_0^2 = mgl / J \geq 0, c_0^2 = Da^2 / J > 0 \Rightarrow \\
 & a^2 = c_0^2 / \omega_0^2 \cdot mgl / D \rightarrow 0 \text{ für } mgl \ll D \text{ und } a \ll c_0 / \omega_0 = 1 / k_0 \text{ (Sinus - Gordon Gleichung)}.
 \end{aligned}$$

Die kontinuierliche Näherung in Form der partiellen Sinus-Gordon Differentialgleichung ohne Dissipationsterm in 2.1.2 kann also zur Beschreibung der Schraubenfeder-Schwerependel Kette im elastischen Bereich verwendet werden, wenn das maximale Drehmoment auf Grund der Schwerkraft klein gegenüber den Drehmomenten ist, die durch die Schraubenfedern auf ein Pendel ausgeübt werden (s. auch 2.1.1), und zusätzlich der Abstand zwischen den Pendel  $a$  klein gegenüber dem Kehrwert des Parameters  $k_0 = \omega_0 / c_0$  ausfällt, dessen physikalische Bedeutung noch zu diskutieren ist. Diese Bedingungen sind einzuhalten, wenn eine Wellenmaschine zur möglichst optimalen Demonstration linearer und nichtlinearer Wellenphänomene der genannten Form entwickelt werden soll. Vorher soll aber noch auf die Möglichkeit hingewiesen werden, die Sinus-Gordon Gleichung durch eine geeignete Normierung der Orts- und der Zeitkoordinate in eine Form zu überführen, in der explizit kein Parameter mehr auftaucht. Wie wir später noch zeigen werden, hat die jetzt vorliegende Beschreibung trotz ihrer scheinbaren Komplexität den entscheidenden Vorteil, dass hierfür relativ einfache Klassen von analytischen Lösungen angegeben werden können und damit eine Diskussion ihrer grundlegenden physikalischen Eigenschaften wesentlich erleichtert wird.

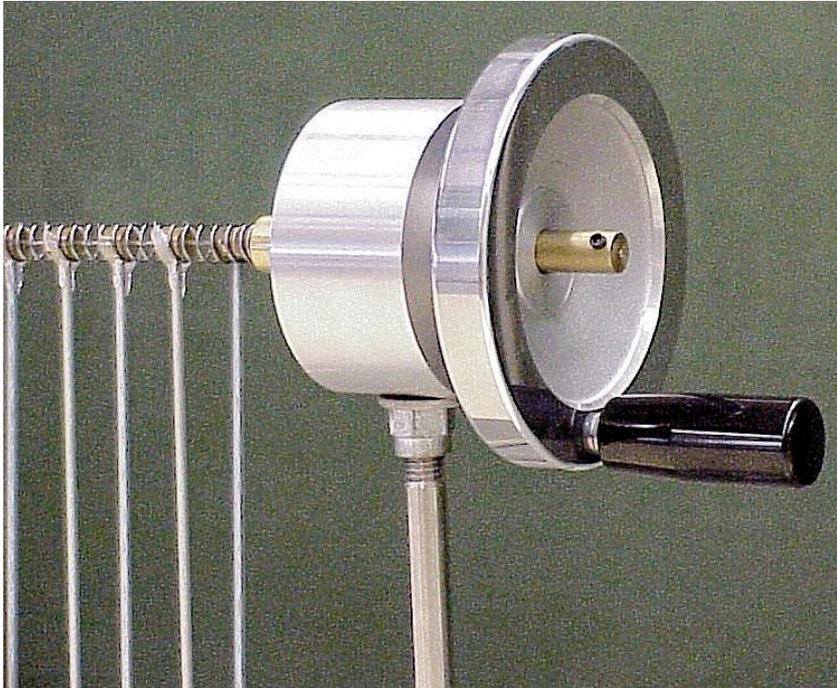
$$\text{Mit den normierten Zeit - und Ortsvariablen } T = \omega_0 \cdot t \text{ und } X = k_0 \cdot x \Rightarrow \text{ aus 2.1.2} \quad 2.1.3 \\
 \text{die normierte Sinus - Gordon Gleichung: } \delta^2 \Phi / \delta T^2 + \sin(\Phi) = \delta^2 \Phi / \delta X^2 \text{ mit } \omega_0 > 0, k_0 > 0$$

## 2.2. Aufbau, Parameter und Optimierung der Wellenmaschine

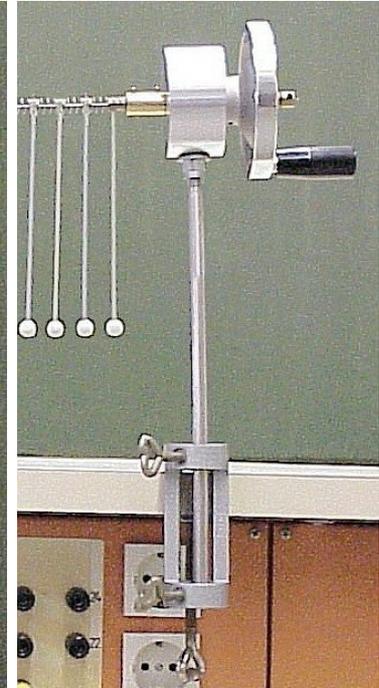
Um die in Kap. 2.1. aufgestellten Bedingungen erfüllen und zweckmäßige Werte für die Parameter der Wellenmaschine erreichen zu können, müssen die primären Größen geschickt ausgewählt und die konstruktiven Merkmale für die geplanten Demonstrationen und Messungen optimiert werden [13,14]. Dazu wird zuerst als allen Pendel gemeinsame Achse ein dünner Stahldraht hoher Festigkeit (Klavierseite [10,13], Durchmesser 1 mm) verwendet. Damit kann durch genügend große Zugkräfte an den beiden Drahtenden (Größenordnung 100 N) bei einem gering gehaltenen Gesamtgewicht aller Pendel und einer effektiven freien Gesamtlänge von 150 bis 200 cm die maximale Durchhängung kleiner als 1 % gehalten und daher in

15 Rubinstein, P.: Sine-Gordon equation. J. Math. Phys. 11, 258-266, 1970.

guter Näherung eine gerade, horizontale Achse realisiert werden. Da ein Drehmoment zwischen den beiden Drahthalterungen oder eine andere Verdrillung der Achse die erzeugten Wellenphänomene nur wenig beeinflussen sollen, werden die Drahtenden jeweils durch ein Loch (Durchmesser 1,2 mm) in einem zylinderförmigen Drehkörper aus Messing geführt und über ein Axialkugellager so mit dem Drehkörper verbunden, dass die effektive Achsenlänge noch frei wählbar ist und praktisch kein Drehmoment auf die Pendel übertragen wird.



**Abb. 5:** Übersicht über die Einzelheiten eines Endlagers der Wellenmaschine mit Rundgehäuse und Handrad mit Griff aus Aluminium, Schraubenfeder- bzw. Achsenbefestigung in dem zylindrischen Drehkörper aus Messing sowie der Stativstange aus V2A-Stahl mit Kontermutter.

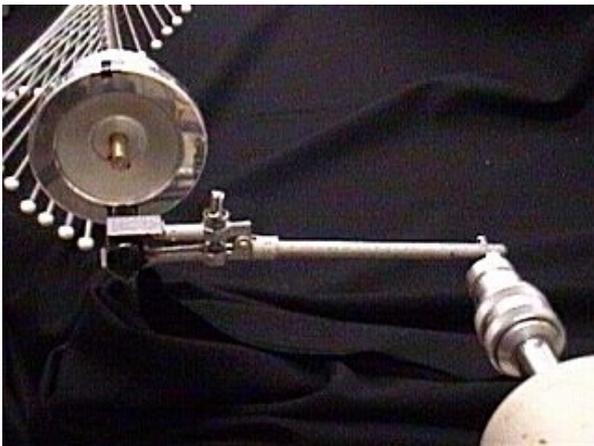


**Abb. 6:** Stabile Befestigung eines Endlagers der Wellenmaschine am Experimentiertisch mit einer Tischklemme.

Jeder der beiden Drehkörper wird über zwei Kugellager (Rillenger zur Stabilisierung und Axiallager zur Aufnahme der Zugkräfte) mit einem Rundgehäuse aus Aluminium verbunden. Wie die Abb. 5 und 6 zeigen, ist jeder Drehkörper zusätzlich mit einem Handrad mit Griff (Radius 50 mm, Abstand Griffachse – Pendelachse: 42,5 mm) versehen. Mit dem Handrad können die Anfangs- bzw. Randbedingungen der Feder-Pendel-Kette vorgegeben werden. Wenn die zur Fixierung des Handrades benutzte Madenschraube gelöst wird, kann näherungsweise auch ein offenes Ende der Kette realisiert werden. Mit Hilfe der Anordnung in Abb. 7 wird darüber hinaus leicht eine quasi harmonische Anregung der Wellenmaschine ermöglicht. Eine genügend lange Stativstange (V2A-Stahl, Durchmesser 12 mm, Länge 31 cm), die in das Aluminiumgehäuse eingedreht und durch eine Kontermutter gesichert wird, dient zur stabilen Befestigung der Endhalter mit einer Tischklemme an einem Experimentiertisch. Dabei kann durch Verschieben einer Klemme die Durchhängung der Pendelachse auf den oben genannten Wert von 1 % eingestellt werden (die Messung erfolgt am besten von der Tischplatte aus).

Die einzelnen Pendel selbst wurden aus käuflichen M3-Gewindestangen aus Messing hergestellt und alle ohne Grat auf eine feste Länge von möglichst genau 140,0 mm gebracht. Wie Abb. 4 zeigt, werden sie so in ein mittig, senkrecht zur Achse angebrachtes, durchgehendes M3-Gewinde-Loch in einem Messingzylinder (Länge 6 mm, Durchmesser 8 mm, zentrische Bohrung 1,1 mm, Masse 2,13 g) eingedreht, dass sie ein Probestück der Klavierseite, das

durch die zentrale Bohrung geführt wurde, berühren. Danach wird die Stange um einen festen Betrag zurückgedreht und die Verschraubung mit einem geeigneten Kleber gesichert. Auf diese Weise dient der Messingzylinder als relativ reibungsfreies Achslager für das Pendel. Am freien Ende der Gewindestange wird eine weiße Wattedkugel mit zentraler Bohrung bündig befestigt (Durchmesser 1 cm, Bohrung 2,8 mm, Abstand des Kugelmittelpunktes von der Achse  $L = 134,5$  mm, s. Versuch 11 in Kap. 4.3.). Die Kugeln dienen zur besseren Visualisierung und zur quantitativen Analyse der Bewegung der Pendelenden vor einem dunklen Hintergrund z. B. aus schwarzem Tuch (s. Abb.7) oder einer nichtreflektierenden Tafelfläche (s. Abb. 3). Natürlich können die Kugeln auch mit gelb fluoreszierender Farbe eingefärbt und mit UV-Licht beleuchtet werden, um die Beobachtung der Effekte zusätzlich zu verbessern. Wenn die später noch zu begründende Veränderung des Trägheitsmoments der Pendel durch Aufschrauben verschiedener Zusatzmassen am Pendelende erreicht werden soll, ist es zweckmäßig, die Wattedkugel auf der Achse weiter nach innen zu verschieben (etwa 4 mm), wobei ihre Lage durch zwei gekonterte Schraubenmuttern auf einen festen Wert so fixiert werden kann, dass noch genügend freies Gewinde für das Befestigen von Zusatzmassen aus käuflichem Messingrohr mit M3-Innengewinde unterschiedlicher Länge und definierter Lage bleibt (Gesamtmasse des Pendels  $m_0 = 8,25$  g, 3 Zusatzmassen mit der resultierenden Gesamtmasse:  $m_1 = 9,69$  g,  $m_2 = 11,36$  g,  $m_3 = 16,47$  g, s. auch Tab. 1 in Kap. 3.). Zur besseren Unterscheidung wurden die Zusatzmassen mit rot fluoreszierender Farbe versehen.



**Abb. 7:** Periodische Anregung der Pendel-Feder-Kette über einen geregelten Experimentiermotor mit Exzenter (Radius 10,1 mm) und einem am Handrad befestigten Flaschenhalter mit durchbohrtem Stiehl (Entfernung Stiehlloch – Handrad: 210 mm)

Nachdem die Pendelabmessungen festgelegt wurden, müssen nun noch die Parameter der Schraubenfeder ermittelt werden. Die benutzten Druckfedern wurden dabei aus Federstahl DIN 17223 (Elastizitätsmodul  $E = 220$  GPa, Torsionsmodul  $G = 85$  GPa [16]) hergestellt und können von entsprechenden Firmen ansonsten mit vielen unterschiedlichen Parameterwerten bezogen werden. Da die Feder gemäß Abb. 4 bzw. 5 und 6 nur an einer Stelle mit dem Achsenzylinder jedes Pendels verbunden sein soll, muss der Innenradius der Feder auch bei maximal ungünstiger Torsion größer als der Radius des Messingzylinders sein (Drahtdurchmesser 0,85 mm, Innendurchmesser 8,95 mm). Da zusätzlich die Feder auch im maximal verdrilltem Zustand

nicht gegen die Gewindestange drücken soll, muss ihre Steigung unter Berücksichtigung des Drahtdurchmessers größer als der Stangendurchmesser sein (mittlerer Windungsabstand 4,20 mm). Um im Sinne der theoretischen Festlegungen in Kap.2.1. an allen Pendel gleiche Koppelungsbedingungen zu erzielen, dürfen zwischen zwei benachbarten Pendel weiter nur Windungen mit einem festen ganzzahligen Wert auftreten (s. Abb.4: gewählter Wert: 4, damit ergibt sich als mittlerer Abstand zwischen zwei benachbarten Pendel  $a = 16,80$  mm). Für die Gesamtzahl der Pendel wurde die Festlegung getroffen, dass die charakteristische Längen der Wellenphänomene noch durch eine hinreichend große Anzahl von Pendel realisiert werden können, um auf diese Weise die Annahme der kontinuierlichen Näherung aus Kap. 2.1. zu erfüllen (s. Abb. 4: für die beiden gewählten Varianten  $N = 92$  bzw. besser  $N = 104$  (94 bzw. 106 Pendel, s. Kap. 3.1.) ergibt sich damit eine effektive Kettenlänge von  $L = 156,2$  cm bzw. 176,4 cm). Zur Befestigung der Spiralfeder an den beiden Endhalterungen wurden die

16 Kuchling, H.: Taschenbuch der Physik. Fachbuchverlag, Leipzig, München, Wien, 16. Aufl., 1999.

Messingzylinder des ersten und des letzten Pendels so verlängert, dass sie jeweils zusammen mit den Federenden in eine entsprechende Bohrung des zentralen Drehkörpers eingeführt und daran über zwei Madenschrauben befestigt werden können (s. Abb. 5 und 6). Anstatt die Verbindung zwischen Feder und Pendelkörper über eine M3-Schraube oder M3-Schraubenmutter am oberen Loch im Messinglager herzustellen, wie es von Remoissenet [10] vorgeschlagen wurde, und was eine optimale Ausrichtung aller Pendel im Ruhezustand durch die undefinierte Verformung der Feder beim Anziehen der Schraube praktisch unmöglich macht, wurde hier die Befestigung durch einen Tropfen eines geeigneten Heißklebers erreicht. Dazu werden alle Pendel im entspannten Zustand der Feder zuerst an die vorgesehene Stelle gebracht und anschließend die Achse und die Feder ohne Verdrillung in den Endhalterungen und diese am Experimentiertisch befestigt. Danach wird die vorgesehene Durchhängung der Achse durch Verschieben einer Tischklemme eingestellt. Anschließend werden die Pendel, jeweils vertikal hängend, unten insgesamt durch eine Lochleiste auf gleiche Abstände fixiert und dann oben alle an der gleichen Zylinderstelle verklebt. Wie Abb. 3 zeigt können auf diese Weise alle aufgestellten Forderungen recht gut erfüllt werden. Selbst wenn sich einmal durch zu starke Verdrillung ein Pendel von der Feder lösen sollte, kann es problemlos nach Ablösen des alten Klebstoffes erneut mit der Feder verbunden werden. In entspannter Form kann dann auch die Wellenmaschine auf einer ebenen horizontalen Unterlage in der Sammlung aufbewahrt werden und steht damit ohne große Vorbereitung für neue Demonstrationen bereit.

### **3. Erzeugung verschiedener Wellenformen und ihre charakteristischen Eigenschaften**

Wenn die zahlreichen Phänomene, die mit Hilfe der entwickelten Schraubenfeder-Schwerpendel-Kette demonstriert werden können, mit dem Modell der Sinus-Gordon-Gleichung gemäß Kap. 2.1. quantitativ beschrieben und analysiert werden sollen, müssen gemäß 2.1.2 die Parameter  $\omega_0$  und  $c_0$  bekannt sein. Diese hängen in der dort abgeleiteten Weise von der Gesamtmasse eines Pendels  $m$ , der Erdbeschleunigung  $g$ , dem Abstand des Schwerpunktes  $S$  von der Pendelachse  $l$ , dem Trägheitsmoment des Pendels um seine Achse  $J$  und dem Abstand  $a$  sowie dem Direktionsmoment der Feder  $D$  zwischen zwei benachbarten Pendel ab:

1. Winkelgeschwindigkeit:  $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = 2 \cdot \pi / T_0$  mit  $\omega_0^2 = m \cdot g \cdot l / J$ ,  $f_0 =$  Frequenz, 3.1  $T_0 =$  Schwingungszeit eines Pendels ohne Federkopplung für kleine Winkelauslenkungen,
2. Grenzgeschwindigkeit:  $c_0$  mit  $c_0^2 = D \cdot a^2 / J \Rightarrow$  mit  $\Delta x_0 = 2 \cdot \ln(2^{1/2} + 1) \cdot c_0 / \omega_0 =$   
Halbwertsbreite des ruhenden Solitons (Kap. 3.3.)  $\Rightarrow D = m \cdot g \cdot l / a^2 \cdot \Delta x_0^2 / (2 \cdot \ln(2^{1/2} + 1))^2$

Während die Größen  $m$  und  $a$  leicht ermittelt werden können und in Kap. 2.2. bereits angegeben wurden, müssen  $l$ ,  $J$  und  $D$  noch bestimmt werden. Zur Messung von  $l$  wird die Gewindestange eines noch nicht eingebauten Pendels auf eine vertikal befestigte Messerschneide gelegt und durch Verschieben die Gleichgewichtslage festgestellt. Mit einem Messschieber kann dann  $l$  aus dem Abstand zwischen Messerschneide und Achsenloch der Pendelaufhängung bestimmt werden. Wie in 3.1 bereits angedeutet wurde, kann das Trägheitsmoment des Pendels  $J$  statt direkt einfacher aus seiner Schwingungsdauer  $T_0$  ohne Federkopplung für kleine Winkelauslenkungen [17] erhalten werden, wenn dieses um ein kurzes Probestück der vorgesehenen Achse schwingt (Mittelwert aus 20 Schwingungen). Zur Ermittlung von  $D$  wird ebenfalls

---

17 Patt, H.-J.: Pendel mit harmonischer Modulation der Pendellänge oder mit erzwungener bzw. freier Bewegung des Aufhängepunktes. Electr. Media Public., 28 S., Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 2005 (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).

auf eine indirekte Methode zurückgegriffen, wobei aber die verwendete Formel gemäß 3.1 zuerst noch in Kap. 3.3. abgeleitet werden muss. Dazu wird die so genannte Halbwertsbreite  $\Delta x_0$  eines ruhenden Solitons herangezogen. Dabei ergibt sich unter den genannten Bedingungen ein Wert von  $D = 4,86 \cdot \text{N} \cdot \text{cm}$ . Zur besseren Übersicht sind in Tab. 1 die gemessenen und berechneten Parameterwerte (schwarz und blau) noch einmal zusammengestellt.

Größe	Einheit	ohne Zusatzmasse	mit 1. Zusatzmasse	mit 2. Zusatzmasse	mit 3. Zusatzmasse
<b>m</b>	<b>[g]</b>	<b>8.25</b>	<b>9.69</b>	<b>11.36</b>	<b>16.47</b>
<b>l</b>	<b>[cm]</b>	<b>5.4</b>	<b>6.8</b>	<b>7.5</b>	<b>9.8</b>
<b>T<sub>0</sub></b>	<b>[s]</b>	<b>0.640</b>	<b>0.675</b>	<b>0.695</b>	<b>0.740</b>
<b><math>\Delta x_0</math></b>	<b>[cm]</b>	<b>9.8</b>	<b>8.1</b>	<b>7.1</b>	<b>5.2</b>
<b>f<sub>0</sub></b>	<b>[Hz]</b>	<b>1.56</b>	<b>1.48</b>	<b>1.44</b>	<b>1.35</b>
<b><math>\omega_0</math></b>	<b>[s<sup>-1</sup>]</b>	<b>9.82</b>	<b>9.31</b>	<b>9.04</b>	<b>8.49</b>
<b>J</b>	<b>[g · cm<sup>2</sup>]</b>	<b>453</b>	<b>746</b>	<b>1022</b>	<b>2196</b>
<b>c<sub>0</sub></b>	<b>[cm · s<sup>-1</sup>]</b>	<b>55.0</b>	<b>42.9</b>	<b>36.6</b>	<b>25.0</b>
<b>k<sub>0</sub></b>	<b>[cm<sup>-1</sup>]</b>	<b>0.179</b>	<b>0.217</b>	<b>0.247</b>	<b>0.340</b>
<b><math>\lambda_0</math></b>	<b>[cm]</b>	<b>35.2</b>	<b>29.0</b>	<b>25.4</b>	<b>18.5</b>

**Tab. 1:** Übersicht über die gemessenen (schwarz) und berechneten Parameterwerte der entwickelten Wellenmaschine ohne und mit drei verschiedenen Pendelzusatzmassen

Zur generellen Lösung der Sinus-Gordon-Gleichung und zur leichteren Diskussion der physikalischen Eigenschaften der damit beschreibbaren Phänomene erweist es sich didaktisch als zweckmäßig, zuerst zwei einfachere Untergruppen dieser Phänomene als Grenzfälle zu untersuchen. Dies soll in den Kap. 3.1. und 3.2. geschehen, bevor dann in Kap. 3.3. die nichtlineare Differentialgleichung behandelt wird.

### **3.1. Schwerelose Wellen – Beschreibung durch die klassische Wellengleichung**

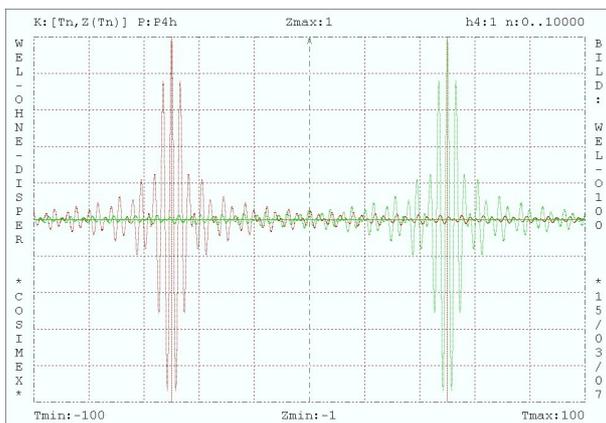
Wie aus 2.1.2 in Kap. 2.1. zu erkennen ist, wird die Sinus-Gordon-Gleichung wesentlich vereinfacht, wenn durch Verkleinerung der Schwerebeschleunigung  $g \rightarrow 0$  der Grenzübergang  $\omega_0 \rightarrow 0$  betrachtet wird. Physikalisch kann dies dadurch realisiert werden, dass die Experimente in einem antriebslosen Satelliten in einer Planetenumlaufbahn oder unter anderen möglichen schwerelosen Bedingungen durchgeführt werden. Näherungsweise kann dieser Fall auch mit vertikal angeordneter Achse der Wellenmaschine untersucht werden. In dieser Situation wird der Einfluss der Schwerkraft in erster Näherung dadurch kompensiert, dass die Pendelmasse sich, bedingt durch die Zwangskräfte der Achshalterung und der beiden Schraubenfedern, nur auf etwa konstanter Höhe bewegen kann. Andererseits werden durch die Gewichtskräfte der Pendel die Abstände zwischen Nachbarpendel ortsabhängig verändert, so dass nur bei großen Werten der Winkelrichtgröße und kleinen Pendelmassen die vorgenommene Näherung gültig bleibt (s. 2.1.1). In vertikaler Anordnung werden aber die Dissipationseffekte durch die Zunahme der Achsreibung einen größeren Einfluss ausüben als im horizontalen Fall. Ansonsten können klassische Wellenphänomene natürlich auch mit den von verschiedenen Lehrmittelfirmen erhältlichen Demonstrationswellenmaschinen <sup>[18]</sup> in horizontaler Anordnung untersucht werden, bei denen der Pendelschwerpunkt in die Pendelachse

<sup>18</sup> Horizontale Demonstrationswellenmaschine oder Wellenmaschine nach Julius. 1. Conatex-Didactic, Neunkirchen (<http://www.conatex.com/shop/>), 2. LD-Didactic, Hürth (<http://www.leybold-didactic.com/shop/>) 3. Phywe Systeme, Göttingen (<http://shop.phywe.de/>).

gelegt und so ihre Asymmetrie bzw. die Nichtlinearität der Gleichung eliminiert wird.

Die wesentliche Vereinfachung der Sinus-Gordon-Gleichung 2.1.1 ergibt sich für schwerelose Wellen aus der Tatsache, dass der nichtlineare Term der partiellen Differentialgleichung verschwindet, und deshalb im Vergleich zum allgemeinen Fall das Superpositionsprinzip gültig wird. Wie 3.1.1 zeigt, werden die möglichen Phänomene dabei durch die klassische Wellengleichung beschrieben. Die universellen Wellenlösungen können hier durch die Summe von zwei oder mehr beliebigen Funktionen mit hinreichenden mathematischen Eigenschaften erhalten werden, die nur von der Phase der Welle  $\varphi_{\pm} = k \cdot x \pm \omega \cdot t$  abhängen, wobei für jeden Summanden die Beziehung  $k = \omega/c_0$  zwischen den positiven Konstanten  $k$  und  $\omega$  bestehen muss (nachweisen durch Einsetzen und Anwenden der Kettenregel). Das Vorzeichen vor  $\omega$  bestimmt dabei, ob sich die Welle in negativer oder positiver  $x$ -Richtung bewegt.

Ein dimensionale klassische Wellengleichung für die skalare Größe  $\Phi(x, t)$  mit  $c_0 > 0$ : 3.1.1  
 $\delta^2 \Phi / \delta x^2 = 1 / c_0^2 \cdot \delta^2 \Phi / \delta t^2 \Rightarrow \Phi(x, t) = F(k \cdot x - \omega \cdot t) + G(k \cdot x + \omega \cdot t)$  mit  $k, \omega > 0$ ,  $k = \omega / c_0$ .  
 Aus  $\varphi_{\pm} = k \cdot x \pm \omega \cdot t = \text{const} \Rightarrow$  Phasengeschwindigkeit:  $|v_{\varphi}| = \omega / k = c_0$  und Gruppengeschwindigkeit:  $|v_g| = d\omega / dk = c_0 \Rightarrow v_{\varphi} = v_g = c_0 \neq v_{\varphi}(k) \Rightarrow$  Wellen sind dispersionsfrei.



**Abb. 8:** Darstellung der Ausbreitung eines Wellenpakets  $\Phi(x, t)$  als Funktion des Ortes  $x$  zu zwei Zeitpunkten  $t$  (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_O100.PA1)

bzw. longitudinale Welle ausbreitet (lat.: Schwingung erfolgt senkrecht oder parallel zur Ausbreitungsrichtung). Bei transversalen Wellen ist weiter eine eventuelle Polarisation ohne Bedeutung. Zur Demonstration dieses Sachverhalts ist in Abb. 8 die Ausbreitung eines Wellenpakets dargestellt, wie sie z. B. mit dem Programm „Cosimex für Windows“ [19] berechnet und dargestellt werden kann. Dabei wurde angenommen, dass das Wellenpaket aus der Überlagerung von vielen monochromatischen (griech. einfarbig) ebenen Wellen  $\Phi_h(x, t) = c(k) \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t)$  entsteht, deren Amplituden  $c(k)$  in einem Intervall  $\Delta k_0$ , symmetrisch um einen festen Wert der Wellenzahl  $k_0 = 2 \cdot \pi / \lambda_0$  ( $\lambda_0 =$  Wellenlänge) und der Eigenfrequenz  $\omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_0 = 2 \cdot \pi / T_0$  ( $f_0 =$  Frequenz,  $T_0 =$  Schwingungszeit oder Periode) eine konstante Größe  $1/\Delta k_0$  besitzen, aber ansonsten verschwinden. Didaktisch ist es zweckmäßig, für Anfänger diese Form des Wellenpakets zu wählen, anstatt ein Gauß'sches Wellenpaket (J. C. F. Gauß,

Gemäß 3.1.1 zeichnet sich eine dispersionsfreie Welle dadurch aus (lat.: feinste Verteilung: das Verhältnis von Kreisfrequenz und Wellenzahl ist für alle Wellen konstant und gleich der Phasengeschwindigkeit), dass der zu einem Zeitpunkt  $t_0$  vorhandene Zustand  $\Phi(x, t_0)$  sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $c_0$  in oder entgegengesetzt zur Achsenrichtung ohne Formveränderung ausbreitet. Dabei spielt es keine Rolle, ob die Beschreibung durch eine skalare oder vektorielle Größe erfolgt, eine Überlagerung verschiedener Wellenfunktionen vorliegt (lat.: Superposition) oder sich eine transversale

19 Patt, H.-J.: COSIMEX für Windows - Computerunterstütztes SIMulieren und EXperimentieren - 1. Simulation von Systemmodellen, 2. Vergleich mit Systemmessgrößen. Version 4 für Windows 3.1x, 9.x, NT, ME, XP, ©-1995/2006: TeachPhysics, Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 2006 (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).

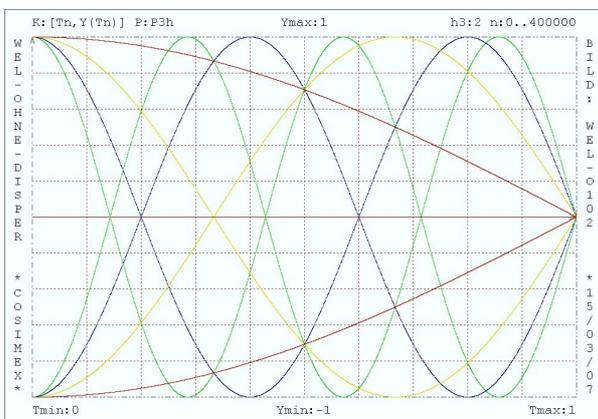
1777-1855) zu verwenden, das eine Amplitudenverteilung in Form einer Gaußfunktion besitzt, die zwar theoretisch viele Vorteile z. B. in der Quantentheorie bietet, aber andererseits größere mathematische Anforderungen bei ihrer Herleitung stellt.

Für die Erklärung der in Kap. 4. noch zu diskutierenden Experimente sollen jetzt noch kurz Phänomene mit stehenden Wellen erläutert werden. Dabei handelt es sich unter den hier vorausgesetzten Bedingungen um Wellen, die an jedem Ort nur stationäre harmonische Schwingungen ausführen. Sie können unter bestimmten Rand- und Anfangsbedingungen dadurch erzeugt werden, dass zwei entgegengesetzt sich ausbreitende Wellen überlagert werden. Die Anregung der stehenden Wellen erfolgt dabei durch eine erzwungene harmonische Schwingung an einem Ende der Wellenmaschine mit noch festzulegenden Frequenzen und der Annahme von zwei speziellen Randbedingungen am anderen Ende (s. Kap. 2.2. und Abb. 7).

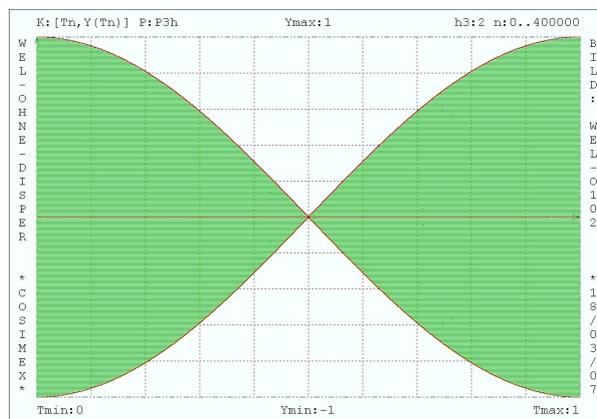
Mit  $\Phi(x, t) = a_1 \cdot \cos(k \cdot x - \omega \cdot t) + a_2 \cdot \cos(k \cdot x + \omega \cdot t)$  und  $\Phi(0, t) = a \cdot \cos(\omega \cdot t) \Rightarrow$  3.1.2

1. Randbedingung (festes Ende):  $\Phi(L, t) = 0 \Rightarrow a = a_1 + a_2, 0 = a_1 \cdot \{\cos(k \cdot L) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin(k \cdot L) \cdot \sin(\omega \cdot t)\} + a_2 \cdot \{\cos(k \cdot L) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \sin(k \cdot L) \cdot \sin(\omega \cdot t)\} \Rightarrow a_1 = a_2 = a / 2,$   
 $k_{fn} \cdot L = \pi \cdot (1/2 + n)$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  oder  $\lambda_{fn} = 2 \cdot \pi / k_{fn} = 2 \cdot L / (1/2 + n), \omega_{fn} = c_0 \cdot k_{fn} \Rightarrow$   
 Anzahl der Schwingungsknoten:  $n + 1$ , Anzahl der Schwingungsbäuche:  $n + 1$ .

2. Randbedingung (loses Ende):  $|\Phi(L, t)| = 1 \Rightarrow a = a_1 + a_2, 1 = |a_1 \cdot \{\cos(k \cdot L) \cdot \cos(\omega \cdot t) + \sin(k \cdot L) \cdot \sin(\omega \cdot t)\} + a_2 \cdot \{\cos(k \cdot L) \cdot \cos(\omega \cdot t) - \sin(k \cdot L) \cdot \sin(\omega \cdot t)\}| \Rightarrow a_1 = a, a_2 = 0,$   
 $k_{ln} \cdot L = \pi \cdot (1 + n)$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  oder  $\lambda_{ln} = 2 \cdot \pi / k_{ln} = 2 \cdot L / (1 + n), \omega_{ln} = c_0 \cdot k_{ln} \Rightarrow$   
 Anzahl der Schwingungsknoten:  $n + 1$ , Anzahl der Schwingungsbäuche:  $n + 2$ .



**Abb. 9:** Darstellung der maximalen Winkelausschläge  $\Phi(x, t)$  von stehenden Wellen bei festem Ende für  $n = 0$  (rote Kurve), 1 (gelbe Kurve), 2 (blaue Kurve) und 3 (grüne Kurve) (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_O101.PA1).



**Abb. 10:** Darstellung der maximalen Winkelausschläge  $\Phi(x, t)$  von stehenden Wellen bei loseem Ende für  $n = 0$  (rote Kurve) und der dazwischen liegenden stationären Schwingungszustände (grüner Bereich) (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_O102.PA1).

Die Stellen der stehenden Welle, an denen die Schwingungsamplitude verschwindet, werden als Wellen- oder Schwingungsknoten, die Stellen maximaler Amplitude als Wellen- oder Schwingungsbäuche bezeichnet. Da nur charakteristische diskrete Werte der Anregungsfrequenz zu stehenden Wellen führen können, werden diese Eigenschwingungen oder Eigenresonanzen des Systems genannt. Dabei wird die Eigenschwingung mit der kleinsten Frequenz oder der größten Wellenlänge als Grundschwingung ( $n = 0$ ) und die mit größeren Frequenzen oder kleineren Wellenlängen als Oberschwingungen ( $n > 0$ : n. Oberschwingung) definiert. Damit die Knoten der Grundschwingung und der ersten drei Oberschwingungen bei festem Ende

der Wellenmaschine (s. Abb. 9) jeweils genau auf eines der Pendel fällt, muss ihre Gesamtzahl  $N + 2 = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$  betragen (s. 2.1.1 und 2.1.2), wie es bereits in Kap. 2.2. festgelegt wurde. Unter diesen Bedingungen entfallen dann auf eine Wellenlänge der 3. Oberwelle noch 30 Pendel, was bei einer Amplitude von z. B.  $75^\circ$  einer maximalen Verdrillung von  $8^\circ$  zwischen zwei Nachbarpendel entspricht. Die vorgenommenen Näherungen in den beschreibenden Gleichungen können also in einem größeren Winkelbereich erfüllt werden.

### **3.2. Wellen mit kleinen Amplituden – Beschreibung durch die Klein-Gordon Gleichung**

Auf der Basis der in Kap. 2.1. und 3.1. gewonnenen Erkenntnisse können jetzt die Phänomene behandelt werden, die durch die Klein-Gordon Gleichung beschrieben werden. Dabei wird die Sinus-Gordon Gleichung für den Grenzfall kleiner Winkelausschläge  $|\sin(\Phi(x,t)) - \Phi(x,t)| \ll 1$  untersucht. Wie die folgenden Gleichungen zeigen, können in Erweiterung der in Kap. 3.1. diskutierten Lösungen ebenfalls analytisch darstellbare Lösungsfunktionen abgeleitet werden:

Ein dimensionale Klein - Gordon Gleichung für die skalare Größe  $\Phi(x, t)$  mit  $c_0, \omega_0 > 0$ : 3.2.1

Aus der Sinus - Gordon Gleichung  $c_0^2 \cdot \delta^2 \Phi / \delta x^2 = \delta^2 \Phi / \delta t^2 + \omega_0^2 \cdot \{\Phi + [\sin \Phi - \Phi]\} \Rightarrow$

mit  $|\sin \Phi - \Phi| \ll 1 \Rightarrow$  Klein - Gordon Gleichung:  $c_0^2 \cdot \delta^2 \Phi / \delta x^2 = \delta^2 \Phi / \delta t^2 + \omega_0^2 \cdot \Phi$ .

Mit Ansatz für wellenartige Lösungen:  $\Phi_w = F(\varphi_{w\pm}) = F(k_0 \cdot x \mp u \cdot \omega_0 \cdot t)$  mit  $k_0^2 = \omega_0^2 / c_0^2$ ,

$u = \text{const} \geq 0, \neq 1 \Rightarrow$  Schwingungsgleichung für  $F(\varphi_{w\pm})$ :  $d^2 F / d\varphi_{w\pm}^2 + 1 / (u^2 - 1) \cdot F = 0 \Rightarrow$

Lösung mit Hilfe des charakteristischen Ansatzes:  $F(\varphi) = a \cdot \exp(i \cdot b \cdot \varphi) \Rightarrow$  3.2.2

$u^2 > 1$ :  $b^2 = 1 / (u^2 - 1) \Rightarrow F_b(\varphi) = a_1 \cdot \cos(k \cdot x \mp \omega \cdot t) + a_2 \cdot \sin(k \cdot x \mp \omega \cdot t)$  mit

$$k = k_0 \cdot 1 / \sqrt{u^2 - 1} = 2\pi / \lambda, \quad \omega = \omega_0 \cdot u / \sqrt{u^2 - 1} = 2\pi \cdot f \Rightarrow \omega / \omega_0 = \sqrt{1 + k^2 / k_0^2} > 1$$

harmonische Wellen mit Dispersion für  $\omega > \omega_0$ :  $f_0 = \omega_0 / 2\pi = \text{Cutoff - Frequenz}$ ,  
normierte Eigenfrequenzen von stehende Wellen bei festem und losem Ende:

$$f_F / f_0 = \sqrt{1 + (\pi / k_0 \cdot (1/2 + n) / L)^2}, \quad f_L / f_0 = \sqrt{1 + (\pi / k_0 \cdot (1 + n) / L)^2} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

normierte Phasengeschwindigkeit:  $v_\varphi / c_0 = (\omega / k) / c_0 = \sqrt{1 + k_0^2 / k^2} > 1$ ,

normierte Gruppengeschwindigkeit:  $v_g / c_0 = (d\omega / dk) / c_0 = 1 / \sqrt{1 + k_0^2 / k^2} < 1$

mit der Beziehung:  $v_g / c_0 = c_0 / v_\varphi$ . 3.2.3

$u^2 < 1$ :  $b^2 = -1 / (1 - u^2) \Rightarrow F_u(\varphi) = a_1 \cdot \exp(-\varphi_{w\pm} / \sqrt{1 - u^2}) + a_2 \cdot \exp(+\varphi_{w\pm} / \sqrt{1 - u^2}) \Rightarrow$

$F_u$  wächst für  $t \rightarrow \pm\infty$  unbeschränkt und ist daher keine physikalisch mögliche Lösung.

$u^2 \leq 1$ : Neuer Ansatz (Trennung der Variablen):  $\Phi = F(k_0 \cdot x) \cdot G(\omega \cdot t)$ ,  $\omega = \omega_0 \cdot u \Rightarrow$  3.2.4

$$G \cdot F'' = u^2 \cdot F \cdot G'' + F \cdot G \Rightarrow G'' / G = (F'' / F - 1) \cdot 1 / u^2 = \text{const} = -1 \Rightarrow$$

$G(\omega \cdot t) = a_1 \cdot \cos(\omega \cdot t) + a_2 \cdot \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow$  harmonische Schwingung mit  $\omega$  und

$$F(k_0 \cdot x) = d_1 \cdot \exp(k_0 \cdot x \cdot \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2}) + d_2 \cdot \exp(-k_0 \cdot x \cdot \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2}) \Rightarrow$$

zusätzlich örtlich synchron mit exponentiell variierender Amplitude,  $\omega \leq \omega_0$ .

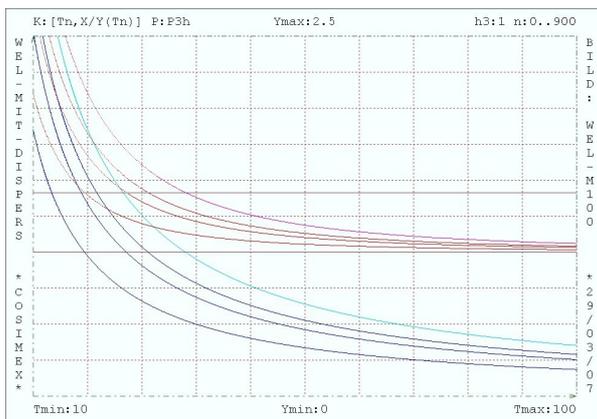
1. Lösung bei harmonischer Anregung und festem Ende (s. Gl. 3.1.2): 3.2.5

$$\Phi_f(x, t) = \sinh(k_0 \cdot (L - x) \cdot \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2}) / \sinh(k_0 \cdot L \cdot \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2}) \cdot \cos(\omega \cdot t),$$

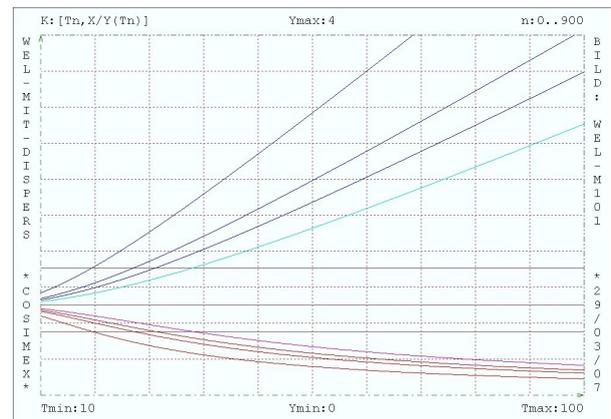
2. Lösung bei harmonischer Anregung und losem Ende (s. Gl. 3.1.2):

$$\Phi_l(x, t) = \exp(-k_0 \cdot x \cdot \sqrt{1 - \omega^2 / \omega_0^2}) \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Wie sich aus den Ableitungen in 3.2.1 und 3.2.2 ergibt, liefert  $\omega_0$  (s. Kap. 2.1. und Tab. 1 in Kap. 3.) physikalisch eine untere Schranke  $f_0$  für die Ausbreitung von harmonischen Klein-Gordon Wellen mit der Frequenz  $f$ . Daher ist die Bezeichnung Cutoff-Frequenz für  $f_0$  (engl.: abgeschnitten) jetzt verständlich. Unterhalb der Cutoff-Frequenz ist dagegen nur eine synchrone harmonische Schwingung der gesamten Pendelkette und keine harmonische Welle realisierbar. In diesem Falle lässt sich die Amplitude der Schwingung örtlich in Form einer Überlagerung von zwei Exponentialfunktionen darstellen (s. 3.2.4). Im Gegensatz zu den in Kap. 3.1. diskutierten klassischen Wellen tritt jetzt aber bei den Klein-Gordon Wellen Dispersion auf. Dabei wächst die Wellenzahl  $k$  nicht proportional zur Kreisfrequenz  $\omega$  bzw. Frequenz  $f$  (s. 3.2.2), wie dies für klassische Wellen gültig ist (s. 3.1.1). Dies hat zur Folge, dass die Phasengeschwindigkeit immer größer und die Gruppengeschwindigkeit immer kleiner als die Geschwindigkeit  $c_0$  sind und sich umgekehrt proportional zueinander verhalten.

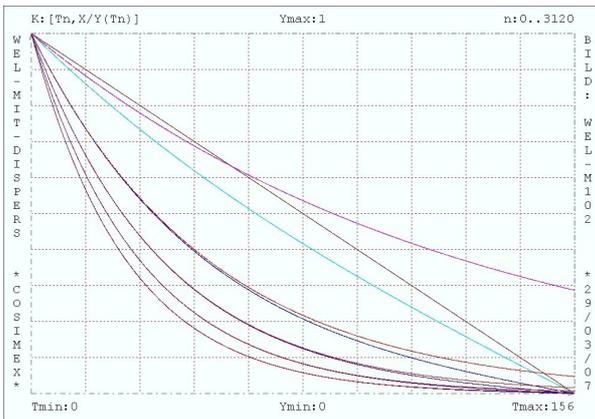


**Abb. 11:** Vergleich zwischen der normierten Frequenz  $f/f_0$  bzw. Winkelfrequenz  $\omega/\omega_0$  von harmonischen Klein-Gordon Wellen (margenta und rote Kurven) und der von klassischen harmonischen Wellen (grünblau und blaue Kurven) im Wertebereich  $[0,2.5]$  als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  [cm]:  $[10,100]$  für die realisierten Cutoff-Wellenlängen  $\lambda_0$  [cm] aus Tab. 1: 35.2 (erste Farbe), 29.0, 25.4, 18.5 (zweite Farbe). Am Schnittpunkt einer Kurve mit der braunen Geraden gilt  $\lambda = \lambda_0$  (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_M100.PA1)

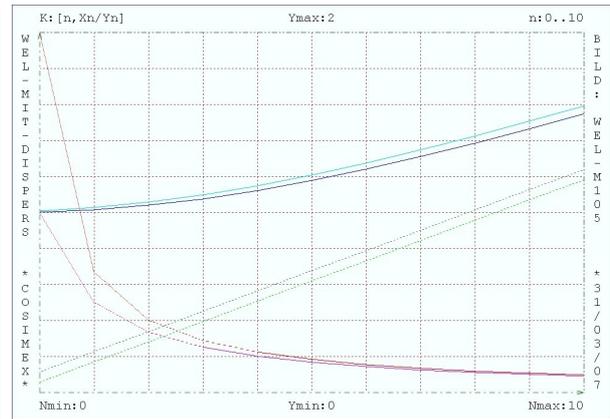


**Abb. 12:** Normierte Phasengeschwindigkeit  $v_p/c_0$  (grünblaue und blaue Kurven) und normierte Gruppengeschwindigkeit  $v_g/c_0$  (margenta und rote Kurven) von harmonischen Klein-Gordon Wellen im Wertebereich  $[0,4.0]$  als Funktion der Wellenlänge  $\lambda$  [cm]:  $[10,100]$  für die realisierten Werte der Cutoff-Wellenlänge  $\lambda_0$  [cm] aus Tab. 1: 35.2 (erste Farbe), 29.0, 25.4, 18.5 (zweite Farbe). Am Schnittpunkt einer Kurve mit den braunen Geraden gilt  $\lambda = \lambda_0$  (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_M101.PA1)

Diese modifizierten Beziehungen sind in den Abb. 11 und 12 für die vier in Tab. 1 angegebenen Werte der realisierten Wellenmaschine dargestellt. Wie aus Abb. 11 zu erkennen ist, werden die Abweichungen zwischen harmonischen Klein-Gordon und klassischen Wellen um so größer, je größer die Wellenlänge oder je kleiner die Wellenzahl ist. Maximale Unterschiede werden direkt oberhalb der Cutoff-Frequenz oder völlig andere Phänomene auch unterhalb davon zu beobachten sein. Dies hat ebenfalls Auswirkungen auf die Ausbreitung eines Wellenpakets, das für klassische harmonische Wellen in Abb. 8 dargestellt wurde und dessen Form sich während seiner Ausbreitung nicht verändert. Wie aus Abb. 12 folgt, wird ein Klein-Gordon Wellenpaket wegen der zunehmend größeren Phasengeschwindigkeit und der immer geringer werdenden Gruppengeschwindigkeit breiter werden und schließlich völlig auseinanderfließen und dabei insgesamt immer mehr zur Ruhe kommen. Dieser Sachverhalt ist im Rahmen der Quantentheorie physikalisch von fundamentaler Bedeutung (z. B. für die Heisenberg'sche Unschärferelation, W. K. Heisenberg, 1901-1976).



**Abb. 13:** Normierte maximale Schwingamplitude entlang der Achse der Wellenmaschine ( $0 \leq x \leq L = 156$  cm) für die synchronen harmonischen Schwingungen unterhalb der Cutoff-Frequenz  $f_0$  bei festem (grünblaue und blaue Kurven) und losem Ende (margenta und rote Kurven) für die folgenden normierten Frequenzen  $f/f_0$ : 0.979, 0.984, 0.989 (zweite Farbe), 0.999 (erste Farbe) (Pendel ohne Zusatzmasse, s. Tab. 1) (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_M102.PA1).



**Abb. 14:** Normierte Wellenlänge  $\lambda_n/2L$  (rote und margenta Kurve) und charakteristische Frequenzen  $f_n/f_0$  von stehenden Klein-Gordon (blaue und grünblaue Kurve) und klassischen Wellen (grüne und dunkelgrüne Kurve) bei festem (erste Farbe) und losem Ende (zweite Farbe) für die Grundschwingung ( $n = 0$ ) und die ersten zehn Oberwellen ( $n = 1,2,3,\dots,10$ ) bei harmonischer Anregung oberhalb der Cutoff-Frequenz  $f_0$  (Pendel ohne Zusatzmasse, s. Tab. 1) (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_M105.PA1).

Wegen der bereits genannten Eigenschaften von harmonischen Klein-Gordon Wellen können diese durch Vorgabe der bereits in Kap. 3.1. diskutierten Randbedingungen wie auch im klassischen Fall stehende Wellen erzeugen (s. Abb. 9 und 10). Grundsätzlich ist dies natürlich hier nur für Anregungsfrequenzen oberhalb der Cutoff-Frequenz möglich. Harmonische Anregungen unterhalb dieser charakteristischen Frequenz erzeugen dagegen ausschließlich synchrone harmonische Schwingungen aller Pendel der Wellenmaschine, wobei die Amplitude dieser Schwingungen örtlich exponentiell abklingt (s. 3.2.5). Dieser Sachverhalt wird in Abb. 13 sowohl für den Fall des festen als auch des losen Endes für die in Tab. 1 aufgeführten Parameterwerte ohne Zusatzmasse dargestellt. Wie die Ergebnisse zeigen, wirkt sich die Randbedingung am Ende der Pendelkette im wesentlichen nur dann auf den Kurvenverlauf aus, wenn die Erregerfrequenz höchstens minimal ( $[f_0 - f]/f_0 < 1\%$ ) unterhalb der Cutoff-Frequenz liegt. Bei größeren Abweichungen unterscheiden sich die beiden Kurven praktisch nicht mehr. Mit geringer werdender Erregerfrequenz fällt die Amplitude örtlich immer stärker ab, so dass sich die Störung nur in unmittelbarer Nähe des Anfangs der Pendelkette bemerkbar macht. Dieser Effekt ist nicht mit der Dämpfung einer Schwingung zu verwechseln, obwohl die Graphen ein ähnliches Aussehen besitzen. In Abb. 14 werden für die beiden genannten Randbedingungen die charakteristischen Frequenzen und die dazu gehörigen normierten Wellenlängen berechnet, die sich für Klein-Gordon und für klassische Wellen als Funktion der Ordnungszahl  $n$  (Grund- und Oberschwingungen) ergeben (s. 3.1.2 und 3.2.2). Wie zu erwarten war, treten überall im untersuchten Parameterbereich große Differenzen bei den charakteristischen Eigenfrequenzen von Klein-Gordon und klassischen stehenden Wellen auf, die ihren maximalen Wert in der Nähe der Cutoff-Frequenz erreichen. Weiter ist zu erkennen, dass die Erregerfrequenz sehr genau einzustellen und konstant zu halten ist, wenn experimentell die Eigenschwingungen von Klein-Gordon Wellen demonstriert werden sollen.

### 3.3. Kink- und Anti-Kink-Solitonen – Beschreibung durch die Sinus-Gordon Gleichung

Nachdem es in den Kap. 3.1. und 3.2. gelungen ist, für zwei einfachere Untergruppen von Wellenphänomenen, nämlich für die klassischen und Klein-Gordon Wellen, analytische Lö-

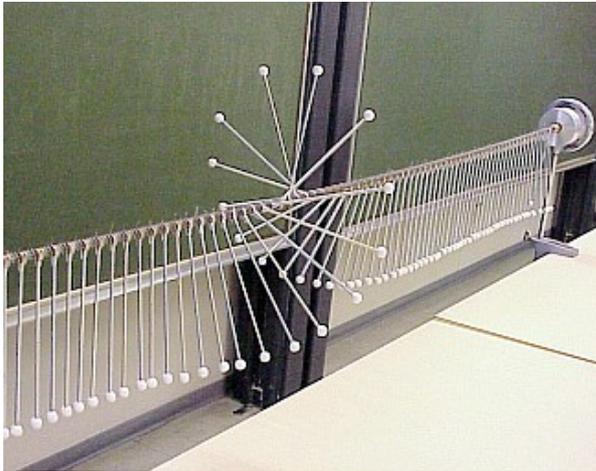
sungsfunktionen abzuleiten, soll jetzt die eigentliche Problemstellung untersucht werden, nämlich typische Lösungen der nichtlinearen Sinus-Gordon Gleichung zu finden (s. 2.1.1 und 2.1.2). Dabei gilt das primäre Interesse wellenartigen Lösungsfunktionen, deren Funktionswerte und Ableitungen im Unendlichen nicht divergieren und die möglichst einfach analytisch darstellbar sind. Diese Forderungen sind in der Regel bei partiellen Differentialgleichungen nur äußerst selten zu erfüllen, zumal eine fundamentale Eigenschaft der bisher diskutierten Lösungen, nämlich die Gültigkeit des Superpositionsprinzips, hierbei entfällt, so dass meistens komplexe numerische Verfahren oder nicht elementare Transformationen [10,12] angewendet werden müssen. Fachdidaktisch ist es also als Glücksfall anzusehen, dass für die hier betrachtete Phänomengruppe das aufgestellte Ziel fast elementar erreicht werden kann, wie die Ableitungen in 3.3.1 zeigen. Dabei ist weiter von Vorteil, dass dazu im wesentlichen die gleiche Methode [9,10,14,15] benutzt werden kann, die auch in den beiden bisher betrachteten Fällen zum Erfolg geführt hat. Zusammen mit der relativ einfachen experimentellen Realisierbarkeit erhält das vorgeschlagene Verfahren damit exemplarischen Charakter für die Einführung und Behandlung nichtlinearer Wellenphänomene. Dazu trägt auch wesentlich bei, dass solitäre Wellen mittlerweile in fast allen klassischen Gebieten der Physik, aber auch in Quantensystemen bekannt wurden oder Gegenstand der aktuellen Forschung sind [10,11,12].

Eindimensionale Sinus - Gordon Gleichung für die skalare Größe  $\Phi(x, t)$  mit  $c_0, \omega_0 > 0$ : 3.3.1  
 $c_0^2 \cdot \delta^2 \Phi / \delta x^2 = \delta^2 \Phi / \delta t^2 + \omega_0^2 \cdot \sin(\Phi)$  oder normiert:  $\delta^2 \Phi / \delta X^2 = \delta^2 \Phi / \delta T^2 + \sin(\Phi)$ .  
 Mit dem Ansatz in Form einer Welle:  $\varphi_{w\pm} = X \mp u \cdot T$ ,  $\Phi(X, T) = F(\varphi_{w\pm}) = F(X \mp u \cdot T) \Rightarrow$   
 $d^2 F / d\varphi_{w\pm}^2 \cdot (1 - u^2) = \sin(F)$ , durch Multiplikation mit  $F' = dF / d\varphi_{w\pm}$ , Integration und mit  
 $F = F_\infty = 0$ ,  $F' = F'_\infty = 0$  für  $\varphi_{w\pm} \rightarrow \pm\infty \Rightarrow (1 - u^2) / 2 \cdot F^2 = c - \cos(F)$  mit  $c = 1$  und  $0 \leq u < 1 \Rightarrow$   
 $F' = \pm \sqrt{2 / (1 - u^2) \cdot (1 - \cos(F))}$  oder  $dF / \sqrt{2 \cdot (1 - \cos(F))} = \pm d\varphi_{w\pm} / \sqrt{1 - u^2} \Rightarrow$  Integration mit  
 $F_0 = F(\varphi_{w\pm 0})$ :  $\ln(\tan(F / 4)) = \pm (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0}) / \sqrt{1 - u^2}$  mit  $\tan(F_0 / 4) = 1$ ,  $F_0 = \pi \cdot (1 \pm 4 \cdot n) \Rightarrow$   
 1. Lösung: Kink - Soliton:  $F_{S+}(\varphi_{w\pm}) = 4 \cdot \arctan(\exp(1 / \sqrt{1 - u^2} \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0})))$  für  $[0, 2\pi]$  und  
 2. Lösung: Antikink - Soliton:  $F_{S-}(\varphi_{w\pm}) = 4 \cdot \arctan(\exp(-1 / \sqrt{1 - u^2} \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0})))$  für  $[2\pi, 0]$   
 mit der Phasengeschwindigkeit:  $v_\varphi = \omega / k = u \cdot c_0$ .  $0 \leq u < 1$ , die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$   
 ist undefiniert, weil das Superpositionsprinzip hier ungültig ist, mit  $\gamma = 1 / \sqrt{1 - (v_\varphi / c_0)^2} \Rightarrow$   
 1. Kink - Soliton:  $F_{S+}(\varphi_{w\pm}) = 4 \cdot \arctan(\exp(\gamma \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0})))$  für  $[0, 2\pi]$  und  
 2. Antikink - Soliton:  $F_{S-}(\varphi_{w\pm}) = 4 \cdot \arctan(\exp(-\gamma \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0})))$  für  $[2\pi, 0]$

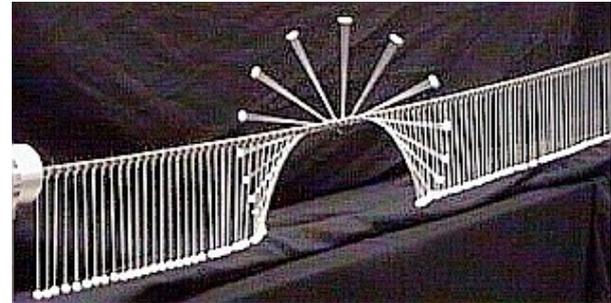
Wie die im einzelnen in 3.3.1 angegebenen Schritte [20] zeigen, lassen sich zuerst einmal zwei analytisch darstellbare Lösungen der Sinus-Gordon Gleichung finden, die als Kink- bzw. Anti-Kink-Soliton (eng. kink: Schleife, Knick) bezeichnet werden. Dabei handelt es sich um zwei lokalisierte, solitäre Wellen, die sich durch das Vorzeichen bzw. den Drehsinn der Pendel bezogen auf die Ausbreitungsrichtung der Welle unterscheiden (s. auch Abb. 4). Während der axiale Vektor der Winkeländerung des Kink-Solitons in Richtung der Wellenausbreitung angeordnet ist (Rechte-Hand Regel oder Schraube mit Rechtsgewinde), sind diese Größen beim Anti-Kink-Soliton entgegengesetzt ausgerichtet (Linke-Hand Regel oder Schraube mit Linksgewinde). Dieser Sachverhalt ist in den Abb. 15 und 16 gut aus den schräg von hin-

20 Stöcker, H. (Hrsg.): Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Harri Deutsch, Frankfurt, 4. Aufl., 2003.

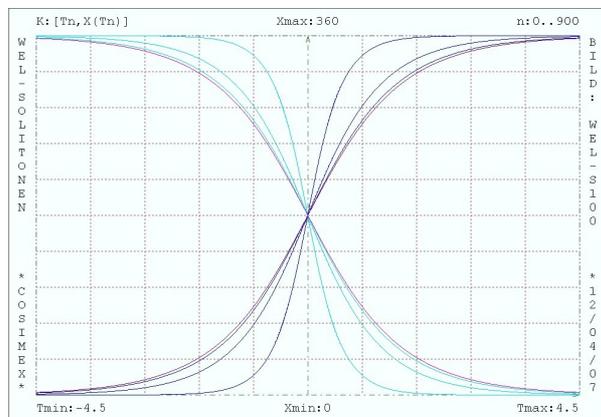
ten festgehaltenen Momentaufnahmen aus Videoclips [21] eines Kink- bzw. Anti-Kink-Solitons bei ihrer Ausbreitung auf der Feder-Pendel-Kette zu erkennen. Zusätzlich sind in Abb. 17 für einige charakteristische Werte von  $u$  die Drehwinkel eines Pendels als Funktion der Phase  $\varphi_{w\pm}$  dargestellt.  $u$  stellt dabei den Betrag der auf  $c_0$  normierten Phasengeschwindigkeit der Solitonen dar, die hier mit ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit übereinstimmt. Die Gruppengeschwindigkeit verliert dabei ihren Sinn, weil das Superpositionsprinzip in nichtlinearen Systemen ungültig und daher nicht anwendbar ist.



**Abb. 15:** Momentaufnahme der Ausbreitung eines Anti-Kink-Solitons entlang der Feder-Pendel-Kette von links nach rechts (Anwendung der Linken-Hand Regel: Daumen zeigt in die Bewegungsrichtung des Solitons, andere Finger zeigen die Drehrichtung der Pendel an (s. Kap. 4.3.: z. B. Bild aus Videoclip SolAKiH1.AVI).



**Abb. 16:** Momentaufnahme der Ausbreitung eines Kink-Solitons entlang der Feder-Pendel-Kette von links nach rechts (Anwendung der Rechten-Hand Regel: Daumen zeigt in die Bewegungsrichtung des Solitons, andere Finger zeigen die Drehrichtung der Pendel an (s. Kap. 4.3.: Bild aus Videoclip SolKinH1.AVI).



**Abb. 17:** Drehwinkel  $\Phi$  von Kink- (violette, blaue Kurven) und Anti-Kink-Solitonen (magenta und grünblaue Kurven)  $[0^\circ, 360^\circ]$  als Funktion der Phase  $\varphi_{wz}$   $[-4.5, +4.5]$  für die normierten Geschwindigkeiten  $u$ : 0 (1. Farbe), 0.31, 0.62, 0.93 (2. Farbe) (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_S100.PA1, WEL\_S300.PA3).

Wie 3.3.1 zeigt, kann die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Grenzfall höchstens gleich  $c_0$  (s. Tab. 1, Kap. 3.1.) werden. Dabei entartet die Lösungsfunktion zu einer Heaviside'schen Sprungfunktion (O. Heaviside, engl. Ingenieur, 1850-1925) der Winkelauslenkung [20] (ähnlich wie beim Druck, der Temperatur oder der Dichte einer mechanischen Stoßwelle in einem gasförmigen Medium). Da in diesem Falle die bei der Ableitung der Sinus-Gordon-Gleichung als kontinuierliche Näherung der Grundgleichungen gemachten Annahmen nicht mehr erfüllt sein können, lässt sich natürlich dieser Grenzfall mit der Wellenmaschine ohne bleibende Veränderungen oder gar Zerstörungen nicht demonstrieren. Auf jeden Fall wirkt aber  $c_0$ , ähnlich wie die Vakuumlichtgeschwindigkeit bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, als obere Schranke für die Ausbreitung der hier untersuchten solitären Wellen. Andererseits kann  $u$  aber auch den Wert null annehmen, so dass im Vergleich mit klassischen Wellen auch ein Soliton im Ruhezustand existieren kann und eine bleibende Auslenkung bei verschwindender Phasengeschwindigkeit übrig bleibt, die wir später physikalisch als Ruheenergie eines Teilchens oder Antiteilchens interpretieren werden (s. 3.3.2).

21 Lee, A.: VirtualDub - Windows-Programm, stabile Version 1.7.1, ©-1998-2007 (Free Software, GNU-Lizenz). <http://www.virtualdub.org/index>

Nachdem nun analytische Lösungen der Sinus-Gordon Gleichung bekannt sind, können jetzt davon abhängige Parameter bestimmt werden (s. auch Kap. 2.1. und 2.2.). Von Interesse sind dabei zuerst einmal die Projektion der Pendelpunkte auf eine vertikale Ebene durch die gemeinsame Achse aller Pendel (x-z-Ebene bei konstantem Abstand der Punkte von der Pendelachse L, s. Abb.4 und Tab. 1), weil diese Koordinatengrößen mit Hilfe einer senkrecht zur Achse, in größerer Entfernung angebrachten Videokamera leicht aufgenommen und anschließend die mit Hilfe geeigneter Programme ermittelten experimentellen Werte als Funktion der Ortskoordinate x bzw. der Zeit t mit den theoretischen Graphen verglichen werden können [22, 23]. Weiter sind natürlich die verschiedenen Energiebeiträge eines Pendels zu seiner aktuellen Energie sowie zur Gesamtenergie eines Solitons von Bedeutung. Dafür ergeben sich im Einzelnen unter Verwendung von Formeln aus [20] folgende Beziehungen:

Projektion der Kink - Solitonen  $\Phi(\varphi_{w\pm})$  auf die x - z - Ebene (L = Kugelabstand): 3.3.2

$$Z(\varphi_{w\pm}) = z(\varphi_{w\pm}) / L = 1 - \cos(\Phi(\varphi_{w\pm})) = 2 / \cosh^2(\gamma \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0}))$$

{Herleitung unter Verwendung der Formeln [20]:  $\cos(4 \cdot x) = 1 - 8 \cdot \cos^2(x) + 8 \cdot \cos^4(x)$

und  $\cos(x) = 1 / \sqrt{1 + \tan^2(x)}$  }  $\Rightarrow$  mit  $\varphi_{w\pm 0} = 0$

1. für t = 0:  $Z(X) = 2 / \cosh^2(\gamma \cdot X)$  mit  $Z(0) = Z_{\max} = 2$  und  $Z(\pm\infty) = Z_{\min} = 0 \Rightarrow$

$$\text{Halbwertsbreite: } \Delta X = k_0 \cdot \Delta x \text{ für } Z(\Delta X / 2) = 1 \Rightarrow \Delta X = \text{arccosh}(\sqrt{2}) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - (v_\varphi / c_0)^2} \Rightarrow$$

$$\Delta x = \Delta x_0 \cdot \sqrt{1 - (v_\varphi / c_0)^2} \text{ mit } k_0 \cdot \Delta x_0 = 2 \cdot \ln(1 + \sqrt{2}) = 1.762747 \text{ für ruhendes Soliton.}$$

2. für x = 0, Ausbreitung in Richtung der +x - oder -x - Achse:  $Z(T) = 2 / \cosh^2(\gamma \cdot u \cdot T)$

mit  $Z(0) = Z_{\max} = 2$ ,  $Z(\mp\infty) = Z_{\min} = 0 \Rightarrow$  Vorbeiflugzeit:  $\Delta T = \omega_0 \cdot \Delta t$  für  $Z(\Delta T / 2) = 1 \Rightarrow$

$$\Delta T = \text{arccosh}(\sqrt{2}) \cdot 2 \cdot \sqrt{1 / u^2 - 1} = 2 \cdot \ln(1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{(c_0 / v_\varphi)^2 - 1} = 1.762747 \cdot \sqrt{(c_0 / v_\varphi)^2 - 1}$$

Energie des n. Pendels  $E_{Pn} = E_R + E_G + E_F$ , des Kinksolitons  $E_S = \sum E_{Pn} \rightarrow \int (E_{Pn} / a) \cdot dx$ :

1. Rotationsenergie =  $E_R = 1 / 2 \cdot J \cdot (d\Phi_n / dt)^2 \rightarrow 1 / 2 \cdot J \cdot \omega_0^2 \cdot u^2 \cdot (d\Phi / d\varphi_{w\pm})^2 =$  3.3.3

$$J \cdot \omega_0^2 \cdot (1 - \cos\Phi) \cdot u^2 / (1 - u^2) = E_N \cdot (1 - \cos\Phi) \cdot u^2 / (1 - u^2) \text{ mit } E_N = J \cdot \omega_0^2,$$

2. Gravitationsenergie:  $E_G = m \cdot g \cdot l \cdot \{1 - \cos(\Phi_n)\} \rightarrow E_N \cdot (1 - \cos\Phi)$ ,

3. Federenergie:  $E_F = 1 / 2 \cdot D \cdot a^2 \cdot \{([\Phi_{n+1} - \Phi_n] / a)^2 + ([\Phi_n - \Phi_{n-1}] / a)^2\} / 2 \rightarrow$

$$1 / 2 \cdot D \cdot a^2 \cdot (\delta\Phi / \delta x)^2 = 1 / 2 \cdot J \cdot \omega_0^2 \cdot (d\Phi / d\varphi_{w\pm})^2 = E_N \cdot (1 - \cos\Phi) / (1 - u^2),$$

4.  $E_{Pn} = J \cdot \omega_0^2 \cdot (1 - \cos\Phi) \cdot 2 / (1 - u^2) = 4 \cdot \gamma^2 \cdot J \cdot \omega_0^2 / \cosh^2(\gamma \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0})) = 2 \cdot E_F$

und mit  $E_R + E_G = E_F$ .

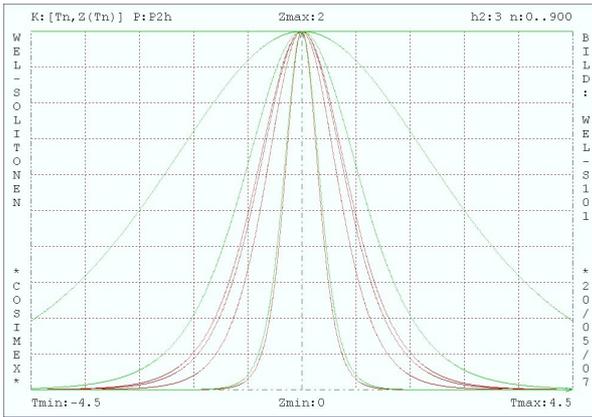
5.  $E_S = 4 \cdot \gamma^2 \cdot J \cdot \omega_0 \cdot c_0 / a \int_{-\infty}^{+\infty} 1 / \cosh^2(\gamma \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0})) \cdot d\varphi_{w\pm} = 4 \cdot \gamma \cdot J \cdot \omega_0 \cdot c_0 / a \cdot$

$$|\tanh(\gamma \cdot (\varphi_{w\pm} - \varphi_{w\pm 0}))|_{-\infty}^{+\infty} = \gamma \cdot 8 \cdot J \cdot k_0 / a \cdot c_0^2 = 8 \cdot J \cdot k_0 / a \cdot c_0^2 / \sqrt{1 - (v_\varphi / c_0)^2} =$$

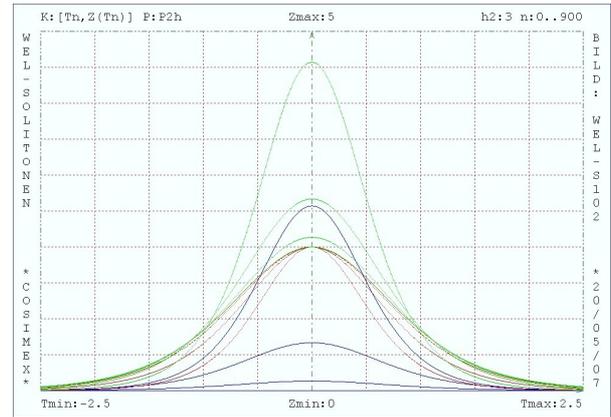
$$E_S = m_{S0} \cdot \gamma \cdot c_0^2 = m_S \cdot c_0^2 \text{ mit } m_{S0} = 8 \cdot J \cdot k_0 / a = \text{Ruhemasse und } m_S = \text{Masse des Solitons}$$

22 Conrad, H.-G. u. H.-J. Patt: Messung, Darstellung und Auswertung der Bahnkoordinaten eines Körpers bei ebenen Bewegungen mit Hilfe einer Videokamera und eines PCs. 90. Hauptversammlung der MNU, S.79, MNU Tagungsbericht, Saarbrücken, 1999.

23 Kersting, Th., W. Hahn, V. Nordmeier, H.-J. Schlichting: „Viana 364“ Automatische VideoANalyse, Vers. 3.64, Freeware (nicht kommerziell), Uni Essen, Essen, 2003 (<http://didaktik.physik.uni-essen.de/viana>).



**Abb. 18:** Darstellung der normierten Projektion der Pendelausschläge  $z/L$   $[0,2]$  auf die vertikale Ebene durch die allen Pendeln gemeinsame Achse 1. zum Zeitnullpunkt als Funktion der normierten Ortskoordinate  $X$   $[-4.5,+4.5]$  (rote Kurven) und 2. am Koordinatennullpunkt als Funktion der normierten Zeit  $T$   $[-4.5,+4.5]$  (grüne Kurven) für verschiedene Parameterwerte der normierten Solitonengeschwindigkeit  $u = v_\varphi/c_0$ : 0.0, 0.31, 0.62, 0.93 (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_S101.PA1, WEL\_S300.PA3).



**Abb. 19:** Darstellung der normierten Energieanteile des  $n$ . Pendels  $[0,5]$ :  $E_G/E_N$  = Gravitationsenergie (rote Kurven),  $E_R/E_N$  = Rotationsenergie (blaue Kurven) und  $E_F/E_N$  = Federenergie (grüne Kurven) zum Zeitnullpunkt als Funktion der normierten Ortskoordinate  $X$   $[-2.5,+2.5]$  für verschiedene Parameterwerte der normierten Solitonengeschwindigkeit  $u = v_\varphi/c_0$ : 0.0, 0.31, 0.62, 0.93. Die Gesamtenergie entspricht dabei der doppelten Federenergie. (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_S102.PA1, WEL\_S301.PA3).

Wie die Ergebnisse aus 3.3.2 und ihre Graphen in Abb. 18 zeigen, ist die örtliche Ausdehnung eines Kink- oder Anti-Kink-Solitons im Ruhezustand am größten ( $u = 0$ ). Sie verkleinert sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit und verschwindet im Grenzfall  $u \rightarrow 1$ . Als Maß für die örtliche Solitonenbreite kann die Halbwertsbreite  $\Delta X$  dienen, also der Abstand zwischen den beiden Stellen, an denen der Winkelausschlag der Pendel jeweils  $\pm 90^\circ$  beträgt. Die Ruhelänge nimmt dabei einen Wert von  $\Delta X_0 = 1.762747$  oder  $\Delta x_0 = \Delta X_0/k_0$  an. An dieser Stelle wird deutlich, wie in Kap. 3. aus der Ruhelänge der Parameter  $k_0$  und damit nach 3.1 das Direktionsmoment der Feder  $D$  in Tab. 1 berechnet wurde. Die zweite Kurvenschar in Abb. 18 demonstriert die Zeitabhängigkeit der Projektion eines Solitons beim Vorbeiflug an einem festen Beobachtungsort für typische Werte der Solitonengeschwindigkeit. Eine charakteristische Vorbeiflugzeit lässt sich als zeitliche Solitonenbreite in ähnlicher Weise definieren wie bei der örtlichen Solitonenbreite. Diese divergiert natürlich bei einem ruhenden Soliton, da sich der lokale Winkelausschlag dabei nicht verändert, und verschwindet für  $u \rightarrow 1$ .

Die Energie eines Pendels setzt sich additiv aus seiner Rotationsenergie, seiner potentiellen Energie im Schwerfeld und aus den potentiellen Energien der beiden halben Schraubenfedern auf beiden Seiten des Pendels zusammen. Wie 3.3.3 und Abb. 19 zeigen, weisen die genannten Energieformen für jeden festen Zeitpunkt grundsätzlich die gleiche Abhängigkeit von der Ortskoordinate auf. Dabei entspricht die Gesamtenergie der doppelten Federenergie. Die Federenergie muss deshalb auch der Summe aus Rotationsenergie und Gravitationsenergie entsprechen. Die Gesamtenergie eines Kinksolitons entspricht natürlich der Gesamtsumme aller Pendelenergien und kann deshalb aus den genannten Teilenergien berechnet werden. Diese Berechnung lässt sich, wie bereits in 2.1.2 gezeigt wurde, wesentlich vereinfachen, wenn der Übergang von der diskreten zu kontinuierlichen Darstellung dazu verwendet wird. Die durchzuführende Integration lässt sich analytisch bestimmen oder bestätigen.

Bei näherer Betrachtung der Formel für die Halbwertsbreite der Solitonen fällt auf, dass sie

die gleiche Abhängigkeit von der Solitonengeschwindigkeit aufweist wie die Formel für die Längenkontraktion eines Stabes in der speziellen Relativitätstheorie [24, 25]. Dabei entspricht die Halbwertsbreite des Solitons der Länge des Stabes, seine Ausbreitungsgeschwindigkeit der Relativgeschwindigkeit zwischen den beiden betrachteten Inertialsystemen und die Grenzgeschwindigkeit  $c_0$  der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Länge für einen im Eigensystem des Stabes ruhenden Beobachter weist dabei den größten Wert, die so genannte Eigenlänge des Stabes, auf und erscheint für jeden dagegen gleichförmig bewegten Beobachter entsprechend verkleinert. Eine weitere interessante Aussage kann aus der Darstellung der Solitonenergie in 3.3.3 gewonnen werden. Wenn dem Soliton eine träge Ruhemasse  $m_{S0}$  bzw. Masse  $m_S$  von der dort angegebenen Größe zugeordnet wird, dann erhält man in voller Analogie zur speziellen Relativitätstheorie die berühmte Formel von Einstein für die Ruheenergie bzw. Energie eines relativistischen Teilchens [26], wenn die Grenzgeschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum korrespondiert. Dies gilt dann natürlich auch für die Darstellung des Impulses dieses Teilchens. Da sich bei ansonsten gleichen Parametern die Energie von einem Kink- bzw. einem Anti-Kink-Soliton nicht unterscheiden, liegt die Vermutung nahe, dass die betrachteten Solitonen als Modell für ein relativistisches Teilchen und sein Antiteilchen [27, 28] verwendet werden können. Die genannten Beziehungen beruhen eigentlich darauf, dass die Sinus-Gordon-Differentialgleichung invariant gegenüber einer Lorentztransformation [9, 10, 15, 24, 25] ist. Dies kann leicht nachgewiesen werden, indem die entsprechenden Orts- und Zeittransformationen in die partielle Differentialgleichung 2.1.2 bzw. 2.1.3 eingesetzt werden. Fachdidaktisch ist dabei von besonderer Bedeutung, dass die charakteristische Grenzgeschwindigkeit für die Wellenmaschine durch geeignete Wahl der übrigen Parameter so klein gewählt werden kann, dass die wichtigsten Effekte unter den genannten Einschränkungen leicht bei Demonstrationsexperimenten zu beobachten und zu messen sind. In der folgende Tabelle sind in Erweiterung zur Tab. 1 in Kap. 3. alle relevanten Parameter der Wellenmaschine als Grundlage für die später noch zu beschreibenden Experimente zusammengestellt.

Größe	Einheit	ohne Zusatzmasse	mit 1. Zusatzmasse	mit 2. Zusatzmasse	mit 3. Zusatzmasse
<b>m</b>	[g]	<b>8.25</b>	<b>9.69</b>	<b>11.36</b>	<b>16.47</b>
<b><math>\omega_0</math></b>	[s <sup>-1</sup> ]	<b>9.82</b>	<b>9.31</b>	<b>9.04</b>	<b>8.49</b>
<b><math>c_0</math></b>	[cm · s <sup>-1</sup> ]	<b>55.0</b>	<b>42.9</b>	<b>36.6</b>	<b>25.0</b>
<b><math>k_0</math></b>	[cm <sup>-1</sup> ]	<b>0.179</b>	<b>0.217</b>	<b>0.247</b>	<b>0.340</b>
<b><math>\Delta x_0</math></b>	[cm]	<b>9.8</b>	<b>8.1</b>	<b>7.1</b>	<b>5.2</b>
<b><math>m_{S0}</math></b>	[g]	<b>386</b>	<b>771</b>	<b>1202</b>	<b>3555</b>
<b><math>m_{S0} \cdot c_0^2</math></b>	[N · m]	<b>0.117</b>	<b>0.142</b>	<b>0.137</b>	<b>0.222</b>

**Tab. 2:** Übersicht über charakteristische Parameterwerte zur Beschreibung von Kinksolitonen auf der entwickelten Wellenmaschine ohne und mit drei unterschiedlichen Pendelzusatzmassen

24 Nemeč, P. u. H.-J. Patt: Relativistisches Ray-Tracing auf dem Personalcomputer. S. 379-384 in: Didaktik der Physik - Vorträge -, 60. Physikertagung, Jena 1996. Hrsg.: DPG, Fried.-Schiller-Universität, Jena, 1996.

25 Patt, H.-J. u. P. Nemeč: Relativity for Windows. Programmpaket für PCs mit dem Betriebssystem Windows 3.x, 9x, NT 4.0, XP in der Programmiersprache Borland-C++, erweiterte Version 1.0, Sprache: Englisch-Deutsch, umschaltbar, mit Help Files – Hilfedateien (52 S.), mit Tutorial – Tutorium (55 S.) und 160 Parameterdateien, ISBN-Nr. 3-540-14735-7, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2000.

26 Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. 17, 891, 1905.

27 Dmitriyev, V. P.: Towards an exact mechanical analogy of particles and fields. Nuovo Cimento, 111A, 5, 501-511, 1998.

28 Dmitriyev, V. P.: Mechanical analogies for the Lorentz gauge, particles and antiparticles. Apeiron, 7, 3/4, 173-183, 2000.

Abschließend sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, dass für die theoretische Beschreibung [8,10,12,27,28] noch vieler anderer Phänomene auf der Wellenmaschine (z. B. Stöße zwischen mehreren Solitonen mit unterschiedlichen Parametern oder auf einer Kette mit örtlich variierenden Eigenschaften, andere lokalisierte oder nichtlokalisierte Wellen wie Breather (engl. breath: Atem, Atemzug) oder helikale Wellen (engl. helical: spiralförmig)) analytische Lösungen gefunden wurden, die das Verständnis solcher Vorgänge sehr erleichtert haben. Da diese jedoch zunehmend immer anspruchsvollere und umfangreichere Ableitungen und Berechnungen erfordern, wird hier von einer weiteren theoretischen Betrachtung abgesehen und nur auf einige interessante Demonstrationen im folgenden Kapitel aufmerksam gemacht.

## **4. Demonstrationen und Experimente mit der nichtlinearen Wellenmaschine**

Im Folgenden werden charakteristische Experimente beschrieben, die zur Demonstration physikalischer Effekte von linearen und nichtlinearen Wellenphänomenen mit der entwickelten Wellenmaschine durchgeführt werden können. Parallel dazu wurden jeweils kurze Videosequenzen davon erstellt, die in den einzelnen Unterkapiteln beschrieben und in Kap. 6.2. in Gruppen zusammengefasst sind. Die Videoclips sind im entsprechenden Anhang zu dieser Arbeit [29] beigelegt. Ihre Ordnung orientiert sich an den theoretischen Erläuterungen aus Kap. 3. Auf einige Visualisierungen mit älteren Medienformaten, die zu diesem Problemkreis früher mit zum Teil großem Aufwand erstellt wurden, sei ausdrücklich hingewiesen [30,31].

Ein Problem, das bisher wegen seiner theoretischen Komplexität nicht behandelt wurde, muss aber vorher noch erwähnt werden, nämlich der Einfluss der Dissipation bei den Experimenten mit der Wellenmaschine. Zwar lassen sich für einige Spezialfälle [10] Erweiterungen der Sinus-Gordon Gleichung und analytische Lösungen davon ableiten, jedoch können diese nur sehr näherungsweise den wirklichen Einfluss der Haft-, Gleit- und Luftreibung erfassen. Wie noch an den Ergebnissen der Versuche mit Kink-Solitonen zu erkennen ist, wird sich die Reibung in den meisten Fällen in einer monotonen Verkleinerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit bemerkbar machen. Wie in Kap. 2. beschrieben wurde, wurde natürlich versucht, die verschiedenen Reibungsverluste der Wellenmaschine möglichst klein zu halten.

### **4.1. Quasi schwerefreie klassische Wellen**

Wie bereits in Kap. 3.1. festgestellt wurde, können die zahlreichen in der fachdidaktischen Literatur behandelten Experimente zur klassischen Wellengleichung am besten mit dafür speziell konstruierten Wellenmaschinen der Lehrmittelfirmen [18] durchgeführt werden. An dieser Stelle sei daher nur ein Experiment beschrieben, bei dem die entwickelte Wellenmaschine in vertikaler Anordnung mit einer kurzen manuellen Anregung am oberen Ende betrieben wird (s. Kap. 3.1.). Wie die Ergebnisse zeigen, ist aber dabei der Einfluss der zusätzlichen Störeffekte, die in der diskutierten Näherung nicht berücksichtigt wurden, so groß, dass die entwickelte Wellenmaschine unter den genannten Bedingungen zur Demonstration von Phänomenen mit klassischen Wellen nicht zu empfehlen ist.

**Versuch 1: Ausbreitung eines Pulses auf der Feder-Pendel-Kette in vertikaler Anordnung mit festen Enden bzw. einem losen Ende.** (Videoclip: WeLaPuS1.AVI und WeLaPuS2.AVI).

29 Dietrich, M. u. H.-J. Patt: Videoclips zur nichtlinearen Wellenmaschine. ©-2000, TeachPhysics, Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 2000/2007 (Auswahl in <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).

30 Genz, H., F. Staudemaier u. F. Kaiser: Solitonen. 16-mm-Film C1365, Inst. f. wissensch. Film (IWF), Göttingen, 1980.

31 Koppelman, G., N. Hensel, H. Rechner u. M. Totzeck: Quasiteilchen I: Pendelketten-Solitonen, II: Solitonen und Antisolitonen, III: Solitonen in Medien mit Störstellen und Grenzflächen. Super8-Filme, Inst. f. wissensch. Film (IWF), Göttingen, 1988 (DVD-Kopien, 2002-2005).

An Stelle der erwarteten Ausbreitung des Pulses auf der Kette und seiner Reflexion an ihren feststehenden Enden ohne Formänderung (keine Dispersion!) stellt sich nach mehreren Durchläufen mit zunehmender Verformung des Pulses ein stabiler Endzustand ein, der nicht mit dem Ruhezustand der horizontal angeordneten Wellenmaschine übereinstimmt. Stattdessen weist er ähnliche Eigenschaften auf wie eine Momentaufnahme einer stehenden Welle mit einer ganzen Wellenlänge, wobei aber die Wellenbäuche und Knoten eine deutliche Asymmetrie aufweisen. Wenn das obere Ende der Kette geöffnet wird, gleicht der Endzustand der einer stehenden Welle mit  $\frac{3}{4}$  einer Wellenlänge und entsprechender Asymmetrie (s. auch Abb. 9 und 10). Diese Effekte sind wohl darauf zurückzuführen, dass zum einen das Drehmoment der Federstücke im Ruhezustand bei der gewählten Versuchsanordnung im oberen Teil eine andere Richtung aufweist als im unteren und zum anderen sich die Reibungskräfte in vertikaler Richtung, bedingt durch die Gewichtskräfte der Pendel, ortsabhängig verändern, wobei natürlich zu berücksichtigen ist, dass der Haftreibungskoeffizient zwischen Achse und Pendelaufhängung den Gleitreibungskoeffizienten übertrifft.

## **4.2. Klein-Gordon-Wellen und -Schwingungen**

Hier werden Experimente vorgestellt, die die besonderen Eigenschaften von Wellen mit Dispersion gegenüber klassischen Wellen ohne Dispersion deutlich machen. Dazu werden die theoretischen Ergebnisse aus Kap. 3.2. herangezogen. Dabei wird zuerst die Ausbreitung von manuell angeregten Pulsen untersucht. Bei den anderen Experimenten erfolgt die Anregung in harmonischer Form (s. Abb. 7 in Kap. 2.2). Wegen der Existenz einer Cutoff-Frequenz (s. 3.2.2), die für die betrachtete Feder-Pendel-Kette ohne Zusatzmasse bei 1,56 Hz liegt (s. Tab. 1 in Kap. 3.), liefern Anregungen oberhalb und unterhalb dieser Frequenz unterschiedliche Ergebnisse. Hier werden im Einzelnen sowohl die erzeugten Schwingungen der Kette als Ganze, die Ausbreitung von harmonischen Wellen auf der Kette und die unteren Werte der Eigenschwingungen (stehende Wellen) demonstriert.

**Versuch 2: Ausbreitung eines Pulses auf der Feder-Pendel-Kette mit feststehenden Enden** (Videoclip: WeLaPu11.AVI und WeLaPu12.AVI).

Der Puls wird manuell in einem Zeitraum ausgelöst, der klein gegenüber der Schwingungszeit der Cutoff-Frequenz ist (641 ms). Während der Ausbreitung des Pulses auf der Kette und nach seiner Reflexion sind deutliche Änderungen seiner Form zu erkennen (Dispersion!). Zusätzlich macht sich natürlich die zwar kleine, aber nicht vernachlässigbare Dissipation in einer monotonen Verkleinerung der Maximalamplitude bemerkbar. Nach etwa drei bis vier Umläufen wird der erwartete Endzustand erreicht.

**Versuch 3: Ausbreitung eines Pulses auf der Feder-Pendel-Kette mit zwei unterschiedlichen Pendelmassen und feststehenden Enden** (Videoclip: WeLaPu21.AVI).

Der Puls wird an der Seite ausgelöst, an dem sich die Pendel mit einer Zusatzmasse befinden. Zunächst breitet sich der Puls bis zur Mitte der Kette ähnlich wie bei Versuch 2 aus, wenn die Anregungsfrequenzen oberhalb der Cutoff-Frequenz liegen. Da die Pendel auf der anderen Seite keine Zusatzmasse aufweisen, werden dabei nach Tab.1 und 3.2.2 bei gleicher Frequenz sowohl die auf die Grenzgeschwindigkeit bezogene Phasengeschwindigkeit als auch die entsprechende Wellenlänge jeder Teilwelle vergrößert. Da zusätzlich die Grenzgeschwindigkeit selbst ansteigt, führen beide Effekte zu einer deutlichen Verbreiterung des laufenden Pulses, einer größeren Phasengeschwindigkeit und demnach einer kleineren Gruppengeschwindigkeit (in Analogie zur Optik: Übergang vom optisch dünneren in ein optisch dichteres Medium). Natürlich kann die manuelle Anregung des Pulses auch auf der anderen Seite der Kette erfolgen. Durch Vergrößerung der Zusatzmasse können die Effekte verstärkt werden.

**Versuch 4: Einseitige harmonische Anregung von Wellen auf der Feder-Pendel-Kette mit einstellbarer Frequenz und fester Amplitude** (Videoclip: WeAnHa10.AVI).

Mit Hilfe der in Kap. 2.2. und Abb. 7 bereits beschriebenen Anordnung kann eine quasi har-

monische Anregung eines Endes der Feder-Pendel-Kette leicht durchgeführt werden. Unter den geschilderten Bedingungen wird dabei eine Amplitude der Schwingung des ersten Pendels von etwa  $\Phi(x=0,t)_{\max} = R_E/R_H = 1,01/4,25 = 0,238 \text{ rad} = 13,6^\circ$  erreicht ( $R_E$  = Radius des Exzenterantriebs,  $R_H$  = Radius des Handrades bis zur Mitte des Griffs). Dieser Wert erfüllt einerseits die für Klein-Gordon-Wellen vorgenommenen Näherungsannahmen (s. Kap. 3.2). und erlaubt andererseits die Demonstration aller relevanten Effekte. Die einstellbaren Frequenzen des geregelten Antriebsmotors müssen dabei sowohl Werte unterhalb als auch oberhalb der in Tab. 1 berechneten Cutoff-Frequenzen der Wellenmaschine liegen (ohne Zusatzmasse 1,56 Hz bzw. mit der 3. Zusatzmasse 1,35 Hz), damit sowohl Wellen als auch Schwingungen der Kette demonstriert werden können. Am besten wird für die Versuche ein genügend leistungsfähiger geregelter Experimentiermotor mit geeignetem Untersetzungsgetriebe<sup>[32]</sup> benutzt. Die Anregungsfrequenz kann mit Hilfe einer Stopuhr (20 Schwingungen) oder mit Hilfe des Programms VirtualDub [21] aus dem Videoclip ermittelt werden.

**Versuch 5: Ausbreitung von harmonisch angeregten Wellen auf der Feder-Pendel-Kette mit offenem Ende bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen oberhalb der Cutoff-Frequenz** (Videoclip: WeLaHa11.AVI, WeLaHa12.AVI, WeLaHa13.AVI, WeLaHa14.AVI).

Wie in Versuch 4 beschrieben wurde, werden hier harmonische Schwingungen mit folgenden Frequenzen an einem Ende der Kette erzeugt: 2,54 Hz, 2,84 Hz, 3,60 Hz, 3,68 Hz. Das andere Ende bleibt offen. Wie in Kap. 3.2. abgeleitet wurde, entstehen dadurch sich ausbreitende harmonische Wellen mit zunehmend kleinerer Wellenlänge. Gleichzeitig bewirken, wie zu erwarten ist, die Reibungskräfte eine ansteigende monotone Dämpfung der Welle. Die Phasengeschwindigkeit und die Wellenlänge der Welle können unter Verwendung eines Maßstabs der notwendigen Länge parallel zur Achse der Wellenmaschine mit geeignet angebrachten Lichtschranken und einer elektronischen Stopuhr [13] oder dem Programm VirtualDub [21] bestimmt werden. Im letzten Falle kann dazu die Option des Programms verwendet werden, die Bilder des Videoclips in einem beliebigen Teilabschnitt in Einzelbilder umzuwandeln, die dann entsprechend mit einem meist zur Verfügung stehenden Grafikprogramm ausgemessen werden können.

**Versuch 6: Ausbreitung von harmonisch angeregten Wellen auf der Feder-Pendel-Kette mit unterschiedlichen Pendelmassen und festem bzw. offenem Ende oberhalb der Cutoff-Frequenz** (Videoclip: WeLaHa21.AVI, WeLaHa31.AVI).

Im ersten Videoclip wird mit einer Frequenz von 3,05 Hz, also oberhalb der Cutoff-Frequenz, im Bereich der Pendel mit Zusatzmasse eine sich ausbreitende harmonische Welle erzeugt. Die Pendel in der anderen Hälfte der Kette weisen keine Zusatzmasse und ein offenes Ende auf. In diesem Bereich und am Grenzübergang sind vergleichbare Effekte wie in Versuch 3 zu beobachten. Gemäß Tab. 1 und 3.2.2 werden dabei sowohl die Wellenlänge als auch die Phasengeschwindigkeit der Welle vergrößert. Natürlich kann die Anregung der Welle auch auf der anderen Seite der Kette erfolgen. Durch Änderung der Zusatzmasse können die Effekte verstärkt werden. Im zweiten Videoclip ist nur ein Pendel in der Mitte der Kette mit einer Zusatzmasse versehen und das offene durch ein feststehendes Ende ersetzt. Dadurch entsteht über eine Länge, die klein gegenüber der Wellenlänge der Welle ist, eine geringe lokale Störung. Wie die Ergebnisse zeigen, sind unter diesen Bedingungen keine wesentlichen Auswirkungen auf die Ausbreitung der Welle und ihre Reflektionen zu beobachten.

**Versuch 7: Erzeugung von synchronen Schwingungen der Feder-Pendel-Kette mit festem bzw. offenem Ende bei harmonischer Anregung mit Frequenzen unterhalb der Cutoff-Frequenz** (Videoclip: ScExHaF1.AVI, ScExHaHaF2.AVI, ScExHaF3.AVI, ScExHaO1.AVI).

Wie in Versuch 4 beschrieben wurde, werden hier harmonische Schwingungen des ersten Pendels der Feder-Pendel-Kette mit folgenden Frequenzen erzeugt: 1,56 Hz, 1,55 Hz, 1,39

32 Geregelter Experimentiermotor mit Untersetzungsgetriebe 1:63. Conatex-Didactic-Lehrmittel, 66514 Neunkirchen (<http://www.conatex.com/shop/>).

Hz, 1,39 Hz. Dabei wird zur besseren Darstellung bei den ersten drei Versuchen durch ein Feststeller aus üblichem Stativmaterial (Stativfuß in Y-Form mit einstellbarer Neigung, Stativstange, Doppelmuffe, Stativklemme, auch geeignet zur Feststellung des Handrades bei einem beliebigen Drehwinkel) die Länge der Kette auf 85 cm verkürzt (festes Ende). Im vierten Beispiel bleibt das Ende offen. Während im ersten Videoclip gerade der Grenzübergang zwischen den harmonischen Wellen aus Versuch 5 und den synchronen Schwingungen gemäß 3.2.4 und 3.2.5 zu beobachten ist, sind in den anderen sehr deutlich die exponentiell abfallenden synchronen Schwingungen zu erkennen. Wenn die Anregungsfrequenz dabei nur relativ geringfügig unterhalb der Cutoff-Frequenz liegt, ist bei gleicher Frequenz praktisch kein Unterschied mehr zwischen dem Experiment mit festem und offenen Ende feststellbar (3. und 4. Videoclip, s. auch Abb. 13)

**Versuch 8: Harmonische Anregung von stehenden Wellen – Grundschiwingung und die ersten vier Oberschwingungen - auf der Feder-Pendel-Kette bei feststehendem Ende mit Anregungsfrequenzen oberhalb der Cutoff-Frequenz** (Videoclip: WeStHa10.AVI, WeStHa11.AVI, WeStHa30.AVI, WeStHa50.AVI, WeStHa70.AVI, WeStHa90.AVI, WEL\_M16M.TXT).



**Abb. 20:** Die normierten Eigenfrequenzen  $f_n/f_0$  der Grundschiwingung und der ersten 4 Oberschwingungen von Klein-Gordon-Wellen auf der Feder-Pendel-Wellenmaschine mit einer geänderten effektiven Länge von  $L = 80$  cm (blaue Kurve) und entsprechend berechnete Schwingungen von klassischen Wellen (rote Kurve, keine Dispersion) als Funktion von  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  zusammen mit ihren Messwerten bzw. berechneten Werten (Messwertdatei: WEL\_M16M.TXT). Zusätzlich wurden für zwei weitere Längen  $L = 67$  cm und  $L = 156$  cm die entsprechenden Graphen und Messwerte dargestellt (blaugrüne und margenta Kurven). Die grüne Kurve gibt die relative Abweichung zwischen der blauen und der roten Kurve wieder (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_M106.PA1).

Zusätzlich wurden die Frequenzen der 4. Oberwelle bei zwei anderen effektiven Längen der Kette von  $L = 67$  cm (2,43 Hz, 6. Videoclip) und von  $L = 156$  cm (1,75 Hz) bestimmt, weil hieraus deutlich wird, warum die Messungen besser mit einer verkleinerten effektiven Länge durchgeführt werden. Bei der Verwendung von Maßstäben sind vor allem bei Aufnahmen mit einer Videokamera eventuelle Parallaxenfehler zu beachten.

### 4.3. Manuelle Erzeugung, Form und Bewegung von Kink-Solitonen

Nachdem in den Versuchen 1 bis 8 Experimente vorgestellt wurden, für die insgesamt das Superpositionsprinzip gültig ist (Kap. 3.1. und 3.2.), sollen im Folgenden Phänomene im Vordergrund stehen, bei denen durch die Nichtlinearität der zugrunde liegenden Gleichungen diese grundlegende Eigenschaft verloren geht und stattdessen die in Kap. 3.3. theoretisch

beschriebenen Effekte wesentlich werden. Dazu sollen zuerst die Besonderheiten der manuellen Erzeugung von Kink- oder Anti-Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Wellenmaschine erläutert werden. Zusätzlich werden dann die Form und die Ausbreitung der solitären Wellen demonstriert und einige ihrer spezifischen Eigenschaften gemessen.

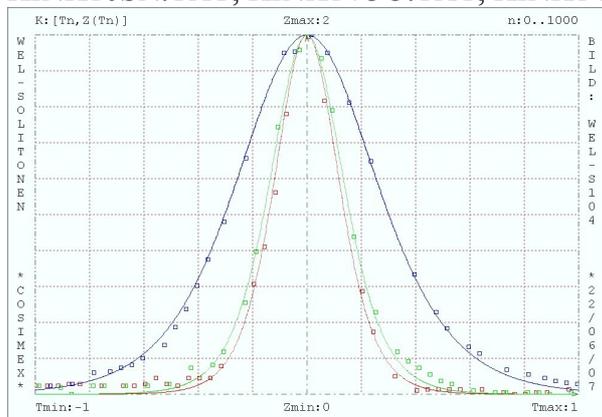
**Versuch 9:** Manuelle Erzeugung von Kink- oder Anti-Kink-Solitonen durch geeignetes Drehen des Handrades (Videoclip: SolErz10.AVI, SolErz20.AVI, SolErz15.AVI).

Durch das manuelle Drehen des Handrades bis zu einem Vielfachen eines Vollwinkels mit etwa konstanter Geschwindigkeit können Solitonen mit unterschiedlicher Energie und Ausbreitungsgeschwindigkeit auf der Wellenmaschine angeregt werden. Dabei entstehen je nach Drehrichtung immer nur eine ganzzahlige Anzahl von Kink- oder Anti-Kink-Solitonen (1. Videoclip: ein Soliton, 2. Videoclip: zwei Solitonen). Bei einer nicht vollen Umdrehung entstehen nur soviel Solitonen wie Vollwinkel dabei ausgeführt wurden (Quantelung oder Teilchencharakter der Erzeugung). Die Drehung um den restlichen Winkel verursacht nur eine feststehende Verformung des Federanfangs und keine solitäre Welle (3. Videoclip: ein Soliton bei einer Drehung von  $540^\circ$ ). Wegen der nicht vernachlässigbaren Dissipation wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Solitons ansonsten monoton kleiner und endet in einem ruhenden Soliton. Beim 1. Videoclip ist dabei die zunehmende Verbreiterung des Solitons zu beobachten (Umkehrung der quasirelativistischen Längenkontraktion, s. 3.3.2).

**Versuch 10:** Ausbreitung von manuell ausgelösten Kink- oder Anti-Kink-Solitonen auf der Wellenmaschine und ihre Beobachtung (Videoclip: SolKinH1.AVI, SolKinH2.AVI, SolAKiH1.AVI).

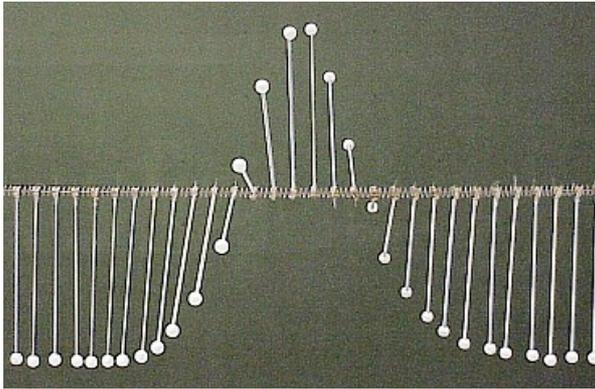
Die Beobachtung der Ausbreitung eines Solitons auf der Wellenmaschine nach manueller Anregung gemäß Versuch 9 kann am besten aus einer horizontalen Position in Achsenhöhe und symmetrisch zu den Kettenenden erfolgen. (1. Videoclip: Kink-Soliton). Bei der Verwendung von Maßstäben und bei Videoaufnahmen sind dabei eventuelle Parallaxenfehler zu berücksichtigen, die umso kleiner werden je weiter der Beobachtungsort von der Wellenmaschine entfernt ist (bei fotografischen oder Videoaufnahmen Teleobjektiv verwenden!). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit, die bei der Wellenmaschine ohne Zusatzmasse durch  $c_0 = 55 \text{ cm/s}$  (s. Tab. 2) nach oben beschränkt ist, kann dabei Werte zwischen  $0 \text{ cm/s}$  und etwa  $40 \text{ cm/s}$  annehmen. Sie kann durch Methoden gemessen werden, die bereits in Versuch 5 erläutert wurden. Die Drehrichtung des Solitons kann dagegen besser bei entsprechender Schräglage des Beobachtungsortes verfolgt werden (2. und 3. Videoclip: Kink- bzw. Anti-Kink-Soliton).

**Versuch 11:** Vergleich der theoretischen Seitenansicht von Solitonen an einem festen Ort als Funktion der Zeit mit entsprechenden Messwerten (Messwertedateien: KINK1000.TXT, KINK10SN.TXT, KINK1400.TXT, KINK14SN.TXT, KINK1600.TXT, KINK15SN.TXT).



**Abb. 21:** Zeitlichen Verlauf [s]: -1,+1 der normierten Ordinate eines Pendels [0,+2] beim Vorbeilaufen von 3 Solitonen mit verschiedenen Geschwindigkeiten und Vergleich mit zugehörigen Messwerten (Cosimex-Systemfunktion [19]: WEL\_S103.PA1, WEL\_S104.PA1).

Um die Form eines Solitons mit einer von Null verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeit auf der Feder-Pendel-Kette experimentell zu bestimmen, kann die zeitliche Bewegung der Projektion eines am gewünschten Ort angebrachten Pendels auf die vertikale Ebene durch die Pendelachse gemessen werden. Dazu kann das Computerprogramm VICAMES [22] eingesetzt werden, das die Lage der Pendelkugel (s. Kap. 2.2. und Abb. 4 bzw. 6) aus der Lage ihres Abbildes auf dem Bildchip einer Videokamera in Echtzeit ermittelt und die entsprechenden x-y-Koordinaten zusammen mit dem Messzeitpunkt in eine TXT- oder Exeldatei abspeichert. Dabei ist es von



**Abb. 22:** Fotografische Aufnahme der Projektion eines Kink-Solitons auf die vertikale Ebene durch die Wellenmaschinenachse zu einem festen Zeitpunkt als Funktion der Abszisse (x-Achse) mit deutlichen Parallaxenfehlern.

Vorteil, wenn die auszuwertende Bildfläche auf das Rechteck eingeschränkt werden kann, in dem sich das Kugelbild bewegen kann. Damit die Parallaxenfehler dabei möglichst gering ausfallen, wird am besten mit einem Teleobjektiv mit variabler Brennweite und größerer Aufnahmeentfernung gearbeitet (s. auch Versuch 10). Die Originalmesswerte von drei Messreihen sind in den oben genannten TXT-Dateien mit der Endung „OO“ enthalten. Diese Messwerte können mit Hilfe des Programms COSIMEX {19} so modifiziert werden, dass die nicht interessierenden x-Werte eliminiert, die Messzeiten durch eine geeignete Zeitverschiebung um den Nullpunkt herum

in etwa symmetrisiert und die y-Werte durch Normierung mit dem Abstand des Kugelmittelpunkts von der Pendelachse ( $L = 13,45 \text{ cm}$ ) auf das Intervall  $[0,2]$  beschränkt werden (s. o. a. Dateien mit der Endung „SN“). In Abb. 21 sind alle Messwerte zusammen mit der theoretisch zu erwartenden Funktion (s. Kap. 3.3. und 3.3.2) dargestellt, wobei der freie Parameter  $u$  so gewählt wurde, dass die Kurven möglichst gut mit den entsprechenden Messwerten übereinstimmen. Wie die Ergebnisse in Abb. 21 zeigen, stimmen die Messwerte recht gut mit der in Kap. 3.3. abgeleiteten Theorie überein (s. auch Abb. 18). Aus diesen Kurven lassen sich im Einzelnen auch die in der Tab.3 angegebenen Parameter für die Phasengeschwindigkeit und Vergleichswerte für die Vorbeiflugzeit ableiten.

Messwerte-Datei	Farbe in Abb. 21	$u = v_\phi/c_0$	$v_\phi \text{ [cm/s]}$	$\Delta t_{\text{mess}} \text{ [s]}$	$\Delta t_{\text{theo}} \text{ [s]}$
KINK14SN	blau	0.285	15.7	0.607	0.608
KINK15SN	grün	0.491	27.0	0.318	0.319
KINK10SN	rot	0.540	29.7	0.281	0.280

**Tab. 3:** Übersicht über die aus den archivierten Messwerten (Dateien KINKxxxSN.TXT mit xx = Experimentnummer in VICAMES) ermittelten Parameter von drei Solitonen und ihr Vergleich mit theoretischen Werten.

In Abb 22 ist die Projektion eines Solitons auf die genannte Ebene zu einem festen Zeitpunkt als Funktion der x-Koordinate zu sehen. Da diese Fotografie von einem relativ nahen Beobachtungsort ohne Teleobjektiv aufgenommen wurde, sind die Parallaxenfehler gut zu erkennen (s. auch Abb. 18).

**Versuch 12:** Demonstration der Form- und Lageunabhängigkeit von ruhenden Kink- oder Antkink-Solitonen auf der Wellenmaschine bei der Änderung der Ausrichtung der gemeinsamen Achse (Videoclip: SolKinV1.AVI, SolKinV2.AVI).

Wenn die Achse der Feder-Pendel-Kette mit einem ruhenden Soliton oder Ant-Soliton langsam durch Anheben eines Endes der Kette aus der horizontalen in eine schräge Lage oder wieder zurück gebracht wird, ändert sich die Form und die Lage des Solitons auf der Kette praktisch nicht. Ein Soliton auf der Wellenmaschine besitzt also zwar eine träge, aber keine schwere Masse. Die träge Masse im Ruhezustand ist verbunden mit der von Null verschiedenen Ruheenergie des Solitons (s. Kap. 3.3.2. und Abb. 19).

**Versuch 13:** Demonstration der Ausbreitung von „Breather“-Solitonen auf der Wellenmaschine (Videoclip: BreaSchr.AVI, BreaSenk.AVI).

Um zu zeigen, dass neben den Kink-Solitonen sich noch andere solitäre Wellenphänomene auf

der Wellenmaschine ausbreiten können, sind in den beiden Videoclips Breather-Solitonen (engl. breather: „Atmer“) aus schräger und Seitenansicht dargestellt (s. Kap. 3.3.). Dabei handelt es sich um eine stationäre pulsformige Welle, deren Einhüllende mit einer bestimmten Frequenz moduliert ist („atmet“) [10].

**Versuch 14:** Qualitativer Vergleich der Form und der Ausbreitung eines Solitons auf einer Wasseroberfläche mit einem Kink-Soliton (Videoclip: SolWa11.AVI).

Wie bereits in Kap. 1. im einzelnen dargelegt wurde, kann eine solitäre Wasserwelle, die in ihrer Form und Ausbreitungsgeschwindigkeit den hier untersuchten Kink-Solitonen gleicht, am besten in einem quaderförmigen Behälter aus Plexiglas demonstriert werden. In dem angegebenen Videoclip ist eine solche Welle zu beobachten, aus der die in Abb. 2 verwendeten Einzelbilder entnommen wurden [13]. Dieses Experiment entspricht auch am besten den historischen Phänomenen, die J. S. Russel als erster beobachtet und untersucht hat (s. Kap. 1. und Abb. 1). In Abb. 23 ist eine Wiederholung der klassischen Beobachtung dargestellt, die am 12.07.1995 von der Heriot-Watt University, Ednburgh, an dem neu errichteten „Scott-Russel-Aqueduct“ des Union Canals nahe Edinburgh durchgeführt wurde [33].



**Abb. 23:** Erzeugung eines großen Solitons durch zwei Motorboote auf einem Aquädukt des Union Kanals durch Mitglieder der Heriot-Watt-University in Edinburgh am 12.07.1995 [33].

#### **4.4. Kink- und Anti-Kink-Solitonen als Teilchen-Antiteilchen-Modell**

Wie bereits bei verschiedenen der schon beschriebenen Experimente erkennbar war und aus den theoretischen Betrachtungen in Kap. 3.3. abgeleitet wurde, können Kink- und Anti-Kink-

---

33 Dugald Duncan/Heriot-Watt University: John Scott Russel's Soliton Wave Re-created. Edinburgh, 1995 (150 Jahre nach der Erstveröffentlichung des Phänomens) [4] (<http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>).

Solitonen als exemplarisches Modell für quasirelativistische Teilchen und Antiteilchen verwendet werden. Dabei sei noch einmal darauf hingewiesen, dass die Sinus-Gordon-Gleichung genau mit dieser Zielrichtung abgeleitet wurde [9,12,27,<sup>34</sup>]. In diesem Sinne werden im Folgenden zur Präzisierung der Modelleigenschaften einige zusätzliche Demonstrationsexperimente vorgestellt, die diese weiter veranschaulichen können.

**Versuch 15: Paarerzeugung und Paarvernichtung von einem Kink- und einem Anti-Kink-Soliton** (Videoclip: SolAKEr1.AVI, SolAKVe1.AVI, SolAKVe2.AVI, SolAKVe3.AVI).

Um ein Kink- und ein Ant-Kink-Soliton zu erzeugen, muss mindestens die doppelte Ruheenergie eines Solitons mit den durch die Wellenmaschine definierten Parametern aufgewendet werden (s. 3.3.2 und Tab. 2). Dies geschieht am besten durch Drehung eines Pendels auf der Feder-Pendelkette um einen Vollwinkel mit einem dünnen Holzstab (1. Videoclip). Abhängig von der übermittelten Überschussenergie breiten sich dann die beiden Solitonen mit gleicher Anfangswinkelgeschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen als Teilchen und Antiteilchen auf der Wellenmaschine aus. Wenn dagegen ein Kink- und ein Ant-Kink-Soliton gleicher Größe aufeinander zulaufen, dann wandelt sich die Gesamtenergie in eine Schwingung der gesamten Kette um, wobei beide Solitonen als Strahlung verschwinden. Die oben genannten Videoclips zeigen die Paarerstrahlung von Teilchen und Antiteilchen mit unterschiedlichen Anfangsgeschwindigkeiten und aus unterschiedlichen Aufnahmerrichtungen.

**Versuch 16: Quasielastische Stöße zwischen einer Wand oder einem ruhenden und einem bewegten Kink- oder Anti-Kink-Soliton** (Videoclip: StoKKWa1.AVI, StoKKRu1.AVI, StoKKRu2.AVI, StoKKRu3.AVI).

Wie die Videoaufzeichnungen entsprechender Experimente zeigen, erfolgt beim Auftreffen eines Kink- oder Ant-Kink-Soliton auf eine Wand (1. Videoclip: festes Ende der Kette) oder ein gleichartiges ruhendes Soliton (2. und 3. Videoclip: senkrechte und schräge Ansicht) ein Impulsaustausch wie bei einem vergleichbaren Versuch mit elastischen Massekugeln (Impulssatz). Bei mehreren ruhenden Solitonen (4. Videoclip: zwei ruhende Solitonen) durchläuft der Impuls die gesamte Anordnung, wobei im Endeffekt das letzte Soliton den Impuls weiterträgt. Bei jeder Impulsübertragung kommt es im Einzelnen zu einer lokalen Verformung der beiden beteiligten Solitonen innerhalb einer charakteristischen Entfernung der Solitonenmittelpunkte [27,28], die aber nicht identisch mit der in Kap. 3.3. und 3.3.2 definierten Halbwertsbreite der Solitonen ist (s. auch Abb. 18). Ein Modell mit elastischen Massekugeln mit festen Durchmessern („hard core model“) beschreibt also höchstens global, lokal jedoch nur näherungsweise die Vorgänge. Auf Grund der nicht zu vernachlässigenden Dissipation ist bei allen Versuchen die quasirelativistische Längenkontraktion zu beobachten, so dass wahrscheinlich der relativistische Impulssatz bei den Stößen anzuwenden ist.

**Versuch 16: Quasi-elastische Stöße von zwei oder vielen bewegten Kink- oder Anti-Kink-Solitonen** (Videoclip: StoAKBe1.AVI, StoAKBe2.AVI, StoKKBe1.AVI, StoKKBe2.AVI, StoKKBe3.AVI, StoKKBe4.AVI).

Wenn zwei bewegte Kink- und/oder Ant-Kink-Solitonen aufeinandertreffen, kommt es grundsätzlich wie bei Teilchen oder Antiteilchen mit einer trägen Masse (keine schwere Masse, s. Versuch 12) zu einem Impulsaustausch. Da die Masse des Solitons von seiner Geschwindigkeit abhängt, die in der Nähe der Grenzggeschwindigkeit gegenüber der Ruhemasse große Werte annehmen kann, gilt hierfür der relativistische Impulssatz (s. Kap. 3.2.). Wie die Videoaufzeichnungen entsprechender Experimente zeigen, kommt es dabei zur Durchdringung der Stoßpartner mit lokaler Ununterscheidbarkeit (1. und 2. Videoclip) oder zur bleibender Erkennbarkeit der individuellen Solitonen (3. bis 5. Videoclip). Im letzten Videoclip wird das quasithermische Verhalten von sechs einzelnen Solitonen dargestellt, wobei neben dem Impulsaustausch auch die relativistische Längenkontraktion recht gut zu beobachten ist.

---

<sup>34</sup> Koppelman, G., N. Hensel u. M. Totzeck: Pendelkettensolitonen als Quasiteilchen und -antiteilchen. Praxis d. Naturw. (Physik), S. 35-38, 1991.

**Versuch 17:** Quasi-elastische Stöße von zwei gegeneinander laufenden solitären Wasserwellen (Videoclip: SolWas21.AVI, SolWas22.AVI, SolWas23).

Um zu zeigen, dass gegeneinander laufende solitäre Wasserwellen (s. auch Versuch 14) sich ähnlich verhalten wie entsprechende Kink- oder Anti-Kink-Solitonen, wurden im bereits beschriebenen Wassertank zwei symmetrische Wellenberge entgegengesetzter Richtung erzeugt und ihr Verhalten beim Aufeinandertreffen dokumentiert. Dabei kann es sogar in Abhängigkeit von der Solitonengeschwindigkeit zu einer zeitlichen Ablösung von Wassertropfen während des Stoßvorgangs kommen (3. Videoclip). Durch die Reflexion der beiden Solitonen an den Tankwänden kann der Effekt mehrfach hintereinander beobachtet werden, wobei die Ablösung zunehmend kleiner wird bzw. ganz verschwindet, weil auch hierbei die Solitonenenergie durch Dissipation immer stärker abnimmt.

#### 4.5. Kink-Solitonen in verschiedenen-Medien und an Mediengrenzen

Wie aus 3.2.1 und 3.2.2 sowie aus Tab. 2 von Kap. 3.3. zu entnehmen ist, können die Grundparameter der Wellenmaschine lokal oder global durch eine Zusatzmasse an den Enden der Pendel gezielt in der gewünschten Weise festgelegt werden. In den folgenden Experimenten werden die veränderten Pendel durch Rotfärbung der Zusatzmassen gekennzeichnet, um den abweichenden Parameterbereich in den Videoaufzeichnungen sichtbar und unterscheidbar zu machen. Dabei bietet es sich an, zum einen Effekte zu untersuchen, in denen eine Hälfte der Kette modifiziert wurde, und zum anderen eine Anordnung zu verwenden, bei der eine bestimmte Anzahl von Pendeln in der Mitte der Kette verändert sind. Im ersten Fall ist dabei zwischen Versuchen zu unterscheiden, bei denen sich das Soliton aus dem unveränderten Bereich auf die modifizierten Pendel zu bewegt, und zum anderen die entgegengesetzte Richtung aufweist. Versuche bei denen nur ein Pendel mit einer Zusatzmasse versehen ist, werden erst in Kap. 4.6. behandelt.

**Versuch 18:** Vergleich von zwei ruhenden Solitonen in den zwei Bereichen mit unterschiedlichen Grundparametern (Videoclip: SoM12Ru1.AVI).

Wie aus Tab. 2 zu entnehmen ist, muss ein ruhendes Kink- oder Ant-Kink-Soliton im unveränderten Medium (Medium 1) eine größere Halbwertsbreite besitzen als ein ebenfalls ruhendes Kink- oder Anti-Kink-Soliton im Medium mit den Zusatzmassen (Medium 2). Gemäß 2.1.2 und 3.3.2 kann dies damit erklärt werden, dass die Halbwertsbreite eines ruhenden Solitons proportional zu  $c_0/\omega_0$  ist,  $\omega_0$  proportional zu Quadratwurzel aus  $m \cdot l/J$  wächst ( $m$  = Pendelmass,  $l$  = Abstand des Pendelschwerpunktes von der Pendelachse,  $J$  = Trägheitsmoment um die Pendelachse, s. auch Abb. 4) und die Abhängigkeit von  $J$  dadurch eliminiert wird, dass sich  $c_0$  umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus  $J$  verhält.

**Versuch 19:** Bewegung eines Kink- oder Ant-Kink-Solitons aus dem Bereich der Pendel mit Zusatzmasse in den unveränderten Parameterbereich der Wellenmaschine (Videoclip: SoM21Tr1.AVI, SoM21Tr2.AVI).

Energie  $E_{Si}$  und Halbwertsbreite  $\Delta x_{Si}$  eines Solitons im Medium  $i$ : 4.4.1

$$E_{Si} = m_{S0i} \cdot c_{0i}^2 / \sqrt{1 - (v_{Si} / c_{0i})^2}, \quad \Delta x_{Si} = 1.762747 \cdot c_{0i} / \omega_{0i} \cdot \sqrt{1 - (v_{Si} / c_{0i})^2} \quad \text{mit}$$

$$m_{S0i} \cdot c_{0i}^2 \sim \sqrt{m_i \cdot l_i}, \quad c_{0i}^2 \sim 1/J_i \quad \text{und} \quad \omega_{0i}^2 \sim m_i \cdot l_i / J_i \Rightarrow$$

$$1. \quad E_{S1} = E_{S2} \Rightarrow v_1^2 / c_{01}^2 = (1 - m_1 / m_2 \cdot l_1 / l_2) + m_1 / m_2 \cdot l_1 / l_2 \cdot v_2^2 / c_{02}^2 \Rightarrow \text{mit } m_1 \cdot l_1 < m_2 \cdot l_2$$

$$\text{und mit } J_2 / J_1 = m_2 \cdot l_2^2 / (m_1 \cdot l_1^2): \quad v_1^2 > m_1 \cdot l_1 / (m_2 \cdot l_2) \cdot J_2 / J_1 \cdot v_2^2 = l_2 / l_1 \cdot v_2^2 \Rightarrow v_1 > v_2,$$

$$2. \quad (\Delta x_1 / \Delta x_2)^2 \sim m_2 \cdot l_2 / (m_1 \cdot l_1) \cdot (1 - v_1^2 / c_{01}^2) / (1 - v_2^2 / c_{02}^2) =$$

$$(m_2 \cdot l_2 / (m_1 \cdot l_1) - v_2^2 / c_{02}^2) / (1 - v_2^2 / c_{02}^2) > 1 \Rightarrow \Delta x_1 > \Delta x_2.$$

Wie die beiden Videoclips zeigen, dringt ein Soliton, wenn es mit einer noch so kleinen Geschwindigkeit aus dem Medium 2 (Pendel mit Zusatzmassen) auf die Grenze zum Medium 1 (unveränderter Bereich) zuläuft, auf jeden Fall in dieses Medium ein und bewegt sich dort mit größerer Geschwindigkeit und Halbwertsbreite weiter. Zur Erklärung der Beobachtungen kann davon ausgegangen werden, dass kurz vor und hinter der Mediengrenze die Solitonenenergie ihren Wert beibehalten muss (s. 3.3.2), selbst wenn eine geringe Dissipation bei der Bewegung selbst berücksichtigt wird. Dies führt unter Verwendung der in Kap. 2.1. und 3.3. angegebenen Formeln zu den in 4.4.1 abgeleiteten Abschätzungen, die die genannten Beobachtungen voll bestätigen.

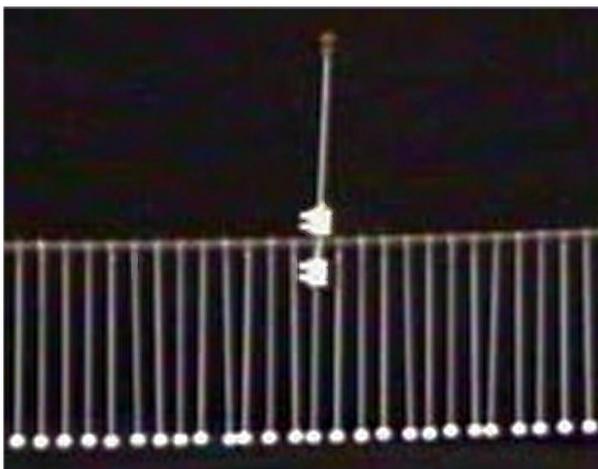
**Versuch 20:** Bewegung eines Kink- oder Ant-Kink-Solitons aus dem unveränderten Parameterbereich der Wellenmaschine auf den Bereich der Pendel mit Zusatzmasse zu (Videoclip: SoM12Re1.AVI, SoM12Re2.AVI, SoM12Re2.AVI, SoM12Tr1.AVI, SoM12Tr2.AVI, SoM12T1.AVI).

Im Gegensatz zu den Ergebnissen in Versuch 19 hängt das Verhalten eines Kink- oder Anti-Kink-Solitons bei seiner Annäherung an die Mediengrenze bei seiner Bewegung aus Richtung des unveränderten Bereichs der Wellenmaschine (Medium 1) auf den Bereich der Pendel mit den Zusatzmassen zu (Medium 2) davon ab, wie groß seine Energie oder seine Geschwindigkeit in Medium 1 ist. Bei geringer Energie oder Geschwindigkeit reicht diese für die Erzeugung eines Solitons in Medium 2 nicht aus, weil die Ruheenergie eines Solitons im Medium 2 gemäß 4.4.1 größer sein kann als die Energie eines Solitons im Medium 1. Daher wird ein solches Soliton aus Gründen der Energieerhaltung nach seinem teilweisen Eindringen in dieses Medium (vergleichbar mit der Solitonenbreite) mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit wieder in das Medium 1 reflektiert (1. bis 3. Videoclip). Die Halbwertsbreite ändert sich bei diesem Vorgang natürlich nicht. Sie wird nur mit zunehmender Geschwindigkeit gemäß 4.4.1 kleiner. Die kritische Geschwindigkeit bzw. die kritische Halbwertsbreite kann dabei aus den Gleichungen 4.4.2 bestimmt werden. Ihr Wert bei der 1. Zusatzmasse beträgt dabei 56,5 % der Grenzgeschwindigkeit im Medium 1 und steigt bei der 3. Zusatzmasse auf 85.1 % an. Zur Demonstration des Effekts wird also am besten die 1. Zusatzmasse verwendet.

<p>1. Kritische Geschwindigkeit <math>v_{S1S}</math>:</p> $E_{S1K} = m_{S01} \cdot c_{01}^2 / \sqrt{1 - (v_{S1K} / c_{01})^2} = m_{S02} \cdot c_{02}^2 = E_{S2K} (v_{S2} = 0) \Rightarrow \text{mit Gl. 4.4.1 u. Tab.1:}$ $v_{S1K} = c_{01} \cdot \sqrt{m_1 / m_2 \cdot l_1 / l_2} \Rightarrow v_{S1K} \text{ [cm / s]: } 31.1 \text{ (1. Zusatzmasse), } 38.0 \text{ (2.), } 46.8 \text{ (3.).}$ <p>2. Kritische Halbwertsbreite <math>\Delta x_{S1K} = 1.762747 \cdot v_{S1K} / \omega_{01}</math>.</p>	4.4.2
---	-------

Wenn jetzt die Geschwindigkeit des Solitons größer als die kritische Geschwindigkeit wird, läuft das Soliton mit reduzierte Geschwindigkeit im Medium 2 weiter (4. und 5. Videoclip), wobei seine Halbwertsbreite größer wird. Dieser Vorgang ist mit dem Eindringen von Licht aus einem optisch dichteren (Medium 1) in ein optisch dünneres Medium (Medium 2) zu vergleichen. Der Reflexion des Solitons entspricht dabei im optischen Falle die Totalreflexion. In der Quantenphysik tritt das gleiche Problem auf, wenn an der Mediengrenze eine positive Potentialstufe vorhanden ist und die Schrödinger-Gleichung zur Beschreibung heran gezogen wird. Wenn dabei die Potentialstufe eine endliche Breite aufweist, kann unter Umständen auch ein Teilchen mit geringerer Energie als der der Potentialdifferenz den Potentialwall durchdringen (Tunneleffekt), wenn dessen Breite nur genügend klein ist. Wie der 6. Videoclip zeigt, tritt dieser Effekt auch bei Solitonen auf. Im optischen Falle muss die optisch dünnere Schicht nur genügend dünn sein, um einen Übergang zu erzielen. In allen Fällen muss die Schichtdicke von der Größenordnung der Wellenlänge sein, um einen merklichen Tunneleffekt zu erzielen (z. B. Tunnelstrom beim Tunnelmikroskop).

## 4.6. Kink-Solitonen in Medien mit Störstellen



**Abb. 24:** Realisierung einer lokalisierten attraktiven Störstelle auf der Feder-Pendel-Kette durch das Anbringen einer Zusatzmasse (normale Pendelstange mit roter Papierkugel) oberhalb eines Pendels und ihre Befestigung durch zwei dreipolige Lüsterklemmen, die außen symmetrisch über zwei kleine Metallstäbe verbunden sind.

Gewichtskraft, die dem Produkt aus dem Abstand  $l$  zwischen dem neuen Schwerpunkt und der Pendelachse und der größeren Pendelmasse  $m$  proportional ist (s. 2.1.1), aber stark reduziert wird (attraktive oder anziehende Störstelle oder Haftstelle). Wie Abb. 24 zeigt, wird dazu eine normale Pendelstange mit rotgefärbter Papierkugel über zwei dreipolige Lüsterklemmen asymmetrisch zur Achse oberhalb eines Pendels befestigt. Die Verbindung zwischen den Klemmen erfolgt dabei außen symmetrisch über zwei kurze Metallstäbe. Im Gegensatz zur repulsiven Störstelle, bei der die Halbwertsbreite eines Kink-Solitons durch die Zusatzmasse kleiner und dessen Ruhemasse bzw. Ruheenergie anwächst, tritt bei einer attraktiven Störstelle der umgekehrte Effekt auf. Wie die im folgenden beschriebenen Versuche zeigen, lassen sich deshalb viele interessante Vorgänge in Kristallgittern anschaulich demonstrieren.

Wie die Versuche in Kap. 4.4. gezeigt haben, können die betrachteten Kink- und Anti-Kink-Solitonen als realistisches und gleichzeitig anschauliches Teilchen - Antiteilchen Modell verwendet werden. Dies trifft in ähnlicher Weise für eine große Klasse von Vorgängen zu, die in idealen Kristallgittern mit einzelnen lokalisierten Störstellen (Punktdefekte) auftreten können [14,31,<sup>35</sup>,<sup>36</sup>], wobei die entwickelte Wellenmaschine ein vereinfachtes eindimensionales Modell solcher Vorgänge zu demonstrieren gestattet. Die Störstellen werden dabei durch einzelne Pendel mit Zusatzmasse in der in Kap. 2.2. und Tab. 2 beschriebenen Form (repulsive oder abstoßende Störstelle) oder dadurch realisiert, dass durch eine Zusatzmasse auf der gegenüberliegenden Seite das Trägheitsmoment  $J$  zwar vergrößert, das maximale Drehmoment der resultierenden

### 4.6.1. Medien mit repulsiven Störstellen

Wie in Kap. 4.6. beschrieben wurde, werden repulsive Störstellen in einem Kristallgitter dadurch auf der Feder-Pendel-Kette realisiert, dass einzelne Pendel eine Zusatzmasse am unteren Ende erhalten. Diese Stellen werden in den folgenden Videoclips jeweils durch rote Farbe gekennzeichnet. Für die Experimente wurden dabei zuerst eine und dann zwei Störstellen mit verschiedenen Abständen eingebaut.

**Versuch 21:** Verhalten eines an einer abstoßenden Störstelle erzeugten Kink- oder Ant-Kink-Solitons (Videoclip: SolEmi01.AVI, SolRef01.AVI, SolDur01.AVI, SolDur02.AVI).

Ein manuell an einer repulsiven Störstelle erzeugtes ruhendes Kink- oder Ant-Kink-Soliton läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit in den ungestörten Bereich, wenn es frei wird (1. Videoclip, daher der Name abstoßende oder repulsive Störstelle). Die Bewegungsrichtung hängt dabei von seiner anfänglichen Asymmetrie zur Störstelle ab. Weil seine Anfangsenergie größer ist als die des freien Solitons, wird die Differenzenergie in kinetische Energie umgeformt. Ein langsam auf die Störstelle zulaufendes Soliton wird von der Störstelle abgestoßen und reflektiert (2. Videoclip), wenn seine Energie zu klein ist, um die Schwelle zu über-

35 Kittel, Ch.: Einführung in die Festkörperphysik. Oldenbourg, München, 14. Aufl., 2006 (1. Aufl. 1953).

36 Koppelman, G. u. N. Hensel: Quasiteilchen in Systemen mit Störstellen und Mediengrenzen. Praxis d. Naturw. (Physik), S. 28-34, 1991.

winden. Erst wenn die Geschwindigkeit genügend groß ist, kann das Soliton den Bereich der Wellenmaschine jenseits der Störstelle erreichen und breitet sich dort mit konstanter Geschwindigkeit aus (3. und 4. Videoclip, Seiten- und Schrägansicht). Im ursprünglichen Bereich ist eine zurücklaufende Klein-Gordon-Welle mit kleiner Amplitude zu erkennen.

**Versuch 22: Verhalten eines Kink- oder Ant-Kink-Solitons an zwei abstoßenden Störstellen auf der Feder-Pendel-Kette mit unterschiedlichem Abstand** (Videoclip: S1R0RA08.AVI, S1R0DA08.AVI, S1R0EA08.AVI, S1R0EA10.AVI, S1R0EA13.AVI, S1R0EA18.AVI).

Das Verhalten eines manuell an einem Ende der Wellenmaschine erzeugten Kink- oder Ant-Kink-Solitons, das sich auf die beiden Störstellen mit einem definierten Abstand zu bewegt, hängt von seiner Geschwindigkeit und dem Abstand der Störstellen ab (in den genannten Videoclips wird der Abstand der Störstellen durch die beiden letzten Ziffern des Dateinamen in Einheiten des Pendelabstandes  $a$  angegeben, s. Abb. 4). Wenn die Solitonenenergie zu klein ist, wird das Soliton an der ersten Störstelle ähnlich wie bei Versuch 21 reflektiert (1. Videoclip). Wenn die Energie sehr groß ist, reicht diese um beide Störstellen zu überwinden (2. Videoclip). Dabei ist, wie in Versuch 21 beschrieben wurde, eine zurücklaufende Klein Gordon-Welle geringer Amplitude zu beobachten (Streustrahlung). Solitonen im mittleren Energiebereich werden zwischen den beiden repulsiven Störstellen eingefangen (3. bis 6. Videoclip). Zwischen den Störstellen kommt es zu einer Eigenschwingung des Solitons mit einer festen Frequenz. Diese ist abhängig vom Abstand der Störstellen und der Solitonenenergie. In dem genannten Parameterbereich kann die Anordnung also als Falle oder auch als Resonator für Kinksolitonen angesehen werden.

**Versuch 23: Verhalten von zwei oder drei Kink- oder Ant-Kink-Solitonen an zwei abstoßenden Störstellen auf der Feder-Pendel-Kette mit unterschiedlichem Abstand** (Videoclip: S2R1RA08.AVI, S2R1LA08.AVI, S2R1EA20.AVI, S2R1DA33.AVI, S2R2SA26.AVI, S2R2SA34.AVI, S3R2DA46.AVI, S3R2LA20.AVI).

Wenn Experimente mit zwei oder drei Kink-Solitonen auf der Wellenmaschine mit zwei repulsiven Störstellen durchgeführt werden, treten neben den in Versuch 22 beschriebenen Effekten zusätzliche Phänomene auf. Wenn ein manuell erzeugtes Soliton mit geringer Geschwindigkeit von außen auf eine der Störstellen zuläuft, zwischen denen sich ein ruhendes Soliton befindet, wird bei kleinem Abstand der Störstellen (in den Videoclips wird der Abstand der Störstellen wie in Versuch 22 durch die beiden letzten Ziffern des Dateinamen in Einheiten des Pendelabstandes  $a$  angegeben, s. Abb. 4) das ankommende Soliton reflektiert (1. Videoclip). Gleichzeitig wird das zwischen den Störstellen ruhende Soliton zu einer Schwingung zwischen den Störstellen angeregt. Wenn bei gleichem Störstellenabstand die Energie des freien Solitons größer wird, reicht die auf das ursprünglich ruhende Soliton übertragene Energie aus, die zweite Störstelle zu überwinden (2. Videoclip). Beide Solitonen bewegen sich anschließend als freie Solitonen mit entgegengesetzter Geschwindigkeitsrichtung auseinander. Wenn jetzt der Abstand zwischen den Störstellen vergrößert wird, kommt es entweder zum Einfang des freien Solitons und zu einer Schwingung der beiden Solitonen zwischen den Störstellen (3. Videoclip) oder bei weiterer Vergrößerung des Störstellenabstandes (4. Videoclip) zu einem Einfang des ursprünglich freien und zu einer Emission des ursprünglich ruhenden Solitons. Im Endeffekt tauschen dabei die beiden Solitonen im Wesentlichen ihre Rolle, wenn man davon absieht, dass eine Klein-Gordon-Welle entsteht (4. Videoclip). Wie in dem 5. und 6. Videoclip zu sehen ist, können im Falle des Einschusses der beiden Solitonen zwischen den beiden Störstellen zwei Eigenschwingungen des Resonators auftreten, wobei sich die Solitonen im ersten Falle jeweils in gleicher Richtung und im zweiten Beispiel in entgegengesetzter Richtung bewegen. Wenn sich am Anfang zwei ruhende Solitonen zwischen den Störstellen aufhalten, kann ein manuell erzeugtes freies Soliton im Wesentlichen alle Effekte bewirken, die bereits für ein ruhendes Soliton beschrieben wurden (z. B. 7. Videoclip: wie 4. Videoclip und 8. Videoclip: wie 2. Videoclip).

#### **4.6.2. Medien mit attraktiven Störstellen**

Wie in Kap. 4.6. näher ausgeführt wurde, werden attraktive Störstellen in einem Kristallgitter dadurch auf der Feder-Pendel-Kette realisiert, dass einzelne Pendel eine Zusatzmasse in Form einer zweiten Pendelstange auf ihrer entgegengesetzten Seite erhalten. Dadurch wird das maximale Drehmoment der Gewichtskraft stark vermindert und das Trägheitsmoment geringfügig vergrößert. Das ausgewählte Pendel ist in den folgenden Videoclips durch diese Veränderung und Rotfärbung der Papierkugel am Ende der zweiten Pendelstange gekennzeichnet. Bei den Experimenten wurden nur Anordnungen mit einer Störstelle verwendet.

**Versuch 24:** Verhalten eines freien Kink- oder Ant-Kink-Solitons an einer unbesetzten anziehenden Störstelle auf der Feder-Pendel-Kette (Videoclip: So1R0Ein.AVI, So1R0Dur.AVI).

Abhängig von der Energie eines manuell erzeugten freien Solitons kann dieses von einer unbesetzten attraktiven Störstelle eingefangen werden (1. Videoclip, daher der Name attraktive oder anziehende Störstelle bzw. Haftstelle) oder diese überwinden und mit gleicher Geschwindigkeit weiterlaufen (2. Videoclip). Im ersten Falle kommt es zu Schwingungen mit einer bestimmten Frequenz um die Haftstelle.

**Versuch 25:** Verhalten eines freien Kink- oder Ant-Kink-Solitons an einer besetzten anziehenden Störstelle auf der Feder-Pendel-Kette (Videoclip: So1R1Sch.AVI, So1R1Ref.AVI, So1R1LSO.AVI, So1R1LBr.AVI, So1R1LTe.AVI).

Ein in der Haftstelle ruhendes Soliton kann durch manuelle Auslenkung aus der Ruhelage zu Schwingungen mit einer bestimmten Frequenz angeregt werden (1. Videoclip, wie 1. Videoclip von Versuch 24). Wenn dagegen ein manuell erzeugtes freies Soliton auf das ruhende gebundene Soliton zu läuft, kann abhängig von seiner Energie eine Reflexion an der Störstelle stattfinden und dabei eine Schwingung des ursprünglich ruhenden Solitons ausgelöst werden (2. Videoclip) oder neben der Reflexion eine Freisetzung des gebundenen Solitons erfolgen (3. Videoclip). Zur Freisetzung eines gebundenen Solitons können ebenfalls auch ein Breather (4. Videoclip, s. Versuch 13) oder statistisch verteilte Klein-Gordon-Wellen wechselnder Amplituden und Frequenzen dienen (5. Videoclip). Die zuletzt demonstrierte Form kann bei Festkörpern vor allem als anschauliches Modell für das Ausheizen von attraktiven Störstellen dienen.

### **5. Zusammenfassung der Schwerpunkte und Zielsetzungen**

#### **5.1. Funktionsprinzip**

Die Wellenmaschine besteht aus einer größeren Anzahl von Schwerependeln mit gemeinsamer Achse, die bei konstantem gegenseitigem Abstand über gleichartige Schraubenfedern elastisch miteinander gekoppelt sind. Zusätzlich sorgen integrierte Bestandteile dafür, dass zahlreiche grundlegende Phänomene und Eigenschaften von drei wichtigen Wellenklassen theoretisch einfach beschrieben und in Kombination mit einer klassischen Wellenmaschine anschaulich demonstriert und gemessen werden können.

#### **5.2. Wellenkonzept**

Das in der Physik zur Beschreibung verschiedener Phänomenklassen aus unterschiedlichen Bereichen entwickelte Wellenkonzept ist neben dem Teilchenkonzept ein sehr universelles und vielseitiges Denkmodell. Es wird sehr erfolgreich als Arbeitsmodell in allen Naturwissenschaften und in vielen technischen Wissenschaften und anderen Bereichen angewandt. Dabei ist die Wechselwirkung zwischen Experiment und Theorie mit sukzessiver Anpassung und Erweiterung des Modells Grundlage der induktiven (lat. herleiten: vom Naturphänomen zum Naturgesetz) und deduktiven Methode (lat. ableiten: vom Naturgesetz zum Naturphänomen).

#### **5.3. Definition und Theorie der drei Wellenklassen**

Die Wellenmaschine wird in hinreichender Näherung durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben (kontinuierliche Approximation), die elementar aus den Newton'schen Bewegungsgleichungen für die Pendel hergeleitet werden kann. Die Lösung des damit eigentlich

sehr schwierigen Problems vereinfacht sich ganz wesentlich dadurch, dass die partielle durch die Einführung der Phase in eine gewöhnliche Differentialgleichung umgeformt werden kann. Im eindimensionalen Fall der Wellenmaschine können für die drei im Folgenden definierten Wellenklassen mit elementaren Verfahren einfache analytische Lösungen abgeleitet werden.

### **5.3.1. Klassische Wellen**

Ohne Einfluss der Gravitation wird die Feder-Pendel-Kette durch die klassische Wellengleichung beschrieben. Diese lässt verschiedene Wellenformen als analytische Lösungen zu (harmonische, periodische und aperiodische Wellen). Klassische Wellen können sich ungestört beliebig überlagern (Superpositionsprinzip) und aus einzelnen Elementarwellen zusammengesetzt oder in diese zerlegt werden (Huygens'sches Prinzip, Fouriersynthese, Fourieranalyse). Alle Lösungen einer klassischen Wellengleichung besitzen die gleiche Phasengeschwindigkeit und sind daher dispersionsfrei (lat.: feinste Verteilung: das Verhältnis von Kreisfrequenz und Wellenzahl ist für alle Elementarwellen konstant und gleich der Phasengeschwindigkeit). Ein Wellenpaket breitet sich ohne Änderung seiner Form mit der Gruppengeschwindigkeit aus, die im klassischen Fall identisch mit der Phasengeschwindigkeit ist. Harmonische Wellen können durch ihre Amplitude, ihre Frequenz (Kreisfrequenz) und ihre Wellenlänge (Wellenzahl) charakterisiert werden. Stehende Wellen setzen sich aus zwei entgegengesetzt laufenden Wellen zusammen, die ein stationäres Schwingungsmuster auf der Kette erzeugen. Die kleinste Eigenfrequenz wird als Grundschwingung, die anderen Eigenresonanzen als Oberschwingungen bezeichnet. Die Oberschwingungen vergrößern proportional zu ihrer Ordnungszahl die Anzahl Schwingungsknoten auf der Wellenmaschine.

### **5.3.2. Klein-Gordon-Wellen**

Für kleine Winkelausschläge aller Pendel auf der Feder-Pendelkette aus der Ruhelage heraus gilt die Klein-Gordon-Gleichung. Diese wurde ursprünglich für die Beschreibung von kräftefreien relativistischen Teilchen ohne Spin entwickelt. Sie lässt oberhalb einer charakteristischen Frequenz, der so genannten Cutoff-Frequenz, harmonische Wellenlösungen zu. Da die entsprechende Differentialgleichung linear ist, bleibt das Superpositionsprinzip erhalten. Dabei tritt aber im Gegensatz zu den klassischen Wellen Dispersion auf, d. h. das Verhältnis von Kreisfrequenz und Wellenzahl hängt jetzt von der Wellenzahl ab. Ein Wellenpaket ändert deshalb seine Form während seiner Ausbreitung. Die durch die Grenzggeschwindigkeit der Wellenmaschine normierte Gruppengeschwindigkeit ist umgekehrt proportional zur normierten Phasengeschwindigkeit. Amplitude, Frequenz und Wellenlänge bleiben aber charakteristische Parameter der harmonischen Klein-Gordon-Wellen. Stehende Wellen lassen sich in ähnlicher Weise wie bei klassischen Wellen erzeugen. Wegen der Dispersion ändern sich aber die Frequenzen der Eigenresonanzen bei gleicher Anzahl der Schwingungsknoten erheblich. Bei harmonischer Anregung der Feder-Pendel-Kette mit Frequenzen unterhalb der Cut-Off-Frequenz schwingt die gesamte Kette harmonisch mit örtlich exponentiell sich ändernder Amplitude, die nur in einem engen Bereich unterhalb der Cutoff-Frequenz davon abhängt, ob am Ende der Wellenmaschine ein festes oder ein loses Ende vorgegeben wird..

### **5.3.3. Kink- und Anti-Kink Solitonen-Wellen**

Für große Winkelausschläge der Pendel der Wellenmaschine gilt die Sinus-Gordon-Gleichung, wenn gleichzeitig die Winkeldifferenzen zwischen allen aufeinander folgenden Pendeln jeweils klein bleiben. Sie stellt die nichtlineare Erweiterung der Klein-Gordon-Gleichung dar, wobei aber wegen des nichtlinearen Terms das Superpositionsprinzip ungültig wird. Durch diese radikale Veränderung der Systemstruktur verlieren zuerst einmal alle bisher zur Beschreibung entwickelten Größen und Modelldetails wie harmonische Elementarwelle, Amplitude, Frequenz, Wellenlänge, Wellenpaket, Dispersion, Gruppengeschwindigkeit, stehende Welle, Eigenresonanzen in der bisher diskutierten Form ihre physikalische Bedeutung und Gültigkeit. Trotz der damit sich ergebenden Schwierigkeiten lassen sich mit elementaren mathematischen Methoden einfache lokale analytische Lösungen der Sinus-Gordon-Glei-

chung finden, wenn das bisher erfolgreiche Verfahren erneut eingesetzt wird, um Lösungen zu bestimmen die nur von der Phase abhängen. Diese werden im einfachsten Falle als Kink- oder Anti-Kink-Solitonen bezeichnet, die sich bei gleicher Ausbreitungsgeschwindigkeit nur in ihrem Drehsinn unterscheiden (Rechts- oder Linksschraube). Die Größen Kreisfrequenz, Phasengeschwindigkeit und Wellenzahl übernehmen dabei die Rolle von charakteristischen Parametern der Wellenmaschine. Diese können jeweils mit der Eigenfrequenz eines Pendels ohne Federkopplung und kleiner Schwingungsamplitude, der Grenzgeschwindigkeit als maximal mögliche Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Solitons auf der Feder-Pendel-Kette und dem Verhältnis von Kreisfrequenz und Grenzgeschwindigkeit identifiziert werden. Damit erhält man zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahl, wie zu erwarten ist, die gleiche Beziehung wie bei den bisher besprochenen Wellenformen, wenn Phasengeschwindigkeit und Grenzgeschwindigkeit identisch sind. Andere komplexere lokale Lösungen der Sinus-Gordon-Gleichung wie z. B. Breather-Solitonen bzw. Stöße zwischen Kink-Solitonen oder nichtlokale Lösungen wie z. B. helikale Wellen und Lösungen der Sinus-Gordon-Gleichung unter Berücksichtigung dissipativer Terme werden theoretisch hier nicht betrachtet, weil die Voraussetzungen dafür bei der Zielgruppe nicht vorhanden sein dürften und bei Bedarf mit Hilfe der angegebenen Fachliteratur erarbeitet werden können (s. Kap. 6.1.).

Ein zusätzlicher fundamentaler Modellansatz ergibt sich aus der Sinus-Gordon-Gleichung auf Grund der Tatsache, dass diese wie auch die Klein-Gordon- und die klassische Wellengleichung invariant gegenüber Lorentz-Transformationen ist, wenn die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum durch die Grenzgeschwindigkeit ersetzt wird. Kink- und Anti-Kink-Solitonen können daher als Modell für quasirelativistische Teilchen und Antiteilchen angesehen werden, da sie nur ganzzahlig auftreten, eine träge Masse (keine schwere Masse), einen Impuls und eine Energie besitzen, die bezogen auf die Grenzgeschwindigkeit der Wellenmaschine die gleiche Abhängigkeit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit aufweisen wie relativistische Teilchen bzw. Antiteilchen. Dabei gelten auch die bekannten Formeln für die relativistische Längenkontraktion der Halbwertsbreite, die Massenveränderlichkeit, die Einstein-Formel, der Impulssatz und die Newton Gleichung in ihrer Originalform.

#### **5.4. Fachdidaktische Hinweise und Experimente zu den drei Wellenklassen**

Auf der Grundlage der diskutierten theoretischen Herleitungen können für den Einsatz der entwickelten Wellenmaschine zahlreiche Experimente und Demonstrationen vorgeschlagen werden, die im Physikunterricht an höheren Schulen und in Anfängerveranstaltungen an Hochschulen mit Erfolg eingesetzt werden können. Ergänzend dazu werden viele kurze Videoclips zur Verfügung gestellt, die die Versuche und die Vorführung charakteristischer Phänomene und Effekte ergänzen und vereinfachen. Teilweise können diese auch zur Auswertung von Messwerten herangezogen werden.

##### **5.4.1.. Fachdidaktische Hinweise**

Die genannte Zielgruppe der Schüler und Studierenden besitzt in der Regel Primärerfahrungen mit verschiedenen Wellenformen. Die damit verbundenen Modellvorstellungen beziehen sich dabei meist auf Wasser- und Schallwellen in ihrer klassischen Näherung und auf einige besonders auffällige Einzelphänomene (Brandungswellen, große Wellen zum Surfen, Tsunamiwellen, Monsterwellen, Überschallknall). Diese teilweise am Anfang noch unkoordinierten Erfahrungen sollten natürlich aus Gründen einer damit verbundenen intrinsischen Lernmotivation und einer erreichbaren Denkökonomie aktualisiert und eingesetzt werden, um sukzessive in die diskutierten Wellenmodelle in angemessenen Schritten einzuführen. Dabei können einige der ebenfalls angegebenen historischen und aktuellen Medien dieses Vorgehen besonders gut unterstützen. Die entwickelte Wellenmaschine mit den für Experimente und Demonstrationen optimierten Parametern erlaubt dann eine schrittweise Veranschaulichung der dargestellten Modellstufen. Die Beschränkung auf eindimensionale Versuchsanordnungen vereinfacht die Erkenntnisschritte wesentlich, aber nicht unzulässig und reduziert die Kosten

für Experimentiergeräte. Die mathematisch theoretische Behandlung kann in Stufen erfolgen, wobei bei allen betrachteten Wellentypen ähnliche Vorgehensweisen und angepasste elementare Methoden und bekannte Funktionen verwendet werden können.

#### **5.4.2. Experimente und Demonstrationen mit klassischen Wellen**

Wie die angegebenen Vorversuche (Versuch 1, 2 Videoclips) mit der Wellenmaschine in vertikaler Anordnung zeigen, ist der Einfluss der in der theoretischen Beschreibung dabei vernachlässigten Effekte so groß, dass diese experimentelle Anordnung ungeeignet ist, Eigenschaften und Verhalten von klassischen Wellen zu untersuchen und zu demonstrieren. Es wird daher empfohlen solche Experimente mit eigens dafür entwickelten üblichen Wellenmaschinen von Lehrmittelfirmen durchzuführen. Aus prinzipiellen Gründen wäre es aber sicherlich hilfreich, wenn Videoaufzeichnungen von einigen grundlegenden Experimenten mit der Wellenmaschine in schwebefreien Satelliten aufgezeichnet und für Unterrichtszwecke zur Verfügung gestellt werden könnten.

#### **5.4.3. Experimente und Demonstrationen mit Klein-Gordon-Wellen und -Schwingungen**

Im Gegensatz zu den Ausführungen in 4.2. zeigen die Experimente und Demonstrationen mit Klein-Gordon-Wellen und -Schwingungen (Versuche 2 bis 8, 20 Videoclips) ein sehr positives Bild. Dabei wurde die Ausbreitung von kurzen Pulsen oder harmonischen Wellen oberhalb der Cutoff-Frequenz in einem einheitlichen Medium und in zwei unterschiedlichen aneinandergrenzenden Medien untersucht. Bei fester Amplitude musste dabei die Frequenz der harmonischen Anregung in den interessanten Parameterbereichen unter- und oberhalb der Cutoff-Frequenz teilweise sehr genau eingestellt werden. Dadurch konnte die Existenz der Cutoff-Frequenz nachgewiesen, ihr Zahlenwert bestimmt und die Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert nachgewiesen werden. Gleichzeitig können Effekte, die durch die vorhandene Dispersion verursacht werden, quantitativ bestätigt werden. Dazu dient unter anderem die Bestimmung der Eigenresonanzen von stehenden Wellen mit unterschiedlicher Ordnung. Bei harmonischer Anregung mit Frequenzen unterhalb der Cutoff-Frequenz können entlang der Feder-Pendel-Kette die insgesamt synchronen Schwingungen generiert werden, deren Amplitude örtlich exponentiell abfällt und deren Form nur in einem schmalen Bereich unterhalb der Cutoff-Frequenz davon abhängt, ob ein festes oder ein loses Ende vorliegt. Beim Übergang eines kurzen Pulses oder einer harmonischen Klein-Gordon-Welle zwischen zwei verschiedenen Medien kann das theoretisch erwartete Verhalten qualitativ bestätigt werden.

#### **5.4.4. Experimente und Demonstrationen mit Sinus-Gordon-Wellen und Wasserwellen**

Wie zu erwarten war, liegt der Schwerpunkt für den Einsatz der vorgestellten Wellenmaschine bei Experimenten und Demonstrationen mit Kink- und/oder Ant-Kink-Solitonen (Versuch 9 bis 25, 62 Videoclips). In einem ersten Teil werden dabei im Einzelnen die manuelle Erzeugung und der daraus erkennbare Teilchencharakter von Kink- und Ant-Kink-Solitonen, ihre Ausbreitung auf der Feder-Pendel-Kette und ihre wesentlichen Eigenschaften erarbeitet. Zusätzlich werden Messverfahren für einige ihrer charakteristischen Parameter vorgestellt, angewandt und die Ergebnisse mit der theoretischen Beschreibung verglichen. Hierbei kann auch die Gültigkeit der quasirelativistischen Längenkontraktion der Solitonenhalbwertsbreite und die quasirelativistische Abhängigkeit der effektiven Solitonenmasse von seiner effektiven Ruhemasse und der Ausbreitungsgeschwindigkeit bestätigt werden. Dabei ersetzt die Grenzgeschwindigkeit der Wellenmaschine, die mit der Phasengeschwindigkeit für klassische Wellen übereinstimmt, die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Energie eines Solitons entspricht dabei der entsprechend modifizierten Einstein-Formel. Die Gültigkeit des Impulssatzes und der Newton-Gleichung in ihrer Originalform werden durch elastische Stoßversuche zwischen Kink- und/oder Anti-Kink-Solitonen in verschiedenen Anfangssituationen oder mit einer festen Wand demonstriert. Um zu zeigen, dass neben den Solitonen noch andere Wellenformen existieren, sind einige Demonstrationen mit Breather-Solitonen vorgesehen. Zum Vergleich werden einige Videoclips mit Solitonenwellen auf Wasseroberflächen angeboten, die entspre-

chend dem historischen Vorbild in einem für Experimente geeignet aufgebautem Wassertank aus Plexiglas aufgezeichnet wurden.

Im zweiten Teil der Versuche stehen Demonstrationen zum Teilchen-Antiteilchen-Modell im Vordergrund der Betrachtung. Neben den schon genannten Teilcheneigenschaften kann hier zuerst einmal die Paarerzeugung und Paarvernichtung eindrucksvoll in vielen Einzelheiten qualitativ veranschaulicht werden. Vorgänge an der Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien werden qualitativ aus einer Betrachtung der verschiedenen Energieanteile des Solitons erklärt. Damit wird dann auch eine eindrucksvolle Demonstration der Totalreflexion und des Tunneleffekts möglich. Da sich durch den Einbau eines oder mehrerer Einzelpendel mit einer Zusatzmasse am Pendelende oder eines Pendels mit reduziertem Drehmoment der Gravitationskraft repulsive oder attraktive lokale Änderungen der Parameter in die Feder-Pendel-Kette realisieren lassen, können zahlreiche Effekte in kristallinen Festkörpern mit entsprechenden Störstellen wie z. B. in Halbleitern simuliert werden. Dabei stehen zusammen mit dem variablen Abstand und den Eigenschaften der verschiedenen abstoßenden oder anziehenden Störstellen Möglichkeiten zur Verfügung, die Grundphänomene wie Reflexion, Durchdringung, Einfang, Löschung, Austausch, Schwingungsanregung, Resonanzschwingungen, Ausheizung, Emission von Streustrahlung mit ihren wesentlichen Voraussetzungen und Parameterabhängigkeiten sehr anschaulich zu demonstrieren.

## **6. Medien und Verweise auf die Anlagen zu dieser Arbeit**

### **6.1. Literatur und Computerprogramme**

1. Giese, W. u. D. Heimann: Tsunami – Eine Welle erschüttert die Welt. Hörbuch, ZDF, Mainz, (<http://www.zdf.de/ZDFportal/inhalt/31/0,6751,5238975,00.html>), April 2005.
2. Bormann, P.: Infoblatt Tsunami, 5/2005. GeoForschungszentrum Potsdam, in der Helmholtzgesellschaft, ([http://www.gfz-potsdam.de/bib/pub/m/infoblatt\\_tsunami.pdf](http://www.gfz-potsdam.de/bib/pub/m/infoblatt_tsunami.pdf)), Dezember 2006.
3. Freja, M.: Schiffe in Seenot. ZDF, Mainz, (<http://www.zdf.de/ZDFde/inhalt/15/0,1872,2123855,00.html>), Mai, 2004.
4. Russel, J. S.: Report on Waves. Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, York, September 1844, London 1845, pp 311-390, Plates XLVII-LVII.
5. Eilbeck, Ch.: John Scott Russell and the solitary wave. Dep. of Mathem., Heriot Watt Univ., Edinburgh, Jan. 2004, [http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott\\_russell.html](http://www.ma.hw.ac.uk/~chris/scott_russell.html).
6. Korteweg, D. J. a. H. De Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves. Phil. Mag. 39, 422-443, 1895.
7. Fermi, E., J. R. Pasta a. S. M. Ilam: Studies of nonlinear problems. Los Alamos Sci. Lab. Rep., LA-1940, 1955.
8. Zabusky, N. a. M. Kruskal: Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Lett., 15, 240-243, 1965.
9. Scott, A. C.: A nonlinear Klein-Gordon equation. Am. J. Phys. 37, 52-61, 1969.
10. Remoissenet, M.: Waves called solitons. Springer Verl., Berlin, 1993, 3<sup>rd</sup> edition 1999.
11. Srimshaw, R. H. J. (Ed.): Solitary Waves in Fluids. WITpress, 208 p., 2007.
12. Scott, A. (Ed.): Encyclopedia of Nonlinear Science. Taylor & Francis, Milton Park, 2004.
13. Dietrich, M.: Beschreibung und grundlegende Eigenschaften von Solitonen und ihre Demonstration und Messung mit Hilfe einfacher mechanischer Experimente. Staatsexamensarbeit, 109 S., Univ. d. Saarl., Fachb. Physik, Ref.: Prof. Dr. H.-J. Patt, Saarbrücken, 2000.
14. Dietrich, M. u. H.-J. Patt: Wellenmaschine zur Demonstration und Messung harmonischer und anharmonischer Wellenphänomene (Solitonen). Electr. - Media - CD 2001: Beitr. z. Frühjahrst. d. Fachverb. Didaktik der Physik in der DPG, Bremen, 2001 (Red.: V. Nordmeier, Münster), 11 S., ISBN 3-931253-87-2, 2001 (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
15. Rubinstein, P.: Sine-Gordon equation. J. Math. Phys. 11, 258-266, 1970.
16. Kuchling, H.: Taschenbuch der Physik. Fachbuchverlag, Leipzig, München, Wien, 16. Aufl., 1999.
17. Patt, H.-J.: Pendel mit harmonischer Modulation der Pendellänge oder mit erzwungener bzw. freier Bewegung des Aufhängepunktes. Electr. Media Public., 28 S., Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 2005 (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
18. Horizontale Demonstrationswellenmaschine oder Wellenmaschine nach Julius. 1. Conatex-Didactic, Neunkirchen (<http://www.conatex.com/shop/>), 2. LD-Didactic, Hürth (<http://www.leybold-didactic.com/shop/>) 3.

- Phywe Systeme, Göttingen (<http://shop.phywe.de/>).
19. Patt, H.-J.: COSIMEX für Windows - Computerunterstütztes SIMulieren und EXperimentieren - 1. Simulation von Systemmodellen, 2. Vergleich mit Systemmessgrößen. Version 4 für Windows 3.1x, 9.x, NT, ME, XP, ©-1995/2006: TeachPhysics, Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 2006 (<http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
  20. Stöcker, H. (Hrsg.): Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Harri Deutsch, Frankfurt, 4. Aufl., 2003.
  21. Lee, A.: VirtualDub - Windows-Programm, stabile Version 1.7.1, ©-1998-2007 (Free Software, GNU-Lizenz). <http://www.virtualdub.org/index>
  22. Conrad, H.-G. u. H.-J. Patt: Messung, Darstellung und Auswertung der Bahnkoordinaten eines Körpers bei ebenen Bewegungen mit Hilfe einer Videokamera und eines PCs. 90. Hauptversammlung der MNU, S.79, MNU Tagungsbericht, Saarbrücken, 1999.
  23. Kersting, Th., W. Hahn, V. Nordmeier, H.-J. Schlichting: „Viana 364“ Automatische VideoANalyse, Vers. 3.64, Freeware (nicht kommerziell), Uni Essen, Essen, 2003 (<http://didaktik.physik.uni-essen.de/viana>).
  24. Nemeč, P. u. H.-J. Patt: Relativistisches Ray-Tracing auf dem Personalcomputer. S. 379-384 in: Didaktik der Physik - Vorträge -, 60. Physikertagung, Jena 1996. Hrsg.: DPG, Fried.-Schiller-Universität, Jena, 1996.
  25. Patt, H.-J. u. P. Nemeč: Relativity for Windows. Programmpaket für PCs mit dem Betriebssystem Windows 3.x, 9x, NT 4.0, XP in der Programmiersprache Borland-C++, erweiterte Version 1.0, Sprache: Englisch-Deutsch, umschaltbar, mit Help Files – Hilfedateien (52 S.), mit Tutorial – Tutorium (55 S.) und 160 Parameterdateien, ISBN-Nr. 3-540-14735-7, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2000.
  26. Einstein, A.: Zur Elektrodynamik bewegter Körper. Ann. d. Phys. 17, 891, 1905.
  27. Dmitriyev, V. P.: Towards an exact mechanical analogy of particles and fields. Nuovo Cimento, 111A, 5, 501-511, 1998.
  28. Dmitriyev, V. P.: Mechanical analogies for the Lorentz gauge, particles and antiparticles. Apeiron, 7, <sup>3</sup>/<sub>4</sub>, 173-183, 2000.
  29. Dietrich, M. u. H.-J. Patt: Videoclips zur nichtlinearen Wellenmaschine. ©-2000, TeachPhysics, Univ. d. Saarl., Saarbrücken, 2000/2007 (Auswahl in <http://www.uni-saarland.de/fak7/patt/welcome.html>).
  30. Genz, H., F. Staudemaier u. F. Kaiser: Solitonen. 16-mm-Film C1365, Inst. f. wissensch. Film (IWF), Göttingen, 1980.
  31. Koppelman, G., N. Hensel, H. Rechner u. M. Totzeck: Quasiteilchen I: Pendelketten-Solitonen, II: Solitonen und Antisolitonen, III: Solitonen in Medien mit Störstellen und Grenzflächen. Super8-Filme, Inst. f. wissensch. Film (IWF), Göttingen, 1988 (DVD-Kopien 2002-2005) .
  32. Geregelter Experimentiermotor mit Untersetzungsgetriebe 1:63. Conatex-Didactic-Lehrmittel, 66514 Neunkirchen (<http://www.conatex.com/shop/>).
  33. Dugald Duncan/Heriot-Watt University: John Scott Russel's Soliton Wave Re-created. Edinburgh, 1995 (150 Jahre nach der Erstveröffentlichung [4]) (<http://www.ma.hw.ac.uk/solitons/press.html>).
  34. Koppelman, G., N. Hensel u. M. Totzeck: Pendelkettensolitonen als Quasiteilchen und -antiteilchen. Praxis d. Naturw. (Physik), S. 35-38, 1991.
  35. Kittel, Ch.: Einführung in die Festkörperphysik. Oldenbourg, München, 14. Aufl., 2006 (1. Aufl. 1953).
  36. Koppelman, G. u. N. Hensel: Quasiteilchen in Systemen mit Störstellen und Mediengrenzen. Praxis d. Naturw. (Physik), S. 28-34, 1991.

## **6.2. Anlage „Cosimex-Parameter- und -Bilddateien zur nichtlinearen Wellenmaschine“**

In den im Text verwendeten Abbildungen, die mit dem Programm „COSIMEX für Windows“ [19] berechnet wurden, sind die Namen der dazu jeweils verwendeten Systemdateien in der Abbildungsunterschrift angegeben. Die Dateinamen haben dabei die Form „[U][O][B].PA[O]“. „U“ ist die Kurzform des Systemnamens „A“, der zur eindeutigen Kennzeichnung des untersuchten Systems festgelegt wird (Langform „A“: ein bis maximal 15 Zeichen, Kurzform „U“: ein bis maximal fünf der ersten Zeichen von A [Großbuchstaben, \_], ' ' nur ab dem 2. Zeichen). „O“ gibt die Modellnummer des simulierten Systems an (O = 1 : Beschreibung durch explizite Funktionen (Relationen), O = 2 : Beschreibung durch Differenzgleichungen, O = 3 : Beschreibung durch Differentialgleichungen). „B“ ist eine laufende Nummer (B beginnt bei 0 und besitzt soviel Stellen, dass die Gesamtzahl der Zeichen des vorderen Dateinamens immer 8 beträgt), die unterschiedliche Berechnungen für das betrachtete System charakterisiert. Die Extension „PA[O]“ identifiziert die Datei als Cosimex-Systemdatei des Modells „O“. Auf diese Weise kann bereits aus dem Dateinamen memnotechnisch relativ leicht auf wichtige Systemgrößen geschlossen und so die Auswahl des gesuchten Datensatzes erleichtert werden. Wenn bei gleichem Namen die Datei die Extension „TXT“ besitzt, handelt es sich um eine Cosimex-Parameterdatei im „ASCII“-Format (maximal 74 Zeichen pro Zeile), die zum Betrachten oder Ausdrucken der benutzten Größen und Parameter der Simulation und eventuell der integrierten Messwerte verwendet werden kann. In gleicher Weise charakterisieren

die Extensionen „JPG“ bzw. „BMP“ die zugehörigen Bilddateien mit den berechneten Graphen und eventuellen Messwerten. Alle verwendeten Dateien, deren Namen hier noch einmal zusammengefasst werden, sind in der Anlage zu dieser Arbeit in komprimierter Form beigelegt (**Anlage „Cosimex-Parameter- und -Bilddateien** („zip“-Datei): „SO\_PARAM.ZIP“, **17 Cosimex-Systemdateien, 7 Messwertdateien, 1 Tabelle** in 2 Formaten: **Tabelle.doc** und **Tabelle.pdf**).

**1. Unterordner:** „WEL\_KLAS“, Systemname in Langform: „WEL\_OHNE\_DISPERS“ (Verhalten und Eigenschaften von Lösungen der klassischen Wellengleichung ohne Dispersion): WEL\_O100.PA1, WEL\_O101.PA1, WEL\_O102.PA1 (**3 Systemdateien**, s. auch Kap. 3.1. und 4.1.).

**2. Unterordner:** „WEL\_KLGO“, Systemname in Langform: „WEL\_MIT\_DISPERS“ (Verhalten und Eigenschaften von Klein-Gordon-Wellen mit Dispersion und von Klein-Gordon-Schwingungen): WEL\_M100.PA1, WEL\_M101.PA1, WEL\_M102.PA1, WEL\_M103.PA1, WEL\_M104.PA1, WEL\_M105.PA1, WEL\_M106.PA1 (**7 Systemdateien**, s. auch Kap. 3.2. und 4.2.), WEL\_M16M (**1 Messwertdatei**, s. Kap.4.2.), **Tabelle.pdf** oder **Tabelle.doc** (**1 Tabelle**, s. **Tab. 3** und Kap. 4.3.).

**3. Unterordner:** „WEL\_SOLI“, Systemname in Langform: „WEL\_SOLITONEN“ (Verhalten und Eigenschaften von Kink- und Anti-Kink-Solitonen): WEL\_S100.PA1, WEL\_S101.PA1, WEL\_S102.PA1, WEL\_S103.PA1, WEL\_S104.PA1, WEL\_S300.PA3, WEL\_S301.PA3 (**7 Systemdateien**, s. auch Kap. 3.3. und 4.3. bis 4.6.), KINK100O.TXT, KINK10SN.TXT, KINK140O.txt, KINK14SN.TXT, KINK150O.TXT, KINK15SN.TXT (**6 Messwertdateien**, s. Kap.4.3.), **Tabelle.pdf** oder **Tabelle.doc** (**1 Tabelle** in 2 Formaten, s. **Tab. 1** und Kap. 3. bzw. **Tab. 2** und Kap 3.3.).

### **6.3. Anlage „Videoclips zur nichtlinearen Wellenmaschine“**

In der Anlage zur Arbeit „Videoclips zur nichtlinearen-Wellenmaschine“ [29] sind verschiedene Videoaufzeichnungen von typischen Demonstrationen und Experimenten mit der vorgestellten Schraubenfeder-Schwerpendel-Wellenmaschine (**84 Videoclips**) in zwei Gruppen mit vier bzw. neun zweckmäßigen Untergruppen (**22 und 62 Videoclips**) zusammengefasst. Sie wurden mit einem Camcorder im „avi“-Format von Microsoft® (Auflösung [Pixel]: 320 x 240, 10 Bilder/s,  $\Delta t = 100$  ms) aufgezeichnet [13], dann mit dem Programm VirtualDub [21] an die PAL-Fernsehnorm angepasst (25 Bilder/s,  $\Delta t = 25$  ms) und anschließend zur wesentlichen Verringerung ihrer Speichergröße in das „DivX“-Media-Format von DivX® umgewandelt [29]. Zur Auswertung und zum Abspielen der Videos wird der DivX®-Codec benötigt (Free Software: <http://www.divx.com>). Alle Videos sind urheberrechtlich geschützt, können aber in einer Auswahl für die Verwendung im Unterricht an öffentlichen Schulen und der Lehre an Hochschulen im Internet heruntergeladen und verwendet werden. Sie können mit dem DivX-Player, aktuelle Version 6.4.3, ©-2000-2007, DivX®-Networks (Free Software for Windows®-98/Me/XP, <http://www.divx.com>), dem Real-Standard-Player, aktuelle Version 10.5, ©-1995-2004, Real Networks® (Free Software for Windows®-98/Me/XP: <http://germany.real.com/player/?&src=ZG.de.idx.ZG.de.rp.rp.hd.def>), dem Windows-Media-Player, aktuelle Version 11.0, ©-1996-2007, Microsoft® Corporation (Windows®-XP: <http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?FamilyID=1d224714-e238-4e45-8668-5166114010ca&DisplayLang=de>, Windows®-Media-Player, Version 9, ©-2003 for Windows®-98/Me/2000: <http://www.microsoft.com/downloads/details.aspx?FamilyID=e0175119-9a5b-44c3-b1de-9b2a9aa6cff6&displaylang=en>) oder dem bereits genannten Programm [21] abgespielt werden. Die DivX-Media-Format-Extension „divx“ kann bei vorhandenem DivX-Codec 6 problemlos in die Microsoft-Media-Format-Extension „avi“ umbenannt werden.

1. **Gruppe „WEL\_LINE“** (Ordnername): Lineare und quasilineare Schwingungen und Wellen (**22 Videoclips**, s. Kap. 4.1. und 4.2., Versuche 1 bis 8, Untergruppen in alphabetischer Reihenfolge).

**Untergruppe 1.1. „SCHW\_EXP“** (Ordnername): Schwingungen der Feder-Pendel-Kette bei harmonischer Anregung mit örtlich exponentiell abnehmender Amplitude bei festem und losen Ende (**4 Videoclips**).  
Dateinamen: ScExHaF1.AVI, ScExHaF2.AVI, ScExHaF3.AVI, ScExHaO1.AVI.

**Untergruppe 1.2. „WEL\_HARM“** (Ordnername): Anregung und Ausbreitung von harmonischen Klein-Gordon-Wellen auf der Feder-Pendel-Kette in einem oder zwei verschiedenen Medien (**7 Videoclips**).  
Dateinamen: WeAnHa01.AVI, WeLaHa11.AVI, WeLaHa12.AVI, WeLaHa13.AVI, WeLaHa14.AVI, WeLaHa21.AVI, WeLaHa31.AVI.

**Untergruppe 1.3. „WEL\_PULS“** (Ordnername): Anregung von kurzen Pulsen kleiner Amplitude und ihre Ausbreitung auf der Feder-Pendel-Kette in horizontaler und in senkrechter Anordnung (**5 Videoclips**).  
Dateinamen: WeLaPu11.AVI, WeLaPu12.AVI, WeLaPu21.AVI, WeLaPuS1.AVI, WeLaPuS2.AVI.

**Untergruppe 1.4. „WEL\_STEH“** (Ordnername): Harmonische Anregung stehender Klein-Gordon-Wellen verschiedener Ordnung auf der Feder-Pendel-Kette (**6 Videoclips**).  
Dateinamen: WeStHa01.AVI, WeStHa11.AVI, WeStHa30.AVI, WeStHa50.AVI, WeStHa70.AVI,

WeStHa90.AVI.

2. **Gruppe „WEL\_NLIN“** (Ordnername): Nichtlineare Wellenphänomene (**62 Videoclips**, s. Kap. 4.3. bis 4.7., Versuche 9 bis 25, Untergruppen in alphabetischer Reihenfolge).
  - Untergruppe 2.1. „SOL\_ATT1“** (Ordnername): Demonstrationen von Effekten mit Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Kette mit einer attraktiven Störstelle (**7 Videoclips**)  
Dateinamen: SolR0Dur.AVI, SolR0Ein.AVI, SolR1LBr.AVI, SolR1LSo.AVI, SolR1LTe.AVI, SolR1Ref.AVI, SolR1Sch.AVI.
  - Untergruppe 2.2. „SOL\_BREA“** (Ordnername): Demonstration von Breather-Phänomenen auf der Feder-Pendel-Kette (**2 Videoclips**)  
Dateinamen: BreaSchr.AVI, BreaSenk.AVI.
  - Untergruppe 2.3. „SOL\_EIGE“** (Ordnername): Darstellung von Kink- und Anti-Kink-Solitonen auf der horizontal oder vertikal angeordneten Feder-Pendel-Kette (**5 Videoclips**)  
Dateinamen: SolAKiH1.AVI, SolKinH1.AVI, SolKinH2.AVI, SolKinV1.AVI, SolKinV2.AVI.
  - Untergruppe 2.4. „SOL\_ERZM“** (Ordnername): Manuelle Erzeugung von einem oder mehreren Kink- oder Anti-Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Kette (**3 Videoclips**)  
Dateinamen: SolErz10.AVI, SolErz15.AVI, SolErz20.AVI.
  - Untergruppe 2.5. „SOL\_MED2“** (Ordnername): Ausbreitung von Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Kette in zwei verschiedenen Medien (**9 Videoclips**).  
Dateinamen: SoM12T1.AVI, SoM12Re1.AVI, SoM12Re2.AVI, SoM12Re3.AVI, SoM12Ru1.AVI, SoM12Tr1.AVI, SoM12Tr2.AVI, SoM21Tr1.AVI, SoM21Tr2.AVI.
  - Untergruppe 2.6. „SOL\_REP1“** (Ordnername): Demonstrationen von Effekten mit Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Kette mit einer repulsiven Störstelle (**4 Videoclips**)  
Dateinamen: SolDur01.AVI, SolDur02.AVI, SolEmi01.AVI, SolRef01.AVI.
  - Untergruppe 2.7. „SOL\_REP2“** (Ordnername): Verhalten von einem, zwei oder drei Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Kette mit zwei repulsiven Störstellen (**14 Videoclips**).  
Dateinamen: S1R0DA08.AVI, S1R0EA08.AVI, S1R0EA10.AVI, S1R0EA13.AVI, S1R0EA18.AVI, S1R0RA08.AVI, S2R1DA33.AVI, S2R1EA20.AVI, S2R1LA08.AVI, S2R1RA08.AVI, S2R2SA26.AVI, S2R2SA34.AVI, S3R2DA46.AVI, S3R2LA20.AVI.
  - Untergruppe 2.8. „SOL\_STOS“** (Ordnername): Stöße zwischen Kink- und/oder Anti-Kink-Solitonen auf der Feder-Pendel-Kette (**14 Videoclips**)  
Dateinamen: SolAKER1.AVI, SolAKVe1.AVI, SolAKVe2.AVI, SolAKVe3.AVI, StoAKBe1.AVI, SolAKBe2.AVI, StoKKB1.AVI, StoKKB2.AVI, StoKKB3.AVI, StoKKB4.AVI, StoKKRu1.AVI, StoKKRu2.AVI, StoKKRu3.AVI, StoKKWa1.AVI.
  - Untergruppe 2.9. „SOL\_WASS“** (Ordnername): Demonstration von Solitonen in einem Wassertank aus Plexiglas (**4 Videoclips**)  
Dateinamen: SolWas11.AVI, SolWas21.AVI, SolWas22.AVI, SolWas23.AVI.