

**Ein Resolutionskalkül für eine  
Logik mit unscharf definierten  
Prädikaten**

Detlef Fehrer  
SEKI Working Paper SWP-89-3



# **Ein Resolutionskalkül für eine Logik mit unscharf definierten Prädikaten**

*Detlef Fehrer*

*Fachbereich Informatik, Universität Kaiserslautern  
Postfach 3049, D-6750 Kaiserslautern, W.-Germany*



*Allen  
Spät:en  
und Spät:innen,  
sowie den Schildkröten  
gewidmet*



## **Abstract:**

Eine für das menschlichen Denken charakteristische Vorgehensweise ist es, Objekte nach verschiedenen Kriterien zu klassifizieren. Dabei tritt jedoch häufig das Phänomen auf, daß die einzelnen Konzepte nicht scharf gegeneinander abgegrenzt sind.

Thema dieser Arbeit ist es, diesen Sachverhalt für das automatische Beweisen zugänglich zu machen. Dazu werden zunächst alle Begriffe, die sich auf dasselbe Kriterium beziehen, zusammengefaßt und auf ein gemeinsames „Tiefenprädikat“ abgebildet. Die Abbildung ist rein syntaktischer Natur und wirft keine besonderen Probleme auf.

Die Tiefenprädikate besitzen jedoch, um den semantischen Zusammenhang herauszustellen, als zusätzliches Argument Mengen von Werten aus einer für den Diskursbereich charakterischen Größe. Dieses ist kein Term im üblichen prädikatenlogischen Sinne, so daß eine neue Logik, in der diese speziellen Argumente korrekt interpretiert werden, entwickelt werden mußte. Diese Logik ist eine Verallgemeinerung der Prädikatenlogik erster Stufe, wenngleich sie, was die Ausdrucksmächtigkeit betrifft, zu dieser äquivalent ist.

Weiterhin wird ein Resolutionskalkül angegeben, der mit den Formeln der neuen Logik operiert. Zwar ließen sich alle Formelmengen auch innerhalb der Prädikatenlogik darstellen, doch die neuen Formelmengen sind nicht nur für einen menschlichen Leser kompakter und daher besser lesbar, sondern auch aus der Sicht eines automatischen Beweisers ist die Ableitung „einfacher“, da ein einzelner Inferenzschritt mehreren Schritten in der prädikatenlogischen Modellierung entspricht. Dadurch werden die Beweise kürzer und (lokal) zielgerichteter.



## **Inhalt:**

1. Einführung	S. 1
2. Die Theorie der Partitionierungen	S. 9
3. Syntax und Semantik des PV1	S.20
4. Das Verhältnis des PV1 zum PK1	S.26
5. Herbrandinterpretationen und semantische Bäume für den PV1	S.33
6. PV-Resolution	S.43
7. Anwendbarkeit und Probleme	S.54
7.1 Das Problem der Rücktransformation	S.57
7.2 Das Problem der Zielklausel-Erzeugung	S.58
7.3 Das Problem der funktionalen Abhängigkeiten	S.58
7.4 Das Problem der endlichen Darstellung	S.61
7.5 Das Unschärfeproblem	S.62
8. Der PV2 als mögliche Lösung des Unschärfeproblems	S.63
9. Zusammenfassung und Ausblick	S.68
Anhang A: Index	S.70
Anhang B: Benutzte Schreibweisen und Abkürzungen	S.73
Anhang C: Literatur	S.75



Achilles: *Manchmal verwirren mich Ihre Ablenkungsmanöver so sehr, daß ich nicht mehr sagen kann, ob wir uns über etwas absolut Triviales oder über etwas Tiefsinniges und Gewichtiges streiten.*

Schildkröte: *Ich versichere Ihnen, Achilles, Schildkröten vergeuden ihre Zeit nicht auf Trivialitäten. Daher trifft letzteres zu.*

*D. R. Hofstadter<sup>1</sup>*

## **1 Einführung:**

Menschliches Wissen und die darauf aufbauende Argumentation ist in vielfältiger Weise unscharf und vage. Diese Unschärfe kann ihre Ursache sowohl darin haben, daß die betrachteten Objekte tatsächlich inhärent die Eigenschaft der Vagheit haben, oder aber, daß dies zwar nicht gilt, jedoch genauere Information nur sehr schwer oder zum gewünschten Zeitpunkt eventuell gar nicht oder nicht schnell genug beschafft werden kann. Wir wollen uns hier nicht über die Gründe für Unschärfe unterhalten, sondern es einfach als gegeben hinnehmen, daß Menschen im allgemeinen mit unscharfen Konzepten operieren.

Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, für einen ganz bestimmten Typus unscharfer Begrifflichkeit einen Kalkül zu schaffen, der auf dem Prädikatenkalkül erster Stufe (im folgenden stets PK1) aufsetzt. Dessen Kenntnis, einiges Wissen über seine Anwendung und Grenzen, sowie Kenntnis des Resolutionsprinzips<sup>2</sup> werden beim Leser vorausgesetzt.

Zur Heranführung an die hier betrachtete Problematik werden zunächst einige Beispiele betrachtet, wobei die an den zu entwerfenden Kalkül gestellten Forderungen Stück für Stück in einer zuerst anschaulichen und informellen Weise herausgearbeitet werden. Dabei werden wir Konventionen der Schreibweise, auch wenn sie erst an späterer Stelle eingeführt werden, im Interesse einer durchgängigen Darstellung schon verwenden.

---

<sup>1</sup>in [Hofstadter 85], S. 193

<sup>2</sup>Es genügt jedoch das Wissen, das aus Standardlehrbüchern wie beispielsweise [Nilsson 71, Charniak & McDermott 85, Rich 83, Chang & Lee 73] zu entnehmen ist. Auch wird nicht die Notation eines speziellen Autors übernommen, wenngleich sich diese Arbeit im Aufbau stark an [Chang & Lee 73] anlehnt.

Nehmen wir einmal an, wir wollten argumentieren über Dinge, die im wesentlichen mit Temperaturangaben zu tun haben und hätten dazu einstellige Prädikate der Art KALT(x), WARM(x), HEISS(x), LAUWARM(x) und dergleichen eingeführt. Als Axiome seien die Fakten

- (i)  $\forall x \text{ WARM(wetter)} \Rightarrow \text{FÜHLT-SICH-WOHL}(x)$       und  
 (ii)  $\text{LAUWARM(wetter)}$

gegeben.

Zu behandeln sei nun die Frage, ob sich ein bestimmtes Individuum, nennen wir ihn Tristan, wohlfühlt, d.h. ob der Satz

FÜHLT-SICH-WOHL(tristan)

ableitbar ist.

Bei Beschränkung auf den PK1 ist (ohne Hinzufügung weiterer Axiome) an eine derartige Ableitung nicht im entferntesten zu denken. Woran liegt das?

Zunächst ist festzustellen, daß die suggestiv gewählten Namen der Prädikate nicht darüber hinwegtäuschen dürfen, daß z.B. zwischen KALT(wetter) und EISKALT(wetter) keinerlei Zusammenhang besteht, falls dieser nicht explizit (d.h. als Axiom) angegeben wird. Die Prädikatensymbole sind für den Kalkül austauschbare Bezeichner, und nichts deutet darauf hin, daß sie Aussagen über ein gemeinsames Gebiet beinhalten.

Im PK1 steht uns natürlich, wie schon erwähnt, die Möglichkeit offen, solche Zusammenhänge herzustellen. Zum Beispiel könnten wir die Ausschließlichkeit der Prädikate KALT und WARM beschreiben als

$$\forall x \text{ KALT}(x) \Leftrightarrow \neg \text{WARM}(x).$$

Dies mag zwar noch angehen, wenn lediglich diese beiden Prädikate existieren. Je zahlreicher die Nuancierungen jedoch werden, desto komplizierter werden auch ihre Zusammenhänge und desto unüberschaubarer die Formelflut. Immerhin müßte diese ja von Hand aufgestellt werden. Zum anderen entsprechen auch die exakten gegenseitigen Ausschlüsse nicht dem Gebrauch derartiger Prädikate im Alltag. So denken wir uns die Temperaturgrenzen von WARM und LAUWARM sicher als überlappend.

Die hier verfolgte Idee ist es, Prädikate, die sich auf eine gemeinsame Domäne beziehen, auf ein einziges Prädikat abzubilden. Die entscheidende Beobachtung ist nämlich, daß all diese Prädikate Aussagen über die Temperatur machen. KALT(wetter) wird von uns so interpretiert, daß die Temperatur beispielsweise zwischen  $-273$  und  $+10$  °C liegt. Daher ließe sich KALT(wetter) auch ausdrücken als  $\text{Temperatur(wetter)} \in [-273, 10]$  oder als zweistelliges Prädikat  $\text{TEMPERATUR(wetter, } [-273, 10])$ .<sup>3</sup> Denkbare Zuordnungen für einige Prädikate wären dann

KALT	-273 ... 10°C
WARM	20 ... 35°C
HEISS	40 ... ∞°C
EISKALT	-273 ... -10°C
LAUWARM	15 ... 25°C
KOCHEND	60 ... 100°C

Diese **Oberflächenprädikate** ließen sich nun auf das gemeinsame Tiefenprädikat TEMPERATUR mit dem jeweiligen Intervall als Zusatzargument abbilden. Auf den ersten Blick scheint dies lediglich ein Codierungstrick innerhalb des normalen prädikatenlogischen Rahmens zu sein, so daß es gar nicht nötig wäre, deswegen einen neuen Kalkül einzuführen. Unglücklicherweise ist aber das Intervall an der zweiten Argumentenstelle kein normaler Term, der in der üblichen prädikatenlogischen Weise interpretiert werden kann. Dieses Argument bezeichnet vielmehr unmittelbar ein Objekt in einer ganz konkreten Interpretation, in unserem Falle den reellen Zahlen.

Es ist bekannt, daß sich die reellen Zahlen nicht in Prädikatenlogik erster Ordnung axiomatisieren lassen. Wenn aber konkrete Intervalle vorliegen, kann man sehr wohl Operationen wie Vereinigung, Durchschnitts- und Komplementbildung darauf ausführen. Es sollte sich daher ein Kalkül finden lassen, der in geeigneter Weise symbolisches Rechnen und Rechnen in konkreten Interpretationen vereinigt. Um uns nicht von vornherein auf den Fall der reellen Zahlen einzuengen, abstrahieren wir im folgenden davon und betrachten allgemein Mengen und deren Teilmengen. In einer zu implementierenden Anwendung muß jedoch immer eine Repräsentation der jeweils betrachteten Mengen gefunden werden, die eine algorithmische Durchführung der üblichen Mengenoperationen erlauben<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Natürlich erscheint eine Angabe von derart festen Grenzen etwas rüde. Wir werden jedoch zunächst mit dieser zugegebenermaßen stark vereinfachten Sicht weiterarbeiten und in Kapitel 8 dann eine mögliche Erweiterung diskutieren.

<sup>4</sup>vergleiche dazu Kapitel 7.4

Aus der Sicht eines Anwenders sieht das von uns zu realisierende Programm folgendermaßen aus:

- Es werden Gruppen von zusammengehörigen Oberflächenprädikaten identifiziert, z.B. {KALT, WARM, HEISS, EISKALT, LAUWARM, KOCHEND}, {VOR, HINTER, RECHTS-VON, LINKS-VON}, {SCHLAU, DUMM, DURCHSCHNITTLICH}, {NÜCHTERN, BESCHWIPST, BETRUNKEN} etc.
- Für jede Gruppe wird eine charakteristische Größe angegeben, deren Werte über einer ebenfalls anzugebenden Menge variieren. Diese **Variationsmenge** wird eindeutig der Gruppe zugeordnet. Für die obigen Beispiele wären das etwa: Temperatur (innerhalb von  $[-273, \infty]$ ), Koordinaten im  $\mathbb{R}^2$ , Intelligenzquotient (innerhalb von  $[0, 150]$ ), Alkoholspiegel (innerhalb von  $[0, 5]$ ).
- Alle Oberflächenprädikate aus einer Gruppe werden auf ein gemeinsames Tiefenprädikat abgebildet, welches eine Teilmenge der Variationsmenge als zusätzliches, ausgezeichnetes Argument erhält. Die genaue Zuordnungsvorschrift muß einmalig festgelegt werden.
- Theoreme können nun ohne Wissen des Benutzers über die Existenz der Tiefenrepräsentation unter Verwendung lediglich der Oberflächenprädikate angegeben und automatisch in die Tiefensyntax übersetzt werden, in der dann der eigentliche Beweis erfolgt.

Um dieses Vorhaben umzusetzen, brauchen wir daher eine Logik, in der die speziellen Argumente korrekt interpretiert werden, sowie einen Kalkül, der damit umgehen kann. In dieser Arbeit soll - unabhängig von der speziellen Struktur der Variationsmengen - der abstrakte Kalkül ausgearbeitet werden.

In unserem Beispiel wählen wir uns als Tiefenprädikat TEMP. TEMP erhält zwei Argumente, deren zweites das neu eingeführte spezielle Mengenargument ist. Um die ausgezeichnete Stellung dieses Arguments darzustellen, nehmen wir es nicht in den Argumentvektor auf, sondern schreiben es gesondert als Index.

Die oben angegebenen Definitionen für die Temperaturprädikate würden beispielsweise übersetzt als

KALT(x)	→	TEMP <sub>[-273, 10]</sub> (x)
WARM(x)	→	TEMP <sub>[20, 35]</sub> (x)
HEISS(x)	→	TEMP <sub>[40, ∞]</sub> (x)
EISKALT(x)	→	TEMP <sub>[-273, -10]</sub> (x)
LAUWARM(x)	→	TEMP <sub>[15, 25]</sub> (x)
KOCHEND(x)	→	TEMP <sub>[60, 100]</sub> (x).

Wir können einen Ausdruck der Form

TEMP<sub>Temperaturbereich</sub> (Objekt)

interpretieren als Anwendung einer Funktion TEMP, die jedem Objekt Teilmengen des reellen Intervalls  $[-273, \infty]$  zuordnet. Wir wollen TEMP dennoch als ein Prädikat verstehen, und zwar als einen neuartigen Typ von Prädikat, ein sogenanntes **indiziertes Prädikat**. Mit der Schreibweise TEMP<sub>Temperaturbereich</sub> (x) wollen wir ausdrücken, daß sich die Temperatur des Objekts x innerhalb des angegebenen Temperaturbereichs befindet. Dies ist natürlich vom Wesen her nichts anderes, als wenn wir TEMP als Funktion TEMP: Objektmenge  $\rightarrow [-273, +\infty]$ , die Objekte auf Temperaturen abbildet, definiert und dann TEMP(x)  $\in$  Temperaturbereich geschrieben hätten. Dennoch ist die neu eingeführte Schreibweise besser mit unseren Vorstellungen in Einklang, denn uns schwebt folgende Interpretation vor:

Jedes Objekt hat exakt eine, wenn auch eventuell unbekannte, Temperatur. Diese befindet sich mit Sicherheit in der Grundmenge  $[-273, +\infty]$ , über der sie variieren kann. Daher rührt auch der bereits angegebene Name Variationsmenge. Die Indexmengen des Prädikats TEMP stellen Restriktionen für den Temperaturwert des Arguments dar. Je nachdem, ob diese Restriktion erfüllt ist oder nicht, kann nun TEMP<sub>Temperaturbereich</sub> (x) eine wahre oder falsche Aussage repräsentieren. Eben dies kommt in der Funktionsschreibweise schlecht zum Ausdruck.

Zur Festlegung der Semantik betrachten wir einmal den Fall, daß die Indexmenge nur ein einzelnes Element besitzt. Das Prädikat liefert den Wert wahr, falls dieser mit dem Temperaturwert des Objekts, das als Argument auftritt, übereinstimmt, ansonsten den Wert falsch. Da der Temperaturwert mit Sicherheit aus der Variationsmenge stammt, jedes Objekt aber genau eine Temperatur hat, gilt

- 
- (i)  $\forall x \in \text{Objekte } \exists y \in [-273, \infty] \text{ mit } \text{TEMP}_{\{y\}}(x) \quad \text{und}$   
(ii)  $\forall x \in \text{Objekte } (\text{TEMP}_{\{y\}}(x) = \text{TEMP}_{\{z\}}(x)) \Rightarrow ((y=z) \wedge (y \in [-273, \infty]))$ .

Wenn es möglich ist, diese Semantik im Kalkül selbst zu verankern, ergeben sich Folgerungen wie der wechselseitige Ausschluß der Prädikate HEISS und KALT, die Implikation EISKALT  $\Rightarrow$  KALT oder die Schlußfolgerung, daß, wenn für ein Objekt sowohl WARM als auch LAUWARM gilt, seine Temperatur zwischen 20 und 25 °C liegen muß, automatisch ohne Hinzufügung weiterer Formeln. Eben dies ist unsere Absicht. Es sollte dann möglich sein, aus den Formeln

- (i)  $\forall x \text{ WARM(wetter)} \Rightarrow \text{FÜHLT-SICH-WOHL(tristan)} \quad \text{und}$   
(ii)  $\text{LAUWARM(wetter)}$ ,

die umgeschrieben werden können zu

- (i)  $\text{TEMP}_{[-273, 20[ \cup ]35, \infty]}(\text{wetter}) \vee \text{FÜHLT-SICH-WOHL(tristan)}$   
(ii)  $\text{TEMP}_{[15, 25]}(\text{wetter})$ ,

in einem einzigen Ableitungsschritt die Folgerung

$$\text{FÜHLT-SICH-WOHL(tristan)} \vee \text{TEMP}_{[15, 20[}(\text{wetter})$$

zu erzeugen.

Der im folgenden beschriebene Kalkül leistet genau dies. Die Benennung **PV1** ist dabei in bewußter Analogie zu PK1, auf dem er aufsetzt, gewählt worden. PV steht für **Prädikate über einer Variationsmenge**, die 1 versinnbildlicht „erste Stufe“, da schon eine Erweiterung in Vorbereitung ist, von der in Kapitel 8 die Rede sein wird.

Unsere weitere Vorgehensweise wird sein, zunächst die Syntax der Logik und anschließend die intendierte Semantik formal zu beschreiben (Kapitel 3). In Kapitel 4 wird dann die Stellung der neuen Logik gegenüber dem PK1 analysiert. Der eigentliche Inferenzmechanismus und seine Eigenschaften werden in Kapitel 6 behandelt, wobei in Kapitel 5 die dafür benötigten Konzepte eingeführt werden. Kapitel 7 ist der Praxis gewidmet. Hier wird aufgezeigt, was man mit dem Kalkül anfangen kann, jedoch auch, wo seine Grenzen sind. Die schon angedeutete Erweiterung (Kapitel 8) und ein zusammenfassender Ausblick (Kapitel 9) runden das Ganze ab.

Wir werden in dieser Arbeit zurückgreifen auf mehrere Begriffe der Logik und der elementaren Mengenlehre. Speziellere Konzepte und Aussagen werden in Kapitel 2 gesondert behandelt. Hier sollen nur einmal kurz die wichtigsten Schreibweisen wiederholt werden.

Die logischen Junktoren Und und Oder schreiben wir als  $\wedge$  (Konjunktion) und  $\vee$  (Disjunktion). Die Implikation und die Äquivalenz drücken wir durch  $\Rightarrow$  bzw.  $\Leftrightarrow$  aus, um sie von allgemeineren Abbildungsvorschriften, die mit  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  bezeichnet werden, zu unterscheiden. Für die Negation wird der Operator  $\neg$  verwendet. Die logischen Wahrheitswerte wahr und falsch schreiben wir als **t** und **f**. Weiterhin verwenden wir die Quantoren  $\forall$  und  $\exists$  mit der Bedeutung „für alle“ respektive „es existiert ein“.

Wir bezeichnen Mengen mit großen (meist lateinischen, in besonderen Fällen jedoch auch griechischen) Buchstaben. Die Zugehörigkeit eines Elements  $a$  zu einer Menge  $A$  wird ausgedrückt als  $a \in A$ , die Nichtzugehörigkeit durch  $a \notin A$ . Neben den üblichen Mengenoperatoren  $\cup$  (Vereinigung) und  $\cap$  (Schnitt) benutzen wir auch noch die Mengendifferenz  $\setminus$ .

Teilmengenbeziehungen werden durch  $\subseteq$  symbolisiert, sowie durch  $\subset$ , wenn es sich um echte Teilmengen handelt. Die leere Menge wird charakterisiert durch  $\emptyset$ . Als weiterer wichtiger Begriff wäre noch die Potenzmenge zu nennen, die wir mit  $\mathcal{P}(A)$  bezeichnen.

Weiterhin verwenden wir die Kurzschreibweise  $D^n$  für das kartesische Produkt  $D \times D \times \dots \times D$  ( $n$  Faktoren), sowie den Operator  $||$ , um, abhängig vom Argument, die Kardinalität einer Menge bzw. die Stelligkeit einer Funktion (oder eines Prädikats) anzugeben.

Sehr häufig werden wir auch Indizierung verwenden. Je nach Bedarf werden die Indices tief- oder hochgestellt, in einigen Fällen wird auch beides gleichzeitig vorkommen. Sofern nichts anderes vermerkt ist, dient als Indexmenge die Menge der positiven ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}^+$ . Wir geben dann den Laufbereich des Index einfach als z.B.  $1 \leq i \leq 23$  an, ohne die Trägermenge explizit zu erwähnen.

Für Operationen, die über alle Elemente einer indizierten Menge durchgeführt werden sollen, verwenden wir in Anlehnung an die Summenschreibweise vergrößerte Symbole der Operatoren ( $\bigcup$ ,  $\bigcap$ ,  $\bigwedge$ ,  $\bigvee$ ) und geben einen Laufindex an. Abweichend in der Schreibweise sind hier nur die traditionell verwandten  $\Sigma$  (Summation) und  $\Pi$  (Produktbildung).

---

Tupel (beispielsweise von Argumenten für eine Funktion) werden wir wahlweise als solche aufführen oder kurz als Vektor notieren. So sind die Schreibweisen  $t$  und  $(t_1, \dots, t_n)$  als äquivalent zu betrachten, wenn die Stelligkeit aus dem Zusammenhang hervorgeht oder keine Rolle spielt.

Alle weiteren Schreibweisen werden an der Stelle, an der sie zum erstenmal benutzt werden, erklärt. Außerdem sind noch einmal alle verwendeten Bezeichnungen in Anhang B zusammengestellt.

## 2 Die Theorie der Partitionierungen:

Bevor wir uns der Definition der Syntax des PVI zuwenden, werden wir zunächst einige Konstrukte einführen, die uns die Beschreibung und vor allem die später auftauchenden Beweise sehr erleichtern werden. Wir werden sie erst in Kapitel 4 benötigen, daher ist es möglich, dieses Kapitel zunächst zu überspringen. Die „Theorie der Partitionierungen“, mit der wir uns hier beschäftigen werden, ist eine eigens zu diesem Zweck definierte Spezialisierung der Mengenlehre<sup>5</sup>. Ich denke jedoch, daß sich auch andere Anwendungsgebiete dafür finden lassen.

Unser Grund, uns an dieser Stelle damit zu beschäftigen, wird an folgendem Beispiel klar:

Wenn wir, wie im letzten Kapitel, die Temperatur eines Objektes durch einen Wert aus dem Kontinuum  $[-273, \infty]$  darstellen, müßten wir zur Überprüfung der Allgemeingültigkeit einer Aussage wie

$$\forall x \text{ TEMP}_{[20, 300]}(x) \Rightarrow \text{TEMP}_{[100, 200]}(x)$$

eventuell überabzählbar viele Werte von  $x$  überprüfen. Die Feststellung, ob eine Formel gültig ist oder nicht, ist aber essentiell und wird im folgenden an mehreren Stellen benötigt. Da sie jedoch von einem berechenbaren Verfahren getroffen werden soll, kommt der Weg über überabzählbar unendlich viele Interpretationen nicht infrage. Dies müßte jedoch vermeidbar sein, denn wir erkennen, daß es im obigen Beispiel für die Beurteilung des Wahrheitsgehaltes der Aussage ausreicht, die vier Fälle

- (1)  $\text{TEMP}(x) \in [20, 300]$  und  $x \in [100, 200]$
- (2)  $\text{TEMP}(x) \in [20, 300]$ , aber  $x \notin [100, 200]$
- (3)  $\text{TEMP}(x) \in [100, 200]$ , aber  $x \notin [20, 300]$
- (4)  $\text{TEMP}(x) \notin [20, 300]$  und  $x \notin [100, 200]$

zu betrachten. Wir können somit statt mit unendlichen Wertebereichen mit einer endlichen Anzahl ihrer Teilmengen arbeiten. Zwar erhöht sich natürlich die Anzahl der Fälle, wenn noch mehr Indexmengen auftreten, sie bleibt aber bei endlichen Mengen von

---

<sup>5</sup>Es ist nicht auszuschließen, daß Ähnliches schon einmal untersucht worden ist. Mir ist jedoch keine derartige Arbeit bekannt. Daher sind sämtliche in diesem Kapitel definierten Begriffe mit Ausnahme des Mengensystems neu eingeführt.

Aussagen stets endlich, unabhängig von der Kardinalität der Variationsmengen. Die „Fallbildung“, welche Teilmengen überhaupt benötigt werden, wird durch das mathematische Konzept der „maximalen erfüllenden Partitionierung“ nachgebildet, das in diesem Kapitel vorgestellt werden wird.

Im folgenden sei eine nichtleere **Grundmenge**, wir nennen sie  $\Omega$ , fest vorgegeben.  $\Omega$  stellt quasi unser Universum dar, d.h. sämtliche auftretenden Elemente sollen zu dieser Menge gehören.

**Definition 2.1 (Mengensystem):**

Ein **Mengensystem** ist eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind. Sind diese Mengen Elementarmengen, d.h. sind deren Elemente aus  $\Omega$ , so heißt das Mengensystem ein Mengensystem 1. Ordnung. Sind die Elemente des Mengensystems dagegen selbst Mengensysteme, so ergibt sich die Ordnung des Mengensystems als die um 1 erhöhte Ordnung seiner Elemente.

Man beachte, daß hierbei vorausgesetzt wird, daß die Ordnung aller Elemente eines Mengensystems identisch ist. Sofern nichts anderes ausgesagt ist, meinen wir mit Mengensystem stets ein Mengensystem 1. Ordnung. Auch wollen wir, falls die leere Menge (die selbst ein Mengensystem beliebiger Ordnung ist, wie man sich leicht überzeugen kann) Element eines Mengensystems ist, diese im allgemeinen nicht mit aufführen, es sei denn, sie ist das einzige Element des betreffenden Systems. Wir wollen im folgenden Mengensysteme stets mit Großbuchstaben in Konturschrift (Beispiel:  $A$ ) bezeichnen. Falls benötigt, benennen wir die Elementmengen mit dem gleichen Buchstaben, jedoch indiziert und in normaler Drucktype.

**Definition 2.2 (Partitionierung):**

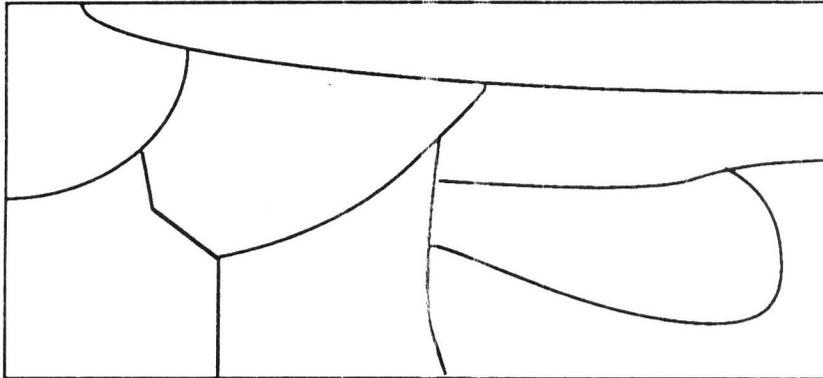
Ein Mengensystem  $\mathcal{Q}$  heißt **Partitionierung** (von  $\Omega$ ), wenn es folgende beide Bedingungen erfüllt:

- (i) die Elementmengen von  $\mathcal{Q}$  sind paarweise disjunkt, d.h.  

$$\forall Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q} \quad (Q_1 \neq Q_2) \Rightarrow (Q_1 \cap Q_2 = \emptyset)$$
- (ii) die Vereinigung aller Elemente aus  $\mathcal{Q}$  ergibt  $\Omega$ .

Eine Partitionierung ist also eine Zerlegung des Universums in Segmente, die sich gegenseitig nicht überlappen. Da sich Partitionierungen immer auf das ganze Universum beziehen, wird dieses im folgenden nur dann explizit angegeben, wenn verschiedene Universen infrage kämen.

Beispiel für eine Partitionierung (der rechteckige Kasten stellt das Universum dar):



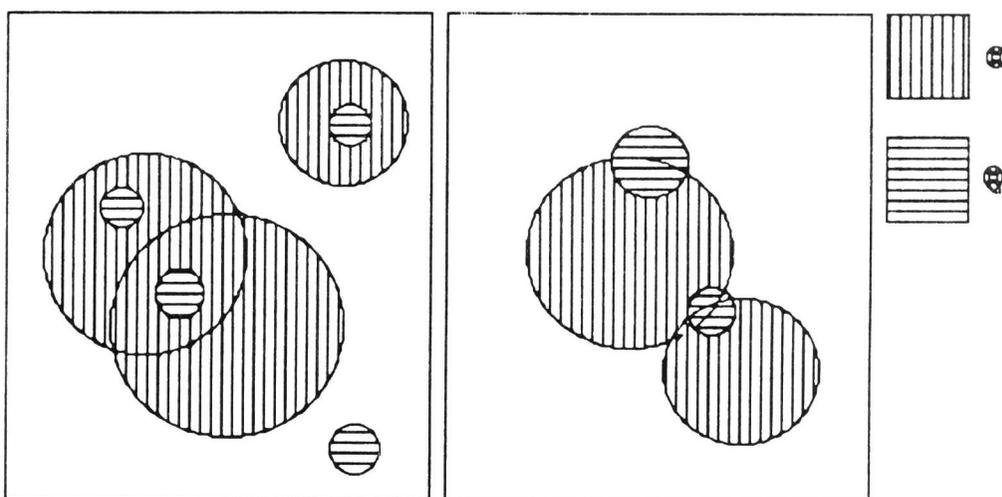
**Definition 2.3 (Erfüllung):**

Gegeben zwei Mengensysteme  $\mathcal{Q}$  und  $\mathcal{O}$ . Wir sagen  $\mathcal{Q}$  **erfüllt**  $\mathcal{O}$ , wenn gilt

$$\forall Q \in \mathcal{Q}, O \in \mathcal{O} (Q \subseteq O) \vee (Q \cap O = \emptyset).$$

Anschaulich bedeutet das, daß die Elementmengen von  $\mathcal{Q}$  jeweils ganz in oder ganz außerhalb der Elementmengen von  $\mathcal{O}$  liegen. Wir benutzen zur Symbolisierung der Aussage „ $\mathcal{Q}$  erfüllt  $\mathcal{O}$ “ die Schreibweise  $\mathcal{Q} \Xi \mathcal{O}$ .

Beispiel:



$$\mathcal{Q} \Xi \mathcal{O}$$

$$\mathcal{Q} \not\Xi \mathcal{O}$$

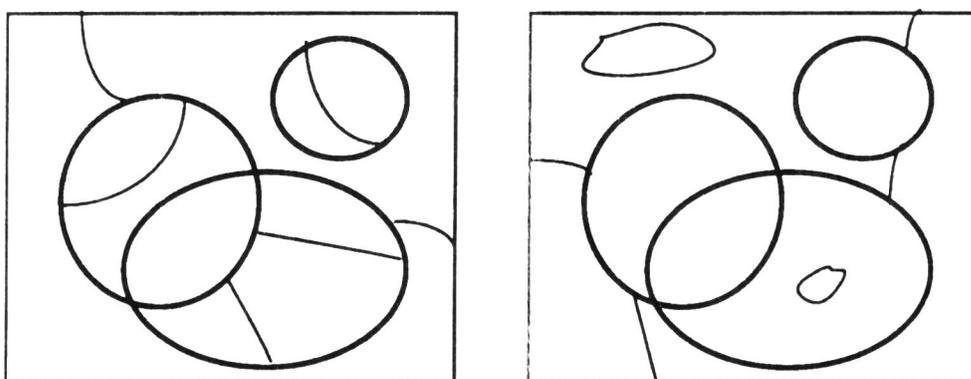
**Definition 2.4 (erfüllende Partitionierung):**

Eine Partitionierung  $\mathcal{Q}$ , die ein Mengensystem  $\mathcal{O}$  erfüllt, heißt **erfüllende Partitionierung** (von  $\mathcal{O}$ ).

Bei dieser Definition ist insbesondere darauf zu achten, daß sich zwar der Tatbestand der Erfüllung auf das angegebene Mengensystem bezieht, jedoch die partitionierte Menge in jedem Fall das (meist nicht erwähnte) Universum ist!

Beispiel:

Mengensystem (fette Linien) mit zwei Beispielen für erfüllende Partitionierungen (normale und fette Linien).



**Satz 2.1:** Sei  $\mathcal{O}$  ein Mengensystem,  $\mathcal{Q}$  eine Partitionierung von  $\mathcal{O}$ . Ist nun  $\mathcal{O}$  selbst eine Partitionierung, so gilt  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{O}$  genau dann, wenn

$$\forall Q \in \mathcal{Q} \exists_1 O \in \mathcal{O} \text{ mit } Q \subseteq O$$

Dabei bedeutet  $\exists_1$  „es existiert genau ein“.

Beweis:  $\Rightarrow$ :

Angenommen,  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{O}$ . Sei  $Q \in \mathcal{Q}$  beliebig. Dann gilt

$$\forall O \in \mathcal{O} \quad (Q \subseteq O) \vee (Q \cap O = \emptyset)$$

Falls ersteres für kein  $O$  zutrifft, so ist der Schnitt von  $Q$  mit allen  $O$  aus  $\mathcal{O}$  leer. Da aber  $\mathcal{O}$  eine Partitionierung ist und somit die Vereinigung aller Teilmengen von  $\mathcal{O}$  die Grundmenge  $\Omega$  ergibt, so wäre der Schnitt von  $Q$  mit  $\Omega$  leer, was sicherlich ein Widerspruch ist.

Gälte dagegen für zwei verschiedene Elemente aus  $\mathcal{O}$ , sagen wir  $O$  und  $O'$ , daß sie eine Obermenge von  $Q$  sind, so wäre  $O \cap O' \neq \emptyset$  (wenn man von dem pathologischen Fall  $Q = \emptyset$  absehen, den wir ja ausschließen), was wiederum der Eigenschaft von  $\mathcal{O}$ , Partitionierung zu sein, widerspricht. Also gibt es genau ein  $O$  mit  $Q \subseteq O$ .

⇐:

Sei  $Q$  beliebig, aber fest. Wegen der Voraussetzung gibt es ein  $O \in \mathcal{O}$  mit  $Q \subseteq O$ . Sei nun  $O' \in \mathcal{O}$ ,  $O' \neq O$ . Da  $\mathcal{O}$  eine Partitionierung ist, gilt  $O \cap O' = \emptyset$ . Wegen  $Q \subseteq O$  ist dann aber auch  $Q \cap O' = \emptyset$ . Also gilt  $Q \subseteq O$ .  
q.e.d.

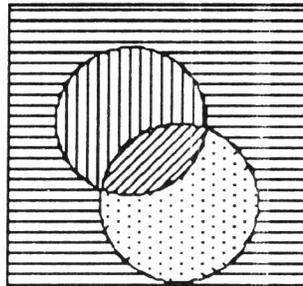
**Satz 2.2:** Zu jedem abzählbaren Mengensystem existiert eine erfüllende Partitionierung.

Den Beweis für diese Aussage wollen wir dadurch führen, daß wir ein Verfahren angeben, wie man zu einem Mengensystem eine erfüllende Partitionierung konstruieren kann. Der Algorithmus ist formuliert für endliche Mengensysteme. Wie sich zeigt, ist in diesem Fall auch die konstruierte erfüllende Partitionierung endlich. Das Verfahren läßt sich jedoch in der gleichen Weise für abzählbar unendliche Mengensysteme durchführen. Dies kann jedoch nur von theoretischem Interesse sein, da der Algorithmus in diesem Falle nicht terminiert.

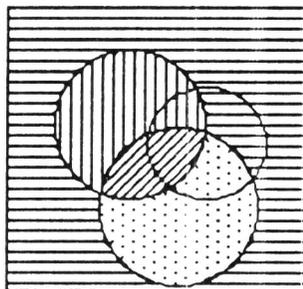
Das Verfahren basiert darauf, zunächst eine Partitionierung für ein leeres Mengensystem zu konstruieren und dann die einzelnen Elementmengen des eigentlich zu betrachtenden Mengensystems schrittweise hinzuzunehmen. Dies geschieht dadurch, daß einfach geprüft wird, ob die bislang konstruierte Partitionierung auch das um eine Menge erweiterte Mengensystem erfüllt. Ist dies nicht der Fall - was gleichbedeutend damit ist, daß der Schnitt der neu betrachteten Menge mit einer oder mehreren der Mengen, aus denen die Partitionierung besteht, weder leer noch identisch mit der Menge selbst ist (das heißt, sie liegt eben nicht „ganz drin oder ganz draußen“) - so wird diese Eigenschaft für die veränderte Partitionierung dadurch erzwungen, daß die betreffenden Mengen der alten Partitionierung einfach in zwei Teile aufgeteilt werden.

Beispiel:

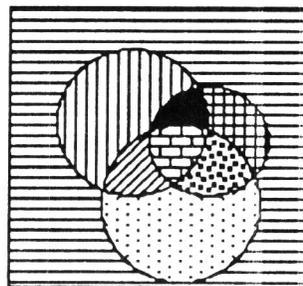
Bisher wurde folgende Partitionierung konstruiert



Die Schnittmengen der neu hinzugenommenen Menge mit den Mengen der Partitionierung werden überprüft



Daraufhin wird die Partitionierung feiner unterteilt



**Algorithmus 1 (Konstruktion einer erfüllenden Partitionierung):**

gegeben: Grundmenge  $\Omega$ , Mengensystem  $\mathcal{O} = \{O_1, \dots, O_n\}$  mit  $O_i \subseteq \Omega$

gesucht: erfüllende Partitionierung  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_m\}$  von  $\mathcal{O}$

Initialisierung:  $\mathcal{Q}^0 := \{\Omega\}$

Hauptteil: für  $1 \leq i \leq n$  tue

- (\*) Setze  $\mathcal{Q}_0 := \mathcal{Q}^{i-1}$   
 für  $1 \leq j \leq m$  mit  $m = |\mathcal{Q}^{i-1}|$  tue  
 Prüfe den Schnitt von  $O_i$  mit  $Q_j$ .

Dieser Test kann drei verschiedene Ausgänge haben:

- (i)  $Q_j \cap O_i = \emptyset$
- (ii)  $Q_j \cap O_i = Q_j$
- (iii)  $(Q_j \cap O_i) \subsetneq Q_j$ .

In Fall (i) und (ii) setze  $\mathcal{Q}_j := \mathcal{Q}_{j-1}$ ,

in Fall (iii)  $\mathcal{Q}_j := \mathcal{Q}_{j-1} \cup \{(Q_j \cap O_i)\} \cup \{(Q_j \setminus O_i)\} \setminus \{Q_j\}$ ;

$$\mathcal{Q}^i := \mathcal{Q}_m$$

Abschluß:  $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}^n$ .

Wir beweisen nun, daß Algorithmus 1 eine erfüllende Partitionierung von  $\mathcal{O}$  konstruiert.

Dazu zeigen wir, daß nach dem  $i$ -ten Schritt gilt:

- (i) alle Elemente in  $\mathcal{Q}^i$  sind paarweise disjunkt
- (ii) die Vereinigung aller Elemente in  $\mathcal{Q}^i$  liefert  $\Omega$ .
- (iii) alle Elemente in  $\mathcal{Q}^i$  sind nicht leer
- (iv) für jedes Element der Menge  $\mathcal{O}^i = \{O_1, \dots, O_i\}$  ist der Schnitt mit jedem Element  $Q$  aus  $\mathcal{Q}^i$  leer oder gleich  $Q$ .

Induktionsanfang: Für  $\mathbb{Q}^0$  gilt (i) - (iii) trivialerweise. Da  $\mathbb{O}^0$  leer ist, gilt auch (iv).

Induktionsschritt: Es gelte (i) - (iv) für  $\mathbb{Q}^{i-1}$ ,  $\mathbb{O}^{i-1}$ . Es können bei der Konstruktion von  $\mathbb{Q}^i$  mehrere  $Q_j$  aus  $\mathbb{Q}^{i-1}$  ersetzt werden durch  $Q_j \cap O_i$  und  $Q_j \setminus O_i$ . Dann gilt

- (i) denn aus  $A \cap Q_j = \emptyset$  folgt auch  $A \cap Q_j'$  für beliebige Teilmengen  $Q_j'$  von  $Q_j$  für alle  $A$ . Außerdem sind  $Q_j \cap O_i$  und  $Q_j \setminus O_i$  selbst disjunkt.
- (ii) da  $(Q_j \cap O_i) \cup (Q_j \setminus O_i) = Q_j$
- (iii)  $Q_j \cap O_i$  und  $Q_j \setminus O_i$  sind beide nicht leer, da sonst die Teilung gar nicht durchgeführt würde.
- (iv) da die Elemente nur verkleinert werden, gilt (iv) für alle Elemente von  $\mathbb{O}^{i-1}$ . Die Fallunterscheidung im Algorithmus ergibt direkt, daß dies auch bezüglich des neu aufgenommenen Elements  $O_i$  gilt.

(i) und (ii) besagen, daß  $\mathbb{Q}^i$  eine Partitionierung ist, (iv), daß sie  $\mathbb{O}^i$  erfüllt. Da  $\mathbb{O}^n = \mathbb{O}$ , ist Satz 2.2 bewiesen.

**Satz 2.3:** Die Menge aller erfüllenden Partitionierungen eines Mengensystems bilden bezüglich der Relation „ $\sqsubseteq$ “ einen Verband.

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, daß  $\sqsubseteq$  reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.

- (i)  $\sqsubseteq$  ist reflexiv: Für beliebige Partitionierung  $A$  gilt  $A \sqsubseteq A$ . Dies folgt direkt aus Satz 2.1 mit  $\mathbb{Q} = \mathbb{O}$
- (ii)  $\sqsubseteq$  ist transitiv: Es gelte  $A \sqsubseteq B$ ,  $B \sqsubseteq C$ . Wegen Satz 2.2 gibt es zu jedem  $A$  aus  $A$  ein  $B$  aus  $B$  mit  $A \sqsubseteq B$ , sowie zu jedem  $B$  aus  $B$  ein  $C$  aus  $C$  mit  $B \sqsubseteq C$ . Da die Teilmengenrelation transitiv ist, folgt  $A \sqsubseteq C$ .
- (iii)  $\sqsubseteq$  ist antisymmetrisch: Es gelte  $A \sqsubseteq B$  und  $B \sqsubseteq A$ . Aus Satz 2.2 folgt, daß es zu jedem  $A$  aus  $A$  ein  $B$  aus  $B$  und zu diesem wiederum ein  $A'$  aus  $A$  gibt mit  $A \sqsubseteq B \sqsubseteq A'$ . Da  $A \sqsubseteq A'$  und  $A$  eine Partitionierung ist, gilt  $A = A'$ , also auch  $B = A$ . Da dies für beliebige  $A$  aus  $A$  gilt, ist  $A = B$ .

Weiterhin hat ein Verband ein Minimum und ein Maximum. Das Minimum ist in diesem Falle

$$\Theta = \{\{x\} \mid x \in \Omega\},$$

die Menge aller einelementigen Teilmengen von  $\Omega$ . Die Feststellung, daß es sich um eine erfüllende Partitionierung beliebiger Mengensysteme, also erst recht beliebiger Partitionierungen, von  $\Omega$  handelt, ist trivial.

Das Maximum ist, wie sich herausstellt, genau die Partitionierung, die durch Algorithmus 1 konstruiert wird.

Sei  $Q'$  eine weitere Partitionierung von  $\mathbb{O}$  neben der durch das Verfahren gewonnenen Partitionierung  $Q$ . Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß  $Q' \sqsubseteq Q$ . Es sei  $Q$  beliebig aus  $Q'$ .

Induktionsanfang:  $Q'$  erfüllt  $Q^0$  (klar)

Induktionsschritt: Es gelte  $\forall Q \in Q^{i-1} (Q' \cap Q = \emptyset) \vee (Q' \sqsubseteq Q)$ .

Zu zeigen:  $Q'$  erfüllt auch  $Q^i$ , d.h.  $\forall Q \in Q^i (Q' \cap Q = \emptyset) \vee (Q' \sqsubseteq Q)$ .

Für alle Elemente aus  $Q^i$ , die schon in  $Q^{i-1}$  enthalten sind, gilt dies selbstverständlich. Alle übrigen entstehen in Schritt (\*) durch Teilung eines  $Q \in Q^{i-1}$ . Da  $Q' \sqsubseteq Q^{i-1}$ , gilt  $Q' \cap Q = \emptyset$  oder  $Q' \sqsubseteq Q$ . Im ersten Fall ist natürlich auch der Schnitt mit den Teilmengen von  $Q$  leer. Da  $Q'$  auch  $\mathbb{O}$  erfüllt, gilt  $Q' \cap O_i = \emptyset$  oder  $Q' \sqsubseteq O_i$ . Wegen  $Q' \sqsubseteq Q$  gilt dann

$$(Q' \cap O_i = \emptyset) \Rightarrow (Q' \sqsubseteq (Q \setminus O_i)) \wedge (Q' \cap (Q \cap O_i) = \emptyset)$$

$$Q' \sqsubseteq O_i \quad \Rightarrow \quad (Q' \sqsubseteq (Q \cap O_i)) \wedge (Q' \cap (Q \setminus O_i) = \emptyset)$$

Dies ist genau unser gewünschtes Ergebnis.

Aus Satz 2.3 ergibt sich folgendes wichtige

**Korollar:** Zu jedem abzählbaren Mengensystem gibt es eine eindeutig bestimmte maximale erfüllende Partitionierung.

Wir bezeichnen diese Partitionierung im folgenden kurz als MEP.

Der Begriff „maximal“ ist zu verstehen im Sinne von Mengeninklusionen. Die Kardinalität der Partitionierungen nimmt dagegen im Lauf der Kette ab.

**Satz 2.4:** Seien  $\mathbb{A}$  und  $\mathbb{B}$  zwei Partitionierungen. Dann gilt

$$\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B} \quad \Rightarrow \quad |\mathbb{A}| \geq |\mathbb{B}|.$$

Beweis: direkt aus Satz 2.1 zu sehen

**Satz 2.5:** Die MEP  $\mathbb{Q}$  eines endlichen Mengensystems  $\mathbb{O}$  ist selbst endlich. Ist  $|\mathbb{O}| = n$ , so ist

$$|\mathbb{Q}| \leq 2^n.$$

Beweis: Der Schritt (\*) in Algorithmus 1 wird genau  $n$  mal ausgeführt. Bei der Initialisierung bekommt  $\mathbb{Q}^0$  ein einziges Element. Beim Übergang von  $\mathbb{Q}^{i-1}$  auf  $\mathbb{Q}^i$  wird im extremsten Fall jedes Element aus  $\mathbb{Q}^{i-1}$  in zwei Teile zerteilt. Damit hat  $\mathbb{Q}^i$  maximal die doppelte Anzahl von Elementen. q.e.d.

**Satz 2.6:** Jede erfüllende Partitionierung eines Mengensystems ist auch erfüllende Partitionierung jeder seiner Teilmengen.

Beweis: folgt sofort aus der Definition von „erfüllt“

Der letzte Satz gilt natürlich auch für die MEP. Es ist jedoch zu beachten, daß die MEP eines Mengensystems zwar auch erfüllende Partitionierung jeder Teilmenge des Systems, aber nicht unbedingt deren maximale erfüllende Partitionierung ist. Sie ist jedoch erfüllende Partitionierung der betreffenden MEP.

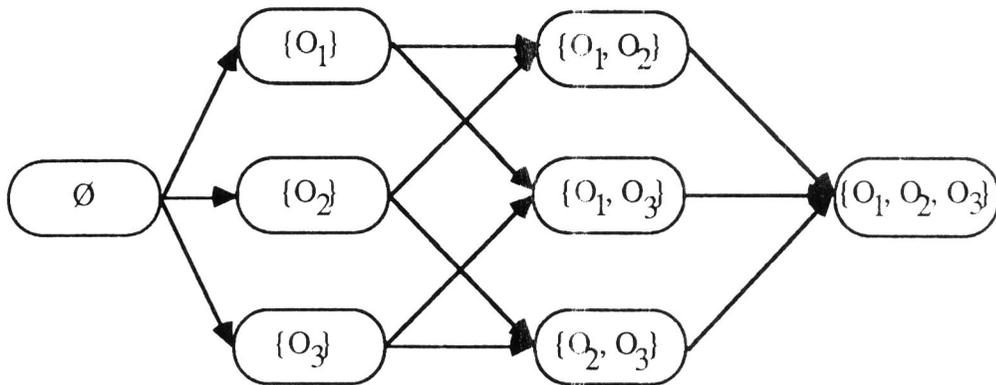
**Satz 2.7:**  $(\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}) \Rightarrow (\text{MEP}(\mathbb{A}) \supseteq \text{MEP}(\mathbb{B}))$

Beweis: aus Satz 2.6 folgt, daß die MEP von  $\mathbb{B}$  erfüllende Partitionierung von  $\mathbb{A}$  ist. Der Rest folgt aus der Definition der MEP.

**Satz 2.8:** Die MEP's der Teilmengen eines endlichen Mengensystems bilden einen Verband bezüglich der Relation „ $\supseteq$ “, dessen Struktur durch dem durch die Teilmengeninklusion induzierten Verband isomorph ist.

Beweis: Die Eigenschaften transitiv, reflexiv und antisymmetrisch sind für  $\supseteq$  schon im Beweis zu Satz 2.3 gezeigt worden. Die Isomorphie ergibt sich aus Satz 2.6 bzw. Satz 2.7. Aus diesen beiden Sätzen ist auch zu ersehen, daß Minimum und Maximum durch die MEP der leeren Menge bzw. des Systems selbst gegeben sind.

Anschauliche Darstellung eines solchen Verbands ist das sogenannte Hasse-Diagramm. Wir geben als Beispiel das Diagramm des Mengensystems  $\{O_1, O_2, O_3\}$  an:



Die im Bild auftretenden Pfeile sind wahlweise zu deuten als „ $\subseteq$ “ oder „ $MEP \sqsupseteq MEP'$ “. Aus Satz 2.8 folgt noch als wichtige Feststellung, daß es belanglos ist, in welcher Reihenfolge die Elemente  $O_i$  des Mengensystems  $\mathbb{O}$  bei der Durchführung von Algorithmus 1 betrachtet werden.

Mit dieser Bemerkung schließen wir unsere Betrachtungen über Partitionierungen ab und können nun damit beginnen, Syntax und Semantik des PV1 formal zu beschreiben.

### 3 Syntax und Semantik des PV1:

Wenn in diesem Kapitel auch diejenigen Begriffe und Schreibweisen, die mit dem PK1 übereinstimmen, von Anfang an definiert werden, so hat das einen zweifachen Grund. Zum einen können gerade durch die Parallelität der Darstellung zu vergleichbaren Lehrbüchern des Prädikatenkalküls<sup>6</sup> die Analogie verdeutlicht, sowie die entscheidenden Unterschiede hervorgehoben werden. Zum anderen muß auf sehr viele Begriffe referenziert werden, die sonst in dieser Arbeit selbst undefiniert geblieben wären. Dies hätte die Lesbarkeit gewaltig herabgesetzt und zudem schwerfällige Formulierungen, die nun durch prägnantere Kurznotationen ersetzt worden sind, heraufbeschworen.

Wir übernehmen zunächst die übliche Definition von Termen aus der Prädikatenlogik. Dabei bezeichnen wir

- Konstanten mit kleinen Buchstaben vom Anfang des Alphabets,
- Variable mit kleinen Buchstaben vom Ende des Alphabets und
- Funktionen ebenso wie Konstanten mit kleinen Buchstaben (typischerweise f, g, h) vom Anfang des Alphabets. (Dies ist keine doppelte Belegung, da Konstanten sowieso als argumentenlose Funktionen anzusehen sind).

Bei der Definition von Prädikaten taucht der erste Unterschied zur üblichen Prädikatenlogik auf. Unter Prädikat sei im folgenden, falls nicht explizit das Gegenteil angegeben ist, stets ein *indiziertes Prädikat* verstanden. Wir bezeichnen Prädikate mit großen lateinischen Buchstaben.

Jedem Prädikatensymbol ist eine Stelligkeit sowie eine *Variationsmenge* zugeordnet. Diese Menge sei zunächst nicht genauer definiert. Die zu einem Prädikat P gehörige Variationsmenge bezeichnen wir mit  $\Omega(P)$ .

#### Definition 3.1 (Atom):

Seien P ein n-stelliges Prädikat mit Variationsmenge  $\Omega$ ,  $S \subseteq \Omega$  die **Indexmenge**, weiterhin  $t_1, \dots, t_n$  Terme.

Dann ist  $P_S(t_1, \dots, t_n)$  ein Atom.

---

<sup>6</sup>Gedacht ist hier insbesondere an [Chang & Lee 73]

Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, daß die Indexmenge selbst kein Term ist und daher nicht einfach als zusätzliches Argument eines normalen Prädikats zu notieren wäre.

Formeln werden nun in der üblichen Weise aus Atomen und den Junktoren  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\Rightarrow$  und  $\Leftrightarrow$ , sowie den Quantoren  $\forall$  und  $\exists$  gebildet. Wir werden im weiteren, solange Verwechslungen ausgeschlossen sind, auf die strikte Klammerung verzichten und für die einzelnen Junktoren verschiedene Präzedenzen annehmen. Die Reihenfolge ist

$$\forall \text{ und } \exists, \Rightarrow \text{ und } \Leftrightarrow, \vee, \wedge, \neg,$$

wobei die letzteren stärker binden.  $\forall x P(x) \vee (Q(x) \wedge \neg R(x))$  ist also zu interpretieren als  $\forall x (P(x) \vee (Q(x) \wedge (\neg R(x))))$ .

Wir werden im weiteren nur Formeln ohne freie Variablen betrachten. Für diese universell abgeschlossenen Formeln werden wir nun Interpretationen definieren. Diese gleichen im wesentlichen der vom PK1 bekannten (Tarski-)Interpretation. Der Unterschied liegt einzig und allein in der Interpretation der Atome. Statt Prädikaten Relationen zuzuordnen, bilden wir sie nun auf Funktionen ab, deren Wertebereich die Variationsmenge des betreffenden Prädikats ist. So wird beispielsweise dem Prädikat TEMP eine Funktion zugeordnet, die ihre Argumente (die den Argumenten des Prädikats entsprechen) auf das Intervall  $[-273, \infty]$  abbildet. Damit wird zum Ausdruck gebracht, daß in jeder Interpretation jedes Objekt bezüglich eines Prädikats genau einen Wert besitzt. In unserem Fall könnte etwa das Wetter die Temperatur  $15^\circ\text{C}$  haben, was durch die Interpretation  $\text{TEMP} \rightarrow \text{temp}$  mit  $\text{temp}(\text{wetter}) = 15$  zum Ausdruck käme.

**Definition 3.2 (Interpretation):**

Eine Interpretation einer Formel  $F$  besteht aus einer nichtleeren **Domäne**  $D$  und Zuordnungen von

- $n$ -stelligen Abbildungen  $D^n \rightarrow D$  zu jedem Funktionssymbol entsprechend seiner Stelligkeit (Signaturinterpretation, dies schließt die Konstanten als nullstellige Funktionen ein) und
- $n$ -stelligen Abbildungen  $D^n \rightarrow \Omega(P)$  zu jedem Prädikatensymbol  $P$  entsprechend seiner Stelligkeit und Variationsmenge.

Eine Interpretation eines beliebigen Ausdrucks  $A$ , unabhängig davon, ob es sich um eine Formel oder einen Term handelt, wird mit  $\mathfrak{I}(A)$  bezeichnet.

Eine Interpretation ordnet nun einer Formel implizit auch einen Wahrheitswert zu. Wir sagen, eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  **erfüllt** ein Atom  $P_S(t_1, \dots, t_n)$  – wir bezeichnen dies mit  $\mathfrak{I} \models P_S(t_1, \dots, t_n)$  – genau dann, wenn  $\mathfrak{I}(P)(\mathfrak{I}(t_1), \dots, \mathfrak{I}(t_n)) \in S$ . Dabei sind  $P$  ein Prädikatsymbol mit der Stelligkeit  $n$ , die  $t_i$  Terme und  $S$  eine Teilmenge von  $\Omega(P)$ . Anschaulich bedeutet die Aussage „ $\mathfrak{I}$  erfüllt  $P_S(t)$ “, daß das Atom eine wahre Aussage beschreibt, da seine Behauptung, daß der Wert des Arguments in der Indexmenge liegt, in dieser Interpretation tatsächlich zutrifft.

Die Auswertung für nicht atomare Formeln erfolgt induktiv in der üblichen Weise, so daß wir – analog zur Prädikatenlogik – auch hier die Begriffe **Erfüllbarkeit** (es gibt eine Interpretation, die die Formel erfüllt) und **Gültigkeit** (jede Interpretation erfüllt die Formel) zur Verfügung haben. Wir werden eine Interpretation, die eine Formel  $F$  erfüllt, ein **Modell** für  $F$  nennen. Ebenso können wir auch von **logischer Folgerung** sprechen: Eine Formel  $F$  **folgt aus** einer Formelmenge  $S$  genau dann, wenn jede Interpretation, die  $S$  erfüllt, auch  $F$  erfüllt.  $F$  heißt dann logische Folgerung aus  $S$ , wir schreiben  $S \models F$ .

### Definition 3.3 (Äquivalenz):

Zwei Formeln  $F$  und  $G$  heißen **äquivalent** (wir notieren dies als  $F = G$ ), wenn sie unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert erhalten.

An dieser Stelle könnte man eine große Anzahl von wichtigen Äquivalenzen beweisen. Wir wollen dies jedoch nicht tun, sondern sie lediglich nennen, da sie im PK1 in der gleichen Form gelten und die Beweise den Standardwerken zu entnehmen sind.

- |        |  |  |
|--------|--|--|
| (3.1)  | $F \Leftrightarrow G = (F \Rightarrow G) \wedge (G \Rightarrow F)$ |  |
| (3.2)  | $F \Rightarrow G = \neg F \vee G$                                  |  |
| (3.3)  | $F \vee G = G \vee F$  | $F \wedge G = G \wedge F$                              |
| (3.4)  | $F \vee (G \vee H) = (F \vee G) \vee H$                            | $F \wedge (G \wedge H) = (F \wedge G) \wedge H$        |
| (3.5)  | $F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)$               | $F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)$ |
| (3.6)  | $\neg(\neg F) = F$   |  |
| (3.7)  | $F \wedge \mathbf{true} = F$                                       | $F \wedge \mathbf{false} = \mathbf{false}$             |
| (3.8)  | $F \vee \mathbf{true} = \mathbf{true}$                             | $F \vee \mathbf{false} = F$                            |
| (3.9)  | $F \wedge \neg F = \mathbf{false}$                                 | $F \vee \neg F = \mathbf{true}$                        |
| (3.10) | $\neg(F \wedge G) = \neg F \vee \neg G$                            | $\neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G$                |

Dabei bedeute **true** die Formel, die von jeder, sowie **false** die Formel, die von keiner Interpretation erfüllt wird. Dies sind keine zusätzlich eingeführten Formeln, sondern lediglich Kurzschreibweisen:

Sei  $P$  ein beliebiges Prädikatsymbol und  $t$  ein Argumentvektor entsprechender Stelligkeit. Mit  $\Omega = \Omega(P)$  ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{true} &= P_{\Omega}(t) \quad \text{und} \\ \mathbf{false} &= P_{\emptyset}(t). \end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind diese Prädikate stets bzw. nie wahr.

Neben diesen auch im PK1 geltenden Äquivalenzen treten im PV1 noch weitere hinzu. Es gilt für alle Prädikate  $P$ , Argumentvektoren  $t$  und Indexmengen  $S, T$ :

$$(3.11) \quad P_S(t) \wedge P_T(t) = P_{S \cap T}(t)$$

$$(3.12) \quad P_S(t) \vee P_T(t) = P_{S \cup T}(t)$$

$$(3.13) \quad \neg P_S(t) = P_{\Omega(P) \setminus S}(t)$$

Beweis:

zu (3.11): Da  $t$  auf beiden Seiten gleich ist, braucht die Interpretation von Konstanten, Variablen und Funktionssymbolen nicht betrachtet zu werden. Sei  $d$  das Element von  $D$ , auf das  $\mathfrak{I}(P) \mathfrak{I}(t)$  abbildet. Laut Definition erfüllt eine Interpretation die linke Formel genau dann, wenn  $d$  in  $S$  und in  $T$  liegt. Dann liegt  $d$  aber auch in  $S \cap T$ , und somit ist auch die rechte Formel in dieser Interpretation erfüllt. Umgekehrt gilt  $\mathfrak{I} \models P_{S \cap T}(t)$  genau dann, wenn  $d$  in  $S \cap T$  liegt. Dann liegt es aber sowohl in  $S$  als auch in  $T$ , woraus  $\mathfrak{I} \models P_S(t) \wedge P_T(t)$  folgt.

(3.12) und (3.13) lassen sich in ähnlicher Weise zeigen.

Mithilfe dieser Äquivalenzen kann man nun Formeln umformen. Wir wählen aus jeder Äquivalenzklasse einen kanonischen Repräsentanten<sup>7</sup> und definieren so eine **PV-Normalform**.

Wir nehmen dazu eine Klauselnormalform und führen Skolemisierung analog zu der im PK1 üblichen Praxis durch<sup>8</sup>. Zusätzlich formen wir noch mit (3.11) bis (3.13) derart um, daß alle Negationen verschwinden und jedes Atom höchstens einmal pro Klausel

<sup>7</sup>Die hier gezeigte Repräsentantenwahl ist so zunächst nicht eindeutig. Sie wird es jedoch dadurch, daß man eine geeignete (z.B. lexikalische) Ordnung auf den Atomen angibt. Da wir Klauseln aber sowieso durch Mengen darstellen, spielt die Reihenfolge der Atome eigentlich keine Rolle.

<sup>8</sup>siehe beispielsweise [Davis & Putnam 60]

vorkommt<sup>9</sup>. Damit erhalten wir als wichtiges Resultat

**Satz 3.14:** Jede PV1-Formel ohne freie Variable läßt sich in PV-Normalform überführen.

Beispiel:

$$\exists x \forall y (P_S(a) \wedge Q_T(x)) \Rightarrow (Q_U(y) \wedge P_V(a))$$

$$\text{(mit 3.2)} \quad \exists x \forall y \neg(P_S(a) \wedge Q_T(x)) \vee (Q_U(y) \wedge P_V(a))$$

$$\text{(mit 3.10)} \quad \exists x \forall y (\neg P_S(a) \vee \neg Q_T(x)) \vee (Q_U(y) \wedge P_V(a))$$

$$\text{(mit 3.13)} \quad \exists x \forall y (P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x)) \vee (Q_U(y) \wedge P_V(a))$$

$$\text{(mit 3.4)} \quad \exists x \forall y P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee (Q_U(y) \wedge P_V(a)))$$

$$\text{(mit 3.5)} \quad \exists x \forall y P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee ((Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee Q_U(y)) \wedge (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee P_V(a)))$$

$$\text{(mit 3.5)} \quad \exists x \forall y ((P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee Q_U(y))) \\ \wedge (P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee P_V(a))))$$

$$\text{(mit 3.3)} \quad \exists x \forall y ((P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee Q_U(y))) \\ \wedge ((Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee P_V(a)) \vee P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a)))$$

$$\text{(mit 3.4)} \quad \exists x \forall y ((P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee Q_U(y))) \\ \wedge (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee (P_V(a) \vee P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a))))$$

$$\text{(mit 3.12)} \quad \exists x \forall y ((P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee Q_U(y))) \\ \wedge (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee P_V \cup \Omega(P)\mathcal{S}(a)))$$

nach Skolemisierung:

$$\forall y ((P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a) \vee (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x) \vee Q_U(y))) \\ \wedge (Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(c) \vee P_V \cup \Omega(P)\mathcal{S}(a)))$$

Beachtenswert ist, daß im PV1 keine Unterscheidung von Atomen und Literalen gemacht werden muß, da sich die Negation mit (3.13) eliminieren läßt. Wir können daher diese Worte synonym verwenden.

Wenn wir im folgenden von **Klauseln** sprechen, so bedeutet dies nur eine spezielle Darstellungsweise von Formeln in PV-Normalform. Eine Klausel besteht aus einer Menge von Atomen und ist zu verstehen als Disjunktion eben dieser Atome.

Das obige Beispiel lautet in Klauselform

---

<sup>9</sup>Bei der Schnitt- und Vereinigungsmengenbildung eventuell anfallende doppelt vorkommende Atome können aus der Disjunktion getilgt werden

$$\{P_{\Omega(P)\mathcal{S}}(a), Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(x), Q_U(y)\}$$

$$\{Q_{\Omega(Q)\mathcal{T}}(c), P_{V \cup \Omega(P)\mathcal{S}}(a)\}$$

Hier noch einige Bemerkungen zur Terminologie:

Je nach Anwendung könnte es geeignet sein, die Elemente der Domäne einer Interpretation als *Objekte* zu bezeichnen. Ein nicht indiziertes Prädikat entspricht dann einem *Attribut*. Die Variationsmenge gibt den Rahmen an, in dem sich der *Attributswert* bewegen kann. Das dem Prädikatensymbol durch die Interpretation zugeordnete Prädikat ordnet nun jedem Objekt einen Wert bezüglich dieses Attributs zu. Die Indizierung von Prädikaten repräsentiert dann eine *Restriktion* der möglichen Attributswerte, wobei der zugehörige Wahrheitswert angibt, ob die Restriktion erfüllt ist oder nicht. Man könnte somit eine Ableitung im PV1, die wir an dieser Stelle allerdings noch nicht beschrieben haben, als *constraint propagation* beschreiben.

#### 4 Das Verhältnis des PV1 zum PK1:

Der PV1 stellt in gewisser Weise eine Erweiterung des Prädikatenkalküls erster Ordnung, auf dem er aufbaut, dar. Man kann nämlich die Formeln des PK1 als Spezialfälle des hier beschriebenen Kalküls auffassen, indem man folgende Zuordnung annimmt:

Ein „normales“ (d.h. nicht indiziertes) Prädikat  $P$  ist zu verstehen als mit  $\Omega(P) = \{t, f\}$  versehen.  $P(t)$  ist dann die Kurzschreibweise für  $P_{\{t\}}(t)$ ,  $\neg P(t)$  für  $P_{\{f\}}(t)$ .

Wie sich jedoch herausstellen wird, ist der neue Kalkül nicht wirklich mächtiger als der PK1, d.h. alles in PV1 Ausdrückbare läßt sich auch im PK1 beschreiben, ohne explizit auf Mengen zurückzugreifen. Um dies zu zeigen, wird zunächst eine Konstruktionsvorschrift angegeben, die zu jeder Menge von PV1-Formeln  $S$  eine korrespondierende Menge von PK1-Formeln  $S'$  liefert, mit der Eigenschaft:

$S'$  ist genau dann (un)erfüllbar, wenn  $S$  (un)erfüllbar ist.

(Dabei sind die Interpretationen natürlich der Definition gemäß PK1 respektive PV1 zu nehmen)

Die zugrundeliegende Idee ist, daß die im PV1 verankerte Semantik, daß jedes Objekt genau einen Wert besitzt (vgl. S. 21) durch Hinzunahme weiterer Formeln in der PK1-Modellierung sichergestellt wird. In unserem Temperaturbeispiel müßte beispielsweise der Sachverhalt

$$\forall x \text{ temp}(x) = -273 \oplus \dots \oplus \text{temp}(x) = \infty,$$

wobei „ $\oplus$ “ das exklusive oder repräsentiert, durch PK1-Formeln beschrieben werden. Dies ist jedoch im allgemeinen nicht möglich, da an die Kardinalität der Variationsmengen keinerlei einschränkende Bedingungen gestellt worden sind und diese daher (wie in unserem Beispiel) durchaus unendlich oder sogar überabzählbar sein können.

Nun ist aber, wenn es lediglich um die Frage der Erfüllbarkeit von endlichen Formelmengen geht, diese genaue Wiedergabe der PV1-Interpretationen glücklicherweise gar nicht nötig. Wir stellen nämlich fest, daß zu jedem in einer endlichen Formelmenge  $S$  vorkommenden Prädikatsymbol  $P$  auch nur endlich viele Teilmengen von  $\Omega(P)$  existieren, die in  $S$  als Index zu  $P$  auftreten. Ob eine PV1-Interpretation nun  $S$  erfüllt oder nicht hängt nun nicht so sehr von dem jedem Objekt zugeordneten genauen

Wert ab, sondern lediglich davon, ob dieser Wert in den verschiedenen Indexmengen enthalten ist oder nicht.

Das bedeutet, daß wir Interpretationen in Äquivalenzklassen einteilen können, die dadurch definiert sind, daß die in beiden Interpretationen den verschiedenen Atomen zugeordneten Werte bezüglich ihres (Nicht-)Enthaltenseins in den Indexmengen gleiches Verhalten zeigen. Wenn wir dann über diese Äquivalenzklassen statt über konkrete Interpretationen argumentieren könnten, bräuchten wir zur Überprüfung von Gültigkeit oder Erfüllbarkeit nur noch endlich viele Fälle betrachten, denn, wenn  $P_1, \dots, P_n$  die in  $S$  vorkommenden Prädikatensymbole und  $o(P_i)$  die Anzahlen der als Index von  $P_i$  auftretenden Teilmengen von  $\Omega(P_i)$  bezeichnen, so wird die Anzahl der Äquivalenzklassen durch

$$\prod_{i=1}^n 2^{o(P_i)}$$

nach oben beschränkt, was sicherlich endlich ist.

Diese obere Schranke läßt sich weiter unten ansetzen, wenn man zunächst zu jedem Mengensystem  $\mathbb{O}$ , das die Teilmengen von  $\Omega(P)$ , die in  $S$  als Index zu einem Prädikat  $P$  auftreten, die maximale erfüllende Partitionierung  $\mathbb{Q} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$  konstruiert und die Äquivalenzklassen dann bezüglich dieses Mengensystems definiert. Da  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{O}$ , ist mit Satz 2.5 die Anzahl dieser Äquivalenzklassen kleiner (oder höchstens gleich) der ursprünglichen Anzahl.

Mit diesen Mitteln können wir nun die Konstruktion einer Formelmenge des PK1 aus einer Menge von PV1-Formeln beschreiben:

### **Algorithmus 2 (Konstruktion der korrespondierenden Formelmenge):**

Sei  $S$  eine endliche Menge von PV1-Formeln. Seien fernerhin  $P_1, P_2, \dots, P_n$  die in  $S$  vorkommenden Prädikatensymbole,  $O(P)$  die als Index von Atomen mit  $P$  als Prädikatensymbol auftretenden Teilmengen von  $\Omega(P)$  und  $Q(P)$  die maximalen erfüllenden Partitionierungen (bezüglich  $\Omega(P)$ ) von  $O(P)$ . Die Kardinalitäten dieser Partitionierungen seien mit  $q(P)$  bezeichnet.

Dann fasse jedes Prädikatensymbol  $P$  und jede Indexmenge  $O$  aus  $O(P)$   $P_O$  als eigenständiges Prädikat „ $P^O$ “ auf, führe weiterhin die Prädikate „ $P^Q$ “ für jedes  $Q$  aus  $Q(P)$  ein und füge zur Formelmenge noch für jedes Prädikat  $P$  die Formeln

- (i)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \ P^{Q_j} \Rightarrow P^{O_k}$  für  $Q_j \subseteq O_k$   
 bzw.  $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \ P^{Q_j} \Rightarrow \neg P^{O_k}$  für  $Q_j \cap O_k = \emptyset$   
 für alle  $1 \leq j \leq q(P)$ ,  $1 \leq k \leq o(P)$ ,
- (ii)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \ P^{Q_1} \vee \dots \vee P^{Q_m}$   
 mit  $k = |P|$ ,  $m = q(P)$
- (iii)  $\forall x_1, x_2, \dots, x_k \ P^{Q_j} \Rightarrow \neg P^{Q_1} \wedge \dots \wedge \neg P^{Q_{j-1}} \wedge \neg P^{Q_{j+1}} \wedge \dots \wedge \neg P^{Q_m}$   
 für alle  $1 \leq j \leq q(P)$ , mit  $m = q(P)$ <sup>10</sup>

hinzu.

Dabei beschreiben die Formeln unter (i) den Zusammenhang von  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{O}$ , während (ii) und (iii) gerade die auf Seite 5 beschriebene Semantik erzwingen, daß jedes Objekt genau einen Wert bezüglich eines Prädikats besitzt.

Beispiel:

Die originale Formelmenge  $S$  sei

- (i)  $\forall x \ \text{TEMP} [20, 35] (\text{wetter}) \Rightarrow \text{FÜHLT-SICH-WOHL}(x)$   
 (ii)  $\text{TEMP} [15, 25] (\text{wetter})$

Nach Umformung in PV-Normalform ergibt sich  $S'$  als

- (i')  $\text{TEMP} [-273, 20[ \cup ]35, \infty] (\text{wetter}) \vee \text{FÜHLT-SICH-WOHL} \{t\} (x)$   
 (ii')  $\text{TEMP} [15, 25] (\text{wetter})$

$S'$  enthält nur die beiden Prädikatensymbole  $\text{TEMP}$  und  $\text{FÜHLT-SICH-WOHL}$  mit

$O(\text{TEMP}) = \{[-273, 20[ \cup ]35, \infty], [15, 25]\} =: \mathbb{O}$  und  
 $O(\text{FÜHLT-SICH-WOHL}) = \{t\} =: \mathbb{P}$ .

Als maximale erfüllende Partitionierungen erhält man

$Q(\text{TEMP}) = \{[-273, 15[ \cup ]35, \infty], [15, 20[, [20, 25], ]25, 35]\} =: \mathbb{Q}$  und  
 $Q(\text{FÜHLT-SICH-WOHL}) = \{\{t\}, \{f\}\} =: \mathbb{R}$ .

---

<sup>10</sup>Hier werden bei der Überführung in Normalform aus einer Formel mehrere Klauseln. Jedoch sind darunter einige identisch und können eliminiert werden.

Aufgrund der Inklusionen (Numerierung der Mengen nach obiger Aufzählungsreihenfolge)

$$\begin{array}{llll}
 Q_1 \subseteq O_1 & Q_2 \subseteq O_1 & Q_3 \cap O_1 = \emptyset & Q_4 \cap O_1 = \emptyset \\
 Q_1 \cap O_2 = \emptyset & Q_2 \subseteq O_2 & Q_3 \subseteq O_2 & Q_4 \cap O_2 = \emptyset \\
 R_1 = P_1^{11} & R_2 \cap P_2 = \emptyset & & 
 \end{array}$$

ergeben sich als zusätzliche Formeln

nach (i)

$$\begin{array}{ll}
 \text{TEMP } [-273, 15[ \cup ]35, \infty] (x) & \Rightarrow \text{TEMP } [-273, 20[ \cup ]35, \infty] (x) \\
 \text{TEMP } [15, 20[ (x) & \Rightarrow \text{TEMP } [-273, 20[ \cup ]35, \infty] (x) \\
 \text{TEMP } [20, 25] (x) & \Rightarrow \neg \text{TEMP } [-273, 20[ \cup ]35, \infty] (x) \\
 \text{TEMP } ]25, 35] (x) & \Rightarrow \neg \text{TEMP } [-273, 20[ \cup ]35, \infty] (x) \\
 \text{TEMP } [-273, 15[ \cup ]35, \infty] (x) & \Rightarrow \neg \text{TEMP } [15, 25] (x) \\
 \text{TEMP } [15, 20[ (x) & \Rightarrow \text{TEMP } [15, 25] (x) \\
 \text{TEMP } [20, 25] (x) & \Rightarrow \text{TEMP } [15, 25] (x) \\
 \text{TEMP } ]25, 35] (x) & \Rightarrow \neg \text{TEMP } [15, 25] (x) \\
 \\ 
 \text{FÜHLT-SICH-WOHL } \{f\} (x) & \Rightarrow \neg \text{FÜHLT-SICH-WOHL } \{t\} (x)
 \end{array}$$

nach (ii)

$$\begin{array}{l}
 \text{TEMP } [-273, 15[ \cup ]35, \infty] (x) \vee \text{TEMP } [15, 20[ (x) \\
 \vee \text{TEMP } [20, 25] (x) \vee \text{TEMP } ]25, 35] (x) \\
 \\ 
 \text{FÜHLT-SICH-WOHL } \{f\} (x) \vee \text{FÜHLT-SICH-WOHL } \{t\} (x)
 \end{array}$$

---

<sup>11</sup>Bei geeigneter Benennung der Prädikate kann in diesem Fall auf eine Trennung der entsprechenden  $O_i$  bzw.  $Q_j$  verzichtet werden. Bei Identifizierung der Namen entfallen die Regeln für die gegenseitige Implikation.

nach (iii)

$$\begin{aligned} \text{TEMP} [-273, 15[ \cup ]35, \infty] (x) &\Rightarrow \neg \text{TEMP} [15, 20[ (x) \\ &\wedge \neg \text{TEMP} [20, 25] (x) \wedge \neg \text{TEMP} ]25, 35] (x) \\ \text{TEMP} [15, 20[ (x) &\Rightarrow \neg \text{TEMP} [20, 25] (x) \\ &\wedge \neg \text{TEMP} ]25, 35] (x) \wedge \neg \text{TEMP} ]25, 35] (x) \end{aligned}$$

(die letzte noch unter (iii) zu erwartende Formel ist schon bei (i) enthalten)

Dabei sei noch einmal besonders darauf hingewiesen, daß Schreibweisen wie z.B. „TEMP [-273, 15[  $\cup$  ]35,  $\infty$ ]“ nichts syntaktisch Neues bezeichnen, sondern lediglich Namen von Prädikatensymbolen repräsentieren.

Anhand des Beispiels läßt sich sehr schnell erahnen, daß die sich jeweils ergebende Klauselmenge zwar endlich bleibt, jedoch von enormem Umfang sein kann. Eine Abschätzung nach oben liefert Schranken von

(i) 
$$\sum_{i=1}^n 2^{o(P_i)} \cdot o(P_i) \quad \text{Klauseln unter Punkt (i) von Algorithmus 2}$$

(ii)  $n$  Klauseln unter Punkt (ii) des Algorithmus

(iii) unter der Berücksichtigung der Umwandlung in Klauselnormalform (vgl. Fußn. 10)

$$\sum_{i=1}^n (2^{o(P_i)} * (2^{o(P_i)} - 1)) / 2 \quad \text{Klauseln unter Punkt (iii) des Algorithmus.}$$

Diese Menge deutet darauf hin, daß der PV1-Kalkül, auch wenn er nicht wirklich mächtiger als PK1 ist, trotzdem eine echte Erweiterung dahingehend darstellt, daß er es erlaubt, sonst nur sehr umständlich formulierbare Fakten in einer eleganten „Kurznotation“ zu präsentieren, die insbesondere einem menschlichen Leser klarer erscheint. Damit reiht sich der PV1 ein in eine Reihe von PK1-Erweiterungen wie z.B. verschiedene Typen von Sortenlogik.

Schaut man sich die neu hinzugekommenen Klauseln genauer an, so fällt eine gewisse Monotonie ins Auge. Das rührt daher, daß sie im PK1 nur durch explizites Hinschreiben darstellbare Metaregeln repräsentieren, die im wesentlichen zusammengefaßt werden können in der (trivialen) Aussage:

Gegeben seien eine Partitionierung  $\mathcal{Q}$  von  $\Omega$  sowie ein  $x \in \Omega$ . Dann ist  $x$  in genau einem  $Q_i$  aus  $\mathcal{Q}$  enthalten.

Wenn es gelänge, diese Regel in den Inferenzapparat aufzunehmen, wäre die Erzeugung der zusätzlichen Klauseln nicht mehr nötig! Eben dies soll mit der Erweiterung des Resolutionsprinzips für PV1 erreicht werden (vgl. Kap. 6).

Hier an dieser Stelle ist nun zunächst noch die Äquivalenz der beiden korrespondierenden Klauselmengen zu zeigen.

**Satz 4.1:** Eine PV1-Klauselmenge  $S$  ist genau dann (un)erfüllbar gemäß PV1-Interpretation, wenn die nach Algorithmus 2 konstruierte korrespondierende PK1-Klauselmenge  $S'$  im Prädikatenkalkül erster Stufe (un)erfüllbar ist.

Beweis:

Es bezeichne  $\mathfrak{I}_{PV1}$  bzw.  $\mathfrak{I}_{PK1}$  die jeweilige Interpretation.

Zu zeigen:  $\exists$  PV1-Modell für  $S \Leftrightarrow \exists$  PK1-Modell für  $S'$

$\Rightarrow$ :

Angenommen, es gibt eine PV1-Interpretation, die  $S$  erfüllt. Man konstruiert nun eine PK1-Interpretation, indem man für alle Konstanten und Funktionssymbole die gleichen Zuordnungen vornimmt. Prädikaten  $P^O$  (mit  $O$  aus  $O(P)$  oder  $Q(P)$ ) werden Relationen über  $D^{|P|}$  zugeordnet mit

$$(\mathfrak{I}_{PK1} \models P^O(t)) \Leftrightarrow (\mathfrak{I}_{PV1}(P(t)) \in O)$$

Diese Interpretation erfüllt die aus den Originalklauseln hervorgegangenen PK1-Klauseln, denn, wie man aus der Definition der PV1-Interpretation (s. S. 19f) ersieht, bekommen Atome in beiden Interpretationen den gleichen Wahrheitswert zugeordnet.

Da laut Definition jeder Kombination eines Prädikatensymbols und eines Argumentvektors (= Atom ohne Berücksichtigung des Index) genau ein Wert  $d$  aus der Domäne zugeordnet wird und dieses  $d$  wegen der Eigenschaft von  $\mathcal{Q}$ ,

Partitionierung zu sein, in genau einem  $Q_i$  aus  $Q$  liegt, weiterhin die Mengeneinklusionen der  $Q_i$  und  $O_j$  durch die neu erzeugten Formeln exakt wiedergespiegelt werden, so kann man sich leicht davon überzeugen, daß auch diese erfüllt sein müssen. Damit ist die konstruierte Interpretation ein Modell der korrespondierenden PK1-Formelmengens  $S'$ .

⇐:

Gegeben sei eine PK1-Interpretation, die  $S'$  erfüllt.

Dies bedeutet insbesondere, daß die zusätzlich erzeugten Formeln erfüllt sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn zu jedem Prädikat  $P$  und Argumentvektor  $t$  für genau ein  $P^Q$  das Atom  $P^Q(t)$  wahr wird. Man wähle nun ein beliebiges Element  $x$  aus diesem  $Q$ . Dies ist möglich, da die Elemente einer Partitionierung nicht leer sind. Dieses  $x$  verwende man als Wert der Funktion  $\mathfrak{I}(P): D^n \rightarrow \Omega(P)$  an der Stelle  $t$ . Damit werden bei der PV1-Evaluation alle  $P_O(t)$ , bei denen  $x$  in  $O$  liegt, wahr, die anderen falsch. Damit erhalten alle Atome in den ursprünglichen Formeln entsprechenden Klauseln genau die gleichen Wahrheitswerte wie ihre Entsprechungen in der korrespondierenden Klauselmengens. Da diese jedoch erfüllt ist, muß es die ursprüngliche ebenso sein.

Wir haben damit gezeigt, daß PV1 und PK1 insofern als äquivalent zu betrachten sind, daß alles in der einen Sprache Ausdrückbare genauso in der anderen gesagt werden kann. Wir haben aber ebenso festgestellt, daß einer PV1-Klauselmengens eine im allgemeinen sehr viel größere Mengens von PK1-Klauseln entspricht. Um mit dem PV1 wirklich sinnvoll arbeiten zu können, ist es nun nicht sehr sinnvoll, jedesmal den Umweg über eine Transformation in Prädikatenlogik zu gehen. Wir werden daher in den folgenden beiden Kapiteln ein Verfahren entwickeln, wie innerhalb des PV1 Ableitungen gemacht und Theoreme bewiesen werden können.

## 5 Herbrandinterpretationen und semantische Bäume für den PV1:

Man könnte zunächst auf den Gedanken kommen, daß die in der Überschrift zu diesem Kapitel angedeuteten Schritte eigentlich unnötig wären, da doch Formeln des PV1 in den PK1 transformiert werden können und somit korrekte und (vollständige Kalküle existieren. Natürlich ist Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit garantiert, wenn wir zunächst die Formelmengen transformieren und dann innerhalb des PK1 resolvieren. Unser Ziel ist aber, ein mächtigeres Resolutionskonzept<sup>12</sup> anzugeben, das direkt auf den PV1-Formeln operiert. Dieses wird im nächsten Kapitel eingeführt werden. Um dessen Eigenschaften beschreiben und beweisen zu können, werden die in diesem Kapitel behandelten Konzepte benötigt. Wir gehen dabei stets von Klauselmengen aus, da sich alle Formeln, wie bereits gezeigt, in diese Normalform bringen lassen.

Zunächst gilt, völlig analog zum PK1, der folgende

**Satz 5.1:** Gegeben eine endliche Klauselmenge  $S = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ . Eine Formel  $F$  ist genau dann logische Folgerung aus  $S$ , wenn  $S \cup \{\neg F\}$  unerfüllbar ist.

Der Beweis ist direkt aus Literatur über den PK1 zu übernehmen.

Um die Unerfüllbarkeit einer Klauselmenge zu beweisen, müßte man die Ungültigkeit unter allen Interpretationen zeigen. Auch hier kann man sich, wie im prädikatenlogischen Fall, glücklicherweise auf den Beweis der Unerfüllbarkeit bezüglich Interpretationen über dem **Herbrand-Universum**<sup>13</sup>, d.h. der Menge der Grundterme, beschränken. Dabei muß aber berücksichtigt werden, daß die Indexmengen nicht Bestandteil des Herbrand-Universums sind. Wir müssen also die üblichen Herbrand-Interpretationen dahingehend erweitern. Dabei braucht man aber auch hier, ähnlich wie in Kapitel 4 bei der Konstruktion der korrespondierenden PK1-Interpretation, lediglich Interpretationen über den MEP's der aus den Indexmengen gebildeten Mengensysteme zu definieren.

---

<sup>12</sup>jedenfalls gegenüber dem ursprünglich von Robinson in [Robinson 65] vorgestellten

<sup>13</sup>dieser und viele der folgenden Begriffe gehen zurück auf [Herbrand 30]

Wir definieren also – völlig analog zum PK1 –

**Definition 5.1 (Grund-Atom, Herbrand-Basis):**

Sei  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikat,  $t$  ein Argumentvektor entsprechender Stelligkeit. Wenn  $t$  keine Variablen enthält, so heißt  $P(t)$  ein **Grund-Atom**. Die Menge aller Grundatome zu allen Prädikaten, die in einer Klauselmenge  $S$  auftreten, wobei die Argumente nur aus dem Herbranduniversum genommen werden, heißt die **Herbrand-Basis** von  $S$ .

Diese Definition wird aus dem Grund explizit erwähnt, daß deutlich darauf hingewiesen werden muß, daß wir Grund-Atome ohne Berücksichtigung der Indexmengen definieren. Die Klausel  $\{\text{TEMP}_{[10, 20]}(f(a)), \text{TEMP}_{[15, 30]}(f(a)), \text{TEMP}_{]-15, -10]}(\text{wetter})\}$  enthält also zwar drei Atome, jedoch nur zwei voneinander verschiedene Grund-Atome.

**Definition 5.2 (Grundmenge, Basismenge):**

Sei  $S$  eine Klauselmenge,  $P$  ein in  $S$  auftretendes Prädikatensymbol. Die MEP des aus allen in  $S$  als Index auftretenden Teilmengen von  $\Omega(P)$  gebildeten Mengensystems heißt **Basismenge** des Prädikats  $P$ , das Mengensystem selbst **Grundmenge** von  $P$ .

Mit diesen Mitteln können wir jetzt unsere Erweiterung der normalen Herbrand-Interpretationen beschreiben:

**Definition 5.3 (erweiterte Herbrand-Interpretation):**

Sei  $S$  eine Klauselmenge,  $C$  das Herbrand-Universum von  $S$ . Eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  von  $S$  heißt **erweiterte Herbrand-Interpretation**, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Die Domäne ist das Herbrand-Universum von  $S$
- (ii) Funktionssymbole (zu denen wie immer auch die Konstanten gehören) werden auf Termerzeugungsfunktionen abgebildet.
- (iii)  $n$ -stelligen Prädikatensymbolen werden Funktionen, die  $n$ -stellige (Argument-)Vektoren von Elementen der Domäne auf ein Element der Basismenge des betreffenden Prädikats abbilden, zugeordnet.

Zunächst ist festzustellen, daß es sich bei einer erweiterten Herbrand-Interpretation eigentlich um gar keine Interpretation handelt, da die Funktionen, die als Interpretationen der Prädikatensymbole verwendet werden, nicht auf Elemente, sondern auf Teilmengen der Variationsmenge abbilden. Diese Inkonsistenz kann aber überwunden werden, indem man sich vorstellt, daß die Abbildung auf einen **Repräsentanten**, das ist ein beliebiges Element der betreffenden Teilmenge, durchgeführt wird. Dieser Repräsentant

existiert, da alle Elemente einer Partitionierung nicht leer sind, und seine Wahl hat auch keinen Einfluß auf den Wahrheitswert beliebiger Klauseln aus  $S$ , da die MEP die Menge aller auftretenden Indexmengen erfüllt.

Wie man unschwer bemerkt, gibt es zu jeder Klauselmenge nicht notwendigerweise nur eine einzige erweiterte Herbrand-Interpretation. Jedoch gibt es nur noch einen einzigen Freiheitsgrad, das ist die Auswahl des Elements aus der Basismenge des jeweiligen Prädikats bei der Zuordnung zu Grund-Atomen. Man kann daher eine erweiterte Herbrand-Interpretation in eindeutiger Weise angeben durch eine Menge von Paaren  $\{(a_1, m_1), (a_2, m_2), (a_3, m_3), \dots\}$ , wobei die  $a_i$  eine Aufzählung aller Grundatome darstellen und die  $m_i$  angeben, zu welchem Wert die  $a_i$  evaluieren. Dabei ist zu beachten, daß in der Menge für jedes Grundatom genau ein Element mit diesem Grundatom an der ersten Position existiert. Wenn man sich die Definitionen von Grund-Atomen und Herbrand-Basis betrachtet, so erkennt man, daß die so erhaltene Menge abzählbar sein muß, wenngleich sie im allgemeinen auch nicht endlich ist.

In unserem schon oft strapazierten Beispiel ist das Herbrand-Universum gleich

$$\{\text{wetter}, \text{tristan}\}$$

und die Herbrand-Basis gleich

$$\{\text{TEMP}(\text{wetter}), \text{TEMP}(\text{tristan}), \text{FÜHLT-SICH-WOHL}(\text{wetter}), \text{FÜHLT-SICH-WOHL}(\text{tristan})\}.$$

Da sich die Basismengen der Prädikate TEMP und FÜHLT-SICH-WOHL zu

$$\{-273, 15[ \cup ]35, \infty, [15, 20[, [20, 25], ]25, 35\}$$

bzw.  $\{\mathbf{t}\}, \{\mathbf{f}\}$

ergeben, ist beispielsweise

$$\{(\text{TEMP}(\text{wetter}), [15, 20[),$$

$$(\text{TEMP}(\text{tristan}), [-273, 15[ \cup ]35, \infty]),$$

$$(\text{FÜHLT-SICH-WOHL}(\text{wetter}), \{\mathbf{f}\}),$$

$$(\text{FÜHLT-SICH-WOHL}(\text{tristan}), \{\mathbf{t}\})\}$$

eine mögliche erweiterte Herbrand-Interpretation.

Genau wie im prädikatenlogischen Fall, kann nun ein Zusammenhang zwischen erweiterten Herbrand-Interpretationen und beliebigen Interpretationen aufgezeigt werden. Damit läßt sich beweisen, daß eine Klauselmeng e genau dann (un-)erfüllbar ist, wenn es (k)eine erweiterte Herbrand-Interpretation gibt, die sie erfüllt.

**Definition 5.4 (korrespondierende Interpretation):**

Sei  $S$  eine Klauselmeng e,  $\mathfrak{I}$  eine Interpretation über einer beliebigen Domäne  $D$ . Wir definieren eine zu  $\mathfrak{I}$  **korrespondierende** erweiterte Herbrand-Interpretation  $\mathfrak{I}^*$  als erweiterte Herbrand-Interpretation, die zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:

Seien  $c_1, c_2, \dots$  Elemente des Herbrand-Universums von  $S$ . Falls einem Prädikat  $P$  in  $\mathfrak{I}$  eine Funktion mit dem Wert  $d$  an der Stelle  $(\mathfrak{I}(c_1), \mathfrak{I}(c_2), \dots, \mathfrak{I}(c_n))$  zugeordnet wird, so wird in  $\mathfrak{I}^*$  dem Grund-Atom  $P(c_1, c_2, \dots, c_n)$  diejenige Menge aus der Basismeng e von  $P$  zugeordnet, in der  $d$  liegt.

Es gilt nun folgender

**Satz 5.2:** Falls eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  über beliebiger Domäne  $D$  eine Klauselmeng e  $S$  erfüllt, dann erfüllt auch jede zu  $\mathfrak{I}$  korrespondierende erweiterte Herbrand-Interpretation  $\mathfrak{I}^*$   $S$ .

Der Beweis wird in der üblichen Weise durch Induktion über den Term- und Formelaufbau geführt.

Nun können wir den entscheidenden Satz, auf den es uns eigentlich ankommt, beweisen:

**Satz 5.3:** Eine Klauselmeng e  $S$  ist dann und nur dann unerfüllbar, wenn  $S$  unter allen erweiterten Herbrand-Interpretationen nicht erfüllt wird.

**Beweis:**  $\Rightarrow$ :

Angenommen,  $S$  ist unerfüllbar. Dann gibt es kein Modell für  $S$ . Demnach kann auch keine erweiterte Herbrand-Interpretation Modell sein.

$\Leftarrow$ :

Angenommen, keine erweiterte Herbrand-Interpretation ist Modell von  $S$ . Wenn nun  $S$  erfüllbar wäre, so gäbe es ein Modell für  $S$ . Dann wäre jedoch nach Satz 5.2 auch jede dazu korrespondierende erweiterte Herbrand-Interpretation ein Modell. Dies führt zum Widerspruch.

q.e.d.

Die Frage, ob ein Theorem  $F$  logische Folgerung aus einer Menge von Axiomen  $Ax$  ist, läßt sich nun darauf zurückführen, zu prüfen, ob die Klauselmeng  $Ax \cup \{\neg F\}$  keine erweiterte Herbrand-Interpretation als Modell besitzt.

**Definition 5.5 (Grund-Instanz):**

Eine **Grund-Instanz** einer Klausel  $K$  aus einer Klauselmeng  $S$  ist eine Klausel, die man dadurch erhält, daß man alle Variablen in  $K$  durch Elemente des Herbrand-Universums von  $S$  ersetzt.

Die folgenden Beziehungen sind dann offensichtlich:

**Satz 5.4:** Eine Grund-Instanz  $K'$  einer Klausel  $K$  aus einer Klauselmeng  $S$  wird durch eine Interpretation  $\mathfrak{I}$  genau dann erfüllt, wenn  $K'$  ein Grund-Atom  $G'$  enthält, so daß  $\mathfrak{I}(G')$  in seiner Indexmeng enthalten ist.

Eine Klausel wird durch eine Interpretation genau dann erfüllt, wenn jede Grundinstanz dieser Klausel unter dieser Interpretation erfüllt ist.

Eine Klausel wird durch eine Interpretation genau dann **falsifiziert** (d.h. ist nicht erfüllt), wenn es eine Grundinstanz dieser Klausel gibt, die unter dieser Interpretation nicht erfüllt ist.

Eine Klauselmeng  $S$  ist unerfüllbar genau dann, wenn für jede Interpretation  $\mathfrak{I}$  eine Grundinstanz  $K'$  einer Klausel  $K$  aus  $S$  existiert, so daß  $\mathfrak{I} K'$  nicht erfüllt.

Wir benötigen nun einen Weg, alle möglichen Interpretationen aufzuzählen. Dies ist möglich, wenn wir uns auf die in Definition 5.4 beschriebenen korrespondierenden Interpretationen beziehen, da das Herbrand-Universum einer endlichen Klauselmeng abzählbar und die Anzahl der Äquivalenzklassen von Interpretationen für jedes Grund-Atom endlich ist. Eine bekannte Methode der Aufzählung, die auch wir in leicht abgewandelter Form verwenden werden, sind semantische Bäume.

Dabei werden Interpretationen schrittweise konstruiert, indem man im Wurzelknoten mit einer leeren Interpretation beginnt und nach und nach die einzelnen Grund-Atome einbezieht, bis für alle eine Zuordnung getroffen ist. Für die dabei auftretenden Zwischenschritte benötigen wir den Begriff der partiellen Interpretation.

**Definition 5.6 (partielle erweiterte Herbrand-Interpretation):**

Eine **partielle erweiterte Herbrand-Interpretation** einer Klauselmenge  $S$  ist eine Menge der Gestalt  $\{(a_1, m_1), (a_2, m_2), (a_3, m_3), \dots\}$ , wobei die  $a_j$  Elemente der Herbrand-Basis von  $S$  und die  $m_j$  Elemente der MEP's von Teilmengen der Grundmengen der betreffenden Prädikate sind. Außerdem wird gefordert, daß zu jedem Grund-Atom höchstens ein Paar mit diesem Grund-Atom an erster Position existiert.

Anschaulich kann man sich das so vorstellen, daß die Interpretation quasi „unterbestimmt“ ist. Zum einen wird nicht unbedingt für alle Grund-Atome eine Zuordnung getroffen, zum anderen sind die zugeordneten Mengen noch nicht maximal eingeschränkt, da die MEP der gesamten Grundmenge nach Satz 2.8 die MEP's ihrer Teilmengen erfüllt. Natürlich ist eine derartige partielle Interpretation nicht in jedem Fall wirklich eine Interpretation, da offensichtlich nicht allen Grund-Atomen überhaupt eindeutig Wahrheitswerte zugeordnet werden können. Jedoch kann jede partielle Interpretation durch Aufnahme weiterer Grund-Atome und Einschränkung der zugeordneten Mengen zu einer echten Interpretation vervollständigt werden.

Die Begriffe „erfüllt“ und „falsifiziert“ lassen sich auch auf partielle Interpretationen übertragen. Dabei sollte man jedoch beachten, daß eine Klauselmenge unter einer partiellen Interpretation auch weder erfüllt noch falsifiziert sein kann, was für vollständige Interpretationen nicht gilt.

**Definition 5.7 (erweiterter semantischer Baum):**

Gegeben eine Klauselmenge  $S$ , sei  $B$  die Herbrand-Basis von  $S$ . Ein **erweiterter semantischer Baum** von  $S$  ist ein Baum  $T$ , dessen Kanten mit Paaren, die aus je einem Grund-Atom und einem Element der Basismenge des betreffenden Prädikats bestehen, markiert sind. Zusätzlich wird noch gefordert:

Jeder Knoten  $N$  des Baums hat nur eine endliche Verzweigungsrate. Seien  $(a_1, m_1), (a_2, m_2), \dots, (a_n, m_n)$  die Marken der Kanten, die von  $N$  ausgehen. Dann ist  $a_1 = a_2 = \dots = a_n =: a$  und es gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n m_i = \text{Variationsmenge des zu } a \text{ gehörigen Prädikats}$$

Ferner darf auf keinem Pfad ein Atom mehrmals als erstes Element einer Kantenmarkierung auftreten.

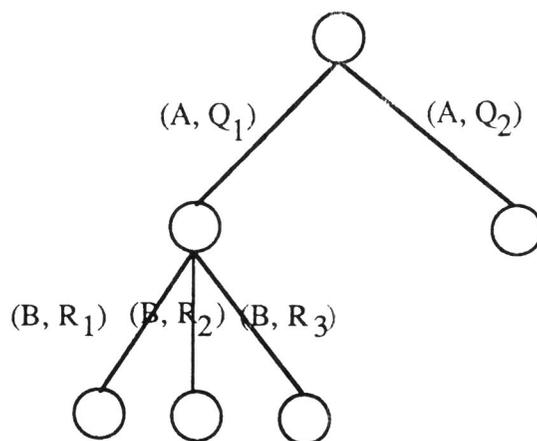
Wir meinen mit der Interpretation eines Knotens  $N$  stets die Vereinigungsmenge aller Kantenmarkierungen auf dem Pfad von der Wurzel zu  $N$ . Unter der Interpretation eines Pfades verstehen wir die Interpretation seines Blattes, falls er endlich ist, ansonsten eine Art „Grenzwert“ der Interpretationen seiner Knoten.

**Definition 5.8 (vollständiger semantischer Baum):**

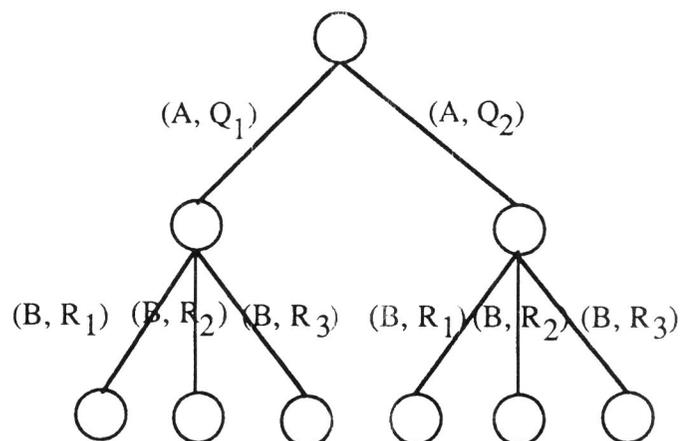
Ein erweiterter semantischer Baum heißt **vollständig**, wenn die Interpretation jedes Blattes eine (vollständige) erweiterte Herbrand-Interpretation ist.

Beispiel:

Gegeben seien die Grund-Atome  $A$  und  $B$  mit den zugehörigen Basismengen  $\{Q_1, Q_2\}$  bzw.  $\{R_1, R_2, R_3\}$ . Für eine Klauselmeng, in der genau diese Atome auftreten, ist



ein möglicher erweiterter semantischer Baum. Er ist jedoch nicht vollständig. Ein vollständiger erweiterter semantischer Baum ist dagegen beispielsweise



Es gilt nun

**Satz 5.5:** Jede denkbare erweiterte Herbrand-Interpretation einer Klauselmengens  $S$  tritt in jedem vollständigen semantischen Baum von  $S$  als Interpretation eines Pfades auf.

Beweis:

Sei  $\mathfrak{I}$  eine erweiterte Herbrand-Interpretation der Klauselmengens  $S$ .  $\mathfrak{I}$  ordnet jedem Grund-Atom von  $S$  ein Element der Basismengens des zugehörigen Prädikats zu. Starten wir am Wurzelknoten und wählen jeweils den Zweig, von dessen Marke das zweite Element eine (nicht notwendigerweise echte) Obermengens der unter  $\mathfrak{I}$  dem in der Marke an erster Stelle stehenden Grund-Atom zugeordnet wird. Diese Auswahl ist eindeutig wegen Satz 2.7. So verfahren wir immer weiter. Wenn wir dabei an ein Blatt kommen, so muß nach der Definition der Vollständigkeit die Interpretation des Blattes (und damit die des Pfades) vollständig sein. Dann aber stimmt sie in jedem Grund-Atom mit  $\mathfrak{I}$  überein. Die gleiche Argumentation gilt auch für unendliche Pfade, denn da nach Satz 5.5 jedes Grund-Atom nur endlich oft in Kantenmarkierungen auftritt, muß jeder unendliche Pfad letztlich alle Elemente der (abzählbaren!) Herbrand-Basis von  $S$  erwähnen.

q.e.d.

**Definition 5.9 (Widerspruchsknoten):**

Ein Knoten  $N$  eines erweiterten semantischen Baums einer Klauselmengens  $S$  heißt **Widerspruchsknoten**, falls die Interpretation von  $N$   $S$  falsifiziert, jedoch Interpretation keines seiner Ahnen dies tut.

**Definition 5.10 (abgeschlossen):**

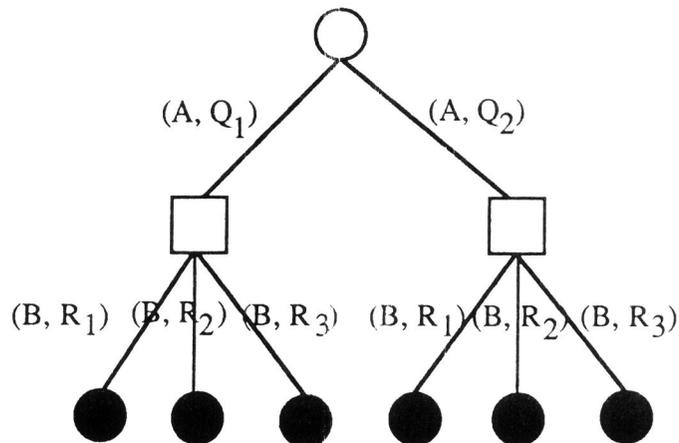
Ein erweiterter semantischer Baum  $T$  heißt **abgeschlossen**, falls jeder Pfad in  $T$  an einem Widerspruchsknoten endet.

**Definition 5.11 (Inferenzknoten):**

Ein Knoten  $N$  eines abgeschlossenen erweiterten semantischen Baums heißt **Inferenzknoten**, wenn alle unmittelbaren Nachfolger von  $N$  Widerspruchsknoten sind.

Beispiel:

In den Baumdiagrammen bedeuten dunkle Knoten Widerspruchsknoten, eckige Knoten Inferenzknoten. Die Basismengen zu A und B seien wie oben definiert. Gegeben sei ferner die (unerfüllbare) Klauselmenge  $\{\{A_{Q_1}, B_{R_1}\}, \{A_{Q_2}, B_{R_2}\}, \{B_{R_3}\}\}$ . Dann stellt sich der angegebene vollständige Baum dar als



Wir sind jetzt in der Lage, den entscheidendsten Satz dieses Kapitels zu beweisen. Es handelt sich hierbei um eine Variante des als Herbrand-Theorem bekannten Satzes, der also auch auf den PV1-Kalkül anwendbar ist. Der Satz liefert die Grundlage dafür, daß die Unerfüllbarkeit einer endlichen Menge von Klauseln semientscheidbar ist, womit wegen Satz 5.1 auch die Feststellung, ob eine Formel logische Folgerung einer Axiomenmenge ist, semientscheidbar ist.

**Satz 5.6 (Herbrand-Theorem):**

Eine Klauselmenge  $S$  ist unerfüllbar genau dann, wenn jeder vollständige erweiterte semantische Baum von  $S$  einen endlichen abgeschlossenen Teilbaum besitzt.

Beweis:

$\Rightarrow$ :

Angenommen,  $S$  ist unerfüllbar. Sei  $T$  ein beliebiger vollständiger erweiterter semantischer Baum von  $S$ ,  $p$  ein Pfad in  $T$ . Die Interpretation von  $p$  muß  $S$  falsifizieren. Das bedeutet aber, daß sie eine Grund-Instanz einer Klausel aus  $S$  falsifiziert. Da  $S$  endlich ist, gibt es eine endliche partielle Interpretation, die dies auch leistet. Daher liegt auf  $p$ , endlich viele Kanten von der Wurzel entfernt, ein Widerspruchsknoten. Da dies für alle Pfade

---

gilt, gibt es einen abgeschlossenen Teilbaum  $T'$  in  $T$ . Wegen der endlichen Verzweigungsrate ist dieser endlich.

⇐:

Wenn jeder vollständige erweiterte semantische Baum  $T$  von  $S$  einen endlichen abgeschlossenen Teilbaum enthält, liegt auf jedem Pfad ein Widerspruchsknoten. Daraus folgt aber, daß die Interpretation jedes Pfades  $S$  falsifiziert. Wegen Satz 5.5 sind dies aber alle möglichen Interpretationen, d.h.  $S$  ist unerfüllbar.

q.e.d.

Wir sind damit so weit, daß wir endlich dazu kommen, die syntaktische Ableitung zu definieren. Wir wählen dazu eine Erweiterung des Resolutionsprinzips, die wir im nächsten Kapitel einführen.

## 6 PV-Resolution:

Wir haben im letzten Kapitel Interpretationen über Grundtermen betrachtet. Bei der Beschreibung des eigentlichen Ableitungsschrittes tauchen jedoch auch Variable auf, so daß wir uns nun zunächst mit Substitutionen und Unifikation beschäftigen müssen. Dabei werden wir, der Terminologie halber, einige Definitionen kurz wiederholen, jedoch die angeführten Sätze hier nicht beweisen, da sie mit den entsprechenden Sätzen der Prädikatenlogik identisch sind.

**Substitutionen** werden wir als bekannt voraussetzen. Wir schreiben sie mit kleinen griechischen Buchstaben und bezeichnen die leere Substitution mit  $\epsilon$ . Ist  $\sigma$  eine Substitution und  $A$  ein **Ausdruck** (d.h. ein Term oder eine PK1-Formel), dann heißt  $\sigma A$  eine **Instanz** von  $A$ . Die Zusammensetzung von Substitutionen bezeichnen wir mit dem Symbol „ $\circ$ “, wobei  $(\theta \circ \sigma)A$  (sprich „ $\sigma$  nach  $\theta$ “) als  $\sigma(\theta A)$  zu verstehen ist.

Beispiel:

$$\text{Sei } \theta = \{f(x, y)/x, g(a)/z\}, \sigma = \{x/y, a/x\}$$

$$\text{Dann ist } \theta \circ \sigma = \{f(a, x)/x, g(a)/z, x/y\} \text{ und } \sigma \circ \theta = \{f(x, y)/y, a/x, g(a)/z\}$$

**Satz 6.1:** Für die Zusammensetzung von Substitutionen gilt das Assoziativgesetz.  $\epsilon$  ist rechtes und linkes Einselement.

Auch die Begriffe **Unifikator**, **unifizierbar** und insbesondere **allgemeinster Unifikator** können wir einfach übernehmen. Wir bezeichnen den allgemeinsten Unifikator mit  $mgu$ <sup>14</sup>.

### Satz 6.2 (Unifikationstheorem):

Es gibt ein Verfahren (den sogenannten Unifikationsalgorithmus), das entscheidet, ob eine gegebene endliche Menge von Ausdrücken unifizierbar ist und im positiven Fall den allgemeinsten Unifikator berechnet.

Wir müssen nun versuchen, diese Definitionen auf indizierte Prädikate auszudehnen. Wir definieren dazu die PV-Unifikante:

---

<sup>14</sup>Wir behalten diese Abkürzung des englischen Audrucks "most general unifier" bei, da sie sich allgemein eingebürgert hat.

**Definition 6.1 (PV-Unifikante):**

Gegeben die Atome  $P_{S_1}(t_1), \dots, P_{S_n}(t_n)$ . Besitzen  $t_1, \dots, t_n$  einen mgu  $\sigma$ , so sagen wir,  $\sigma$  **unifiziert**<sup>15</sup>  $\{P_{S_1}(t_1), \dots, P_{S_n}(t_n)\}$ . Wir bezeichnen

$$P_{S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n}(\sigma t_n)$$

als **PV-Unifikante** von  $\{P_{S_1}(t_1), \dots, P_{S_n}(t_n)\}$ , und bezeichnen dies einfach als

$$\sigma\{P_{S_1}(t_1), \dots, P_{S_n}(t_n)\}.$$

Die hier auftretenden Verschmelzungen der Indexmengen werden automatisch durchgeführt. Dies kann bei jeder Instantiierung auftreten.

Beispiel:

TEMP<sub>[10, 100]</sub> (wetter) ist eine PV-Unifikante von  $\{\text{TEMP}_{[10, 30]}(x), \text{TEMP}_{[25, 90]}(y), \text{TEMP}_{[80, 100]}(\text{wetter})\}$ .

**Definition 6.2 (PV-Faktor):**

Sei  $K$  eine Klausel und  $\sigma$  eine Substitution, die eine Teilmenge von  $K$  unifiziert. Dann heißt

$$\bigcup_{i=1}^n \sigma U_i \quad \text{mit } U_i \in K \text{ und } \sigma \text{ unifiziert } U_i^{16}$$

ein **PV-Faktor** von  $K$ <sup>17</sup> und wird kurz mit  $\sigma K$  bezeichnet.

Falls dabei ein Atom der Form  $P_{\Omega}(P)(t)$  auftreten sollte, so ist  $\sigma K$  eine **Tautologie** und kann durch **true** ersetzt werden.

<sup>15</sup>Dies ist keine doppelte Definition. Wir hatten vorher Unifikation nur für PK1-Ausdrücke definiert und erweitern diese Definition nun auf PV1-Formeln.

<sup>16</sup>Die dabei auftretenden Mengen werden in vielen Fällen nur je ein einziges Element besitzen. Jedoch kann es durchaus vorkommen, daß der genannte Unifikator weitere Teilmengen von  $K$  unifiziert.

<sup>17</sup>Dabei können selbstverständlich doppelt auftretende Atome getilgt werden.

Beispiel:

Die beiden zweistelligen Prädikate **A** und **B** haben als Variationsmenge die Menge der reellen Zahlen.

Die Substitution  $\sigma = \{f(a)/x\}$  unifiziert die Teilmenge  $\{A_{[10, 20]}(x, x), A_{[15, 30]}(x, f(a))\}$  der Klauselmenge  $K = \{A_{[10, 20]}(x, x), A_{[15, 30]}(x, f(a)), B_{[-10, 0]}(y, x), B_{[10, 20]}(y, f(a))\}$ . Der entsprechende PV-Faktor  $\sigma K$  lautet dann  $\{A_{[10, 30]}(f(a), f(a)), B_{[-10, 0]} \cup [10, 20](y, f(a))\}$ .

Nun sind wir endlich in der Lage, die syntaktische Ableitung in unserem Kalkül zu definieren. Die einzige Ableitungsregel ist dabei die Bildung von „PV-Resolventen“. Dieser Schritt ist eine Verallgemeinerung der üblichen Resolventenbildung und entspricht in dem Fall, daß die Variationsmenge des betroffenen Prädikats gleich  $\{t, f\}$  ist, also das Prädikat nur eine syntaktische Variante eines normalen PK1-Prädikats ist, genau dem bekannten Verfahren.

**Definition 6.3 (binäre PV-Resolvente):**

Seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei Klauseln (die sogenannten **Elternklauseln**) ohne gemeinsame Variable. Seien ferner  $A_1 = PS_1(t_1)$  und  $A_2 = PS_2(t_2)$  zwei Atome aus  $K_1$  respektive  $K_2$ . Wenn  $t_1$  und  $t_2$  einen mgu  $\sigma$  besitzen, dann heißt die Klausel

$$K = (\sigma K_1 \setminus \sigma A_1) \cup (\sigma K_2 \setminus \sigma A_2) \cup \{\sigma PS_{1 \cap 2}(t_1)\}^{18}$$

eine **binäre PV-Resolvente** von  $K_1$  und  $K_2$ . Dabei können eventuell anfallende Atome der Form  $P\emptyset(t)$  eliminiert werden.

Beispiel:

Die Prädikate **A** und **B** seien wieder zweistellig mit Variationsmenge  $\mathbb{R}$ . Die Klauseln  $\{A_{[10, 20]}(x, x), B_{[-10, 0]}(y, x)\}$  und  $\{A_{[15, 30]}(x, f(a)), B_{[10, 20]}(y, f(a))\}$  können dann beispielsweise zu  $\{A_{[15, 20]}(f(a), f(a)), B_{[10, 20]}(y, f(a)), B_{[-10, 0]}(y, f(a))\}$  unifiziert werden, was sofort weiter zu  $\{A_{[15, 20]}(f(a), f(a)), B_{[-10, 0]} \cup [10, 20](y, f(a))\}$  zusammengefaßt werden kann.

---

<sup>18</sup>Statt  $t_1$  könnte natürlich genauso gut  $t_2$  stehen.

**Definition 6.4 (PV-Resolvente):**

Eine **PV-Resolvente** der Elternklauseln  $K_1$  und  $K_2$  ist eine binäre Resolvente von

$K_1$  und  $K_2$  oder

$K_1$  und einem PV-Faktor von  $K_2$  oder

einem PV-Faktor von  $K_1$  und  $K_2$  oder

einem PV-Faktor von  $K_1$  und einem PV-Faktor von  $K_2$ .

Beispiel:

Gegeben die Klauseln  $\{A_{[10, 20]}(x, x), B_{[-10, 0]}(y, x), B_{[10, 20]}(y, f(a))\}$  und  $\{A_{[15, 30]}(x, f(a))\}$ . Da  $\{A_{[10, 20]}(f(a), f(a)), B_{[-10, 0]} \cup [10, 20](y, f(a))\}$  ein PV-Faktor der ersten Klausel ist, können wir die PV-Resolvente  $\{A_{[15, 20]}(f(a), f(a)), B_{[-10, 0]} \cup [10, 20](y, f(a))\}$  bilden.

Das beim eigentlichen (binären) Resolutionsschritt auftretende Atom  $\{\sigma_{PS_1 \cap S_2}(t_1)\}$  ist ein Residuum im Sinne der Stickel'schen Theorieresolution<sup>19</sup>. Wenn man den Kalkül aus diesem Blickwinkel betrachtet, stellt man fest, daß es sich bei den PV-Resolventen um binäre, partielle, enge Resolventen handelt. Die zugrundeliegende Theorie ist nicht explizit in Formeln repräsentiert, sondern steckt in der Inferenzregel selbst. In unserer Abbildung auf den PK1 allerdings (siehe Kapitel 3) taucht sie gesondert auf: sie entspricht nämlich genau den in der korrespondierenden Klauselmenge zusätzlich erzeugten Klauseln.

Ist nun  $S$  eine Menge von Klauseln, so wird eine **Ableitung** für eine Klausel  $K$  in der üblichen Weise als endliche Folge von PV-Resolutionsschritten definiert. Wir schreiben dann  $S \vdash K$ . Wir werden in diesem Zusammenhang auch von einem **Beweis** von  $K$  (aus  $S$ ) sprechen und die Ableitung von **false** aus  $S \cup \{\neg K\}$  einen **Widerlegungsbeweis** für  $K$  (aus  $S$ ) nennen.

Als nächstes müssen wir den Zusammenhang zwischen syntaktischer Ableitung und dem semantischen Folgerungsbegriff betrachten. Wenn man einmal Effizienzbetrachtungen außer acht läßt, wären wir natürlich am zufriedensten, wenn  $(S \models K) \Leftrightarrow (S \vdash K)$  gälte, d.h. unsere Resolution vollständig und korrekt wäre. Natürlich können wir dies nicht ernsthaft erwarten, da dann die Vollständigkeit auch für die Einschränkung auf PK1-Klauseln gelten müßte, was bekanntermaßen eben nicht der Fall ist. Wir können jedoch zeigen, daß zumindest die Korrektheit auch im allgemeinen Fall gilt:

---

<sup>19</sup>siehe [Stickel 85]

**Satz 6.3:** Jede PV-Resolvente ist eine logische Folgerung aus ihren Elternklauseln.

Beweis:

Zunächst ist zu zeigen, daß jeder Faktor aus seiner Elternklausel folgt. Da Klauseln als allquantifiziert zu verstehen sind, muß die Formel nach der Substitution in jeder Interpretation wahr sein, die Modell der Elternklausel ist. Die Vereinigungsmengenbildung der Indexmengen ist nach Satz 3.12 eine Äquivalenzumformung. Für die Substitution bei der Resolventenbildung gilt das Gleiche wie oben für die erste Substitution gesagt. Hier folgt die Äquivalenz der Schnittmengenbildung aus Satz 3.11 und der Tatsache, daß für beliebige Atome P, Q, R, S die Formel  $(P \wedge R) \vee Q \vee S$  logische Folgerung aus  $\{(P \vee Q), (R \vee S)\}$  ist. q.e.d.

Der durch die **PV-Resolution** definierte syntaktische Inferenzmechanismus ist also korrekt und wir haben die Gewähr, daß mithilfe dieses Verfahrens aus gültigen Formelmengen abgeleitete Theoreme gültig sind.

Beispiel:

Wir zeigen, daß sich aus unserer bekannten Klauselmenge

- (i) TEMP  $[-273, 20[ \cup ]35, \infty]$  (wetter)  $\vee$  FÜHLT-SICH-WOHL  $\{t\}$  (x)
- (ii) TEMP  $[15, 25]$  (wetter)

durch PV-Resolution die Klausel

- (\*) FÜHLT-SICH-WOHL  $\{t\}$  (x)  $\vee$  TEMP  $[15, 20[$  (wetter)

ableiten läßt.

Diese ergibt sich nämlich direkt als binäre PV-Resolvente aus (i) und (ii).

Jedoch ist die Klausel

- (\*\*) FÜHLT-SICH-WOHL  $\{t\}$  (tristan)  $\vee$  TEMP  $[15, 20[$  (wetter)

nicht durch PV-Resolution ableitbar, obwohl sie logische Folgerung aus  $\{(i), (ii)\}$  ist.

Das führt zur Feststellung, daß PV-Resolution als einzige Inferenzregel – ebenso wie die Resolution in der Prädikatenlogik – nicht vollständig ist.

Wie erwartet läßt sich jedoch die Widerlegungsvollständigkeit zeigen. Das bedeutet, daß das Inferenzverfahren, das Widerlegungsbeweise konstruiert, tatsächlich aus jeder unerfüllbaren Klauselmenge allein durch PV-Resolution die Klausel **false** ableiten kann.

Das für diesen Beweis benötigte Lifting Lemma wirft keine besonderen Probleme auf und entspricht im wesentlichen dem der Prädikatenlogik.

**Satz 6.3 (Lifting Lemma):**

Wenn  $K_1'$  und  $K_2'$  Grund-Instanzen der Klauseln  $K_1$  bzw.  $K_2$  sind und  $K'$  eine binäre PV-Resolvente von  $K_1'$  und  $K_2'$ , dann gibt es eine PV-Resolvente  $K$  von  $K_1$  und  $K_2$ , so daß  $K'$  eine Instanz von  $K$  ist.

Beweis:

Falls notwendig, führen wir eine Umbenennung der Variablen in  $K_1$  und  $K_2$  durch, so daß keine Variable in beiden Klauseln vorkommt. Seien  $PS_1(t)$  und  $PS_2(t)$  die bei der Resolventenbildung betroffenen Atome und

$$K' = (K_1' \setminus PS_1(t)) \cup (K_2' \setminus PS_2(t)) \cup \{PS_1 \cap PS_2(t)\}^{20}.$$

Da  $K_1'$  und  $K_2'$  Instanzen von  $K_1$  bzw.  $K_2$  sind, gibt es eine Substitution  $\theta$ , so daß  $K_1' = \theta K_1$  und  $K_2' = \theta K_2$ . Seien  $PS_{i,1}(t_{i,1}), PS_{i,2}(t_{i,2}), \dots, PS_{i,n_i}(t_{i,n_i})$  die Atome in  $K_i$ , die durch  $\theta$  zu  $PS_i(t)$  unifiziert werden (d.h.  $PS_i(t) = \theta\{PS_{i,1}(t_{i,1}), PS_{i,2}(t_{i,2}), \dots, PS_{i,n_i}(t_{i,n_i})\} = PS_i(\theta t_{i,1})$ , wobei gilt  $S_i = S_{i,1} \cup S_{i,2} \cup \dots \cup S_{i,n_i}$ ),  $\lambda_i$  der mgu von  $\{PS_{i,1}(t_{i,1}), PS_{i,2}(t_{i,2}), \dots, PS_{i,n_i}(t_{i,n_i})\}$  und  $PS_i(t_i) = \lambda_i PS_i(t_{i,1}) = \lambda_i\{PS_{i,1}(t_{i,1}), PS_{i,2}(t_{i,2}), \dots, PS_{i,n_i}(t_{i,n_i})\}$ . Dann ist  $PS_i(t_i)$  ein Atom in dem Faktor  $\lambda_i K_i$  von  $K_i$ . Setze  $\lambda = \lambda_1 \circ \lambda_2$ .  $PS_i(t)$  ist eine Instanz von  $PS_i(t_i)$ . Da  $PS_1(t)$  und  $PS_2(t)$  trivialerweise unifizierbar sind, sind es auch  $PS_1(t_1)$  und  $PS_2(t_2)$ . Sei  $\sigma$  mgu von  $t_1$  und  $t_2$ . Setze nun

$$\begin{aligned} K &= (\sigma(\lambda K_1) \setminus \sigma PS_1(t_1)) \cup (\sigma(\lambda K_2) \setminus \sigma PS_2(t_2)) \cup \{\sigma PS_1 \cap PS_2(t_1)\} \\ &= (\sigma(\lambda K_1) \setminus \sigma(\lambda PS_1(t_{1,1}))) \cup (\sigma(\lambda K_2) \setminus \sigma(\lambda PS_2(t_{2,1}))) \\ &\quad \cup \{\sigma(\lambda PS_1 \cap PS_2(t_{1,1}))\} \end{aligned}$$

---

<sup>20</sup>Da die beiden (unifizierbaren!) Literale Grund-Instanzen sind, genügt  $\epsilon$  als Substitution. Diese brauchen wir gar nicht zu notieren.

$$= ((\lambda \circ \sigma)K_1 \setminus (\lambda \circ \sigma)PS_1(t_{1,1})) \cup ((\lambda \circ \sigma)K_2 \setminus (\lambda \circ \sigma)PS_2(t_{2,1})) \\ \cup \{(\lambda \circ \sigma)PS_1 \cap S_2(t_{1,1})\}$$

$K$  ist PV-Resolvente von  $K_1$  und  $K_2$ .  $K'$  ist Instanz von  $K$ , denn

$$K' = (K_1' \setminus PS_1(t)) \cup (K_2' \setminus PS_2(t)) \cup \{PS_1 \cap S_2(t)\} \\ = (\theta K_1 \setminus \theta PS_{1,1}(t_{1,1})) \cup (\theta K_2 \setminus \theta PS_{2,1}(t_{2,1})) \\ \cup \{\theta PS_1 \cap S_2(t_{1,1})\}$$

Da  $\theta$  ein Unifikator für alle  $PS_{i,j}(t_{i,j})$  ist,  $\lambda \circ \sigma$  aber ein allgemeinsten Unifikator dafür, muß  $\lambda \circ \sigma$  allgemeiner sein als  $\theta$ , d.h.  $K'$  ist Instanz von  $K$ .

Wir können nun die Widerlegungsvollständigkeit zeigen:

**Satz 6.4:** Eine Klauselmengemenge  $S$  ist genau dann unerfüllbar, wenn die Klausel **false** durch PV-Resolution aus  $S$  ableitbar ist.

Beweis:

$\Rightarrow$ :

Angenommen,  $S$  ist unerfüllbar. Sei  $\{A_1, A_2, \dots\}$  die Herbrand-Basis von  $S$ ,  $\{Q_i^1, Q_i^2, \dots, Q_i^{n_i}\}$  die Basismenge des Grund-Atoms  $A_i$ ,  $T$  ein vollständiger erweiterter semantischer Baum für  $S$  der folgenden Gestalt:

Alle Markierungen der Kanten auf der ersten Ebene des Baumes haben an erster Stelle das Grund-Atom  $A_1$ , an der zweiten Stelle ein  $Q_1^i$  aus der Basismenge dieses Atoms. Auf den nächsten Ebenen folgen ebensolche Markierungen für die Grund-Atome  $A_2, A_3$  usw.

Nach Satz 5.6 besitzt  $T$  einen endlichen abgeschlossenen Teilbaum  $T'$ . Falls dieser nur aus einem einzigen Knoten (dem Wurzelknoten) besteht, so sind wir fertig, denn dann muß **false** in  $S$  sein, da keine andere Klausel durch die leere Interpretation falsifiziert wird. Ansonsten gibt es mindestens einen Inferenzknoten in  $T'$ , da andernfalls jeder Knoten mindestens einen Nachfolger hätte, der kein Widerspruchsknoten ist, was der Endlichkeit von  $T'$  widerspricht, da sich dann ein unendlicher Pfad konstruieren ließe. Sei  $N$  dieser Inferenzknoten,  $N_1, N_2, \dots, N_n$  die Söhne von  $N$ .

Da  $N_1, N_2, \dots, N_n$  Widerspruchsknoten sind,  $N$  jedoch nicht, muß es Grund-Instanzen  $K_1', K_2', \dots, K_n'$  von Klauseln  $K_1, K_2, \dots, K_n$  aus  $S$  geben, wobei jedes  $K_i'$  durch die Interpretation von  $N_i$  falsifiziert wird, nicht jedoch durch die Interpretation von  $N$ . Daraus folgt, daß  $K_i'$  ein Atom  $PS_i(t)$  mit  $S_i \in \Omega(P)$ , aber  $S_1 \cap Q_i = \emptyset$  enthält, wobei  $Q_i$  das zweite Element der Markierung der Kante von  $N$  nach  $N_i$  ist. Dann liefert eine Kette von  $n-1$  binären PV-Resolutionsschritten (mit dem mgu  $\varepsilon$ ) die Resolvente

$$K' = (K_1 \setminus PS_1(t)) \cup (K_2 \setminus PS_2(t)) \cup \dots \cup (K_n \setminus PS_n(t)) \cup \{PS(t)\},$$

wobei 
$$S = \bigcap_{i=1}^n S_i.$$

Da nun  $K_i$  in der Interpretation von  $N_i$  falsch ist, gilt dies erst recht für  $(K_i \setminus PS_i(t))$ . Dieses ist dann aber auch in der Interpretation von  $N$  falsch, da der einzige Unterschied zwischen den beiden Interpretationen in der Aufnahme des Grund-Atoms  $P(t)$  liegt, das in  $(K_i \setminus PS_i(t))$  gar nicht vorkommt. Außerdem gilt  $S = \emptyset$ , denn da  $S_i \cap Q_i = \emptyset$ , ist  $S_i \in \Omega \setminus Q_i$  und

$$S = \bigcap_{i=1}^n S_i \in \bigcap_{i=1}^n (\Omega \setminus Q_i) = \Omega \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n Q_i \right) = \Omega \setminus \Omega = \emptyset.$$

Somit ergibt sich, daß  $K'$  in der Interpretation von  $N$  falsch ist.

Nach Satz 6.3 gibt es nun eine Resolvente  $K$ , die durch eine ähnliche Resolutionskette aus den Klauseln  $K_1$  bis  $K_n$  hervorgeht, so daß  $K'$  Instanz von  $K$  ist.  $K$  wird natürlich auch durch die Interpretation von  $N$  falsifiziert.

Sei  $T''$  der abgeschlossene erweiterte semantische Baum für  $(S \cup \{K\})$ , der aus  $T'$  durch Entfernen aller Knoten und Kanten unterhalb der ersten Knoten, die  $K$  falsifizieren, entsteht. Die Knotenzahl von  $T''$  ist echt kleiner als die von  $T'$ .

Man kann diese Prozedur solange ausführen, bis schließlich nur noch der Wurzelknoten übrigbleibt. Das kann aber nur dann der Fall sein, wenn die erweiterte Klauselmenge **false** enthält. Da wir nur PV-Resolventen aus Klauseln der jeweils aktuellen Menge hinzugefügt haben, gibt es daher eine Ableitung von **false** aus der ursprünglichen Klauselmenge  $S$ .

$\Leftarrow$ :

Angenommen, es gibt eine Ableitung von **false** aus  $S$ . Wenn  $S$  erfüllbar wäre, dann gäbe es ein Modell für  $S$ . Wegen der Korrektheit der PV-Resolution wäre dies aber auch Modell für alle erzeugten Resolventen und damit letztlich auch für **false**. Dies ist aber ein Widerspruch, da keine Interpretation **false** erfüllt. Daher kann  $S$  nicht erfüllbar sein.

q.e.d.

Da die Menge der PV-Resolventen aus einer endlichen Klauselmenge abzählbar ist, wird für jede unerfüllbare Klauselmenge bei geeignet geordneter Erzeugung von Resolventen die leere Klausel **false** auch nach endlicher Schrittzahl erzeugt. Daraus folgt

**Satz 6.5:** Die Unerfüllbarkeit einer endlichen Menge  $S$  von PV1-Klauseln und damit auch die Ableitbarkeit einer Klausel aus  $S$  ist semientscheidbar.

Beispiel:

Wir wiederholen den Versuch der Ableitung von

(\*) FÜHLT-SICH-WOHL  $\{t\}$  (tristan)  $\vee$  TEMP  $[15, 20[$  (wetter)

aus

(1) TEMP  $[-273, 20[ \cup ]35, \infty]$  (wetter)  $\vee$  FÜHLT-SICH-WOHL  $\{t\}$  (x)

(2) TEMP  $[15, 25]$  (wetter),

indem wir einen Widerlegungsbeweis nach der im letzten Beweis angegebenen Methode konstruieren.

Wir fügen also die Negation von (\*) als

(3) FÜHLT-SICH-WOHL  $\{f\}$  (tristan)

(4) TEMP  $[-273, 15[ \cup ]20, \infty]$  (wetter)

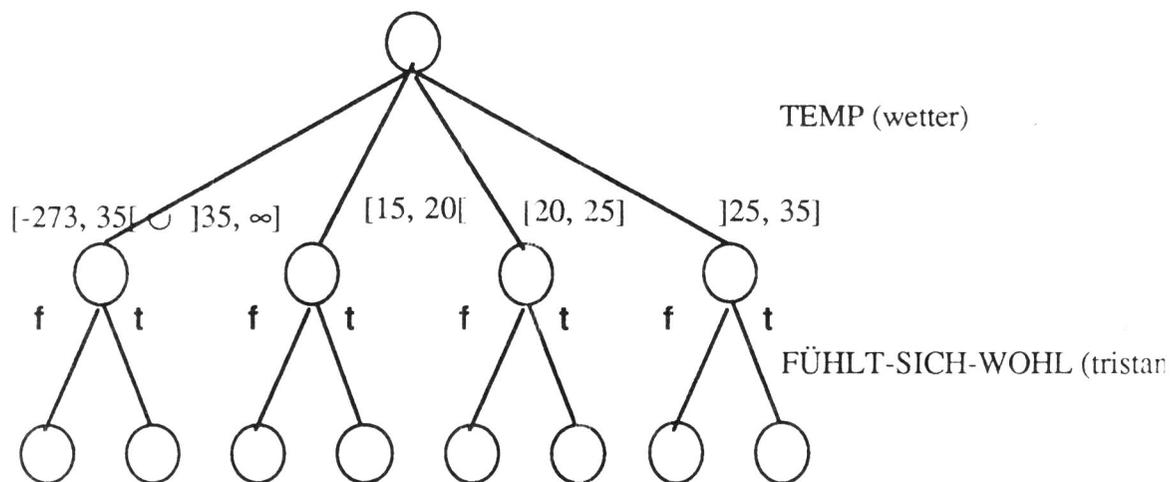
zur ursprünglichen Klauselmenge hinzu.

Ein vollständiger erweiterter semantischer Baum für das Beispiel ist zwar endlich, hätte aber 64 Blätter. Wir können uns jedoch sparen, den ganzen Baum aufzustellen, wenn wir die für den Beweis völlig unnötigen Grund-Atome FÜHLT-SICH-WOHL(wetter)

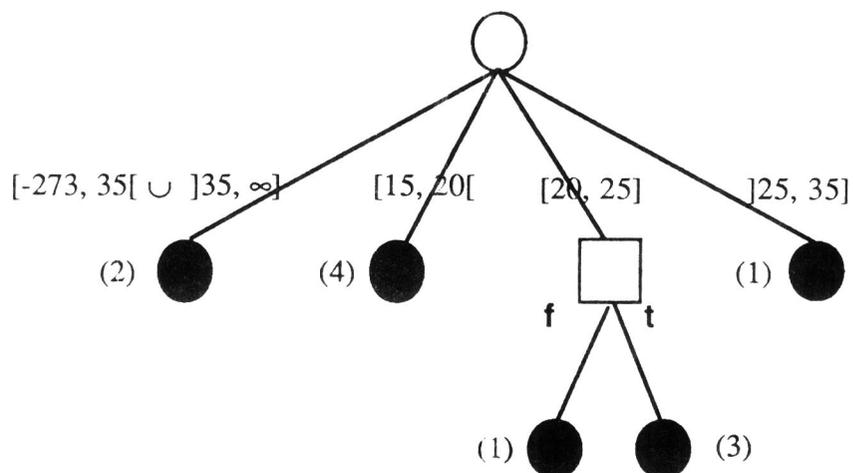
und TEMP(tristan) auf den unteren Ebenen anordnen. Wir zeichnen also nur die obersten Ebenen eines vollständigen Baumes. Da die ersten Elemente der Markierungen aller Kanten einer Ebene identisch sind, schreiben wir sie getrennt am Rand auf und markieren die Kanten nur mit den jeweiligen zweiten Elementen.

Die Basismengen von FÜHLT-SICH-WOHL(tristan) und TEMP(wetter) sind  $\{t, f\}$  bzw.  $\{[-273, 15[ \cup ]35, \infty], [15, 20[, [20, 25], ]25, 35]\}$ .

Der mit



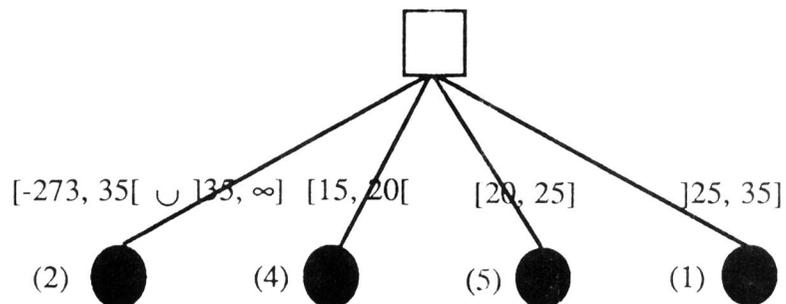
beginnende vollständige Baum enthält den abgeschlossenen Teilbaum



Dabei bedeuten die Zahlen in Klammern die Nummer der Klausel, die durch die Knoteninterpretation falsifiziert wird. Durch PV-Resolution auf den Klauseln (1) und (3) erhalten wir die Resolvente

(5) TEMP  $[-273, 20[ \cup ]35, \infty]$  (wetter)

Die um (5) erweiterte Klauselmengem falsifiziert auch den Knoten, der eben noch Inferenzknoten war. Wir erhalten



Im nächsten Schritt erzwingt die Strategie im Vollständigkeitsbeweis, eine Kette von 3 Resolutionsschritten auszuführen. Wir gehen von links nach rechts vor und resolvieren zunächst (2) und (4). Dabei erhalten wir

(6)      TEMP [20, 25] (wetter)

Die nächste Resolution von (6) mit (5) ergibt schon

(7)      **false,**

daher brauchen wir den letzten Schritt gar nicht mehr auszuführen. Der Baum degeneriert zu

(7) ●

und das Theorem ist per Widerlegung bewiesen.

Damit haben wir unser in der Einführung skizziertes Ziel erreicht, auf der Tiefenebene einen Zusammenhang zwischen auf der Oberflächenebene verschiedenen Prädikaten über ihren gemeinsamen Diskursbereich herzustellen und damit einen an sich semantischen Sachverhalt auf der rein syntaktischen Ebene abzuhandeln. Wir sind damit in der Lage, das auf Seite 4 beschriebene Programm wirklich durchzuführen.

## 7 Anwendbarkeit und Probleme:

In diesem Kapitel soll dargestellt werden, daß der PV1 ein Werkzeug ist, dessen Anwendung nicht auf Trivialprobleme wie das Wohlbefinden von Tristan bei bestimmten Wetterlagen beschränkt ist, sondern der durchaus praktischen Nutzen bei realitätsbezogeneren Beispielen besitzt. Wir werden dies verdeutlichen anhand der Darstellung von räumlichen Beziehungen von Objekten im zweidimensionalen Raum. Natürlich sind auch hier die angeführten Beispiele elementar, jedoch wird hoffentlich deutlich werden, daß der Ansatz eine gewisse Mächtigkeit hat.

Ebenso wird aber auch klar werden, wo die wesentlichen Schwachstellen sind. Es gibt nämlich einige Probleme, die die Begrenztheit des PV1 aufzeigen, die man sehr schnell zu spüren bekommt, wenn man einmal versucht, ernsthafte Beispiele zu modellieren. Wir werden in diesem Kapitel auf die wesentlichsten dieser Probleme eingehen und für manche auch eine mögliche Lösung skizzieren. Diese Lösungen bieten jedoch genügend Raum für weitere Forschung und können daher im Rahmen dieser Arbeit wirklich nur sehr kurz angerissen werden.

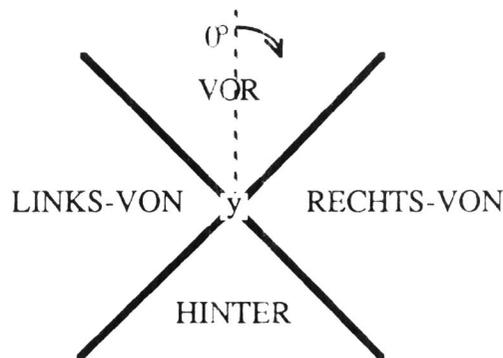
Ein Problem ist natürlich die Abhängigkeit der möglichen folgerbaren Aussagen von dem, was man vorher „hineingesteckt“ hat. Dies ist natürlich bei jedem Kalkül gegeben, aber hier kommt zur Abhängigkeit von den zusammengestellten Axiomen noch die Abhängigkeit von der *Modellierung der Oberflächenprädikate durch geeignet ausgewählte Tiefenprädikate* hinzu. Hier stehen im allgemeinen verschiedene Möglichkeiten offen, deren Adäquatheit davon abhängig ist, was wir uns als Folgerungen erwarten.

Nehmen wir also unseren Tristan und gesellen ihm eine Isolde hinzu. Zur Beschreibung der Beziehungen zwischen ihnen (die natürlich rein räumlicher Natur sind!) benutzen wir zunächst die zweistelligen Oberflächenprädikate RECHTS-VON, LINKS-VON, VOR und HINTER mit der Bedeutung RECHTS-VON( $x, y$ ) heißt „ $x$  ist rechts von  $y$ “ usw., was immer das genau bedeuten soll.

Eben dies muß jetzt bei der Abbildung auf Tiefenprädikate festgelegt werden. Im ersten Ansatz wählen wir ein zweistelliges Prädikat POSITION, dessen Variationsmenge  $[0, 360[$  sein soll, was als Winkel zu interpretieren ist, wobei  $y$  als Ursprung eines Polarkoordinatensystems aufgefaßt wird und der Winkel derjenige des Ortsvektors von  $x$  in diesem System ist.

Wir repräsentieren dann

RECHTS-VON(x, y)	→	POSITION [45, 135] (x, y)
LINKS-VON(x, y)	→	POSITION [225, 315] (x, y)
VOR (x, y)	→	POSITION [0, 45] ∪ [315, 360[ (x, y)
HINTER(x, y)	→	POSITION [135, 225] (x, y)



Was ist mit dieser Repräsentation gewonnen? Zunächst fällt auf, daß die verschiedenen Lagebezeichnungen sich nicht völlig gegenseitig ausschließen. Dies ist sicherlich erwünscht in den meisten Anwendungen. Die genaue Lokalisierung der Überlappung kann natürlich je nach Geschmack gewählt werden. Weiterhin stellen wir erfreut fest, daß Aussagen wie  $\text{HINTER}(a, b) \vee \text{VOR}(a, b) \vee \text{RECHTS-VON}(a, b) \vee \text{LINKS-VON}(a, b)$  wie intuitiv erhofft tatsächlich Tautologien sind und auch Aussagen wie  $\text{VOR}(a, b) \Rightarrow \neg(\text{HINTER}(a, b))$  gelten. All dies erhalten wir quasi umsonst.

Dagegen ist an Theoreme wie  $\text{VOR}(x, y) \Leftrightarrow \text{HINTER}(y, x)$  nicht zu denken, ohne sie explizit unter die Axiome aufzunehmen. Allgemein kann man die Aussage machen, daß *durch den Kalkül lediglich Verknüpfungen derjenigen Prädikate geleistet werden, deren Argumentvektoren<sup>21</sup> unifizierbar sind*. Das bedeutet, daß wir Eigenschaften des zugrundeliegenden Tiefenprädikats wie beispielsweise Transitivität oder Reflexivität natürlich immer noch gesondert angeben müßten. Wir werden darauf unter 7.3 näher zu sprechen kommen.

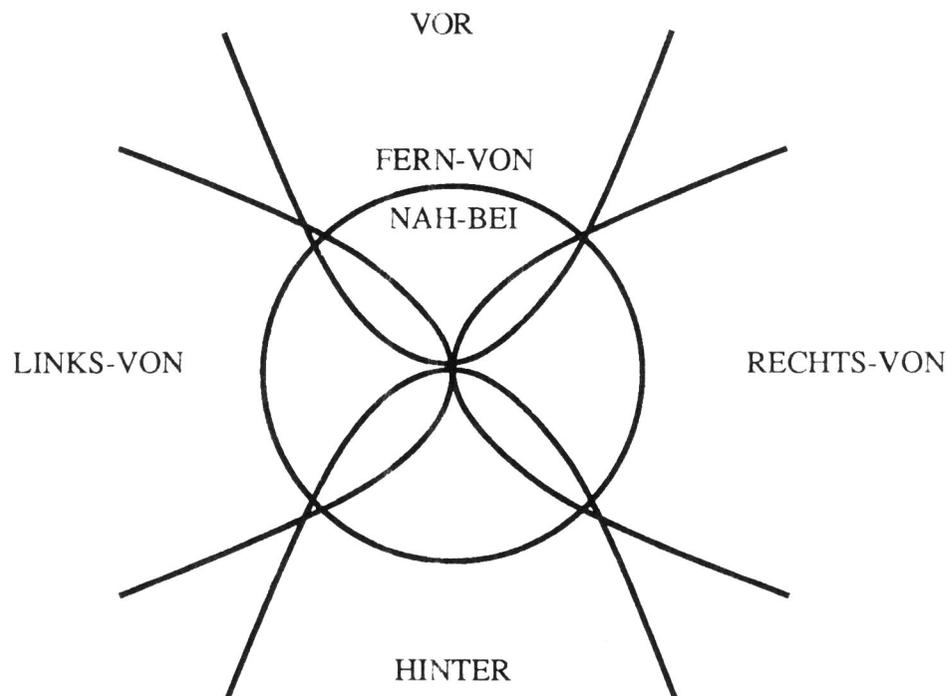
Hier soll nur noch eindrücklich die Abhängigkeit des Folgerbaren von der speziellen Modellierung demonstriert werden. Kommen wir nämlich jetzt auf die Idee, die Prädikate NAH-BEI und FERN-VON hinzuzunehmen, so müssen wir feststellen, daß

<sup>21</sup>als unteilbare Einheit betrachtet!

die Winkelmodellierung nicht adäquat ist. Wir kommen jedoch mit kartesischen Koordinaten (also  $\mathbb{R}^2$  als Variationsmenge für das Prädikat Position) und der Abbildung beispielsweise

RECHTS-VON(p, q)	→	POSITION{(x, y)   $x > y^2/2$ }	(p, q)
LINKS-VON(p, q)	→	POSITION{(x, y)   $-x > y^2/2$ }	(p, q)
VOR(p, q)	→	POSITION{(x, y)   $y > x^2/2$ }	(p, q)
HINTER(p, q)	→	POSITION{(x, y)   $-y > x^2/2$ }	(p, q)
NAH-BEI(p, q)	→	POSITION{(x, y)   $(y^2 + x^2)^{1/2} \leq 10$ }	(p, q)
FERN-VON(p, q)	→	POSITION{(x, y)   $(y^2 + x^2)^{1/2} \geq 10$ }	(p, q)

zum Ziel.



Bleiben wir einmal bei diesem Modell und formulieren

- (i) RECHTS-VON(tristan, isolde)
- (ii) GLEICH(x, x)
- (iii) LINKS-VON(x, isolde)  $\vee$  GLEICH(x, bruder(isolde))
- (iv)  $\neg$ (LINKS-VON(bruder(isolde), isolde))

also „alle außer Isoldes Bruder stehen links von ihr“<sup>22</sup>.

<sup>22</sup>Das Prädikat GLEICH wird durch die Klausel (ii) definiert!

Dann ist tatsächlich

$$\text{GLEICH}(\text{tristan}, \text{bruder}(\text{isolde}))$$

per Widerlegung beweisbar

Aus der Formelmenge

- i) RECHTS-VON(tristan, isolde)
- (ii) GLEICH(x, x)
- (iii) LINKS-VON(x, isolde)  $\vee$  GLEICH(x, bruder(isolde))
- (iv)  $\neg(\text{VOR}(\text{bruder}(\text{isolde}), \text{isolde}))$

ist dagegen nur die etwas kryptisch anmutende Formel

$$\text{GLEICH}(\text{tristan}, \text{bruder}(\text{isolde})) \vee \text{POSITION} \{(x, y) \mid (x \geq y^2/2) \wedge (y > x^2/2)\} (\text{tristan}, \text{isolde})$$

beweisbar.

Dies führt uns zur Formulierung verschiedener Probleme:

### **7.1 Das Problem der Rücktransformation:**

Die eigentlichen Beweise werden ja auf der Ebene der Tiefenprädikate geführt. Unser Anliegen war es, möglichst einen Benutzer von deren Existenz überhaupt nichts bemerken zu lassen. In den Beweisen, und, was schlimmer ist, auch in den abgeleiteten Formeln selbst, tauchen nun aber eventuell Atome auf, deren Indexmengen kein Element aus der Grundmenge der betrachteten Axiomenmenge sind. Diese haben dann eventuell keine genaue Entsprechung bei den Oberflächenprädikaten. Dieses Problem ist in anderem Zusammenhang schon von mehreren Autoren untersucht worden<sup>23</sup>, und es scheint keine befriedigende Lösung zu geben. Eine gangbare Möglichkeit ist es, eine disjunktive Verknüpfung von so vielen Oberflächenprädikaten zu verwenden, daß die Indexmenge „möglichst knapp“ abgedeckt wird. Diese Überdeckung ist aber nicht unbedingt eindeutig, und es geht im allgemeinen auch Information verloren, da die Indexmenge in der Regel echte Teilmenge der überdeckenden Menge sein wird.

---

<sup>23</sup>vergleiche beispielsweise die entsprechenden Passagen in [Dubois & Prade 80]

### 7.2 Das Problem der Zielklausel-Erzeugung:

Dieses Problem ist noch viel schwerwiegender als das erstgenannte. Es ginge ja noch an, wenn ein potentieller Benutzer die Formel

$$(*) \quad \text{FÜHLT-SICH-WOHL}(\text{tristan}) \vee \text{TEMP} [15, 20[ (\text{wetter}),$$

die das (ihm unbekannte) Prädikat TEMP enthält, als Antwort auf die Eingabe

$$(i) \quad \text{WARM}(\text{wetter}) \Rightarrow \text{FÜHLT-SICH-WOHL}(x)$$

$$(ii) \quad \text{LAUWARM}(\text{wetter})$$

an den Kopf geworfen bekommt, die er dann irgendwie interpretieren müßte. Er muß sie jedoch für einen Widerlegungsbeweis der beschriebenen Art selbst aufstellen und eingeben! Abgesehen von der Prädikatstransformation stört dabei der Teil TEMP [15, 20[ (wetter) ganz gewaltig. Wir hätten es lieber, wenn lediglich FÜHLT-SICH-WOHL(tristan) anzugeben wäre und das System versucht, diejenige Formel zu beweisen, die dieser „am ähnlichsten“ ist, also die wenigsten zusätzlichen Atome enthält. Für dieses Problem ist keine Lösung in Sicht, da es allein schon schwerfällt, das Ähnlichkeitsmaß zu definieren. Meiner Meinung nach stellt diese Feststellung *die schwerwiegendste Schwäche des ganzen Ansatzes* dar.

### 7.3 Das Problem der funktionalen Abhängigkeiten:

Es ist im beschriebenen Kalkül keine Möglichkeit vorgesehen, Beziehungen zwischen Variations- und Indexmengen verschiedener Tiefenprädikate auszudrücken. So wäre es z.B. denkbar, zwischen den Prädikaten LIEBT (mit einer Variationsmenge, die irgendwie die Intensität dieser Beziehung ausdrückt) und SIEHT-HÄUFIG (mit einer Variationsmenge, die Zeitangaben beinhaltet) einen Zusammenhang auszudrücken, etwa von der Art

$$\text{LIEBT}_S(x, y) \Rightarrow \text{SIEHT-HÄUFIG}_{f(S)}(x, y)$$

mit  $f: \mathcal{P}(\Omega(\text{LIEBT})) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega(\text{SIEHT-HÄUFIG}))$ .

Dieses Problem läßt sich, wenn auch auf zugegebenermaßen nicht sehr elegante Weise, umgehen, indem man einfach beide Prädikate auf ein gemeinsames Tiefenprädikat abbildet. Je nachdem, wie viele verschiedene Bereiche dieses Prädikat dann abdecken muß, wird die Angelegenheit dann mehr oder weniger unanschaulich.

Schwieriger wird es, wenn eine Beziehung zwischen den Argumenten eines Prädikats und seiner Indexmenge gefordert wird. Dieses Problem stellt sich beispielsweise, wenn wir versuchen wollen, die Transitivität der RECHTS-VON-Relation auf der Ebene der Tiefenprädikate anzugeben, also eben nicht die Formel

$$\text{RECHTS-VON}(x, y) \wedge \text{RECHTS-VON}(y, z) \Rightarrow \text{RECHTS-VON}(x, z)$$

anzugeben. Dies wäre auch nicht sehr sinnvoll, denn erstens müßten wir dann doch wieder für jedes Oberflächenprädikat derartige Axiome aufstellen und zweitens ist diese Implikation eventuell gar nicht mit der gewählten Modellierung verträglich.

Eine allgemeine Lösung für derartige Zusammenhänge ist mir nicht bekannt. Dagegen kann für Spezialfälle, die ähnlich gelagert sind wie das beschriebene Beispiel, der folgende Ansatz dienlich sein:

Die einschränkenden Voraussetzungen bestehen darin, daß

- (i) Auf der Variationsmenge eine Metrik definiert ist,
- (ii) die Abhängigkeit der Indexmenge von Argumenten nur derart ist, daß die Unifizierbarkeit einzelner Argumente (innerhalb des gleichen oder verschiedener Atome) zu prüfen ist,
- (iii) die Abhängigkeit von Indexmengen durch ein berechenbares Verfahren angegeben werden kann.

In diesem Fall können die speziellen Eigenschaften der einzelnen Tiefenprädikate  $P$  bei deren Definition angegeben werden durch eine Menge von Regeln. Zur Darstellung verwenden wir die Notation  $(i, j)$  für „ $j$ -tes Literal in der Klausel  $i$ “. Die Vorbedingung einer solchen Regel hat nun die Form

$$\langle \{(i_1, j_1), (k_1, l_1)\}, \{(i_2, j_2), (k_2, l_2)\}, \dots, \{(i_n, j_n), (k_n, l_n)\} \rangle,$$

was zu lesen ist als:

Es gibt einen mgu  $\sigma$ , der alle angegebenen Mengen (Paare von Literalen) unifiziert.

Als Aktion wird dann eine Resolvente gebildet, deren Argumentvektor sich aus der Anwendung von  $\sigma$  auf eine als Konsequenz angegebene Auswahl von Argumenten aus den Elternklauseln ergibt und deren Indexmenge als Wert einer ebenfalls angegebenen Funktion  $f: \mathcal{P}(\Omega(P))^q \rightarrow \mathcal{P}(\Omega(P))$ , die auf die Indexmengen der Elternklauseln angewendet wird, berechnet wird. Dabei ist  $q$  die (feststehende) Anzahl von an der Resolution beteiligten Klauseln.

Wir schreiben den Aktionsteil der Regel als

$$\langle f, ((a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)) \rangle.$$

Dabei bedeutet  $(a, b)$  hier „a-tes Argument der Klausel b“.

Beispiel:

Wir betrachten unsere letzte Definition von räumlichen Beziehungen und wollen die Transitivität der zugrundeliegenden relativen Positionsangaben ausdrücken. Dazu geben wir dem Tiefenprädikat POSITION folgende Regel mit

$$\langle ((2, 1), (1, 2)) \rangle \rightarrow \langle S = S_1 \oplus S_2, ((1, 1), (2, 2)) \rangle$$

und können dann aus POSITION  $S_1(x, y_1)$  und POSITION  $S_2(y_2, z)$ , wenn es einen mgu  $\sigma$  gibt, der  $y_1$  und  $y_2$  unifiziert, die Resolvente POSITION  $S_{S_1 \oplus S_2}(\sigma x, \sigma z)$  bilden.

Dabei ist noch die Operation  $\oplus$  zu erklären. Seien  $S_1, S_2$  eine Menge von Elementen des  $\mathbb{R}^2$ , die als Ortsvektoren von Punkten zu verstehen sein soll. Dann ist  $S = S_1 \oplus S_2$  die Menge  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y \in S_1, z \in S_2, \text{ so daß } x = y + z\}$  (dabei bezeichnet „+“ die Vektoraddition). Wir beschreiben damit also eine Transformation von relativen Koordinaten bezüglich verschiedener Bezugspunkte.

Es gelte beispielsweise

- (i) RECHTS-VON(a, b) und
- (ii) RECHTS-VON(b, c).

Dies wird zunächst transformiert in

- (i') POSITION  $\{(x, y) \mid x > y^2/2\}$  (a, b)
- (ii') POSITION  $\{(u, v) \mid u > v^2/2\}$  (b, c)

Da b trivialerweise mit b unifizierbar ist, können wir den Resolutionsschritt durchführen und erhalten

- (\*) POSITION  $\{(s, t) \mid s > t^2/4\}$  (a, c).

Die Berechnung der Indexmenge ist allerdings nicht trivial. Es gilt

$$x > y^2/2 \quad \text{und} \quad u > v^2/2,$$

demnach auch  $x + u > (y^2 + v^2)/2$ .

Wir substituieren  $x = s - u$  und  $y = t - v$

und erhalten  $s > (t^2 - 2tv + 2v^2)/2 = t^2/2 - tv + v^2$ .

Dabei ist  $v$  beliebig. Ableitung nach  $v$  ergibt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite für  $v = t/2$  minimal wird. Damit ist also  $t^2/4$  die kleinste untere Schranke für  $s$ .

Ein großer Nachteil dieser Methode ist es, daß die Indexmengen tatsächlich symbolisch berechnet werden müsse, ein Punkt, der auf das nächste Problem hinführt.

#### **7.4 Das Problem der endlichen Darstellung:**

In allem bisher Gesagten haben wir an die Art der Variations- und Indexmengen keinerlei Einschränkungen gemacht. Das ist für theoretische Betrachtungen sicherlich ganz nützlich, führt aber bei dem Versuch, den PV1 beispielsweise auf einer Maschine zu implementieren, zu Schwierigkeiten. Zunächst ist festzustellen, daß wir eine Einschränkung, ohne uns dessen bewußt zu sein, sowieso schon die ganze Zeit gemacht haben: Sämtliche betrachteten Mengen durften zwar von beliebiger Kardinalität sein, mußten sich aber in irgend einer Weise endlich darstellen lassen. Diese Einschränkung stellt aber in der Praxis kein Hindernis dar, da allein schon das Hinschreiben der Axiome eine solche Darstellung erzwingt. Im übrigen garantiert die endliche Darstellbarkeit aller in den Axiomen auftretenden Indexmengen auch diese Eigenschaft für alle im Verlauf des Inferenzprozesses neu erzeugten Mengen, da alle Ableitungen endlich sind und die Notationen  $\cup$ ,  $\cap$  usw. eben eine derartige Darstellung sind.

Eine schwerwiegendere Einschränkung ist, daß zur Überprüfung, ob beispielsweise eine Teilmengenbeziehung besteht oder eine Menge leer ist, eine solche Notation unzureichend ist. Zwar sind diese Eigenschaften prinzipiell daraus ableitbar, jedoch sind dafür sehr unterschiedliche mathematische Methoden und vor allem symbolisches Rechnen erforderlich. Daher kommen wir wohl kaum darum herum, für eine hypothetische Maschine ein Verfahren zu fordern, das Schnitte, Vereinigungen etc. tatsächlich berechnet. Zumindest muß es entscheidbar sein, ob eine unter Beibehaltung der symbolischen Schreibweise mit Vereinigungs- und Durchschnittstermen repräsentierte Menge leer ist. Dies schränkt je nach verwendetem Berechnungsverfahren und Mengendarstellung die Anzahl der zulässigen Indexmengen eventuell stark ein. Insbesondere erscheinen dann Erweiterungen der Inferenzmaschinerie wie unter 7.3 beschrieben eher utopisch.

---

### **7.5 Das Unschärfeproblem:**

Ein weiteres Problem stellt sich bei der Definition der Abbildung von Oberflächenprädikaten auf Tiefenprädikate. Wir sind eigentlich nur sehr ungern dazu bereit, beispielsweise genaue Temperaturgrenzen für den Begriff „heiß“ anzugeben, sondern hätten lieber eine etwas vagere Ausdrucksweise. Natürlich muß auf der Ebene der Tiefenprädikate eine exakte Darstellung vorliegen. Dies widerspricht sich aber nicht notwendigerweise. Im folgenden Kapitel wird daher eine Verallgemeinerung des PV1, der PV2, kurz skizziert. Eine genauere Analyse ist aber noch Gegenstand der Forschung, da sich beispielsweise zeigt, daß sich grundlegende Konzepte wie etwa das der Ableitbarkeit nicht so ohne weiteres auf diesen „Kalkül“ übertragen lassen.

## 8 Der PV2 als mögliche Lösung des Unschärfeproblems:

Unsere Intention ist es, darstellen zu können, daß bestimmte Prädikate nicht nur wahr oder falsch, sondern in mehr oder weniger starkem Grade wahr sein können. So würden wir beispielsweise annehmen, daß für ein Objekt, dessen Temperatur 1000 °C beträgt, das Prädikat HEISS mit größerer Sicherheit gilt als für eines mit der Temperatur 20 °C. Um dies zu erreichen, können wir eine mehrwertige Logik mit einem Kontinuum an Wahrheitswerten, beispielsweise dem reellen Intervall  $[0, 1]$ , benutzen. Dies würde dann widerspiegeln, daß tatsächlich abgestufte Grade von Wahrheit vorliegen. Uns schwebt jedoch eher vor, die kontinuierlichen Wahrheitswerte nicht als Repräsentation von real auftretenden Phänomenen, sondern als Ausdruck von unzureichender Kenntnis der bzw. strittigen Ansichten über die Wirklichkeit zu verstehen. So könnten sich die verschiedenen „Wahrheitsgrade“ beispielsweise aus Meinungsumfragen ergeben, ob ein bestimmtes Faktum gilt oder nicht, wobei jeder einzelne Befragte jedoch nur mit „ja“ oder „nein“ antworten würde und die Zwischenstufen erst bei der Mittelung entstehen, d.h. die Binärität der Realität selbst eigentlich nicht in Frage gestellt würde.

Wir behalten daher die zweiwertige Logik mit den Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ bei und führen den Begriff der **Signifikanz** ein. Dieser taucht auf bei der Abbildung von Oberflächenprädikaten auf Tiefenprädikate. Statt nämlich im obigen Beispiel für das Prädikat HEISS das exakte Intervall  $[60, \infty]$ , eine Teilmenge von  $\Omega(\text{TEMP})$ , anzugeben, definieren wir eine Funktion, die sogenannte **Signifikanzfunktion**, die  $\Omega(\text{TEMP})$  auf das Intervall  $[0, 1]$  abbildet. Wenn man die Signifikanzfunktion als verallgemeinerte charakteristische Funktion einer Teilmenge von  $\Omega(\text{TEMP})$  betrachtet, bemerkt man, daß wir hier nichts anderes tun, als als Indexmengen unscharfe Mengen (fuzzy sets)<sup>24</sup> zuzulassen. Die Semantik ist dergestalt, daß das Atom  $P_S(x)$  in einer Interpretation, die  $x$  den Wert  $y \in \Omega(\text{TEMP})$  zuordnet, **bei der Signifikanz**  $p$  genau dann wahr sein soll, wenn die Signifikanzfunktion  $f$ , die  $S$  charakterisiert, an der Stelle  $y$  einen Wert  $\geq p$  besitzt<sup>25</sup>.

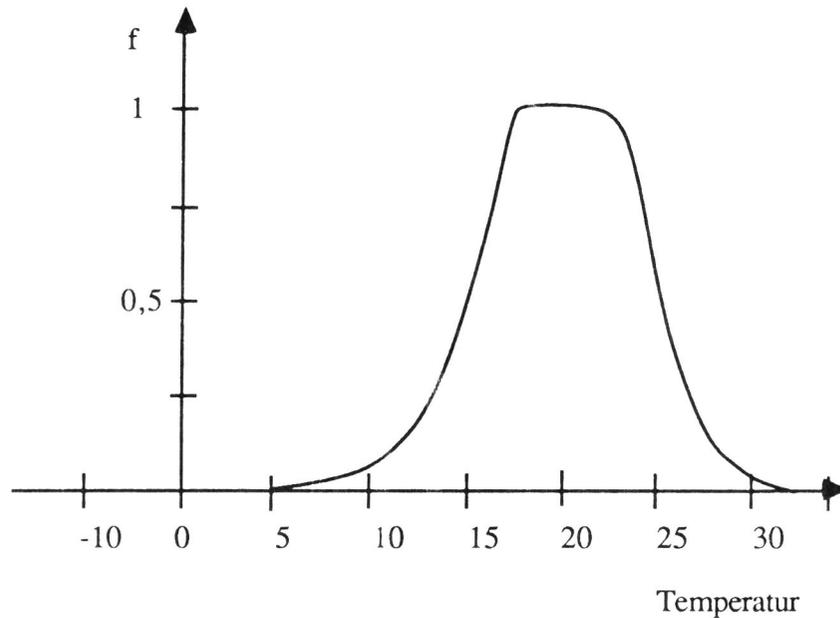
---

<sup>24</sup>Der Begriff geht zurück auf L.A. Zadeh (beispielsweise [Zadeh 65, Zadeh 68]). Gute einführende Darstellungen findet man in [Kaufmann 75, Dubois & Prade 80].

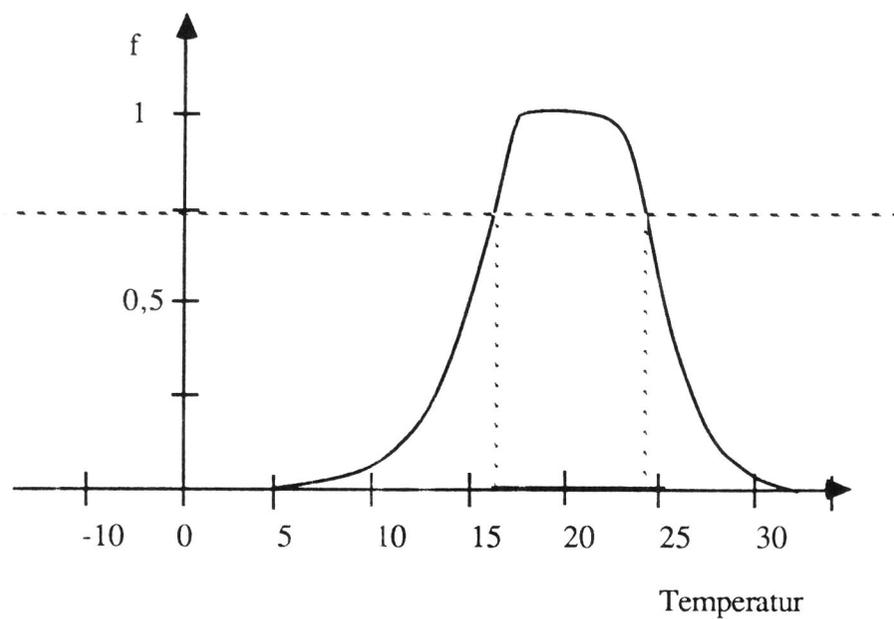
<sup>25</sup>Der dem unsrigen am nächsten kommende Ansatz wird in [Lee 72] beschrieben (vergleiche auch [Chang & Lee 71]). Jedoch führt Lee sämtliche Berechnungen bei einer festen Signifikanz (ein Begriff, den er selbst nicht benutzt) von 0,5 durch und erhält dadurch direkt eine Abbildung auf zweiwertige Logik.

Beispiel;

Statt dem Prädikat LAUWARM wie bisher das Intervall  $[15, 20]$  auf der Temperaturskala zuzuordnen, charakterisieren wir es nun durch ein unscharfes Intervall mit der durch das folgende Diagramm gegebenen Signifikanzfunktion  $f$ :



Gibt man nun eine feste Signifikanz von beispielsweise 0,75 fest vor, so wird durch diesen „Schnitt“ eine normale Menge definiert, die in der üblichen Weise interpretiert werden kann.



Bemerkung:

Um die Logik zu definieren, brauchen wir uns keine Gedanken darüber zu machen, wie wir an die Signifikanzfunktionen kommen<sup>26</sup>. Insbesondere müssen damit nicht Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden, d.h. unsere Logik ist keine probabilistische, wenngleich sie auch so interpretiert werden kann.

Zu verändern sind bei der genauen Definition des **PV2** gegenüber dem **PV1** nur die Definition von Atomen

**Definition 8.1 (Atom):**

Seien  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikat mit Variationsmenge  $\Omega$ ,  $f: \Omega(P) \rightarrow [0, 1]$  eine Signifikanzfunktion und  $S(f)$  die durch  $f$  charakterisierte unscharfe Menge, weiterhin  $t_1, \dots, t_n$  Terme.

Dann ist  $PS(f)(t_1, \dots, t_n)$  ein Atom.

sowie die schon beschriebene Veränderung bei der Wahrheitswertermittlung.

Weiterhin müssen wir noch die Begriffe Schnitt und Vereinigung für die unscharfen Mengen verallgemeinern. Wir wählen folgende Definition:

**Definition 8.2 (Schnitt, Vereinigung):**

Seien  $f, g$  zwei Signifikanzfunktionen über der gleichen Domäne  $\Omega$ ,  $S(f)$  bzw.  $S(g)$  die durch sie charakterisierten unscharfen Mengen. Dann sind

$$S(f) \cup S(g) = S(\max(f, g)),$$

$$S(f) \cap S(g) = S(\min(f, g)),$$

wobei

$\forall f, g \in \text{Funktionen}, y \in \text{Universum}$

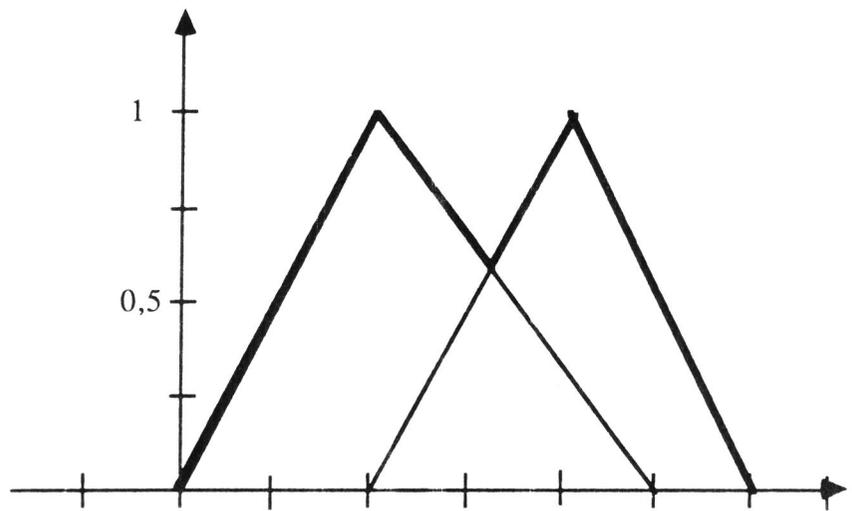
$$(\min(f, g))(y) = \min(f(y), g(y)),$$

$$(\max(f, g))(y) = \max(f(y), g(y)).$$

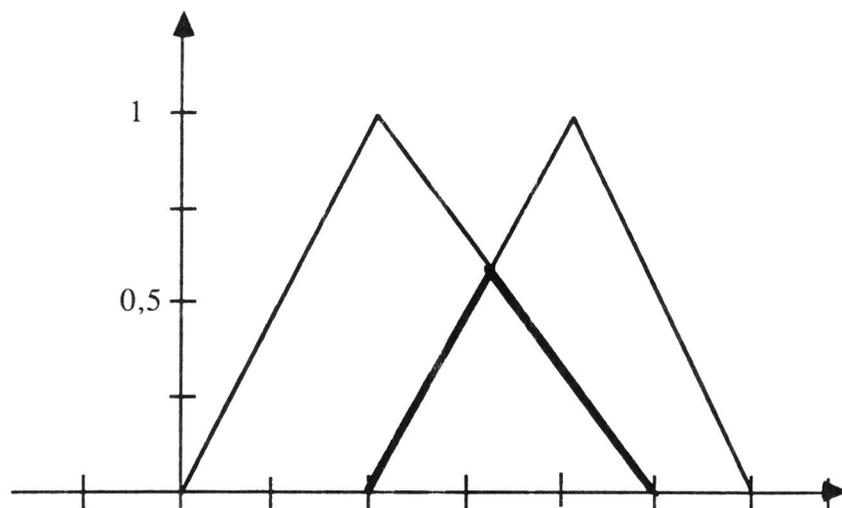
---

<sup>26</sup>Zu diesem Problem ist besonders der Abschnitt "Where Do "They" Come From?" in [Dubois & Prade 80] zu empfehlen. Auch [Lee 72] geht darauf ein, wobei ein Zitat aus [Jeffreys 61] angegeben ist, das die Möglichkeit einer derartigen Abschätzung sehr kritisch beurteilt: "no objective definition of probabilities in terms of actual or possible observations, or possible properties of this world, is admissible".

Beispiel:



Vereinigung, Maximumfunktion (fett) zweier Signifikanzfunktionen



Durchschnitt, Minimumfunktion (fett) zweier Signifikanzfunktionen

Für eine feste Signifikanz  $p$  kann man eine Menge von PV2-Formeln durch PV1-Formeln darstellen, indem man einfach alle auftretenden charakteristischen Funktionen auf normale zweiwertige charakteristische Funktionen abbildet, derart, daß Werte  $< p$  mit Null, Werte  $\geq p$  mit Eins identifiziert werden. Eine PV2-Formel repräsentiert damit eine überabzählbare Menge von PV1-Formeln.

---

Wohl kann man, quasi rein syntaktisch, auch die Bildung von Resolventen recht einfach übertragen, jedoch ist diese Einfachheit trügerisch, weil wir uns eigentlich gar nicht sicher sind, was das bedeutet! Wir können nämlich die Begriffe Gültigkeit, Erfüllbarkeit, und logische Folgerung nur für feste Signifikanzwerte übertragen und stehen daher vor der Frage, wie diese im allgemeinen Fall sinnvoll zu definieren wären. Dies zu klären und dann einen adäquaten Vollständigkeitsbegriff vorzuschlagen ist somit vordringliche Aufgabe weiterführender Arbeit auf diesem Gebiet.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick:

Wir haben in den vorangegangenen Kapiteln zunächst eine Logik entwickelt, in der im Gegensatz zur Prädikatenlogik ein Zusammenhang zwischen zunächst verschiedenen Prädikaten über den gemeinsamen Diskursbereich hergestellt werden kann. Von der Definition der Prädikate her ist die Prädikatenlogik erster Stufe eine echte Teilmenge dieser neuen Logik.

Der Einwand, daß die beiden Logiken bezüglich des Umfangs des überhaupt Ausdrückbaren äquivalent sind, ist zwar berechtigt, kann aber von uns seiner Tragweite entledigt werden, indem wir einen Kalkül angeben, der Inferenzen direkt in unserer Logik ausführt. Dabei handelt es sich nicht um einen bloßen Codierungstrick innerhalb der Prädikatenlogik, denn die Formelmengen sind nicht nur für einen menschlichen Leser kompakter und daher besser lesbar, sondern auch aus der Sicht eines automatischen Beweisers ist die Ableitung „einfacher“, da ein einzelner Inferenzschritt mehreren Schritten in der prädikatenlogischen Modellierung entspricht. Dadurch werden die Beweise kürzer und (lokal) zielgerichteter<sup>27</sup>. Dies wird dadurch erreicht, daß in den Ableitungsmechanismus schon eine Theorie eingebettet ist, die Teile der Semantik repräsentiert.

Trotz der in Kapitel 7 geschilderten Probleme, die die Anwendbarkeit des beschriebenen Kalküls doch teilweise recht erheblich einschränken, stellt er für geeignete Domänen dennoch ein Konzept von nicht zu unterschätzender Mächtigkeit dar. Hier können - domänen- und problemadäquate Modellierung vorausgesetzt - durchaus die Vorzüge der Performanz eines mechanisch ausgeführten symbolischen Kalküls (verbesserte Strategien wie beispielsweise set of support, unit preference oder lock resolution sind mit dem PV1-Ansatz verträglich und daher übertragbar!) kombiniert werden mit einer Oberflächendarstellung, die doch in wesentlichen Punkten mit der eines typischen Benutzers übereinstimmt. Meiner Meinung nach kommt dieses klassifizierende Denken, das üblicherweise Grundlage menschlichen domänenspezifischen Wissens ist, sehr gut zum Ausdruck.

---

<sup>27</sup>Die globale Beweisstrategie wird durch den Kalkül selbst natürlich nicht vorgegeben

Selbstverständlich halte ich es trotzdem für dringend geboten, die Darstellung der Unschärfe der Konzepte weiter auszuarbeiten. Dies muß nicht unbedingt in der Richtung des PV2-Ansatzes geschehen, jedoch denke ich, daß dieser durchaus gute Chancen hat, der Lösung einen beträchtlichen Teil näherzukommen. Nichtsdestoweniger sind die dabei noch zu erwartenden Schwierigkeiten nicht zu unterschätzen. Diese sind aber nicht von vornherein dem speziellen Kalkül PV2 anzulasten, sondern ergeben sich eher direkt aus dem fast widersprüchlich anmutenden Versuch, überhaupt *unscharfe Konzepte mit einem (exakten!) logischen Kalkül zu kombinieren*<sup>28</sup>. Ich halte es für das vorrangigste Ziel aller weiteren Forschung auf diesem Gebiet, die These, daß es sich dabei wirklich um einen Widerspruch handelt, durch Angabe eines Kalküls, der eben dies leistet, zu falsifizieren - *oder sie auf irgendeine Weise zu beweisen!*

---

<sup>28</sup>Siehe dazu auch [McCarthy & Hayes 68]

## Anhang A: Index

abgeschlossen (semantischer Baum)	S.40
Ableitung	S.46
allgemeinster Unifikator	S.43
Äquivalenz	
Junktor	S. 7
von Formeln	S.22
Atom	S.20,65
Grund-	S.34
Attribut(swert)	S.25
Ausdruck	S.43
Axiom	S. 2
Basismenge	S.34
Baum, erweiterter semantischer	S.38
Beweis	S.46
charakteristische Funktion	S.63
Constraint propagation	S.25
Domäne	S.21
Elternklauseln	S.45
Erfüllbarkeit	S.22
Erfüllung	S.11
Falsifikation	S.37
Formel	S.21
Folgerung, logische	S.22
Funktion(ssymbol)	S.20
fuzzy sets	S.63
Grund-Atom	S.34
Grund-Instanz	S.37
Grundmenge	S.10,34
Gültigkeit	S.22
Hasse-Diagramm	S.19
Herbrand-Basis	S.34
Herbrand-Interpretation, erweiterte	S.34
partielle	S.37
Herbrand-Theorem	S.41
Herbrand-Universum	S.33
Indexmenge	S.20

Inferenzknoten	S.40
Instanz	S.43
Grund-	S.37
Interpretation	S.21
korrespondierende	S.36
von Knoten	S.38
von Pfaden	S.38
Junktor	S. 7
Klausel(normalform)	S.23f
Konstante	S.20
Korrektheit	S.47
korrespondierende Formelmenge	S.27
Literal	S.24
Mengen, unscharfe	S.63
Mengensystem	S.10
Metaregel	S.31
Modell	S.22
Normalform	S.23
Oberflächenprädikat	S. 3
Objekt	S.25
Partitionierung	S.10
erfüllende	S.11
maximale erfüllende	S.17
Prädikat	S. 2
indiziertes	S. 5
Oberflächen-	S. 3
-symbol	S.20
Tiefen-	S. 3
Prädikatenkalkül (erster Stufe)	S. 1
PV-Faktor	S.44
PV-Normalform	S.23
PV-Resolvente	S.46
binäre	S.45
PV-Resolution	S.47
PV-Unifikante	S.44
Quantor	S. 7
Residuum	S.46
Resolution(sprinzip)	S. 1
Restriktion	S.25
Rücktransformation	S.57
semantischer Baum, erweiterter	S.38
Semientscheidbarkeit	S.51

Signifikanz	S.63
-funktion	S.63
Skolemisierung	S.23
Substitution	S.43
Tautologie	S.44
Theorie(resolution)	S.46
Tiefenprädikat	S. 3
Term	S.20
Transformation	
Oberflächen- in Tiefenprädikate	S. 3
Tiefen- in Oberflächenprädikate	S.57
Unifikation	S.43
Unifikationsalgorithmus	S.43
Unifikationstheorem	S.43
Unifikator	S.43
allgemeinster	S.43
Unschärfe	S. 1
unscharfe Mengen	S.63
Variable	S.20
Variationsmenge	S. 4
Verband	S.18
vollständig (semantischer Baum)	S.39
Vollständigkeit (Kalkül)	S.47
Wahrheitswert	S. 7
Widerlegungsbeweis	S.46
Widerlegungsvollständigkeit	S.48
Widerspruchsknoten	S.40

## Anhang B: Benutzte Schreibweisen und Abkürzungen

$\forall$	für alle	S. 7
$\exists$	es existiert	S. 7
$\exists_1$	es existiert genau ein	S. 12
$\wedge$	und (Konjunktion)	S. 7
$\vee$	oder (Disjunktion)	S. 7
$\Rightarrow$	impliziert	S. 7
$\Leftrightarrow$	äquivalent	S. 7
$\neg$	nicht	S. 7
$=$	Äquivalenz von Formeln	S. 22
$\oplus$	disjunktives oder spezielle Vektorsumme	S. 26 S. 60
$\emptyset$	leere Menge	S. 7
$\cup$	Mengenvereinigung	S. 7
$\cap$	Schnitt von Mengen	S. 7
$\in$	ist Element von	S. 7
$\notin$	ist nicht Element von	S. 7
$\subseteq$	ist Teilmenge von	S. 7
$\subset$	ist echte Teilmenge von	S. 7
$\models$	erfüllt	S. 11
$  $	Kardinalität, Stelligkeit	S. 7
$\Vdash$	Erfüllungsrelation	S. 22
$\vdash$	syntaktischer Ableitungsoperator	S. 46
$\models$	semantischer Folgerungsoperator	S. 22
$\varepsilon$	leere Substitution	S. 43
<b>f</b>	falsch	S. 7
<b>false</b>	Formel, die unter jeder Interpretation den Wahrheitswert <b>f</b> liefert	S. 22
$\mathcal{I}$	Interpretation	S. 22
<b>max</b>	Maximumfunktion	S. 65
<b>MEP()</b>	maximale erfüllende Partitionierung	S. 17
<b>mgu</b>	allgemeinster Unifikator	S. 43
<b>min</b>	Minimumfunktion	S. 65
$\mathbb{N}^+$	Menge der natürlichen Zahlen (ohne die Null)	S. 59
$\Omega()$	Universum, Variationsmenge	S.10,20
$\mathcal{P}()$	Potenzmenge	S. 7
$\Pi$	Produkt	S. 7

PK1	Prädikatenkalkül erster Stufe	S. 1
PV1	Prädikatenkalkül erster Stufe mit über einer Variationsmenge indizierten Prädikaten	S. 7
PV2	Erweiterung des PV1	S. 65
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	S. 45
$\mathbb{R}^2$	Menge der reellen Zahlenpaare, Koordinaten im zweidimensionalen Raum	S. 4
$\Sigma$	Summe	S. 7
<b>t</b>	wahr	S. 7
<b>true</b>	Formel, die unter jeder Interpretation den Wahrheitswert <b>t</b> liefert	S. 22
$\mathbb{Z}^+$	Menge der positiven ganzen Zahlen	S. 7

## Anhang C: Literatur

- [Chang & Lee 71] Lee, R.C.T./ Chang, C.L., Some properties of fuzzy logic, in: Inform. Contr. 19, 5 (Dez. 1971), S. 417-431
- [Chang & Lee 73] Chang, C.L./ Lee, R.C.T., Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving, Academic Press, New York 1973
- [Charniak & McDermott 85] Charniak, E./ McDermott, D., Introduction to artificial intelligence, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts 1985
- [Davis & Putnam 60] Davis, M./ Putnam, H., A Computing procedure for quantification theory, in: Journal of the ACM 7 (1960), S. 201-205
- [Dubois & Prade 80] Dubois, D./ Prade, H., Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York 1980
- [Herbrand 30] Herbrand, J., Recherches sur la theorie de la demonstration, Travaux de la Società des Sciences de Varsoria, No. 33, 1930
- [Hofstadter 85] Hofstadter, Douglas R., Gödel, Escher, Bach: ein endloses geflochtenes Band, Klett-Cotta, Stuttgart 1985
- [Jeffreys 61] Jeffreys, H., Theory of Probability, Oxford University Press, London 1961
- [Kaufmann 75] Kaufmann, A., Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets, Vol. I, Academic Press, New York 1975
- [Lee 72] Lee, R.C.T., Fuzzy logic and the resolution principle, in: Journal of the ACM Vol. 19, No. 1 (Jan. 1972), S. 109-119
- [McCarthy & Hayes 68] McCarthy, J./ Hayes, P.J., Some philosophical problems from the standpoint of artificial intelligence, in: Machine Intelligence 4, B. Meltzer/ D. Michie (Hrsg.), American Elsevier, New York 1968, S. 463-502
- [Nilsson 71] Nilsson, N.J., Problem Solving Methods in Artificial Intelligence, McGraw-Hill, New York 1971
- [Rich 83] Rich, E., Artificial Intelligence, McGraw-Hill, New York 1983
- [Robinson 65] Robinson, J.A., A machine-oriented logic based on the resolution principle, in: Journal of the ACM 12 (1965), S. 23-41
- [Stickel 85] Stickel, Mark E., Automated deduction by theory resolution, in: Journal of Automated Reasoning 1 (1985), S. 333-355
- [Zadeh 65] Zadeh, L.A., Fuzzy sets, in: Inform. Contr. 8 (1965), S. 338-353
- [Zadeh 68] Zadeh, L.A., Fuzzy algorithms, in: Inform. Contr. 12 (1968), S. 94-102

